ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

NRD
(Nucleo di Ricerca
in Didattica della Matematica)

La matematica e la sua didattica

Anno 32, n. 1, 2024

Rivista di ricerca in didattica della matematica

Numero Speciale:

Psicologia e Didattica della matematica: creatività, immaginazione e sviluppo del pensiero matematico

Guest Editor:
Antonella Montone

ISSN 1120-9968 - Periodico semestrale - n. 1 - Aprile 2024

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

NRD
(Nucleo di Ricerca
in Didattica della Matematica)

La matematica e la sua didattica

Anno 32, n. 1, 2024

Rivista di ricerca in
didattica della matematica

Numero Speciale:

Psicologia e Didattica della matematica: creatività, immaginazione e sviluppo del pensiero matematico

Guest Editor:
Antonella Montone

ISSN 1120-9968 - Periodico semestrale - n. 1 - Aprile 2024

In copertina:
Logo dell'Università di Bologna, concesso alla rivista *La matematica e la sua didattica* nell'anno 2000 (anno 14° dalla fondazione della rivista).
Logo del NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica) fondato nel 1984, attivo presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna.

Rivista di ricerca in didattica della matematica,
fondata nel 1987 da Bruno D'Amore,
direttore scientifico dal 1987 al 2021.

Gli Autori sono tenuti a inviare articoli già redatti secondo le regole della rivista, pena la non accettazione dell'articolo. Le norme redazionali si trovano su:

https://rsddm.dm.unibo.it/la-rivista-la-matematica-e-la-sua-didattica
http://www.incontriconlamatematica.org/ita/rivista.php

Gli articoli inviati alla rivista vengono sottoposti anonimi al giudizio di due esperti conosciuti solo ai direttori; in caso di valutazioni differenti, vengono mandati a un terzo esperto.

Los artículos presentados a la revista son enviados anónimos a dos árbitros expertos conocidos sólo a los directores; en caso de diferentes evaluaciones, se envían a un tercer arbitro experto.

The articles submitted to the journal are anonymously reviewed by two experts known only by the editors- in-chief; in case of different evaluations they will be sent to a third expert.

Proprietà Direzione Amministrazione Redazione:
NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica) del Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna

Periodico semestrale, autorizzazione del Tribunale di Bologna n. 6219 del 13/09/1993
ISSN 1120-9968

Scientificità riconosciuta ANVUR

La rivista *La matematica e la sua didattica* è semestrale ed esce nei mesi di aprile e ottobre.

La rivista è open access, si scarica gratuitamente dai seguenti siti:
https://rsddm.dm.unibo.it/la-rivista-la-matematica-e-la-sua-didattica
https://site.unibo.it/rsddm-dm/it
http://www.incontriconlamatematica.org/ita/rivista.php

La matematica e la sua didattica

NRD Università di Bologna, Italia.

Indice

Editoriale

Antonella Montone
Università degli Studi di Bari Aldo Moro

Durante i mesi di preparazione di questo numero speciale, e in questo ultimo periodo in particolare, abbiamo assistito a diverse iniziative promosse dalle Istituzioni Ministeriali che si occupano di politiche dell'educazione che riguardano direttamente la scuola: il dibattito intorno alla STEAM, l'investimento sulla scuola 'digitale', l'attivazione dei Percorsi Formativi 60CFU per la formazione e l'abilitazione all'insegnamento, le iniziative per affrontare il problema della dispersione scolastica, per citarne alcune. Queste nuove iniziative, pur essendo di natura diversa, dichiarano la necessità e l'intenzione di rilanciare il sistema scuola attraverso la definizione di nuove priorità, nuove sfide, che rispondono sia a esigenze politico-sociali, sia educative, e che coinvolgono direttamente anche l'insegnante.

Le parole-chiave che sembrano ricorrere più frequentemente sono: 'interdisciplinarità' 'sfida digitale', 'complessità', 'creatività', in un'ottica co-disciplinare che mette in campo le discipline 'scolastiche classiche' (tra cui la matematica) e discipline trasversali, come la psicologia. Accanto alla retorica che sottende alla comunicazione politica e all'avvio di queste iniziative, possiamo riconoscere problematiche note a chi opera nel mondo della scuola e alle quali già da diversi anni la ricerca in didattica della matematica dedica molta attenzione. Pertanto, l'innovazione didattica deve affrontare queste sfide educative richiedendo a insegnanti e ricercatori di ripensare e rinnovare la pratica didattica, approfondire lo studio dei processi di insegnamento-apprendimento, mettere in dialogo una molteplicità di discipline in ottica co-disciplinare per costruire strumenti di sviluppo dei processi di progettazione e analisi delle attività didattiche. Questo lo spirito che ha animato la preparazione di questo numero speciale: presentare ai lettori studi di ricerca in didattica della matematica in relazione con elementi significativi della psicologia non solo nel panorama della ricerca ma anche rispetto alle esigenze educative a cui la scuola deve far fronte.

I temi individuati sono molteplici: nel primo articolo Irakleous , Constantinos Christou e Pitta-Pantazi definiscono l'immaginazione matematica come elemento determinante per lo sviluppo della capacità trasformativa e dell'originalità; nel secondo articolo, Ligorio e Caccaimani presentano l'approccio cognitivista come processo sottostante l'apprendimento della matematica nell'innovazione contemporanea STEM; Gaidoschik, nel terzo articolo, discute la ‘discalculia’ come studio delle precondizioni dell’apprendimento della matematica; nel quarto articolo, Gelmi Marzia Garzetti e Asenova presentano uno modello che spiega il funzionamento cognitivo dei processi creativi in matematica e fornisce requisiti generali di task design; Bosco, nel quinto articolo, analizza il ruolo della psicometria per discutere le difficoltà associate all’insegnamento delle discipline STEM in corsi di studio non-STEM; infine, nel sesto articolo, Fiorentino e Ricciardiello presentano uno studio dei fattori non cognitivi, come l’ansia da insegnamento da parte dei docenti, in relazione con l’apprendimento degli studenti. Alcuni di questi temi vantano una tradizione di ricerca consolidata e una collocazione internazionale di rilievo, altri sono stati sviluppati più di recente ma stanno suscitando crescente interesse da parte della comunità di ricerca internazionale. Ciascuno dei sei contributi che compongono questo numero affronta prioritariamente aspetti collegati a uno dei temi sopra menzionati. In diversi casi però la riflessione sviluppata dagli autori coinvolge anche aspetti collegati agli altri temi, cosicché il lettore avrà l’occasione di vedere come un medesimo tema si declina a seconda dello specifico approccio che ciascun autore o team di autori adotta.

Agli autori abbiamo chiesto lo sforzo di fornire una riflessione che mettesse in relazione le ricerche sui temi in didattica della matematica con le ricerche di ambito psicologico con una chiave di lettura utile ai processi di insegnamento apprendimento della matematica. Inoltre, gli autori hanno coniugato nei loro contributi i requisiti di qualità di un articolo di ricerca in didattica della matematica e in psicologia con i requisiti di chiarezza e rilevanza per gli insegnanti, curando quindi in particolare:

a) la chiarezza e la compiutezza dell'articolo in sé;
b) le connessioni con le Indicazioni Nazionali per il Curriculum, le Linee guida, e con specifiche normative e raccomandazioni che riguardano il mondo della scuola;
c) le implicazioni didattiche.

Il processo di revisione degli articoli pubblicati in questo numero ha coinvolto oltre ai membri del comitato editoriale e agli autori, ricercatori di esperienza e grande sensibilità, il cui contributo è stato davvero prezioso e di fondamentale importanza per il buon esito di questa iniziativa.

Unpacking mathematical imagination

Spacchettando l’immaginazione matematica

Desempacando la imaginación matemática

Panayiota Irakleous, Constantinos Christou and Demetra Pitta-Pantazi
University of Cyprus, Cipro

Abstract. *The current study aims to empirically examine the structure of mathematical imagination. A mathematical imagination test was administered to 217 sixth-grade students from three urban and eight rural primary schools. Partial Least Squares structural equation modeling (PLS-SEM) was employed through Smart PLS in order to empirically examine the proposed model. The data analysis yields that the proposed model met all evaluation criteria of PLS-SEM and, hence, mathematical imagination can be described in terms of vividness, transformative abilities, and originality. Potential research directions are suggested, and theoretical, methodological, and practical implications are discussed.*

Keywords: mathematical imagination; vividness; transformative abilities; originality.

Sunto. *La presente ricerca ha l’obiettivo di esaminare empiricamente la struttura dell’immaginazione matematica. Un test di immaginazione matematica è stato somministrato a 217 studenti di grado sei di tre scuole primarie cittadine e di otto scuole primarie rurali. Per esaminare empiricamente il modello proposto è stata utilizzata la modellizzazione di equazioni strutturali basate sui minimi quadrati parziali (PLS-SEM) tramite Smart PLS. L'analisi dei dati ha dimostrato che il modello proposto soddisfa tutti i criteri di valutazione del PLS-SEM e, pertanto, l'immaginazione matematica può essere descritta in termini di vividezza, capacità di trasformazione e originalità. Vengono suggerite potenziali direzioni di ricerca e discusse le implicazioni teoriche, metodologiche e pratiche.*

Keywords: immaginazione matematica; vividezza; abilità trasformative; originalità.

Resumen. *La presente investigación tiene como objetivo examinar empíricamente la* *estructura de la imaginación matemática. Se administró una prueba de imaginación matemática a 217 estudiantes de sexto grado de tres escuelas primarias de la ciudad y ocho escuelas primarias de zonas rurales. Para examinar empíricamente el modelo propuesto, se utilizó una modelización de ecuaciones estructurales basado en los mínimos cuadrados parciales (PLS-SEM) a través de Smart PLS. El análisis de los datos demostró que el modelo propuesto cumple con todos los criterios de evaluación del PLS-SEM y, por tanto, la imaginación matemática puede describirse en términos de viveza, capacidad transformadora y originalidad. Se sugieren posibles direcciones de investigación y se discuten las implicaciones teóricas, metodológicas y prácticas.*

Parablas clave. imaginación matemática; viveza; habilidades transformadoras; originalidad.

1. Introduction

Imagination is delineated as a “vital element of mathematical thinking” (Pound & Lee, 2015, p. 5) and “the source of invention, novelty, and generativity” (Egan & Judson, 2016, p. 4). It “acts as the catalyst for all creative actions” (Eckhoff & Urbach, 2008, p. 180) and can be regarded as “the corner stone of creativity” (Christou, 2017, p. 14).

In detail, imagination is characterized as “the driving force behind human thought” (Ho et al., 2013, p. 68). Einstein maintains that imagination is more important than knowledge (Ho et al., 2013). It is a core component of knowledge construction (Lev-Zamir & Leikin, 2011) and transforms knowledge into new ideas (Seelig, 2012). In addition, imagination stimulates problem solving (Lindstrand, 2010). Imagination helps children become creative thinkers and solve difficult problems in new and innovative ways (Eckhoff & Urbach, 2008). It enables learners to unlock and explore mathematical ideas (Jagals & van der Walt, 2018). Moreover, in the early school years, imagination has been linked to children’s more sophisticated cognitive abilities and improved ability to control their emotions (Smith & Mathur, 2009).

Thus, several scholars point to the need to nurture imagination through education. According to Wu and Albanese (2013), society should examine and implement various approaches to allow education to return to imagination, which is the source and destination of knowledge. Imagination should be developed at any time and in all curriculum areas to enrich students’ learning more effectively (Egan & Judson, 2016). If imagination is promoted it is possible that we can all become more creative than we were as children (Eckhoff & Urbach, 2008). Further, engaging children in imaginative activities can improve their enjoyment and learning (Smith & Mathur, 2009).

Notwithstanding the acknowledgment of the importance of imagination for student mathematical learning, the research community has not shed light on imagination through empirical studies (Egan, 2015). It is notable that compared to research on creativity, literature on imagination is less advanced because of vague research questions (Ren et al., 2012). In addition, the definition of imagination remains vague (Ho et al., 2013), given that the field still lacks established theoretical frameworks on imagination (Abrahamson, 2006; Dziedziewicz & Karwowski, 2015; Egan, 1992). The present study seeks to empirically examine the structure of imagination in the domain of mathematics.

1.1. Theoretical perspectives

Imagination is a fuzzy concept (Egan, 1992; van Alphen, 2011), as it can refer to different things (Macknight, 2009). For instance, Seelig (2012) defines imagination as one's ability to create something new. Lothane (2007) asserts that imagination is the basic ability to imagine, visualize, represent all that is experienced through either an image or a word. In addition, according to Pelaprat and Cole (2011), imagination is the process that makes it possible for an individual to emerge and, for the world to come into view. Ho et al. (2013) conceptualize imagination as the ability to construct images in the brain that are further visualised to generate ideas that can solve problems.

The underpinning framework for conceptualizing imagination in the current study is the 'Conjunctional Model of Creative Imaging Ability' (Dziedziewicz & Karwowski, 2015). We purposively build on this theoretical model, because it is a broadly-acknowledged model of imagination derived from the area of psychology. Moreover, this model clearly specifies a set of constructs that can be easily adapted to the field of mathematics.

Based on the 'Conjunctional Model of Creative Imaging Ability', imagination is composed of three constructs: vividness, transformative abilities, and originality (Dziedziewicz & Karwowski, 2015). In this model, vividness is defined as the ability to create lucid and expressive images characterized by high complexity and level of detail. Transformative abilities are the abilities to transform created imageries and finally, originality is the ability to produce creative unique imageries.

In the present paper, we conceptualized and adapted all three constructs to the domain of mathematics. First, we conceive vividness as an aspect related to visualization. Visualization plays a key role not only in geometry learning (Presmeg, 1997), but in algebra as well, as it is described as a vehicle for effective problem solving in algebra (Yerushalmy et al., 1999). Therefore, we link vividness to both spatial and algebraic images. Spatial images are mental constructs which represent spatial information (Presmeg, 1986), while vividness of spatial images is the mental manipulation of spatial objects in various ways (Presmeg, 1997). Drawing on Presmeg's definition (1986) of spatial images, algebraic images can be defined as mental constructs representing algebraic information. Vividness of algebraic images refers to solving algebraic insight problems (Weisberg, 1995), which require students to pass through the four stages of the creative process (preparation, incubation, illumination, and verification) (Wallas, 1926) to reach a solution. According to Vale and Barbosa (2018), "seeing is related to having creative insights or aha moments" (p. 26).

In the stage of preparation, one is motivated to explore the problem situation and collect the necessary information to reach a solution (Yaftian, 2015). This phase involves intentional and conscious work (Liljedhal, 2013). When the solver is unable to reach a solution at a conscious level (Liljedhal, 2004, 2013), the incubation phase begins (Liljedhal, 2004, 2013; Smith, 1995; Yaftian, 2015). The solver may recognize this as an impasse (Savic, 2016), forget the problem for a time, and focus on other activities (Yaftian, 2015). The problem is internalized in the unconscious mind, which continues to process the information (Yaftian, 2015). This phase can last from several minutes to several years (Aldous, 2007; Liljedhal, 2004).

In the illumination phase, the sudden feeling of reaching the problem solution is often accompanied by a sub-vocal or exuberantly shouted Aha! (Webb et al., 2018) and hence is known as an Aha! or Eureka experience (Aldous, 2007; Liljedahl, 2004, 2005, 2013; Shen et al., 2013; Sriraman, 2009; Weisberg, 2015).

The fourth and final stage is called verification and involves "examining, improving, assessing, validating, writing out, controlling, persuading and lastly publishing the new idea" (Yaftian, 2015, p. 2522). The solution is checked and further refined (Aldous, 2007; Haylock, 1987). The solver makes the result precise, searches for possible extensions through utilization of the result and expresses the result in language (Sriraman, 2004). If the verification phase indicates that the solution is not suitable, then the solver may go back to an earlier stage of the problem solving process (Aldous, 2007).

Regarding transformative abilities, Dziedziewicz and Karwowski (2015) define them as the abilities to transform created imageries. In this paper, our definition in the field of mathematics was based on the concept of mathematization, which derives from the theory of realistic mathematics (Jupri & Drijvers, 2016). Mathematization consists of two distinct types: horizontal and vertical (Treffers, 1987). Horizontal mathematization focuses on the process leading from the world of life to the world of symbols, whereas vertical mathematization refers to the process of moving within the symbolic world (Freudenthal, 1991). This study focuses exclusively on horizontal mathematization due to the age of the participants, considering that younger children concretely experience algebra using concrete and visual objects (Lee et al., 2016).

Finally, given that originality is the ability to produce creative unique imageries (Dziedziewicz & Karwowski, 2015), in this paper we defined originality as the "statistical infrequency of the responses in relation to the peer group" (Haylock, 1997, p. 71) and the likelihood of holding new and unique ideas (Gil et al., 2007). In addition, we assume that originality can manifest in students' mathematical products related to vividness and products related to transformative abilities. First, the close relationship between originality and imagination is evident in the literature. For example, Egan (2005) states that imagination is the source of flexibility and originality of human thinking, while White (1990) argues that imagination is tightly connected to invention and originality. In addition, originality is evident in the questions individuals pose, the representations they use, and the justifications they offer (Sheffield, 2009).

The goal of the present paper is to empirically examine the structure of mathematical imagination. The research question of the study is the following: Do the data of the study confirm the structure of the proposed model about mathematical imagination?

2. Methods

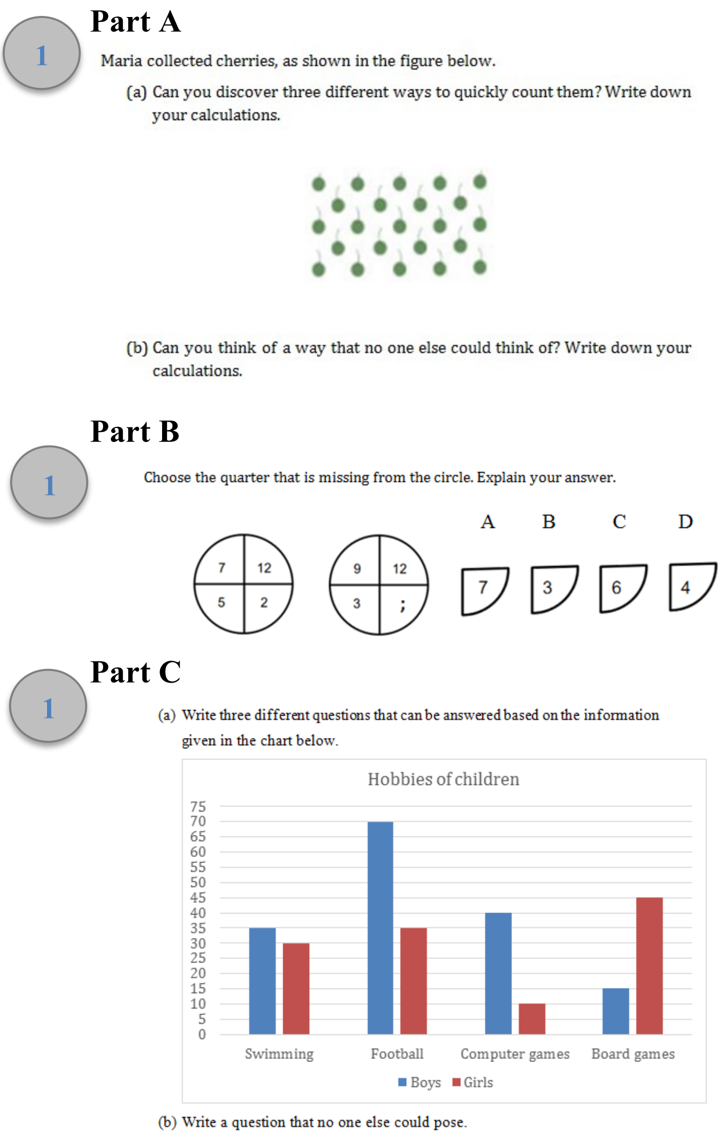
2.1. Participants

The participants were 217 sixth-grade primary school students (94 boys, 100 girls, and 23 students whose gender data was missing). Students were selected through convenient sampling and came from 3 urban and 8 rural schools. We focused on primary school students because the basics of creative thinking are developed at early ages (Leikin & Pitta-Pantazi, 2013). We also decided to examine 11-year-old students in the light of related literature. In fact, according to Hennesey (2007), second graders are creative and full of enthusiasm for learning whereas three years later they become passive learners without curiosity. In addition, research data show that 81% of fourth-graders in USA have positive attitudes towards mathematics while four years later only 35% of those students exhibit the same positive attitudes (U.S. Department of Education & National Center for Education Statistics, 2003). Therefore, it seems that the age of 11 years is of particular research interest.

2.2. Data Collection

A mathematical imagination test composed of three parts was administered to students. The tasks were designed based on the Conjunctional Model of Creative Ability (Dziedziewicz & Karwowski, 2015), according to which imagination is the conjunction of vividness, transformative abilities, and originality. Figure 1 presents an example task for each part of the test. Part A consists of three multiple-solution tasks measuring the vividness of spatial images (Levav-Waynberg & Leikin, 2012). Part B focuses on the vividness of algebraic images through three insight problems (Weisberg, 1995), since seeing is associated with having creative insights or 'Aha!' moments (Vale & Barbosa, 2018). Insight problems require students to pass through the four stages of the creative process (preparation, incubation, illumination, and verification) (Wallas, 1926) to reach a solution. Lastly, Part C includes three multiple-solution tasks examining transformative abilities and focusing on horizontal mathematization (Freudenthal, 1991).

Figure 1
Example tasks of the mathematical imagination test



2.3. Scoring Process

The assessment of the vividness of spatial images was based on students' flexibility scores in the three tasks of Part A (indicators: Flex_VSI_1, Flex_VSI_2, Flex_VSI_3), given that imagination is the source of flexibility of human thinking (Egan, 2005). Flexibility pertains to the generation of divergent strategies or solutions in a task (Leikin, 2009). Specifically, we tracked all students' answers in each task and classified them into categories and sub-categories by taking into account the diversity of their answers and their cognitive complexity. For instance, the categories established for the first task of part A were: 'counting', 'serial strategies', 'similar groups and remainder', 'subitizing'. The 'serial strategies' category was sub-divided into 9 sub-categories: vertical series, horizontal series, diagonal series, zig-zag pattern, combination of two 'serial strategies', combination of a 'serial strategy' with a 'similar group' strategy, horizontal groups, vertical groups (of 5 or 8), vertical groups (of 5 or 8) and then subtraction. Students' flexibility was evaluated using the scoring scheme in Table 1, which draws on the scoring scheme proposed by Leikin (2013).

Figure 2 presents an example of a student's answer given for the first task of part A. Specifically, 1 point was given for the first correct solution. The second solution was given 1 point, as it belongs to a category of answers different from the answer(s) given previously (serial strategy). The third solution was attributed 0.1 points respectively, as it belongs to the previous category of answers (serial strategy), but to a different sub-category (horizontal series). Finally, 1 point was given for the fourth solution, as it belongs to a category of answers different from the answer(s) given previously ('subitizing' category). Overall, the student's total score was 3.1 points.

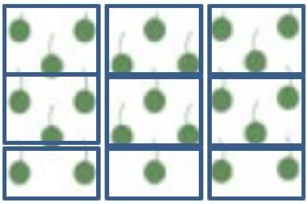
Table 1
Scoring scheme for evaluating flexibility

	Points per solution
For the first correct solution	1
which belongs to a category of answers different from the answer(s) given previously	1
which belongs to one of the previous categories of answers, but to a different sub-category	0.1
which belongs to one of the previously used categories and sub-categories of answers	0
Incorrect or no answer	0

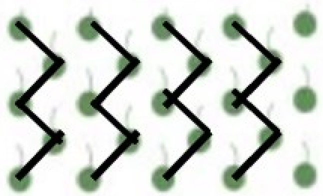
Figure 2

Indicative answers given to the first task of part A in the mathematical imagination test

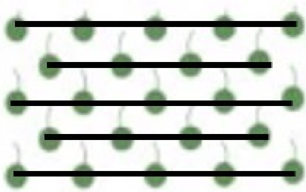
1st solution: 'Similar groups' category
Groups of three



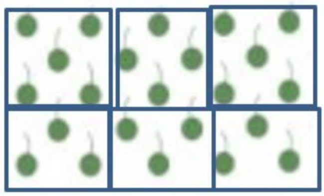
2nd solution: Serial strategies
Zig-zag pattern



3rd solution: Serial strategies
Horizontal series



4th solution: Subitizing
Dice pattern



Students' vividness of algebraic images was assessed on the basis of the correctness of their answers in the insight problems of Part B (indicators: VAI_1, VAI_2, VAI_3). In these insight problems, students should pass through the four stages of creative process (preparation, incubation, illumination, and verification) (Wallas, 1926) to reach the correct solution. In order to ascertain whether students had an 'Aha!' experience, while solving the three insight problems or not, we considered both the correctness of the answer and the justifications provided. It is worth mentioning that we purposefully used problems with solutions for which only one constraint needs to be relaxed, as those problems facilitate the examination of Aha! experiences (Danek & Wiley, 2017). Each correct answer and each correct justification were given 1 point respectively. Yet, half points were given to partially correct answers and justifications.

With respect to students' transformative abilities, for each student, we calculated flexibility scores in the three tasks of Part C (indicators: Flex_TA_1, Flex_TA_2, Flex_TA_3). In short, we established categories and sub-categories of students' responses. Students' responses in the first task of Part C were grouped into five categories: 1) obvious answers, 2) comparison of children, 3) sum of children, 4) fractions-percentages-ratios and 5) adding or extending assumptions. For instance, category 3 was analyzed into three sub-categories:

total number of students for a single activity, total number of boys or girls who prefer 2 or 3 activities, and total number of boys or girls or children. Flexibility scores for each task were calculated, according to the scoring scheme shown in Table 1.

For example, the questions posed by a student were as follows: How many boys like swimming? (obvious answers), How many girls like board games? (obvious answers), How many kids like football? (sum of children), How many more boys like football than girls? (comparison of children). In fact, 1 point was given for the first correct solution. The second solution was attributed 0 points, as it belongs to the previous category and sub-category of answers. Furthermore, 1 point was given to the third and fourth answer respectively because they both belong to a category of answers different from the answer(s) given previously. Overall, student's total score was 3 points.

Originality was assessed by taking under consideration students' responses in the multiple-solution tasks of the imagination test: the tasks of Part A on the vividness of spatial images (indicators: Or_VSI_1, Or_VSI_2, Or_VSI_3) and tasks of Part C on transformative abilities (Or_TA_1, Or_TA_2, Or_TA_3). While assessing originality, 'relative' and 'absolute' assessment of originality were combined (Leikin, 2009; 2013). Therefore, the assessment of originality was based on two criteria: statistical infrequency of the responses in relation to the peer group and cognitive complexity of the category to which answers belong. Statistical infrequency refers to the relative assessment of originality. First, we divided the frequency of each correct answer by the total number of correct answers provided by the students in the population under study to calculate the percentage frequency of that answer. Each correct answer was given a score between zero and one, according to a scoring rubric. The rarest correct solution received the highest score. As for cognitive complexity, it refers to absolute originality, which is based on the level of insight embedded in the solution process used by students (Ervynck, 1991). Each category of answers in each task was assigned to one of the following three levels of cognitive complexity: low level (0 points given), moderate level (1 point given), and high level (2 points given). Originality scores were calculated as the sum of the score allocated for the statistical infrequency of each response and the score allocated for its cognitive complexity.

The process of scoring the originality of students' answers presented in Figure 2 will be explained below. As mentioned before, the evaluation of originality was based on two criteria: statistical infrequency of the responses in relation to the peer group and cognitive complexity of the category to which answers belong. 'Groups of three' solution was given 0.2 points for statistical infrequency and 1 point for cognitive complexity. 'Zig zag pattern' solution was given 0.6 points for statistical infrequency and 1 point for cognitive complexity.

'Horizontal series' solution was given 0.2 points for statistical infrequency and 1 point for cognitive complexity. Finally, 'Dice pattern' solution was awarded 0.8 points for statistical infrequency and 2 points for cognitive complexity. In total, the student's originality score in that task was 6.8 points.

2.4. Reliability and Validity of the Instruments

As for the reliability of the instrument, internal consistency was found to be moderate to high (Cronbach α=.85) (Murphy & Davidshofer, 2001). The content validity of the instruments was measured as well, by using the Content Validity Index (CVI). Item-level CVI (I-CVI) refers to the content validity of individual items and scale-level CVI (S-CVI) reflects the content validity of the overall scale (Polit & Beck, 2006).

Regarding item-level CVI (I-CVI), we asked four experts (two mathematics primary teachers and two mathematics education scholars) to rate each item of the instruments in terms of its relevance to the underlying construct. Lynn (1986) suggested that the ideal number of experts is three to ten. The experts used a 4-point scale to avoid having a neutral and ambivalent midpoint (Lynn, 1986), where 1 indicated not relevant, 2 for somewhat relevant, 3 for quite relevant, and 4 for highly relevant (Davis, 1992). Then, for each item, the I-CVI was computed as the number of experts giving a rating of either 3 or 4 divided by the total number of experts (Polit & Beck, 2006). When experts are fewer than five, only an I-CVI of 1.00 is acceptable (Lynn, 1986). In other words, all experts must agree on the content validity of each item. All I-CVIs had values of 1.00, showing satisfactory content relevance.

The scale-level CVI (S-CVI) is "the proportion of items on an instrument that achieved a rating of 3 or 4 by the content experts'' (Beck & Gable, 2001, p. 209). An interpretation of the S-CVI definition is S-CVI/Ave. To calculate S-CVI/Ave, we computed the average of the I-CVIs in each scale. S-CVI/Ave values above .90 are regarded as satisfactory (Waltz et al., 2005). All S-CVIs had values of 1.00, illustrating acceptable content relevance.

2.5. Data Analysis

Descriptive statistics were calculated using the SPSS software package, while PLS-Structural Equation Modeling was conducted using the SmartPLS software. The purpose of PLS-SEM is to predict and explain the variance of a target construct (Sarstedt et al., 2017). Specifically, we examined a reflective measurement model. In a reflective measurement model, latent variables are measured using reflective (effect) indicators (Diamantopoulos & Siguaw, 2006).

This method was chosen for two reasons. First, when performing PLS-SEM, researchers benefit from the method's greater statistical power compared to factor-based SEM and, hence, the PLS-SEM method is more likely to identify an effect as significant when it is indeed (Sarstedt et al., 2017). Second, in contrast to factor-based SEM, when applying the PLS-SEM algorithm, the overall number of model parameters can be extremely high in relation to the sample size as long as each partial regression relationship draws on a sufficient number of observations (Sarstedt et al., 2017).

In order to evaluate this type of model, indicators' reliability, internal consistency reliability, convergent validity and discriminant validity should be considered (Sarstedt et al., 2017). Indicators' reliability is assessed using indicators' loadings. Loadings above .70 reveal that the indicator has an acceptable degree of reliability (Sarstedt et al., 2017). Composite reliability ρ_c and Cronbach α are used for examining the constructs' internal consistency. A value of .60 is considered as a threshold for both reliability ρ_c and Cronbach α (Hair et al., 2017). However, values above .95 imply that the items are almost identical. Convergent validity is examined by the average variance extracted (AVE) across all items associated with a particular construct. An acceptable benchmark of AVE is .50 or higher, meaning that, on average, the construct explains (more than) 50% of the variance of its items (Sarstedt et al., 2017). Finally, discriminant validity examination shows the extent to which a construct is empirically distinct from other constructs (Sarstedt et al., 2017). Discriminant validity is evaluated based on the Fornell-Larcker (1981) criterion and the cross-loadings (Chin, 1998), which is also known as 'item-level discriminant validity' (Henseler et al., 2015). The Fornell-Larcker (1981) criterion recommends that discriminant validity of a construct is achieved when the square root of the AVE is greater than the correlation between the constructs of the model. Regarding the item-level discriminant validity, each indicator loading should be greater than all of its cross-loadings (Chin, 1998).

3. Findings

This section begins with a descriptive analysis of the data obtained and then presents the results emerged from the evaluation of the reflective measurement model measuring imagination in mathematics. Table 2 presents the descriptive statistics of the mathematical imagination test.

All variables were converted to a scale of 0-1, to allow comparisons among students' scores in each variable. The mean scores were between .17 and .62. Originality in transformative abilities task 2 had the lowest mean score. This task asked students to pose various problems which could be answered by a given mathematical sentence of additive structure. The highest mean score was achieved in task 2 on vividness of algebraic images. This task called students to find the arithmetic values represented by symbols in a given addition.

Regarding skewness and kurtosis, in large samples it is appropriate to focus on the shape of the distribution instead of using formal inference tests (Tabachnick & Fidell, 2014). Because the standard errors for both skewness and kurtosis decrease with larger N, the null hypothesis is likely to be rejected with large samples when there are only minor deviations from normality. Based on Table 2, the absolute values of skewness indices were below one, except for originality in transformative abilities task 2. In addition, the absolute values of kurtosis indices of all variables were lower than 2 and in some cases close to zero. An exception was observed in the kurtosis index of originality in transformative abilities task 2. These indices recommend that the measure of mathematical imagination was normally distributed.

Table 2
Descriptive statistics of the mathematical imagination test

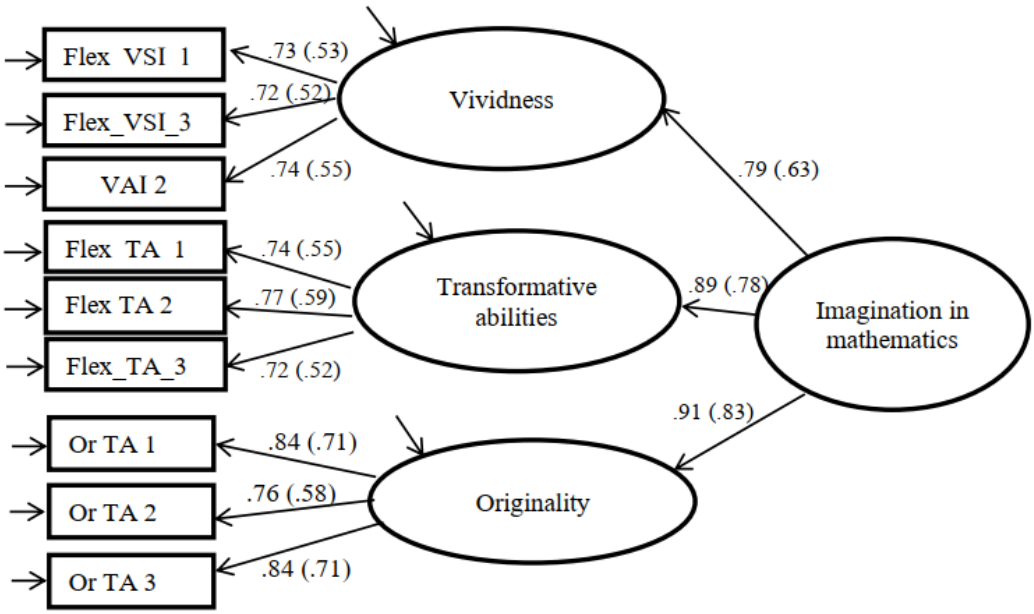
Indicators			Mean	Standard Deviation	Range	Skewness	Kurtosis
Vividness of Spatial Images (VSI)	Task 1	Flexibility	.60	.26	1	-.32	-.33
	Task 2	Flexibility	.59	.19	1	-.13	-.09
	Task 3	Flexibility	.48	.24	1	.06	-.95
Vividness of Algebraic Images (VAI)	Task 1	Correctness	.44	.40	1	.18	-1.48
	Task 2	Correctness	.62	.32	1	-.15	-1.12
	Task 3	Correctness	.51	.40	1	.03	-1.54
Transformative Abilities (TA)	Task 1	Flexibility	.45	.21	1	-.21	-.25
	Task 2	Flexibility	.26	.25	1	.48	-.82
	Task 3	Flexibility	.50	.25	1	-.22	-.33
Originality	VSI 1	Originality	.43	.23	1	-.06	-.61
	VSI 2	Originality	.27	.18	1	.98	1.51
	VSI 3	Originality	.35	.27	1	.47	-1.07
	TA 1	Originality	.34	.18	1	-.19	-.25
	TA 2	Originality	.17	.20	1	1.46	2.21
	TA 3	Originality	.34	.17	1	-.42	.39

Figure 3 shows model parameter estimates (indicators' loadings, constructs' loadings, and variance explained by the constructs). Overall, all indicators are suitable measures of the relevant constructs. As for indicators' reliability, all indicators with loadings below .70 were removed. All remaining indicators have positive, high, and significant loadings (above .70). Two spatial images' indicators and one algebraic images' indicators load strongly on the factor of vividness. In addition, all three transformative abilities' indicators exhibit satisfactory loadings on transformative abilities. Finally, only algebraic images' indicators have adequate loadings on the factor of originality, while spatial images' indicators have lower loadings.

Furthermore, the positive, high, and statistically significant loadings of the first-order factors, namely vividness (λ=.79, R^2=.63), transformative abilities (λ=.89, R^2=.78) and originality (λ=.91, R^2=.83), indicated that these abilities constitute a second-order construct, that of mathematical imagination. Among the three abilities, the most reliable ability for measuring imagination in mathematics is originality, due to its higher loading.

Figure 3

The proposed model capturing imagination in mathematics



Note: The first number represents indicators' loadings and numbers in parentheses represent the items' variance explained by the constructs (R^2).

Table 3 summarizes the evaluation criteria outcomes (Composite reliability ρ_c, Cronbach α, AVE and Q^2). Regarding the constructs' internal consistency, composite reliability ρ_c and Cronbach α met the threshold of .60, except of Cronbach α of vividness which is slightly lower than .60. A possible interpretation is that two spatial images' indicators as well as one algebraic images' indicators load strongly on the factor of vividness. Further, all AVE values were above .50. Therefore, AVE values across all items associated with a particular construct provided evidence for the construct's convergent validity.

Discriminant validity is regarded as acceptable for all constructs of the model. Concerning the Fornell-Larcker (1981) criterion, the square roots of the AVE of all constructs were greater than the correlations between the constructs of the model. Table 4 illustrates the correlation coefficients of the three constructs of the mathematical imagination model. It is revealed that all correlations among the three constructs are positive and statistically significant. The correlation between vividness and transformative abilities and correlation between vividness and originality are moderate, while the correlation between originality and transformative abilities is considered as substantial (Best & Kahn, 2007, as cited in Wonu et al., 2018). Regarding the item-level discriminant validity, each indicator loading was greater than all of its cross-loadings.

Table 3
Evaluation criteria outcomes of the reflective measurement model defining imagination in mathematics

Criterion	Vividness	Transf. Abilities	Originality	Imagination
Composite Reliability ρ_c	.78	.79	.85	.87
Cronbach α	.57	.60	.74	.84
Average Variance Extracted (AVE)	.54	.56	.66	.75

Table 4
Correlations among the constructs of the mathematics imagination model

Construct	Vividness	Transformative Abilities	Originality
Vividness	1	.56*	.57*
Transformative Abilities	.56*	1	.73*
Originality	.57*	.73*	1

Note: *Statistically significant at α=.05

4. Discussion

Imagination is a complex construct (Egan, 1992; van Alphen, 2011) with a vague definition (Ho et al., 2013). At the same time, empirical studies revolving around imagination are scarce (Egan, 1992), despite the need raised by researchers to develop theoretical models that describe imagination (Abrahamson, 2006; Dziedziewicz & Karwowski, 2015; Egan, 1992). Therefore, aiming to bridge this gap, the present paper attempts to empirically investigate the construct of imagination in mathematics. To fulfill this goal, a proposed model was established, by adapting the Conjunctional Model of Creative Imaging Ability (Dziedziewicz & Karwowski, 2015) originating from psychology to the field of mathematics.

The data of the study empirically support the structure of the proposed model, since the proposed model meets the guidelines for evaluating of PLS-SEM results. In sum, the findings illustrate that mathematical imagination is a multidimensional construct comprising three abilities: vividness, transformative abilities and originality. Moreover, the study indicates that visualization does not relate only to geometry and trigonometry (Presmeg, 1997), but is important for algebra as well (Yerushalmy et al., 1999). Besides, it was found that only algebraic images' indicators have adequate loadings on the factor of originality, while spatial images' indicators have lower loadings. A possible interpretation is that children's originality in spatial images' tasks was influenced by another factor, such as their cognitive style (Blazhenkova et al., 2011). Finally, the high originality on imagination empirically corroborates the arguments that loading of originality is the most reliable index to measure creativity (Ervynck, 1991) and imagination is strongly related to invention and originality (White, 1990).

A range of methodological limitations can be identified in the present paper, which seem to pose fruitful directions for further exploration. First, keeping in mind that the study has only examined sixth-graders selected through convenient sampling, further studies focusing on randomly selected students of a broader age range are highly needed. What is also notable is that the study took place at a single point in time. Longitudinal studies can go a step further by investigating whether the structure of the proposed model remains fairly stable over time. Focusing on data analysis, it is useful to explore whether simpler models can describe the structure of imagination in mathematics, by collecting data from a larger sample. Kline (2013) asserts that the goal of structural equation modeling is to select a model that fits the data and is as simple as possible.

The contribution of the current paper is threefold. From a theoretical perspective, the study proposes and empirically examines a model for clarifying and gauging imagination in mathematics, considering the need of developing theoretical models on imagination (Abrahamson, 2006; Dziedziewicz & Karwowski, 2015; Egan, 1992). This model bridges the research of creativity and imagination (Jankowska & Karwowski, 2015). In sum, this study empirically confirmed that imagination is a multidimensional conceptual construct consisting of three abilities: vividness, transformative abilities, and originality.

On a methodological level, the study extends the pertinent literature by designing an instrument for assessing imagination in the field of mathematics. This instrument is theory-guided since its design is based on the components of the 'Conjunctional Model of Creative Imaging Ability'. In addition, the instrument is analytical because it clearly defines all three components of imagination. Finally, the instrument is considered suitable, because its structure was confirmed through empirical data. This instrument can be administered either for research or instructional purposes.

From a practical point of view, teacher education programs do not place particular emphasis on how to engage the imagination and also many teachers do not feel confident to fuel students' imagination (Egan & Judson, 2016). Therefore, the study can advance teachers' understanding of what mathematical imagination entails and can offer a tool for measuring imagination which, in turn, can aid them in monitoring and enhancing students' mathematical imagination.

References

Abrahamson, D. (2006). *The three M's: Imagination, embodiment, and mathematics*. Paper presented at the annual meeting of the Jean Piaget Society, June, 2006, Baltimore, MD.

Aldous, C.R. (2007). Creativity, problem solving and innovative science: Insights from history, cognitive psychology and neuroscience. *International Education Journal*, *8*(2), 176–186.

Beck, C.T., & Gable, R.K. (2001). Ensuring content validity: An illustration of the process. *Journal of Nursing Measurement*, *9*(2), 201–215. https://doi:10.1891/1061-3749.9.2.201

Blazhenkova, O., Becker, M., & Kozhevnikov, M. (2011). Object–spatial imagery and verbal cognitive styles in children and adolescents: Developmental trajectories in relation to ability. *Learning and Individual Differences*, *21*(3), 281–287. https://doi:10.1016/j.lindif.2010.11.012

Chin, W.W. (1998). The partial least squares approach for structural equation modeling. In G.A. Macoulides (Ed.), *Modern methods for business research* (pp. 295–336). Lawrence Erlbaum Associates.

Christou, C. (2017). Creativity and imagination in mathematics. In D. Pitta-Pantazi (Ed.), *Proceedings of the 10th International Conference of Mathematical Creativity and Giftedness* (pp. 17–24). Nicosia, Cyprus: Department of Education, University of Cyprus.

Danek, A.., & Wiley, J. (2017). What about false insights? Deconstructing the Aha! experience along its multiple dimensions for correct and incorrect solutions separately. *Frontiers in Psychology*, *7*(2077). https://doi:10.3389/fpsyg.2016.02077

Davis, L.L. (1992). Instrument review: Getting the most from your panel of experts. *Applied Nursing Research*, *5*(4), 194–197. https://doi:10.1016/S0897-1897(05)80008-4

Diamantopoulos, A., & Siguaw, J.A. (2006). Formative versus reflective indicators in organizational measure development: A comparison and empirical illustration. *British Journal of Management*, *17*(4), 263–282. https://doi:10.1111/j.1467-8551.2006.00500.x

Dziedziewicz, D., & Karwowski, M. (2015). Development of children's creative visual imagination: A theoretical model and enhancement programmes, *Education 3–13*, *43*(4), 382–392. https://doi:10.1080/03004279.2015.1020646

Eckhoff, A., & Urbach, J. (2008). Understanding imaginative thinking during childhood: Sociocultural conceptions of creativity and imaginative thought. *Early Childhood Education Journal*, *36*(2), 179–185. https://doi: 10643-008-0261-4

Egan, K. (1992). *Imagination in teaching and learning: Ages 8 to 15*. Routledge.

Egan, K. (2005). *An imaginative approach to teaching*. Jossey-Bass.

Egan, K. (2015). Preface to the first edition. In K. Egan, G. Juddon, & K. Madej (Eds.). *Engaging imagination and developing creativity in education* (pp. ix-x). Cambridge Scholars Publishing.

Egan, K., & Judson, J. (2016). *Imagination and the engaged learner: Cognitive tools for the classroom*. Teachers College Press.

Ervynck, G. (1991). Mathematical creativity. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 42–53). Kluwer.

Fornell, C. G., & Larcker, D.F. (1981). Evaluating structural equation models with unobservable variables and measurement error. *Journal of Marketing Research*, *18*(1), 39–50.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*. Springer Science & Business Media.

Gil, E., Ben-Zvi, D., & Apel, N. (2007). What is hidden beyond the data? Helping young students to reason and argue about some wider universe. In D. Pratt & J. Ainley (Eds.), *Proceedings of the Fifth International Research Forum on Statistical Reasoning, Thinking and Literacy: Reasoning about Statistical Inference: Innovative Ways of Connecting Chance and Data* (pp. 1–26). University of Warwick. Retrieved from http://srtl.stat.auckland.ac.nz/srtl5/presentations

Hair, J.F., Hult, G.T.M., Ringle, C.M., & Sarstedt, M. (2017). *A primer on partial least squares structural equation modeling* (PLS-SEM) (2nd ed.). Sage.

Haylock, D.W. (1987). A framework for assessing mathematical creativity in school children. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(1), 59–74.

Haylock, D.W. (1997). Recognizing mathematical creativity in school children. *ZDM – Mathematics Education*, *29*(3), 68–74.

Hennesey, B.A. (2007). Creativity and motivation in the classroom: A social psychology and multi-cultural perspective. In A.G. Tan (Ed.), *Creativity: A handbook for teachers* (pp. 27–45). World Scientific.

Henseler, J., Ringle, C.M., & Sarstedt, M. (2015). A new criterion for assessing discriminant validity in variance-based structural equation modeling. *Journal of the Academy of Marketing Science*, *43*(1), 115–135. https://doi:10.1007/s11747-014-0403-8

Ho, H.C., Wang, C.C., & Cheng, Y.Y. (2013). Analysis of the scientific imagination process. *Thinking Skills and Creativity*, *10*, 68–78. https://doi:10.1016/j.tsc.2013.04.003

Jagals, D., & van der Walt, M. (2018). Metacognitive awareness and visualisation in the imagination: The case of the invisible circles. *Pythagoras*, *39*(1), 1–10. https://doi:10.4102/pythagoras.v39i1.396

Jankowska, D.M., & Karwowski, M. (2015). Measuring creative imagery abilities. *Frontiers in Psychology*, *6*, 1591. https://doi:10.3389/fpsyg.2015.01591

Jupri, A., & Drijvers, P.H.M. (2016). Student difficulties in mathematizing word problems in algebra. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *12*(9), 2481–2502. https://doi:10.12973/eurasia.2016.1299a

Kline, R. B. (2013). Exploratory and confirmatory factor analysis. In Y. Petscher & C. Schatschneider (Eds.), *Applied quantitative analysis in the social sciences* (pp. 171–207). Routledge.

Lee, J., Collins, D., & Melton, J. (2016). What does algebra look like in early childhood? *Childhood Education*, *92*(4), 305–310. https://doi:10.1080/00094056.2016.1208009

Leikin, R. (2009). Bridging research and theory in mathematics education with research and theory in creativity and giftedness. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 385–411). Sense Publisher.

Leikin, R. (2013). Evaluating mathematical creativity: The interplay between multiplicity and insight. *Psychological Test and Assessment Modeling*, *55*(4), 385–400.

Leikin, R., & Pitta-Pantazi, D. (2013). Creativity and mathematics education: The state of the art. *ZDM–Mathematics Education, 45*(2), 159–166. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0459-1

Levav-Waynberg, A., & Leikin, R. (2012). The role of multiple solution tasks in developing knowledge and creativity in geometry. *Journal of Mathematical Behavior*, *31*(1), 73–90. https://doi:10.1016/j.jmathb.2011.11.001

Lev-Zamir, H., & Leikin, R. (2011). Creative mathematics teaching in the eye of the beholder: Focusing on teachers' conceptions. *Research in Mathematics Education*, *13*(1), 17–32. https://doi:10.1080/14794802.2011.550715

Liljedahl, P. (2004). *The Aha! experience: Mathematical contexts, pedagogical implications*, Unpublished doctoral dissertation, Simon Fraser University, Burnaby, British Columbia, Canada.

Liljedahl, P. (2005). Mathematical discovery and affect: The effect of Aha! experiences on undergraduate mathematics students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *36*(2–3), 219–234. https://doi:10.1080/00207390412331316997

Liljedahl, P. (2013). Illumination: An affective experience? *ZDM–The International Journal on Mathematics Education*, *45*(2), 253–265. https://doi:10.1007/s11858-012-0473-3

Lindstrand, J. (2010). *Educating the imagination: Fostering compassionate empathy through art and media*, Master's thesis, McGill University, Canada.

Lothane, Z. (2007). Imagination as reciprocal process and its role in the psychoanalytic situation. *International Forum of Psychoanalysis*, *16*(3), 152–163. https://doi:10.1080/08037060701278636

Lynn, M.R. (1986). Determination and quantification of content validity. *Nursing Research*, *35*(6), 382–385. https://doi:10.1097/00006199-198611000-00017

Macknight, V.S. (2009). *Teaching imagination* (PhD thesis, The University of Melbourne). Retrieved from http://hdl.handle.net/11343/35286

Murphy, K. R., & Davidshofer, C.O. (2001). *Psychological testing principles and applications* (5th ed.). Prentice Hall.

Pelaprat, E., & Cole, M. (2011). "Minding the gap": Imagination, creativity and human cognition. *Integrative Psychological and Behavioral Science*, *45*(4), 397–418. https://doi:10.1007/s12124-011-9176-5

Polit, D.F., & Beck, C.T. (2006). The content validity index: are you sure you know what's being reported? Critique and recommendations. *Research in Nursing & Health*, *29*(5), 489–497. https://doi:10.1002/nur.20147

Pound, L., & Lee, T. (2015). *Teaching mathematics creatively*. Routledge.

Presmeg, N.C. (1986). Visualisation in high school mathematics. *For the learning of mathematics*, *6*(3), 42–46.

Presmeg, N.C. (1997). Generalization using imagery in mathematics. In L.D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors and images* (pp. 299–312). Erlbaum.

Ren, F., Li, X., Zhang, H., & Wang, L. (2012). Progression of Chinese students' creative imagination from elementary through high school. *International Journal of Science Education*, *34*(13), 2043–2059. https://doi:10.1080/09500693.2012.709334

Sarstedt, M., Ringle, C.M., & Hair, J.F. (2017). Partial least squares structural equation modeling. In C. Homburg, M. Klarmann, & Vomber (Eds.), *Handbook of market research* (pp. 1–40). Springer International Publishing. https://doi:10.1007/978-3-319-05542-8_15-1

Savic, M. (2016). Mathematical problem-solving via Wallas' four stages of creativity: Implications for the undergraduate classroom. *The Mathematics Enthusiast*, *13*(3), 255–278. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1377

Seelig, T. (2012). *inGenius: A Crash course on creativity*. Harper One.

Sheffield, L.J. (2009). Developing mathematical creativity—Questions may be the answer. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 87–100). Sense Publishers.

Shen, W., Liu, C., Zhang, X., Zhao, X., Zhang, J., Yuan, Y., & Chen, Y. (2013). Right hemispheric dominance of creative insight: An event-related potential study. *Creativity Research Journal*, *25*(1), 48–58. https://doi:10.1080/10400419.2013.752195

Smith, S.M. (1995). Fixation, incubation, and insight in memory and creative thinking. In S.M. Smith, T.B. Ward, & R.A. Finke (Eds.), *The creative cognition approach* (pp. 135–156). MIT Press.

Smith, M., & Mathur, R. (2009). Children's imagination and fantasy: Implications for development, education, and classroom activities. *Research in the Schools*, *16*(1), 52–63.

Sriraman, B. (2004). The characteristics of mathematical creativity. *Mathematics Educator*, *14*(1), 19–34.

Sriraman, B. (2009). Aha! experiences. In B. Kerr (Ed.), *Encyclopedia of giftedness, creativity and talent* (Vol. 1, pp. 37–39). Sage Publications.

Tabachnick, B.G., & Fidell, L.S. (2014*), Using multivariate statistics: Pearson new international edition* (6th ed.). Pearson Education Limited.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics instruction - The Wiskobas project*. Kluwer Academic Publishers.

U.S. Department of Education, National Center for Education Statistics. (2003). *Comparative indicators of education in the United States and other G-8 countries: 2002* (NCES Publication No. 2003–26). Retrieved from https://nces.ed.gov/pubs2003/2003026.pdf

Vale, I., & Barbosa, A. (2018). Mathematical problems: The advantages of visual strategies. *Journal of the European Teacher Education Network*, *13*, 23–33.

van Alphen, P. (2011). Imagination as a transformative tool in primary school education. *RoSE - Research on Steiner Education*, *2*(2), 16–34.

Wallas, G. (1926). *The art of thought*. Jonathan Cape.

Waltz, C.F., Strickland, O.L., & Lenz, E.R. (2005). *Measurement in nursing and health research* (3rd ed.). Springer Publishing Co.

Webb, M. E., Little, D. R., & Cropper, S.J. (2018). Once more with feeling: Normative data for the aha experience in insight and noninsight problems. *Behavior Research Methods*, *50*(5), 2035–2056. https://doi:10.3758/s13428-017-0972-9

Weisberg, R.W. (1995). Prolegomena to theories of insight in problem solving: A taxonomy of problems. In R.J. Sternberg & J.E. Davidson (Eds.), *The nature of insight* (pp. 157–196). MIT Press.

Weisberg, R.W. (2015). Toward an integrated theory of insight in problem solving. *Thinking & Reasoning*, *21*(1), 5–39. https://doi:10.1080/13546783.2014.886625

White, A.R. (1990). *The language of imagination*. Blackwell.

Wonu, N., Victor-Edema, U.A., & Ndimele, S.C. (2018). Test of significance of correlation coefficient in science and educational research. *International Journal of Mathematics and Statistics Studies*, *9*(2), 53–68.

Wu, J.J., & Albanese, D.L. (2013). Imagination and creativity: Wellsprings and streams of education–The Taiwan experience. *Educational Psychology*, *33*(5), 561–581. https://doi:10.1080/01443410.2013.813689

Yaftian, N. (2015). The outlook of the mathematicians' creative processes. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *191*, 2519–2525. https://doi:10.1016/j.sbspro.2015.04.617

Yerushalmy, M., Sternberg, B., & Gilead, S. (1999). Visualization as a vehicle for meaningful problem solving in algebra. In O. Zaslavsky (Ed.) *Proceedings of the 23rd PME Conference* (Vol. 1., pp. 197–211). PME.

L’apporto della psicologia alla comprensione dell’apprendimento della matematica: dall'approccio cognitivista agli STEAM

The contribution of psychology to understanding mathematical learning: from the cognitivist approach to STEAM

El aporte de la psicología en la comprensión del aprendizaje de la matemática: del enfoque cognitivista a los STEAM

Maria Beatrice Ligorio[1] **e Stefano Cacciamani**[2]

[1]*Dipartimento di Scienze della formazione, psicologia, comunicazione*
Università di Bari, Italia
[2]*Dipartimento di Scienze Umane e Sociali*
Università della Valle d’Aosta, Italia

Sunto. *In questo elaborato si propone una disamina di come sono stati concepiti i processi sottostanti l’apprendimento della matematica a partire dall’approccio cognitivista fino al contemporaneo approccio STEAM. Si farà riferimento al ruolo della metacognizione e al contributo del socio-costruttivismo. Non manca qualche cenno al ruolo dei docenti e alla didattica della matematica. Lo scopo è mostrare come le teorie e le pratiche relative all’apprendimento della matematica si siano evolute nel tempo e possano oggi contribuire a ripensare la didattica in ambito STEAM.*

Parole chiave: cognitivismo; metacognizione; socio-costruttivismo; STEAM

Abstract. *This paper proposes an examination of how the processes underlying the learning of mathematics have been conceived starting from the cognitivist approach up to the contemporary STEAM approach. Reference will be made to the role of metacognition and to the contribution of socio-constructivism. There is also some mention of the role of teachers and the teaching of mathematics. The overall aim is to show how theories and practices concerning learning mathematics evolved in time.*

Keywords: cognitivism; metacognition; socio-constructivism; STEAM

Resumen. *Este artículo propone un examen de cómo se concibieron los procesos subyacentes al aprendizaje de la matemática desde el enfoque cognitivista hasta el enfoque STEAM contemporáneo. Se hará referencia al papel de la metacognición y al aporte del socioconstructivismo. También se hace mención al papel de los profesores y la didáctica de la matemática. El objetivo es mostrar cómo las teorías y prácticas relacionadas con el aprendizaje de la matemática han evolucionado a lo largo del tiempo y pueden hoy contribuir a repensar la didáctica en el ámbito STEAM.*

Parablas clave: cognitivismo; metacognición; socioconstructivismo; STEAM

1. La matematica per l'approccio cognitivista

La psicologia ha cominciato ad interessarsi in modo molto consistente ai processi di apprendimento della matematica a partire dall'approccio cognitivista. Tale prospettiva teorica si è inizialmente focalizzata in modo particolare sull'attività di problem solving. Una prima analisi in tal senso può essere rintracciata già nel lavoro di Pólya (1945) che scomponeva il ragionamento matematico in quattro fasi: a) comprendere il problema, b) sviluppare un piano, c) applicare il piano, d) rivedere il lavoro ed estendere il piano a future situazioni. Queste fasi sembrano ricalcare il processo scientifico tanto da rendere sempre più stringente il paragone tra apprendimento della matematica e ragionamento scientifico, così che molti modelli nati in quegli anni sembrano ispirarsi proprio a questa analogia. Per esempio, Newell et al. (1959) mettono a punto il *General Problem Solver*–un programma computerizzato creato per studiare il problem solving ed altri comportamenti adattivi. Grazie a questo programma di ricerca i due autori formulano una teoria del problem solving che identifica il punto di avvio del processo nella rappresentazione mentale della situazione come "spazio del problema" (Newell & Simon, 1972). Con questa formulazione si intende il set di strutture simboliche utili per definire l'obiettivo da raggiungere, selezionare ed integrare le informazioni rilevanti ed individuare le regole logiche di trasformazione che consentono la transizione dallo stato iniziale del problema verso la soluzione. Greeno (1978) propone un ulteriore modello teorico dell'attività di problem solving che individua due componenti: la rappresentazione cognitiva delle informazioni del problema (basata sulla conoscenza schematica) e la comprensione delle operazioni necessarie per la soluzione (basata sulla conoscenza procedurale). Analizzando questi aspetti, l'autore distingue tre tipi di problemi (di organizzazione, di induzione e di trasformazione) e per ognuno di essi rintraccia strategie specifiche. È facilmente intuibile come il moltiplicarsi dei tipi di problemi e di strategie di soluzione annesse renda estremamente complesso restituire un quadro sintetico ed esaustivo di come gli studenti imparano a risolvere problemi.

Riguardo ai tipi di problemi, sulla scia del lavoro di Pólya (1945), un’altra distinzione identifica da una parte i cosiddetti ‘problemi di routine’ (o ben definiti), per i quali si dispone di una procedura da applicare per la loro soluzione; dall’altra i ‘problemi non di routine’ (o mal definiti), la cui procedura di soluzione non è disponibile e si richiede, quindi, di applicare in modo creativo la conoscenza disponibile in nuove situazioni non familiari (Singh et al., 2018). Già Pólya (1945), come abbiamo visto, e poi Schoenfeld (1985) hanno suggerito alcune strategie generali per risolvere un problema. Entrambi gli autori si sono anche concentrati sulla descrizione diquelle che vengono definite ‘euristiche”, ovvero metodi per risolvere problemi che non garantiscono una soluzione ottimale, ma che è necessario utilizzare quando un metodo per giungere ad una soluzione ottimale non esiste o non è disponibile per chi sta affrontando il problema (Hjeij & Vilks, 2023). Sono euristiche–per citare esempi ancora tratti da Polya (1945) –il trovare analogie tra il problema che si sta cercando di risolvere ed un problema già risolto, oppure scomporre il problema e ricombinare in altro modo i suoi elementi o ancora rappresentare graficamente il problema. Un approccio di tipo euristico è particolarmente importante per promuovere una visione della matematica come disciplina in cui lo studente è posto in una situazione autentica di problem solving, in cui gioca un ruolo attivo e creativo nell’ideare nuove procedure di soluzione, non limitandosi ad applicare quelle trasmesse dall’insegnante.

Il ruolo giocato dalla creatività nella risoluzione di problemi è sviluppato ulteriormente da un interessante approccio denominato Creative Problem Solving (CPS). Le radici del CPS si trovano nel lavoro di Alex Osborne (1953), focalizzato sul come promuovere la creatività nel trovare soluzioni nuove ed utili per sviluppare opportunità di miglioramento in ogni situazione. Un importante contributo di sistematizzazione di tale approccio è stato offerto da Treffinger (1995) che ha proposto un modello di CPS, recentemente rivisto (Treffinger et al., 2023), basato su diverse componenti di gestione e di processo. Una prima componente di gestione, chiamata *Pianificare il tuo approccio*, si articola in due fasi: Valutare il compito, per decidere se è opportuno usare il CPS, e Progettare l’utilizzo delle componenti di processo del modello. Seguono le tre componenti di processo articolate in ulteriori fasi: Comprendere la sfida (con le fasi di Costruire opportunità, Esplorare i dati e Inquadrare i problemi), Generare Idee (con una sola fase con la stessa denominazione della componente), Preparare l’azione (con le fasi di Sviluppare soluzioni e Costruire l’accettazione delle soluzioni stesse, che include anche la pianificazione della loro valutazione). L’attenzione al tema della creatività in ambito matematico è stata anche recentemente riproposta da Leikin e Sriraman (2022) che, analizzando gli articoli di uno special issue sul tema, ne descrivono l’articolazione in diversi ambiti di ricerca. In un primo ambito ci sono contributi che introducono nuove concezioni del rapporto tra matematica e creatività, identificate da diverse prospettive teoriche, come ad esempio la funzione dell'incertezza come catalizzatore della creatività in matematica. Un secondo ambito riguarda la relazione tra creatività in matematica ed altre caratteristiche personali. Studi in questo ambito evidenziano ad esempio che la conoscenza in matematica e la 'mentalità matematica' (la convinzione incrementale che la matematica può essere appresa ed usata per generare nuove idee) influenzano l'immaginazione in matematica. Un terzo ambito riguarda la relazione tra creatività e compiti matematici ed evidenzia come l'attività di costruzione di modelli matematici e la loro generalizzazione si sono dimostrati efficaci nella didattica e nella ricerca di strumenti per la promozione della creatività matematica. Un quarto ambito, infine, riguarda lo studio dei processi creativi collaborativi con studi che puntano a promuovere la flessibilità strategica collettiva–definita dal numero di strategie usate in un gruppo–o modelli di problem solving creativo collaborativo da implementare.

Accanto a questi filoni di ricerca, sempre più forte si è fatta via via strada la consapevolezza che gli aspetti cognitivi non esauriscono la comprensione dei processi di problem solving. È a partire da tale consapevolezza che si afferma, a partire dalla metà degli anni '70 quell'area di ricerca che va sotto il nome di "metacognizione" (Flavell, 1971). Tale area si articola in due ambiti: la conoscenza metacognitiva–quello che si sa di sé stessi e dei propri processi cognitivi–e i processi di controllo, che hanno il compito di supervisionare l'azione dei processi cognitivi nel momento in cui si affronta un problema (Brown, 1980). La ricerca sulla metacognizione ha offerto la possibilità di promuovere, nell'apprendimento della matematica, un ruolo attivo dello studente in quanto consapevole delle proprie caratteristiche cognitive ed in grado, a fronte di un compito matematico, di individuare le migliori strategie, monitorare il loro utilizzo e valutarne l'efficacia.

In tempi più recenti è stata, inoltre, studiata una componente particolarmente rilevante in ambito matematico, ovvero le concezioni (o credenze) degli studenti relative alla natura della matematica stessa (Simons, 1996). Alcuni autori, ad esempio Lucangeli e Cornoldi (1997), considerano la metacognizione come parte della conoscenza metacognitiva; altri, ad esempio De Corte (1999), non la considerano come un processo a sé ma piuttosto come un aspetto annesso alla motivazione. La definizione proposta da Simons (1996), invece, si riferisce alle idee generali e alle "teorie personali" che i soggetti hanno relativamente alla natura della disciplina di studio, alla propria autostima e motivazione e alle attribuzioni circa i propri successi e fallimenti. In ogni caso, le credenze in matematica sono state ampiamente studiate mostrando la rilevanza della dimensione metacognitiva nel determinare il successo in questo ambito. Schoenfeld (1992), riguardo alle credenze epistemologiche sulla matematica, inoltre, ha evidenziato la convinzione degli studenti che essere competenti in matematica significa avere un metodo veloce per la soluzione dei problemi in modo da individuare la risposta giusta nel più breve tempo possibile. Questa credenza è spesso in linea con le modalità di insegnamento: i docenti richiedono, nella maggior parte dei casi, l'applicazione delle procedure in tempi rapidi. Di converso, gli studenti sembrano convinti che la matematica significhi sostanzialmente calcolo, che un problema va risolto in massimo cinque minuti e che l'obiettivo è cercare *la* risposta corretta (Spangler, 1992). E se un compagno arriva ad una soluzione diversa dalla propria allora occorre considerare la sua bravura in matematica, se considerato bravo allora bisogna accettare il suo risultato e rivedere la procedura adottata. Assumere come vere tali credenze da parte degli studenti comporta il rischio di perdere di vista l'importanza dei processi di analisi della situazione problematica e di ragionamento logico implicate nel problem solving. Anche gli insegnanti possono influenzare lo sviluppo di tali credenze a seconda delle modalità con cui presentano i contenuti, il tipo di compiti che propongono, i metodi e i criteri di valutazione (Heyder et al., 2020; Mason, 2003).

Accanto alle credenze relative alla disciplina un altro tipo di credenze che può influire sul successo in matematica riguarda quelle che il soggetto ha nei confronti di sé stesso, ed in particolare riguardo alla propria auto-efficacia. L'autoefficacia in ambito scolastico può essere definita come la convinzione di un individuo di poter raggiungere con successo un determinato livello in un compito (Bandura, 1997). Pajares e Kranzler (1995) hanno dimostrato che l'autoefficacia in matematica ha un effetto di influenza diretta in generale sull'avere risultati positivi in matematica e sulla risoluzione di problemi matematici in particolare. Akin e Kurbanoglu (2011) hanno rilevato che l'autoefficacia in matematica è correlata negativamente con l'ansia e con atteggiamenti negativi verso la matematica, mentre correla positivamente con atteggiamenti positivi nei confronti della disciplina.

Da queste riflessioni alla constatazione della più generale importanza della relazione tra emozioni e apprendimento (anche) della matematica, il passo è breve. Infatti, mentre imparano, gli studenti possono provare diverse emozioni– dalla noia all'eccitazione, dalla preoccupazione alla gratificazione e dall'esasperazione alla soddisfazione (Richards, 2022). Seppure le teorizzazioni sulla relazione tra apprendimento ed emozione risalgano a molto tempo fa–ne parlavano già i filosofi greci come Aristotele–la valutazione sistematica delle emozioni nei contesti educativi è cominciata negli anni '30, proprio in occasione dello sviluppo del primo questionario sull'ansia (Brown, 1938). Negli ultimi due decenni si è assistito a una crescita considerevole nell'indagine empirica sul ruolo delle emozioni nell'apprendimento passando da modelli basati sull'espressione facciale a quelli comportamentali, fino a quelli influenzati dalle neuroscienze (Camacho-Morles et al., 2021; Pekrun & Linnenbrink-Garcia, 2014; Tyng et al., 2017). Il vissuto emotivo è passato dall'avere una natura individuale ad una dimensione decisamente sociale, stabilendo così una relazione tra le emozioni provate e la didattica adottata–da quella tradizionale che implica uno studio individuale alla didattica socio-costruttivista per cui il lavoro di gruppo è imprescindibile (Crescenzo et al., 2023).

Ovviamente, ciascuna disciplina elicita emozioni specifiche. McLeod (1992), nel suo fondamentale articolo sull'insegnamento della matematica, aveva già evidenziato l'intima connessione tra cognizione, prestazione e emozione. Infatti, sosteneva che: "Se la ricerca sull'apprendimento e sull'istruzione vuole massimizzare il suo impatto su studenti e insegnanti, le questioni emotive devono occupare una posizione più centrale nella mente dei ricercatori" (McLeod, 1992, p. 575). Monito raccolto da molta della ricerca svolta negli anni successivi che potrebbe, a grandi linee, essere distinta come concentrata su due focus: la ricerca di connessioni causali tra costrutti emotivi e performance da un lato, e una maggiore intuizione e comprensione dell'atteggiamento negativo, così spesso riscontrato nell'apprendimento della matematica (Lewis, 2013).

Hannula (2002) individua nella categoria 'atteggiamento emotivo dello studente verso la matematica' quattro sottocategorie: 1) emozioni sperimentate durante le attività legate alla matematica; 2) emozioni associate automaticamente alla matematica; 3) valutazioni delle situazioni che ci si aspetta come conseguenza del fare matematica; e 4) valore degli obiettivi legati alla matematica nell'ambito degli obiettivi globali dello studente. Mentre uno studente è impegnato in un'attività matematica, continua inconsapevolmente a valutare la situazione rispetto ai propri obiettivi e questo genera una nuova emozione positiva particolarmente rilevante perché permette di procedere verso quegli obiettivi che procurano, anche loro, emozioni positive; mentre gli ostacoli che bloccano il progresso dell'apprendimento possono indurre rabbia, paura, tristezza o altre emozioni spiacevoli.

In generale, i risultati della ricerca mostrano un'associazione indiscutibile tra fiducia in sé stessi e risultati di apprendimento, sebbene si riconosca che la relazione è complessa e talvolta confusa (Mullis et al., 2004). Ovviamente, anche le emozioni negative, inclusi atteggiamenti e convinzioni avverse, impattano i risultati di apprendimento ma i loro effetti, in questo caso, sembrano avere conseguenze negative anche nella futura vita sociale e professionale (Evans, 2002).

Come si diventa bravi in matematica

Integrando gli studi sugli aspetti cognitivi e metacognitivi del processo di problem solving, alcuni autori hanno tracciato il profilo dell'esperto in matematica. Glaser (1985), ad esempio, ha sottolineato due aspetti: a) il rapido ricorso a schemi che organizzano la rappresentazione del problema e la scelta delle procedure per la soluzione; b) l'utilizzo di conoscenze metacognitive, ad esempio, la consapevolezza di cosa si sa e di cosa non si sa rispetto al problema, insieme ai processi di autoregolazione per il controllo della procedura di soluzione. Schoenfeld (1992), invece, individua quattro fattori rilevanti: a) la base di conoscenza che il soggetto possiede circa i problemi matematici; b) le strategie (o euristiche) che sa utilizzare; c) i processi di monitoraggio e di autoregolazione messe in atto a livello metacognitivo; d) le credenze circa la matematica, che possono favorire oppure ostacolare il processo di soluzione di problemi.

Collegando gli studi sulla metacognizione e con l'idea dell'esperto solutore di problemi, Lucangeli, Tressoldi e Cendron (1998) hanno messo a punto un modello per l'intervento didattico basato su cinque componenti:

1. *La comprensione del testo*. Nel testo di un problema matematico è possibile distinguere una struttura 'superficiale' che si riferisce ai termini linguistici attraverso cui viene espressa la relazione tra le variabili che sono presenti nella situazione problema, e una struttura 'profonda' relativa allo schema matematico che esprime la relazione tra le variabili indicate nel testo e le variabili da calcolare. Si osserva come modificando i termini linguistici della struttura 'superficiale' la comprensione della struttura profonda non è compromessa. Ad esempio, nel testo «Come regalo per i suoi 10 anni Paolo ha ricevuto 9 macchinine, ne regala 4 a suo fratello Andrea e ne smarrisce 2. Quanti gliene restano?» potremmo sostituire il termine 'macchinine' con qualsiasi altro termine indicante un oggetto senza modificare le relazioni tra i dati e la richiesta posta. È proprio questa la comprensione della struttura superficiale del problema; una condizione necessaria, anche se non sufficiente per poter procedere alla soluzione. Nel caso in cui, invece, non si comprendano i termini 'smarrisce' o 'restano', allora non saranno chiare neanche le implicazioni matematiche di tali termini rispetto alla struttura 'profonda' del problema.
2. *La rappresentazione*. Mette in evidenza le relazioni tra le informazioni fornite dal problema e l'incognita da individuare, costruendo quello che Mayer (2003) definisce un "modello della situazione". La costruzione della rappresentazione può essere favorita dall'uso di immagini, che costituiscono un formato più 'concreto' e manipolabile, particolarmente adatto per studenti più giovani; oppure di schemi che, invece, rappresentano un formato più

simbolico, adeguato per studenti più adulti che sanno già collegare lo stato finale richiesto (cosa devo trovare?) con lo stato iniziale (cosa so?) del problema. Tale capacità di rappresentazione risulta cruciale per la scelta della soluzione: una rappresentazione incompleta delle informazioni, infatti, può condurre ad una parziale o errata pianificazione della soluzione (Tani et al., 2007).

3. *La categorizzazione*. Permette di collocare il problema in una categoria più ampia di problemi accomunati dalla stessa 'struttura profonda' e che richiedono le medesime operazioni logiche per ottenere la soluzione (Passolunghi, 2003). Gli esperti non si lasciano fuorviare dalle etichette linguistiche presenti nel testo e sono in grado di individuare, a prescindere da esse, lo schema matematico di soluzione giusto per i problemi accomunati dalla stessa 'struttura profonda'. I meno esperti, invece, tendono ad assimilare tra di loro problemi che presentano la stessa situazione in termini di espressioni linguistiche (ad esempio, spesa, guadagno, ricavo) anche se richiedono strategie di soluzione diverse.
4. *La pianificazione*. Questa è la componente metacognitiva che riguarda la messa a punto di una strategia che permetta di individuare la sequenza giusta delle operazioni e dei calcoli. Anche in questo caso, i solutori esperti tendono a scegliere la strategia più lineare ed efficace per raggiungere la soluzione, mentre i meno esperti ricorrono spesso a strategie stereotipate o sbagliano nel definire l'ordine delle operazioni da compiere (Lucangeli & Passolunghi, 1995).
5. *Il monitoraggio e la valutazione*. Sono due processi di controllo metacognitivo, entrambi essenziali per raggiungere la soluzione del problema. Il monitoraggio è un controllo on-task, che avviene durante lo svolgersi del compito e presiede alla verifica in itinere della corretta applicazione della strategia pianificata e al controllo della sua efficacia. La sua importanza è fondamentale in quanto permette di controllare le strategie mentre sono messe in atto, rilevando eventuali errori e correggerli in corso d'opera. La valutazione è, invece un processo di controllo off-task, vale a dire che si realizza a compito concluso, per effettuare un bilancio dei punti di forza e delle criticità della strategia impiegata ed eventualmente migliorarla per un suo futuro utilizzo. Gli studenti in difficoltà con l'apprendimento della matematica spesso sono manchevoli proprio dei processi di monitoraggio e valutazione (Schoenfeld, 1985).

2. La matematica nell’approccio socio-costruttivista

Il cambiamento di prospettiva introdotto nello studio dei processi di apprendimento della matematica dall’approccio socio-costruttivista modifica la definizione stessa della natura della matematica: non più una disciplina basata su un corpus di fatti e procedure matematiche da memorizzare per essere recuperate ed applicate quando viene richiesto, ma un’attività nella quale una comunità di praticanti si impegna nella costruzione di modelli basati su assiomi o teoremi (matematica pura) o di modelli astratti del mondo reale (matematica applicata) (Schonfeld, 1992).

La matematica è, secondo molti autori (D’Amore et al., 2006), storicizzazione di pratiche consolidate attraverso la pratica:

> Ciò significa, tra le altre cose, che ciò che conosciamo e il modo con cui raggiungiamo la conoscenza sono da inquadrare non solo mediante *ciò* che facciamo ora e *come* lo facciamo, ma anche da un’intelligenza storica riposta in pratiche sociali, istituzioni, linguaggio, artefatti, libri, monumenti e così via. La conoscenza e il conoscere sono entrambi sostenuti da questa intelligenza storica che abbiamo ereditato dalle generazioni passate. (D’Amore et al., 2006; p. 18)

Gli strumenti matematici diventano, così, astrazioni, rappresentazioni e manipolazioni simboliche della realtà e, pertanto, imparare la matematica significa imparare a pensare matematicamente. Così come l’apprendimento di una seconda lingua implica entrare a far parte di una comunità di pensiero e linguaggio, anche la matematica implica la capacità di conoscere e capire segni, simboli e termini del linguaggio matematico (Sfard et al., 1998). Questo è meglio realizzato in situazioni problematiche dove gli studenti hanno l’opportunità di leggere, scrivere e discutere idee in cui l’uso del linguaggio matematico diventa saliente (Sfard, 2006).

Di conseguenza, gli studi di matrice socio-costruttivista nell’ambito dell’apprendimento della matematica si concentrano su tre aspetti principali, che offrono anche indicazioni utili per l’insegnamento: a) la caratterizzazione situata della conoscenza, b) la necessità di problemi autentici e c) l’importanza della dimensione sociale nell’apprendimento della matematica.

L’attenzione alla caratterizzazione ‘situata’ della conoscenza ha portato ad una serie di studi dedicati alla cosiddetta ‘matematica di strada’. Alcuni ricercatori (Nunes & Bryant, 1996; Nunes et al., 1993), ad esempio, hanno evidenziato che bambini di scuola primaria in Brasile sapevano affrontare problemi aritmetici abbastanza complicati in un contesto di compravendita, senza mai essere stati preparati con un training formale a scuola su questi temi. Questi bambini sviluppano efficienti ed accurate procedure matematiche per affrontare la vendita di frutta e dolci per strada; in altre parole, sanno definire il costo di un acquisto e sanno calcolare il resto senza conoscere le tabelline e senza tradurre in modo formale l’operazione della moltiplicazione. Infatti, quando agli stessi bambini venivano proposti i problemi aritmetici tipicamente scolastici, che richiedevano le stesse procedure di calcolo di quelli affrontati per strada, raggiungevano livelli di prestazione molto più bassi. A quanto pare la matematica ‘orale’ della strada consente di operare mentalmente con grandezze concrete, riferite ad oggetti reali che i bambini si trovano a maneggiare; mentre nella matematica scritta e formalizzata del contesto scolastico le cifre perdono la connessione con la realtà, diventano astratte ed inducono all’errore. A tal proposito, alcuni autori (Furuto, 2013) sottolineano la necessità di gettare un ponte tra la matematica accademica e la così detta “etnomatematica”, ovvero le esperienze quotidiane dei bambini con le procedure matematiche nella loro cultura di appartenenza, affinché i concetti e le procedure matematiche insegnate a scuola possano essere comprese più efficacemente.

Il secondo aspetto emergente dalla ricerca di matrice socio-costruttivista, collegato al precedente, riguarda il proporre problemi matematici ‘autentici’ per gli studenti, superando la visione di una matematica connessa soprattutto all’acquisizione di strategie di soluzione di problemi e alla loro generalizzazione. Classicamente, l’insegnamento delle strategie di risoluzione di problemi matematici a scuola propone situazioni ‘artificiali’ che non hanno a che fare con le situazioni della vita reale dei bambini, producendo così una ‘conoscenza inerte’, che difficilmente verrà trasferita ad altri contesti. Il socio-costruttivismo propone un radicale ripensamento riguardo al contesto che caratterizza l’attività di problem solving a scuola: gli studenti vanno coinvolti in situazioni problematiche reali, significative e sfidanti, partendo dalle loro intuizioni per arrivare a diverse soluzioni alternative (Bottge, 1999). Una proposta in tale direzione è rappresentata dal programma di ricerca denominato “Anchored Istruction” proposto da un gruppo di ricercatori denominato Cognition and Technology Group at Vanderbilt (1990) che ha sviluppato un vero e proprio curriculum intitolato “Le avventure di Jasper” in cui l’istruzione viene ancorata (vale a dire situata) in contesti problematici reali. Si tratta di 12 video che raccontano le avventure di un ragazzo che deve affrontare sfide contenti problemi la cui risoluzione richiede competenze matematiche (ad esempio prestare soccorso ad un’aquila ferita in una località remota, scegliendo il mezzo che consente di raggiungere il luogo più velocemente, tenendo conto della distanza e del carburante disponibile). Progettate per studenti a partire dal V anno di scuola primaria fino alla fine della scuola secondaria di primo grado, nella narrazione delle avventure compaiono i dati utili per la risoluzione del problema ma anche dati superflui; gli studenti imparano a riconoscere le informazioni utili ed inventare procedure per risolvere i problemi presentati nel video.

L’importanza della dimensione sociale nell’apprendimento della matematica è sempre più messa in evidenza dalla letteratura (Brown et al., 1989; Cobb, 1994; Greeno, 1989; Hannula, 2012; Resnick, 1989; Rogoff & Lave, 1984; Schoenfeld, 1989). Una traduzione operativa di tale prospettiva è rappresentata dall’idea che l’apprendimento della matematica possa essere organizzato a scuola in forma di “apprendistato cognitivo” (Collins et al, 1989), ovvero una modalità di lavoro in cui lo studente, proprio come avviene nell’apprendistato previsto per apprendere un lavoro manuale, apprenda secondo le seguenti fasi:

a) *Modeling*: inizialmente il maestro di bottega mostra all’allievo come si svolge l’attività; nel caso di un problema matematico, il docente/maestro modella le strategie per affrontare il compito;
b) *Coaching*: segue una fase in cui l’allievo affronta il compito sotto la supervisione dell’adulto, che fornisce suggerimenti e feedback in corso d’opera; l’obiettivo è far sì che l’allievo realizzi una prestazione efficace;
c) *Articolazione:* include le strategie che permettono allo studente di rendere espliciti i processi che ha utilizzato per affrontare il compito;
d) *Riflessione:* si confrontano i processi messi in atto dall’allievo con quelli dell’esperto o di uno studente più capace allo scopo di esaminarne le differenze;
e) *Esplorazione*: lo studente-novizio viene spinto a cercare strategie innovative per la soluzione del problema ed immaginare quali esiti potrebbero avere.

In questo modello diventa essenziale non solo che l’insegnante mostri le strategie e ne sostenga l’uso, ma che consenta agli studenti di risolvere i problemi in piccoli gruppi in modo da discutere sia le strategie da adottare che le convinzioni errate e fuorvianti circa la matematica che possono ostacolare la riuscita del compito e la formazione di risolutori costruttivi di problemi. Risulta, pertanto cruciale la dimensione della classe (D’Amore, 2005; Perry et al., 2006), sia nel suo determinare micro-contesti dentro la classe sia per le interconnessioni più ampie con quanto si colloca fuori dalla classe, ovvero a scuola, in famiglia, nel quartiere, in città e così via. Nel caso specifico dell’apprendimento della matematica, molto si è riflettuto in riferimento ai contesti introdotti nei compiti matematici e sull’uso degli esempi in classe, che dovrebbero rendere la matematica più facile e interessante ignorando spesso la complessità, la gamma e il grado di esperienza degli studenti e la loro intricata relazione con gli obiettivi e le credenze matematiche. Già Lave (1988) aveva dimostrato che il contesto specifico all‘interno del quale è situato un compito matematico è capace di determinare non solo la prestazione generale ma anche la scelta del procedimento matematico. Certo, per i docenti non è sempre facile tener conto di queste dimensioni ma una riflessione sistematica su questi aspetti anche da parte loro può essere utile a creare un clima di classe positivo e a potenziare il "contratto didattico" tra docenti e studenti (D'Amore et al., 2020).

3. La matematica e gli STEAM

In tempi più recenti si assiste all'affermarsi dell'acronimo STEAM, che in effetti è una integrazione del precedente STEM che si riferiva esclusivamente alle discipline considerate scientifiche; quindi scienza, tecnologia, ingegneria e matematica, tutte discipline considerate alla base dell'innovazione e della prosperità nazionale (Atkinson & Mayo, 2010). Il nuovo acronimo, con l'inserimento della A, sancisce l'aggiunta delle "Arti" tra le materie STEM. La ragione di tale cambiamento è duplice. Da un lato, si riconosce che le discipline STEAM hanno tutte una rilevanza economica cruciale; ovvero, sono tutte aree disciplinari che, si presume, hanno un impatto importante sul prodotto interno lordo (PIL) dei paesi sviluppati. D'altro canto, l'aggiunta delle arti può indicare il recupero di obiettivi e scopi educativi che vanno oltre la crescita economica: ad esempio, puntando all'inclusione sociale, alla partecipazione della comunità e ai programmi di sostenibilità (Colucci-Gray et al., 2019). In ogni caso, si tratta di un esplicito tentativo di puntare all'integrazione di diverse discipline utilizzando una strategia di reciproco potenziamento piuttosto che rimarcare confini, costringendo gli studenti ad una visione di apprendimento 'incapsulata' nelle materie (Engeström, 2012).

Nonostante questo, un sempre crescente numero di studenti fallisce a causa di una inadeguata conoscenza della matematica necessaria per comprendere le altre materie STEAM, innescando così una spirale che determina un numero insufficiente di laureati STEAM (Holton et al., 2009). La matematica pare sia ampiamente antipatica agli studenti di molti paesi (Thomson et al., 2016) e spesso è considerata difficile o noiosa (Moyer et al., 2018). Inoltre, avendo a disposizione una pletora di tecnologie moderne e date per scontate non è facile riconoscere l'importanza del saper fare di conto (Hansen, 2002). Di conseguenza, molti studenti, compresi quelli più capaci, scelgono di studiare materie matematicamente meno impegnative o di evitare del tutto discipline in cui ci sia della matematica (Wienk, 2017). L'attuale insegnamento della matematica sembra non ispirare gli studenti a proseguire gli studi in questa direzione e, quindi, impedisce a molti potenziali laureati di perseguire gli studi nelle aree STEAM rinunciando a carriere che sarebbero probabilmente più gratificanti e di maggiore valore per la società.

L'innovazione introdotta con gli STEAM riguarda anche una revisione radicale delle teorie cognitive tradizionali, in particolare in riferimento al modo con cui si considera il corpo. Non più semplice osservatore 'passivo' del cervello e necessario solo per l'esecuzione delle azioni motorie. L'approccio denominato "embodied cognition" suggerisce, infatti, che l'acquisizione di informazioni ha a suo fondamento sia la percezione che l'azione e che la cognizione è profondamente dipendente dalle caratteristiche del corpo fisico di un agente (Barsalou, 2008; Clark, 2008).

L'educazione matematica si occupa non solo di creare mezzi e metodi di insegnamento efficaci, ma anche di comprendere perché alcuni metodi sono efficaci e altri no, e di affrontare questioni più ampie sulla natura e lo sviluppo della conoscenza matematica. Porsi domande, concettualizzare problemi e costruire e sperimentare diverse strategie per indagarli, sono abilità fortemente influenzate dalla nostra concettualizzazione implicita o esplicita sulla natura del pensiero umano e sulla matematica stessa. Quando la matematica è concepita come un regno esterno di verità oggettive, da 'scoprire' attraverso l'applicazione del pensiero razionale, allora l'indagine dell'apprendimento della matematica si concentra su mappature, modelli e rappresentazioni interne accurate di entità e relazioni matematiche. Se, invece, la matematica è concepita come un prodotto dell'attività umana adattiva nel mondo, condivisa e resa significativa attraverso il linguaggio, ma basata in ultima analisi su esperienze biologiche e corporee uniche della nostra specie, allora l'educazione matematica deve adottare un approccio diverso. Dovrebbero emergere nuove pratiche di didattica della matematica, insegnamento in classe, progettazione del curriculum, ma anche di impostazione della ricerca scientifica che presentino la matematica come un'autentica attività basata sulla mente con tutte le sue peculiarità e bellezza incarnate (Núñez et al., 1999). Solo così si potrà rispondere alla richiesta di formare le cosiddette abilità del XXI secolo, le cui concettualizzazioni includono tipicamente creatività, competenza collaborativa, problem solving e pensiero critico. L'attenzione su questo tipo di abilità può essere collegata al rapido ritmo del cambiamento guidato dai progressi nelle tecnologie digitali (ad esempio, stampa 3D, intelligenza artificiale) con conseguenze di vasta portata per ogni aspetto della vita delle persone, nonché su alcune questioni internazionali (ad esempio, cambiamento climatico, sicurezza idrica e alimentare), le cui soluzioni richiederebbero una cooperazione internazionale. Ironia della sorte, questi sviluppi potrebbero essere guidati proprio dalle discipline STEAM dove creatività, collaborazione e pensiero critico sono fondamentali, a patto di valorizzare la matematica.

5. Conclusioni

Con questo contributo ci siamo posti l'obiettivo di evidenziare il nesso tra l'evoluzione delle teorie da una parte e delle pratiche didattiche dall'altra, relative alla didattica della matematica. Alla luce dell'analisi condotta emerge che la ricerca di matrice cognitivista ha identificato i processi cognitivi utili per una didattica della matematica che promuove la competenza di problem solving e il ruolo attivo dello studente. Successivamente l'approccio socio-costruttivista ha sottolineato l'importanza di progettare ambienti di apprendimento significativi in cui le competenze rilevanti per lo scenario sociale e culturale attuali possono essere promosse in modo situato, affrontando problemi autentici e rilevanti per il tempo presente e lavorando in contesti collaborativi. È, quindi, imperativo e tempestivo che la connessione tra le materie STEAM e le competenze del XXI secolo sia esplicitata e che sia riconosciuto il ruolo fondamentale della matematica a supporto dello sviluppo delle competenze auspicate.

Nello specifico della didattica della matematica, ci sono già diversi tentativi di progettare attività che si concentrano sul processo creativo, piuttosto che enfatizzare il risultato (Lavicza et al., 2018). L'arte come contesto per la risoluzione di problemi matematici può essere un fruttuoso punto di partenza, poiché include il pensiero creativo e la ricerca della propria strada (Burnard et al., 2016). Le attività creative possono aiutare gli studenti a riconoscere che fare matematica 'vera' *è* pensiero creativo, nel senso che la propria creatività può essere espressa anche attraverso la matematica. Le attività di problem solving possono sottolineare l'aspetto processuale della matematica ma se il problema è aperto e la sua risoluzione richiede collaborazione, allora la diversificazione dei punti degli studenti costituisce il vero punto di forza per raggiungere un livello di gruppo che sia maggiore della somma delle competenze dei singoli individui. Lo sviluppo di capacità collaborative di problem solving e il supporto degli studenti nella scoperta di connessioni inaspettate tra diversi aspetti di un fenomeno sono strumenti a sostegno del pensiero critico e creativo; inoltre, rappresentano obiettivi ambiziosi dell'educazione odierna, dove svolgono un ruolo di potenziamento anche gli strumenti tecnologici e i modelli di apprendimento in rete, che qui però non abbiamo lo spazio per commentare compiutamente (Cacciamani et al., 2012; Impedovo et al., 2012).

Riferimenti bibliografici

Akin, A., & Kurbanoglu, I.N. (2011). The relationships between math anxiety, math attitudes, and self-efficacy: A structural equation model. *Studia Psychologica*, *53*(3), 263.

Atkinson, R. D., & Mayo, M. (2010). *Refuelling the US innovation economy: Fresh approaches to science, technology, engineering and mathematics (STEM) education*. The Information Technology and Innovation Foundation.

Bandura, A. (1997). *Self-efficacy: The exercise of control.* Freeman.

Barsalou, L.W. (2008). Grounded cognition. *Annual Review, 59*(1), 617–645. http://dx.doi.org/10.1146/annurev.psych.59.103006.093639

Bottge, B.A. (1999). *Effects of Contextualized Math Instruction on Problem Solving of Average and Below- Average Achieving Students*. The Journal of Special Education, *33*(2), 81–92. https://doi.org/10.1177/002246699903300202

Brown, A.L. (1980). *Metacognitive Development and Reading*. In R.J. Spiro, B. Bruce, & W.F. Brewer (Eds.), *Theoretical Issues in Reading Comprehension* (pp. 453–79). Lawrence Erlbaum.

Brown, C.H. (1938). Emotional reactions before examinations: Results of a questionnaire. *Journal of Psychology, 5*, 11–26. https://psycnet.apa.org/doi/10.1080/00223980.1938.9917549

Brown, J.S., Collins, A., & Duguid, P. (1989). *Situated cognition and the culture of learning.* Educational Researcher, *18*(1), 32–42. https://doi.org/10.3102/0013189X018001032

Burnard, P., Mackinlay, E., & Powell, K. (2016) (Eds). *The Routledge International Handbook of Intercultural Arts Research*. Routledge.

Cacciamani, S., Cesareni, D., Martini, F., Ferrini, T., & Fujita, N. (2012). Influence of participation, facilitator styles, and metacognitive reflection on knowledge building in online university courses. *Computers & Education*, *58*(3), 874–884. http://dx.doi.org/10.1016/j.compedu.2011.10.019

Camacho-Morles, J., Slemp, G.R., Pekrun, R., Loderer, K., Hou, H., & Oades, L.G. (2021). Activity achievement emotions and academic performance: A meta-analysis. *Educational Psychology Review, 33*(3), 1051–1095. https://psycnet.apa.org/doi/10.1007/s10648-020-09585-3

Clark, A. (2008). *Supersizing the mind: Embodiment, action, and cognitive extension*. Oxford University Press.

Cobb, P. (Ed.). (1994). *Learning Mathematics*. Kluwer Academic.

Cognition and Technology Group at Vanderbilt (1990). Anchored instruction and its relationship to situated cognition. *Educational Researcher*, *19*(6), 2–10. https://doi.org/10.3102/0013189X019006002

Collins, A., Brown, J.S., & Newman, S. (1989). Cognitive apprenticeship: Teaching the craft of reading, writing, and mathematics. In L.B. Resnick (Ed.), *Knowing, learning, and instruction: Essays in honor of Robert Glaser* (pp. 453–494). Erlbaum. http://dx.doi.org/10.4324/9781315044408-14

Colucci-Gray, L., Burnard, P., Gray, D., & Cooke, C. (2019). A critical review of STEAM (science, technology, engineering, arts, and mathematics). *Oxford research encyclopedia of education*. Oxford University Press. http://dx.doi.org/10.1093/acrefore/9780190264093.013.398

Crescenzo, P., Ritella, G., Sansone, N., Bulut, S., Annese, S., & Ligorio, M.B. (2023). Students' Emotions in Socio-constructivist Approaches: Comparing Experiences at Different Italian School Levels. *Human Arenas*, 1–23. https://doi.org/10.1007/s42087-023-00371-5

D'Amore, B. (2005). Pratiche e metapratiche nell'attività matematica della classe intesa come società. *Alcuni elementi rilevanti della didattica della matematica interpretati in chiave sociologica. La matematica e la sua didattica, 19*(3), 325–336.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M.I., Marazzani, I., & Sarrazy, B. (2020). Gli effetti del contratto didattico in aula. *Uno strumento concreto per gli insegnanti di Matematica. Prefazione e postfazione di Guy Brousseau:* Pitagora.

D'Amore, B., Radford, L., & Bagni, G.T. (2006). Ostacoli epistemologici e prospettiva socio-culturale. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *29*(1), 12–39.

De Corte, E. (1999). On the road to transfer: An introduction. *International Journal of Educational Research*, *31*(7), 555–59.

Engeström, Y. (2012). Non scolae sed vitae discimus: Toward overcoming the encapsulation of school learning. In H. Daniels (Ed.), *An introduction to Vygotsky* (pp. 164–183). Routledge.

Evans, J. (2002). *Adults' mathematical thinking and emotions: A study of numerate practice* (Vol. 16). Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203434185

Flavell, J.H. (1971). First discussant's comments: What is memory development the development of? *Human Development, 14*(4)*,* 272–278. https://doi.org/10.1159/000271221

Furuto, L.H. (2013). Bridging policy and practice with ethnomathematics. *Journal of Mathematics & Culture*, *7*(1), 31–57.

Glaser, R. (1985). *The nature of Expertise. Occasional Paper No. 107*. National Center of Research in Vocational Education. Available at https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED261190.pdf

Greeno, J.G. (1978). A study of problem solving. In R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology* (Vol. 1, pp. 13–75). Erlbaum.

Greeno, J.G. (1989). For the study of mathematics epistemology. In R. Charles & E. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 23–31). National Council of Teachers of Mathematics.

Hannula, M.S. (2002). Attitude towards mathematics: Emotions, expectations and values. *Educational studies in Mathematics*, *49*(1), 25–46. https://doi.org/10.1023/A:1016048823497

Hannula, M.S. (2012). Exploring new dimensions of mathematics-related affect: Embodied and social theories. *Research in Mathematics Education*, *14*(2), 137–161. https://doi.org/10.1080/14794802.2012.694281

Hansen, V.L. (2002). Popularizing mathematics: From eight to infinity. In L.I. Tatsien (Ed.), *Proceedings of the international congress of mathematicians* (Vol. 3, pp. 885–888). Higher Education Press.

Heyder, A., Weidinger, A.F., Cimpian, A., & Steinmayr, R. (2020). Teachers' belief that math requires innate ability predicts lower intrinsic motivation among low-achieving students. *Learning and Instruction*, *65*(2), 101220. http://dx.doi.org/10.1016/j.learninstruc.2019.101220

Hjeij, M., & Vilks, A. (2023). A brief history of heuristics: how did research on heuristics evolve? *Humanities and Social Sciences Communications*, *10*(1), 1–15.

Holton, D., Muller, E., Oikkonen, J., Sanchez Valenzuela, O.A., & Zizhao, R. (2009). Some reasons for change in undergraduate mathematics enrolments. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 40*(1), 3–15. http://dx.doi.org/10.1080/00207390802597621

Impedovo, M.A., Ligorio, M.B., & Law, E.H. (2012). A method for the Analysis of Inter-action in an Online Learning Community. *Qwerty-Open and Interdisciplinary Journal of Technology, Culture and Education*, *7*(2), 39–59.

Lave, J. (1988). *Cognition in practice.* Cambridge University Press.

Lavicza, Z., Fenyvesi, K., Lieban, D., Park, H., Hohenwarter, M., Mantecon, J.D., & Prodromou, T. (2018). Mathematics learning through Arts, Technology and Robotics: multi-and transdiscpilinary STEAM approaches. In *EARCOME 8: 8th ICMI-East Asia Regional Conference on Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 28–29). National Taiwan Normal University.

Leikin, R., & Sriraman, B. (2022). Empirical research on creativity in mathematics (education): From the wastelands of psychology to the current state of the art. *ZDM–Mathematics Education, 54*(1), 1–17. http://dx.doi.org/10.1007/s11858-022-01340-y

Lewis, G. (2013). Emotion and disaffection with school mathematics. *Research in mathematics education*, *15*(1), 70–86. http://dx.doi.org/10.1080/14794802.2012.756636

Lucangeli, D. & Cornoldi, C. (1997). *Mathematics and metacognition: what is the nature of the relationship? Mathematical Cognition, 3*(2)*,* 121–139. https://doi.org/10.1080/135467997387443

Lucangeli, D. & Passolunghi, M.C. (1995). *Psicologia dell'apprendimento matematico.* Utet.

Lucangeli, D., Tressoldi, P. & Cendron, M. (1998). *SPM. Test delle abilità di soluzione dei problemi matematici.* Erickson.

Mason, L. (2003). High School Students' Beliefs About Maths, Mathematical Problem Solving, and Their Achievement in Maths: A cross-sectional study. *Educational Psychology, 23*(1), 73–85. http://dx.doi.org/10.1080/01443410303216

Mayer, R. (2003). *Learning and instruction.* Merrill Prentice Hall.

McLeod, D. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 575–596). Macmillan Publishing Company.

Moyer, J. C., Robison, V., & Cai, J. (2018). Attitudes of high-school students taught using traditional and reform mathematics curricula in middle school: A retrospective analysis. *Educational Studies in Mathematics, 98*(2), 115–134. https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-018-9809-4

Mullis, I.V., Martin, M.O., Gonzalez, E.J., & Chrostowski, S.J. (2004). *TIMSS 2003 international mathematics report*. TIMMS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Newell, A. & Simon, H. (1972). *Human problem solving.* Prentice-Hall.

Newell, A., Shaw, J.C., & Simon, H.A. (1959). Report on a general problem solving program. In R. Maheu, H.H. Aiken, A. Danjon, P. Auger, H. Vinel (Eds.), *Proceedings of the 1st International Conference on Information Processing,* *UNESCO, Paris 15-20 June* (pp. 256–264). Disponibile da https://exhibits.stanford.edu/feigenbaum/catalog/sy501xd1313

Nunes, T., Schliemann, A.L. & Caraher, D. (1993). *Street Mathematics and School Mathematics*. Cambridge University Press.

Nunesz, T. & Bryant, P. (1996). *Children Doing Mathematics*. Blackwell Publishers.

Núñez, R.E., Edwards, L.D., & Filipe Matos, J. (1999). Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *39*(1–3), 45–65. http://dx.doi.org/10.1023/A:1003759711966

Osborne, A.F. (1953). *Applied imagination.* Scribner.

Pajares, F., & Kranzler, J. (1995). Self-efficacy beliefs and general mental ability in mathematical problem-solving. *Contemporary educational psychology*, *20*(4), 426–443.

Passolunghi, C. (2003). Memoria, metacognizione e soluzione di problemi. In O. Albanese (Ed.), *Metacognizione e apprendimento* (pp. 151–172). FrancoAngeli.

Pekrun, R., & Linnenbrink-Garcia, L. (Eds.). (2014). *Handbook of emotions in education*. Routledge.

Perry, B., Dockett, S., Harley, E., & Hentschke, N. (2006). Linking powerful mathematical ideas and developmental learning outcomes in early childhood mathematics. In P. Grootenboer, R. Zevenbergen & M. Chinnappan *(Eds.), Proceedings of the Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA) Conference 2006* (pp. 408–415). MERGA Inc.

Pólya, G. (1945). *How to Solve It*. Princeton University Press.

Resnick, L. (1989).Treating mathematics as an ill-structured discipline. In R. Charles & E. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving,* (pp. 32–60). National Council of teachers of Mathematics.

Richards, J.C. (2022). Exploring emotions in language teaching. *RELC Journal, 53*(1), 225–239. https://doi.org/10.1177/0033688220927531

Rogoff, B. & Lave, J. (Eds.) (1984). *Everyday cognition: Its development in social context.* Harvard University Press.

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press.

Schoenfeld, A.H. (1989). Teaching mathematical thinking and problem solving., In L.B. Resnick & B.L. Klopfer (Eds.), *Toward the thinking curriculum: Current cognitive research: Yearbook of the American Society for Curriculum Development* (pp. 83–103). Association for Supervision and Curriculum Development.

Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334–370). MacMillan.

Sfard, A. (2006). Participationist discourse on mathematics learning. In J. Maasz & W. Schloeglmann (Eds.), *New mathematics education research and practice* (pp. 153–170). Brill. https://doi.org/10.1163/9789087903510_015

Sfard, A., Nesher, P., Streefland, L., Cobb, P., & Mason, J. (1998). Learning mathematics through conversation: Is it as good as they say? *For the learning of mathematics*, *18*(1), 41–51.Simons, P.R.J. (1996). Metacognition. In E. De Corte &

F.E. Weinert (Eds.), *International encyclopedia of developmental and instructional psychology* (pp. 436–441).Pergamon.

Simons, P. (1996). Metacognition. In E. De Corte & F.E. Weinert (Eds.), *International Encyclopedia of Developmental and Instructional Psychology* (pp. 436–441) Pergamon.

Singh, P., Teoh, S. H., Cheong, T.H., Rasid, N.S.M., Kor, L.K., & Nasir, N.A.M. (2018). The use of problem-solving heuristics approach in enhancing STEM students' development of mathematical thinking. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *13*(3), 289–303. https://doi.org/10.12973/iejme/3921

Spangler, D. A. (1992). Assessing student's beliefs about mathematics. *The Mathematic Educator, 3*(1)*,* pp. 19–23.

Tani, F., Ciuffi, N. & Vitta, A. (2007). *Le difficoltà nel calcolo dei bambini.* Seid.

Thomson, S., Wernert, N., O'Grady, E., & Rodrigues, S. (2016). *TIMSS 2015: A first look at Australia's results*. Australian Council for Educational Research.

Treffinger, D.J. (1995). Creative problem solving: Overview and educational implications. *Educational psychology review*, *7*, 301–312.

Treffinger, D.J., Isaksen, S.G., & Stead-Dorval, K.B. (2023). *Creative problem solving: An introduction*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9781003419327

Tyng, C. M., Amin, H. U., Saad, M. N., & Malik, A. S. (2017). The influences of emotion on learning and memory. *Frontiers in Psychology*, *8*, 1454. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2017.01454

Wienk, M. (2017). *Discipline profile of the mathematical sciences*. Australian Mathematical Sciences Institute.

Mathematical learning difficulties: Some reflections on the relationship between didactic and a particular kind of psychological research

Difficoltà nell'apprendimento matematico: Alcune riflessioni sulla relazione tra didattica e un tipo particolare di ricerca psicologica

Dificultades en el aprendizaje matemático: Algunas reflexiones sobre la relación entre la didáctica y un tipo particular de investigación psicológica

Michael Gaidoschik
Facoltà di Scienze della Formazione
Libera Università di Bolzano, Italia

Abstract. *The article argues for the avoidance of terms related to learning difficulties in mathematics which, like 'dyscalculia', suggest the presence of a disease or disorder. On the one hand, studies that provide clear evidence that mathematics learning difficulties depend in particular on how children are taught mathematics argue against such a 'medical paradigm'. The article reports on some of the main findings of such studies. On the other hand, as this article will try to show, the term 'dyscalculia' is conceptually deficient, and a certain type of research on dyscalculia is fundamentally flawed in that it does not investigate mathematical learning, but rather its preconditions. Finally, the possible negative consequences of labelling children as dyscalculic and the responsibilities of teachers and the school system are discussed.*

Keywords: learning difficulties; dyscalculia; medical paradigm; labelling.

Sunto. *L'articolo sostiene la necessità di evitare i termini relativi alle difficoltà di apprendimento della matematica che, come 'discalculia', suggeriscono la presenza di una malattia o di un disturbo. Da un lato, gli studi che forniscono prove evidenti del fatto che le difficoltà di apprendimento della matematica dipendono in particolare dal modo in cui i bambini vengono educati alla matematica, sono contrari a questo 'paradigma medico'. L'articolo riporta alcuni dei principali risultati di tali studi. D'altra parte, come questo articolo cercherà di dimostrare, il termine 'discalculia' è concettualmente carente e un certo tipo di ricerca sulla discalculia è fondamentalmente* *difettoso in quanto non indaga l'apprendimento della matematica, ma piuttosto le sue precondizioni. Infine, vengono discusse le possibili conseguenze negative dell'etichettatura dei bambini come discalculici e le responsabilità degli insegnanti e del sistema scolastico.*

Parole chiave: difficoltà di apprendimento; discalculia; paradigma medico; etichettatura.

Resumen. *El artículo aboga por evitar términos relacionados con las dificultades en el aprendizaje de la matemática que, como 'discalculia', sugieren la presencia de una enfermedad o de un trastorno. Por un lado, los estudios que proporcionan pruebas claras de que las dificultades en el aprendizaje de la matemática dependen, en particular, de la forma en cual se educan a los niños en matemática van en contra de este 'paradigma médico'. El artículo informa algunos de los principales resultados de estos estudios. Por otro lado, como este artículo intentará demostrar, el término 'discalculia' es conceptualmente deficiente y cierto tipo de investigación sobre la discalculia es fundamentalmente defectuosa porque no investiga el aprendizaje de la matemática, sino más bien sus condiciones previas. Finalmente, se discuten las posibles consecuencias negativas de etiquetar a los niños como 'discalculicos' y las responsabilidades de los profesores y del sistema escolar.*

Parablas clave: dificultades de aprendizaje; discalculia; paradigma médico; etiquetado.

1. Introduction

The fact that children, and not a few of them, fail early and fundamentally in the area of arithmetic is a phenomenon that not only concerns mathematics education research. It is also a topic in special education, medicine, developmental psychology and, for some years now, very prominently in cognitive and neuropsychology. There are clear differences in the approaches of the disciplines and usually little reference to each other; research tends to be carried out in parallel rather than with combined forces. Kaufmann and Nuerk (2005) speak of "parallel universes" (p. 161).

It is worth noting that this is not a *division of labour* in which maths educators would deal with didactic issues and neuropsychologists, for example, would restrict themselves to research into the neural underpinnings. 'The Number Race' (Wilson & Dehaene, 2004) or 'Calcularis' (von Aster et al., 2014) are just two examples of digital trainings that have their origins in cognitive neuroscience. All in all, mathematics education has not at all a monopoly on the *development of concepts and learning materials* that claim to help overcome learning difficulties in mathematics.

When it comes to *explaining* how and why children develop persistent, massive problems in learning arithmetic, it seems to me that of all the disciplines mentioned above, mathematics education receives the least public attention. In the media, neuropsychologists and cognitive psychologists are more likely to be interviewed and reported on. Parents' associations tend to refer to psychological findings on "dyscalculia" when lobbying school policy on the issue. Politicians, in Italy as elsewhere, refer to psychological approaches to the issue when they decide upon laws and regulations on dealing with learning difficulties at school. This is clear from the fact that such difficulties are grouped together in the relevant regulations under the term 'dyscalculia', with definitions drawn from the psychological literature (e.g., Gazetta ufficiale, 2010; see Gaidoschik, 2022).

As an in-service teacher trainer, I have noticed that many teachers also tend to think about mathematical learning difficulties in terms of what I would like to call in this article – in line with Grissemann (1996) – the 'medical paradigm'. Among teachers (as in psychological research) this view is usually qualified by an admission that teaching matters, too. However, teaching is seen as *secondary*, subordinate: In the medical paradigm the question is how to teach *children with a disorder*, and the disorder is seen as a fact separate from teaching, a precondition that teaching has to deal with.

I consider this paradigm to be theoretically, i.e., in its *explanatory* content, fundamentally flawed, and in its *practical* consequences rather harmful. This is explained in this article.

In order to avoid fruitless misunderstandings, I would like to emphasise at this point: I only want to criticise exactly those positions that I mention and that I characterise with quotations, but not 'psychology' in general, just as I do not justify 'maths education' in general. Certain views are more likely to be found in psychological literature than in didactic literature, but when I speak of the 'medical paradigm' I am referring to a particular view that can be found in the literature of both disciplines, just as there are scholars in both disciplines who see things differently.

2. Some reflections on the word "dyscalculia"

As a first step towards a clearer characterisation of the medical paradigm, a brief reflection on the notion 'dyscalculia' may be useful. The word has two parts, *dys* and *calculia*. The first part, from the Greek, stands for a failure to function; according to wiktionary.org, 'dys-' as prefix 'expresses the idea of difficulty or bad status'. 'Calculia' comes from the Latin 'calculus', as does the English word 'calculate'. So, a literal translation of dyscalculia could be 'difficulty with calculating'. Importantly, however, 'dyscalculia' denotes *a personal characteristic*: someone *has* dyscalculia or even *suffers from* dyscalculia.

Therefore, even if speakers who use this word to refer to certain phenomena do not necessarily mean it in this way, it should be noted: The *linguistic term itself* denotes a widespread phenomenon – quite a number of people have difficulties with arithmetic in a fundamental and persistent way – not in a neutral way, but *linguistically* already containing an explanation or interpretation: The word stands for *something that a person has* or does not have, it denotes a *characteristic* in the sense of a *disorder*. In the words of Baccaglini-Frank and Di Martino (2020): *actions* (a certain, unsuccessful way of dealing with school mathematics) are translated "into properties of the actor", thereby extending "a local, potentially only temporary lack of success into a universal, permanent 'disability'" (Baccaglini-Frank &Di Martino, 2020, p. 545).

This, then, in its briefest form, is the medical paradigm of which this paper is a critique: difficulties in arithmetic are seen as *manifestations (symptoms) of a disorder* that is *inherent in the person*.

The counterargument that this is *not* the case, at least not for all children classified as having 'dyscalculia', will be strengthened in the next section (3) on the basis of a number of *empirical findings* from maths education research.

In the fourth section, I attempt to characterise the fundamental theoretical shortcoming of the medical paradigm more generally, at the *conceptual level*.

Finally, I discuss what I consider to be the sometimes rather harmful *practical consequences* of this view.

3. Mathematic learning difficulties (MLD) as a consequence (also) of mathematic instruction

I begin with some studies that do not examine 'dyscalculia' in general, but rather focus on individual phenomena that form the *core* of persistent learning difficulties in primary school mathematics.

There is widespread agreement in the literature on mathematics education about this core (see, e.g., Gaidoschik et al., 2021; Scherer et al., 2016) as well as there is broad consensus about the fact that learning difficulties in mathematics are not limited to it, and that areas beyond it deserve more attention than they have received so far (see, e.g., Baccaglini-Frank & Di Martino, 2020; Lewis &Fisher, 2016; Verschaffel et al., 2018).

For the purposes of this paper, however, it seems useful to focus on this core. Where psychological literature refers to the content of primary school mathematics, these core-phenomena are also mentioned, but often in a way that is typical of the medical paradigm, in that they are interpreted as 'symptoms' of underlying, more fundamental deficits in the psychometrically measurable 'basic equipment' of these children (e.g., Kucian & von Aster, 2015).

3.1. Three interrelated problem areas typical of MLD

With regard to the core of MLD, at the level of perceptual phenomena, we encounter three major areas of problems that are closely related to each other in quite a number of children (Schipper et al., 2011), that is:

- persistent difficulties in developing alternative ways of solving addition and subtraction problems other than counting strategies;
- persistent difficulties with tasks that require flexible use of the decimal place value system based on conceptual understanding; and
- persistent difficulties with tasks requiring a sound conceptual understanding of basic arithmetic operations, especially multiplication and division (see Gaidoschik et al., 2021, for a more nuanced account).

From the point of view of subject didactics, these problem areas are closely related. I will try to outline these connections briefly.

3.1.1 Basic understanding of numbers

First of all, alternatives to solving addition and subtraction tasks without using counting strategies, apart from recourse to memorised sets of numbers, result primarily from insights into relationships (Gaidoschik, 2019; Sievert et al., 2021). More specifically, children need to understand relationships *within* the number, i.e., the number as a whole reflected in its parts (Björklund et al., 2021; Resnick, 1983; Gerster, 2009), as well as operational relationships, e.g., between an addition and its neighbour addition, or an addition and inverse subtraction (Baroody, 2006; Van de Walle et al., 2023).

On this basis, they are able to 'derive' number facts not yet automated from those they already know by heart. For example, a child who has learnt that eight can be made up of five and three could derive two addition problems (5+3=8, 3+5=8) and two subtraction problems (8−5=3, 8−3=5) only from this one part-whole triple (Fuson, 1983). Knowing 3+3=6 by heart and understanding the relationship between 3+3 and 3+4 ('one more') enables a child to solve also 3+4 without having to count (Sievert et al., 2021); and so on.

With regard to the recall of memorised number sentences ('fact retrieval') as an alternative to calculating by counting, there are clear empirical findings that the automation of basic facts is not *guaranteed* by the insight into relationships (Cumming and Elkins, 1999), but it is considerably *facilitated and promoted* (Gaidoschik, 2012). Conversely, children who know only a few number sentences by heart at the end of the first year of school mostly do not show such insights in relationships, or only sporadically, and in any case do not use them for deriving other facts (see Gaidoschik, 2012).

Fundamental to the development of non-counting strategies is therefore the part-whole understanding of numbers or, as Resnick (1983) formulates ist, the understanding of *numbers as compositions of other numbers*. However, this understanding is by no means self-evident. After all, pre-schooler's dominant access to numbers is through counting. For example, if you count correctly, eight is something that comes *after* five, but it is not necessarily thought of as a composition of five and three (Gaidoschik, 2019).

From a didactic point of view, this points to the urgency of placing a clear focus on part-whole thinking right from the start of formal arithmetic instruction. If children do not take this crucial step in their thinking about and handling of numbers, or if they do not do so early enough, difficulties in further arithmetic lessons are pre-programmed (Gaidoschik et al., 2017a).

3.1.2. The "inner learning hierarchy" of elementary arithmetic

The two other main problem areas that are typical for MLD are, as stated, problems with the decimal place system and insufficient conceptual understanding of arithmetic operations, especially of multiplication and division.

As explained, the three problem areas at the core of MLD are closely related to each other. In a way, *all* of these problems can be understood as extensions of the difficulties of part-whole understanding:

Understanding two-digit and multi-digit numbers in order to be able to work flexibly with them means understanding them as a whole composed of decimally structured parts (Gaidoschik, 2015b; Gerster, 2009).

And when we multiply and divide, we work with units that are (at primary level) larger than one – with fours, nines, sevens and so on. Products need then to be interpreted as a whole composed of such parts in order to understand and flexibly use connections between multiplications or between multiplication and division (Gerster, 2009; Van de Walle et al., 2023).

However, in order to analyse the connections between the problem areas that are at the core of MLD more precisely, we must not remain at such a rather abstract level.

On the one hand, primary school mathematics, with its "learning hierarchy inherent in the nature of the subject" (Wittmann, 2015, p. 199), ensures in a much more concrete way that a child who does not manage to develop non-counting ways to solve addition and subtraction problems, or does so late (measured against the progress of the learning content that he or she is supposed to master in the class), will also stumble in further content already in the first years of school: Having to count with one-digit addition problems necessarily leads to counting with two-digit problems. The larger the numbers, the more complex and error-prone this calculation strategy becomes. Furthermore, children who add and subtract by counting will hardly be able to use derived facts when they need to learn the basic facts of multiplication and will therefore be deprived of a very effective aid to learning these basic facts (Gaidoschik et al., 2017b; Woodward, 2006). Calculating by counting, such as deficits in understanding the decimal system, therefore also have an impact on learning basic multiplication. And this is just *one* example of the aforementioned 'inner hierarchy of learning', which turns out to be a real beast for some children: difficulties in understanding, but also in automating, can hardly be isolated in primary school arithmetic. If there is a problem in one place, there are inevitably many others (Gaidoschik et al., 2021).

This is one side, the cognitive side, of the intertwined deficiencies in understanding basic mathematical content.

The other is the psychological-motivational side: how does a child cope with failure after failure in an important school subject which he or she cannot avoid? This individually different psychological dynamic, which of course also depends on the behaviour of the caregivers, is always involved in learning difficulties, and must also be considered if one wants to understand in any individual case how fundamental deficits in a child's mathematical learning level have built up over the years (Baccaglini-Frank & Di Martino, 2020; Gaidoschik et al., 2021).

3.2. Research on instruction as possible source of learning difficulties

I announced empirical findings that suggest that the explanation for such problems is not only and probably not primarily to be found in the children concerned. In referring to such findings, I will concentrate below on the first and fundamental problem area for everything else: deficits in basic number understanding and the related adherence to calculation by counting.

3.2.1 Indications from research on basic addition and subtraction

I begin with international comparative studies that have repeatedly found statistically significant differences between children from different nations in their reliance on counting to solve simple addition and subtraction problems beyond kindergarten age. Geary et al. (1996) found that in the Chinese classes they studied, the share of counting-based strategies at the end of the first year was 3 per cent, with 91 per cent direct fact retrieval and 6 per cent derived facts. By contrast, in the US classes studied, counting was by far the dominant computational strategy, accounting for 68 per cent at this point. Derived facts were virtually absent in the US classes at both points in the first year of schooling, whereas it was used in more than a third of the tasks in the Chinese classes by the middle of the first year of schooling.

The advantages of Chinese and general East Asian (cf. Sturman, 2015) children (and adults: Campbell & Xue, 2001) over English speakers in arithmetic have repeatedly been confirmed in more recent studies (e.g., Dowker & Li, 2019). They are likely due to a variety of reasons. These range from language influences to parental attitudes towards academic achievement; school drill may also play a role. In any case, as already pointed out by Geary et al. (1996) and a number of other studies (e.g., Fuson & Kwon, 1992), it has to be considered that traditionally in US schools children are rather *encouraged* to use counting for addition and subtraction (cf. Henry & Brown, 2008). Conversely, in the East Asian region, early arithmetic instruction has traditionally emphasised the use of part-whole relations, especially with respect to 10 and 5 (e.g., Zhou & Peverly, 2005).

This is in line with longitudinal and intervention studies, which provide strong evidence that a targeted focus on part-whole relations and derived facts strategies in early arithmetic instruction contributes to children leaving counting strategies behind at an early age (see e.g., Gaidoschik, 2012; Gaidoschik et al., 2017a; Rechtsteiner-Merz, 2013). On the other hand, such a focus on derived facts also benefits children in higher grades who have already developed the habit of calculating by counting. Empirical evidence for this has already been provided by the studies of Thornton (1978; 1990) and Steinberg (1985) in second grade in the USA, and more recently by Koponen et al. (2018).

The latter study explicitly targets children with 'mathematical disabilities' who, over the course of 12 weeks of strategy training, made significant progress in replacing counting strategies with fact retrieval and deduction strategies compared to a control group who received reading support over the same period. Progress was also stable at a 5-month follow-up test (Koponen et al., 2018).

3.2.2 Interim conclusion

What does this mean for the question raised at the beginning of this paper about the relevance of the medical paradigm? One major problem of the children labelled as 'dyscalculic', namely persistent reliance on counting strategies for addition and subtraction, seems to occur more or less frequently depending on the teaching – up to classes in which it is virtually unobservable by the end of the first school year (Gaidoschik et al., 2017a).

This is not to say that good teaching can 100% prevent children from consolidating counting as their main computational strategy. However, with regard to the empirical evidence cited it seems clearly misguided to interpret a child's adherence to counting strategies at higher levels of schooling as a 'symptom' of an inherent disorder, without examining in each individual case what opportunities, stimuli and support the child has had to understand numbers as compositions of numbers and to experience the power of derived facts strategies (Gaidoschik, 2019).

3.2.3. A caveat regarding deficits in the two other core areas

Analogies can be reported, at least to some extent, for the other two main problem areas, that is difficulties with the decimal system and lack of sustainable mental models of the basic operations. I have tried to do this elsewhere (Gaidoschik, 2016), but already there I also admitted that the empirical evidence for instructional influences in these areas is less clear-cut. We certainly need more didactical research on this (Gaidoschik, 2015a).

I therefore formulate with the necessary caution: When we learn, for example, from Moser Opitz (2013) that more than four-fifths of the children or adolescents classified as 'weak in arithmetic' she assessed were overtaxed when calculating, for example, 10,000 minus 100; or from Schäfer (2005) that about half of the fifth graders she interviewed, classified as 'weak in arithmetic', were not able neither to explain the meaning of a given multiplication term using manipulatives nor to invent a suitable word problem; even in such cases of obvious and serious deficits in the area of mathematical foundations we should be careful not to immediately interpret them as an expression of the children's inherent inability. Rather, we should check in each case whether and how, in such cases, the *principle of bundling* and *basic ideas about multiplication* have been developed with this child in class.

And again, what makes me doubt that such difficulties are due to an inherent disorder in some children, are findings from classes in which such difficulties are almost unobservable – classes in which very careful work has been done on understanding the bundling principle (Gaidoschik, 2015a) or on the conceptual understanding of multiplication (Gaidoschik et al., 2017b).

In Italy, research accompanying the PerContare project points in the same direction (Baccaglini-Frank and Bartolini Bussi, 2015). The project aims to prevent learning difficulties in mathematics by providing teachers with didactically sound materials and handouts on the basics of primary school mathematics. Baccaglini-Frank and Bartolini Bussi (2015) report on a study that compared students of classes that participated in the project with a control group of 'traditionally' taught students, and conclude as follows:

> But if one can reduce the number of children testing positive for dyscalculia to such an extent only with careful teaching, one has to wonder what the tests that are used daily for diagnosis really tell us, and more generally what dyscalculia is. (Baccaglini-Frank and Bartolini Bussi, 2015, pp. 108-109; the author's translation)

I agree – and so I continue with some reflections on what dyscalculia is.

4. Dyscalculia: a construct inappropriate for scientific purposes

What if a child should have received arithmetic instruction according to the 'state of art' of mathematics education research on how to prevent MLD, and if the child should also have received appropriate remedial instruction at the first signs of difficulties – and still has fundamental problems with the very basics of the mathematics taught in primary school? May we, should we speak of 'dyscalculia' at least in such cases?

4.1. Lack of content inherent in a negative definition

Here comes a second, more fundamental objection: the term itself is *empty of content*, or more precisely, a *negative definition*. It says that *something is missing* in the child or that the child is not as well developed as they should be. This, however, says nothing about *what is present*: how this child thinks and calculates, however faulty that may be. However, it is precisely this knowledge that we need if we are to help the child overcome his or her misunderstandings and gaps in understanding of basic mathematical content.

For this reason, diagnoses that label a child as 'dyscalculic' are usually of no use when it comes to *supporting* the child. This is also acknowledged by clinical psychologists, e.g., Jacobs and Petermann (2007) in their compendium on the psychological diagnosis of dyscalculia, who state that once a child has gone through all the steps to be diagnosed with dyscalculia, a precise clarification of the content of his or her mathematical development status by a competent educator is still required before any support measures can be planned (see also Gaidoschik, 2022, on this point).

For the same reason, the term 'dyscalculia' seems to me to be unproductive for scientific purposes. With regard to its negative vagueness, it may be compared to, for example, the term 'abdominal pain' in medicine. The generality of 'abdominal pain' may help the lay patient to signal to the attending physician in which direction he should investigate further. But it is too general to be seriously investigated as an object of scientific research into causes, forms of progression, therapeutic options, etc.

I am, of course, aware that *there is* a great deal of research into dyscalculia around the world, and I follow it with professional interest. However, the aforementioned flaw in the starting point – the lack of a clear, *qualitative* definition of what is to be researched – is reflected in the way the research is conducted and in the results of that research.

4.2. The important difference between learning and its prerequisites

On the one hand, the lack of a substantive definition of the category of dyscalculia (see also Lewis & Fisher, 2016; Scherer et al., 2016) means that the sample of children and adolescents studied as 'dyscalculic' in relevant research can inevitably only be defined according to ultimately arbitrary quantitative criteria, which differ from study to study. This leads to the often-lamented difficulty of relating the results of different studies to each other.

On the other hand, a certain and not insignificant part of research in neuro- and cognitive psychology on learning difficulties in mathematics does not investigate *mathematical thinking and learning itself* (in order to do this, they would need to identify the learning difficulties with sufficient precision in terms of mathematical content), but rather *its prerequisites*.

And of course, it is important to deal also with the prerequisites if you want to understand why something works or does not work.

However, it seems obvious to me that if we want to understand children's mathematical thinking and learning, whether they excel or fail in school, we need to analyse *what they think* when they actually *do mathematics*. To do this, of course, we need to look at the *mathematical content*, at the *interactions* in the classroom where most of the mathematical learning takes place, and also at what happens before and after school that can contribute to the success or failure of mathematical learning.

Prerequisites, also on the part of the child – cognitive, motivational, linguistic – should always be kept in mind, too. But a prerequisite must be logically separated from what it is a prerequisite for. As in other areas, it is to be assumed that there are favourable and perhaps even indispensable prerequisites for understanding a certain mathematical content, such as the lack of other prerequisites might be compensated for. In any case, what really matters is what children, with all their prerequisites, actually *do* when they engage in mathematical activities. What is clear from qualitative research on MLD is that, like their more successful peers, children with learning difficulties generalise, compare, abstract, draw conclusions and develop strategies. Their mathematical thinking, knowledge, and skills do not dissolve into prerequisites of any kind. If we are to understand their difficulties, we need to observe them when they do mathematics, give them revealing tasks, analyse how they approach them and what they produce, ask them what they think. Only on this basis can we think about how to help them overcome these difficulties.

Obviously, none of this happens when, for example, children are asked to press a button to indicate which of two groups of dots on the screen is larger, and a magnetic resonance scanner shows which parts of their brain have increased oxygen flow (Kucian & von Aster, 2015). Of course, the neuronal activity imaged in such studies is a prerequisite for thinking, both correct and incorrect thinking: without a brain, there is no calculation. However, the *quality* of a mathematical thought, which determines, for example, whether and with which strategy a child solves a task like 6+7, is not made visible by MRI (magnetic resonance imaging).

Above all, whether a child solves this task by counting or not is obviously not *determined* by his or her brain organ. This is shown by all the children who initially count, but then, with the same brain, learn that it can be done differently – on the basis of *insights* they have gained into numbers and number relationships. Fortunately, you can get at least some indication of what a child was thinking by simply asking them. Of course, there are limits to our efforts to 'enter the child's mind' (Ginsburg, 1997) by interviewing them. Nevertheless, functional MRI is of no help here. It models the *organic substrate* of a child's thinking, but not its *mental content*, not its quality.

Besides functional magnetic resonance imaging, there are many ways to study the preconditions of doing arithmetic, not doing arithmetic itself. In addition to neurobiological and presumed genetic factors, the following factors are discussed as possible influences on the development of dyscalculia in a recent handbook (Landerl et al., 2022): working memory, which in turn is subdivided into central executive, phonological loop, and visuospatial sketchpad; visuospatial processing; general problem-solving ability; verbal skills; attention capacity; and more. To extend this list: Geary et al. (2007) found that "LA [low achievement] children were less fluent in processing numerical information" (p. 1343), so also "speed of processing" should be considered as a "cognitive mechanism underlying achievement deficits in children with mathematics learning disability" (p. 1343). Another candidate as a possible factor for dyscalculia, to which considerable attention and studies have been devoted in recent years, is below average scores on the construct SFON, i.e., spontaneous focussing on numerosity (see Kucian et al., 2012; for a critique, Gaidoschik, 2013). The list could be extended by several more such constructs.

And there is no doubt that in all these areas prerequisites for mathematical learning can be found or at least suspected. Therefore, one may of course investigate whether and how measurable deficits in any of these areas are statistically significantly related to 'dyscalculia' (but always with the shortcoming that, in the absence of clear qualitative criteria, the sample of 'dyscalculics' can only be identified by means of ultimately arbitrary quantitative criteria, which vary from study to study).

And this is what is done in a big number of studies. We certainly learn a great deal about the brain and memory and statistically significant relations between children's performances in different areas from such studies. But for the reasons outlined above, I see only limited use for understanding how children do mathematics, and why some of them find it so difficult, and how to help them. To cite a colleague who comes to the same conclusion:

> Even if new findings [from studies of statistical correlations between MLD and different cognitive prerequisites] on these aspects will become available in the future, this does not yet give an indication of what support measures should be taken. A different kind of research will continue to be needed here – research that looks at concrete mathematical learning processes. (Moser Opitz, 2013, p. 47; the author's translation)

5. Some arguments against labelling children as "dyscalculic"

Let's go back from the criticism of a particular research approach to the criticism of the consequences of the medical paradigm for the practice of dealing with children and adolescents with massive learning difficulties in mathematics. As already explained, the *lege artis* clinical-psychological diagnosis of dyscalculia is not helpful in determining what measures should be taken to overcome or reduce the difficulties; and this is acknowledged by clinical psychologists themselves (Jacobs and Petermann, 2007). What such diagnoses do achieve, however, is to certify that the child has a 'disorder'.

5.1. The double-edged nature of 'disadvantage compensation'

It is important to recognise that, in the circumstances that exist at the moment, some parents may actually want their child to be diagnosed as having dyscalculia. This is understandable if such a diagnosis, as in some nations (e.g., Germany), entitles to financial support for extra-curricular help. Depending on the rules of the national or regional school system, it may also entitle to 'disadvantage compensation' in the form of exemptions for academic assessment and promotion to the next grade or type of school (cf. Gaidoschik et al., 2021).

This, of course, cannot compensate in the long run for the disadvantage of a lack of basic mathematical education. In fact, such "disadvantage compensation" could lead, like it happens in Italy, to a situation where a young adult, despite persisting massive learning difficulties in mathematics, is entitled to study, for example, Primary Education in order to become a teacher of the mathematics that he or she had never the chance to understand.

Rather than "compensating for disadvantage", at least in such cases there is a risk of "reinforcing disadvantage": for the overburdened prospective teacher, but even more so for the children to whom this person might teach mathematics in the future.

5.2. Labelling and inclusion: a contradictory in terms

With regard to *additional targeted support*, i.e., the provision of qualified teachers with sufficient time resources – measures that seem to have real promise

in helping children with mathematical learning difficulties (Gaidoschik et al., 2021) – it should be noted that in Italy, for example, a diagnosis of dyscalculia under Law 170 *does not* lead to the provision of additional teaching resources by the school (Baccaglini-Frank & Di Martino, 2020). It does, however, oblige the child's teachers to draw up an Individual Education Plan (IEP), an obligation that often overburdens teachers, who are usually not adequately qualified for this highly demanding task (Gaidoschik, 2022).
Even if teachers *are* qualified, it has to be said that it takes more than a competently designed plan to support children with massive learning difficulties in mathematics: it takes, first and foremost, *additional personal resources* (see above).

Given that such resources do not appear to be available in Italian schools at present, and that there are no targeted efforts on the part of policymakers to change this, the following remark seems to be of little practical significance. From a theoretical point of view, however, it is worth noting:

If the school as a system were to take seriously its role in helping to overcome mathematical learning difficulties, given the uselessness of such a diagnosis for teaching purposes (see above) and the dangers of labelling (see below), it would be highly problematic from a pedagogical point of view to make additional support for children dependent on whether or not they have 'dyscalculia' according to clinical-psychological diagnosis. This would also be in stark contradiction to the principle of inclusive schooling, to which the Italian state in particular has been committed for decades, since efforts to best include a child in mathematics education should not depend on a diagnosis of any kind. It is also for this reason that it remains unclear what such a diagnosis is good for anyway.

5.3. The perils of labelling

But what about the undoubted fact that there are parents of children diagnosed with dyscalculia who are happy that the problem that has often caused them and their child to despair over the years has finally been given a scientific-sounding name and thus an apparent explanation?

First, it has to be stated: In fact, this explains nothing, or rather, the explanation is circular: the child is weak in arithmetic because he has a disorder that weakens them in arithmetic; and that he or she *has* this disorder was essentially extrapolated from the fact that he or she is *weak in a standardised arithmetic test* [and *very* weak, significantly weaker than the age norm; the use of the 'intelligence discrepancy criterion' is no longer recommended for such a diagnosis, at least in the German-speaking world (Deutsche Gesellschaft für Kinder- und Jugendpsychiatrie, Psychosomatik und Psychotherapie e. V. 2018)].

Second: Even if some parents, perhaps also children and adolescents –

including university students – might be happy about the diagnosis of 'dyscalculia', it is important to point out the possible undesirable side effects of such an attribution. In my twenty years or so of working as an out-of-school learning facilitator for children with mathematical learning difficulties, I have met many children who, at least initially, have rejected my efforts to help them learn mathematics by saying that they have dyscalculia, sometimes with the addition that it runs in the family, and that is why they simply cannot learn arithmetic. A diagnosis can be understood by the child as an unchangeable fate and/or taken as an excuse; and there are presumably also other ways how 'mathematics self-concept', in such cases negatively, influences mathematic achievement, as it is shown by empiric research (e.g., Lee & Kung, 2018).

5.4. Why teachers are not to blame but should take responsibility

Unfortunately, I have also come across teachers who have asked me, in my supposed role as an 'expert', to confirm that 'this child has dyscalculia', which for them would have meant that a) they are not to blame and b) they are not responsible.

Now, I am generally in favour of starting from a). I consider it unproductive in any case to skirt around questions of guilt in the face of serious learning difficulties. For even if a closer analysis should reveal failures in teaching, these are usually not the result of unwillingness or even bad intentions. Rather, they result from not knowing better and inadequate teacher education and teacher training. Then many problems are related to school conditions, for which the school system, the policy, is responsible, not the teacher.

So 'blame' is certainly not a constructive category in dealing with learning difficulties. But: A class teacher's *responsibility for the mathematical learning* of all the children in their class should be beyond dispute. Talking about 'dyscalculia' does not help to raise this awareness, at least in my experience. It rather contributes to the attitude of not feeling in charge for 'these children', who would need some sort of 'special treatment', but unfortunately ...

Of course, this also reflects that teachers often feel simply overwhelmed by the task of meeting the needs of children with mathematical learning difficulties. And they *are* objectively overtaxed, even with the highest pedagogical and subject didactic competence, when they teach, for example, in a third class, without additional support in the form of team teaching, and have one or more children in the class who are still calculating by counting, who still know nothing about tens and ones and bundling and unbundling, who may even have learnt the multiplication tables by heart, but have not understood what multiplication is about and therefore cannot apply them.

5.5. The responsibility of school policy

I can understand how, in such circumstances, a teacher might be inclined to think: I am at a loss with the ‘dyscalculics’; the parents are responsible, they must go to ‘therapy’ with the child.

I can understand this kind of thinking. And I think it is all the more important for mathematics educators to criticise this way of some teacher’s thinking with good arguments, but at the same time to point out to politicians and school decision-makers that there is a need to invest in school support systems, in initial and in-service training, so that teachers are increasingly able to fulfil the right of all children to receive a basic education in mathematics.

References

Baccaglini-Frank, A., & Di Martino, P. (2020). Mathematical learning difficulties and dyscalculia. In St. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 543–548). Springer. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9_100018-1

Baccaglini-Frank, A.E., & Bartolini Bussi, M.G. (2015). Buone pratiche didattiche per prevenire falsi positivi nelle diagnosi di discalculia: il progetto “PerContare”. *Form@re - Open Journal per la formazione in rete, 3*(15), 170–184. http://dx.doi.org/10.13128/formare-17182

Baroody, A.J. (2006). Why children have difficulties mastering the basic number combinations and how to help them. *Teaching Children Mathematics, 13*(1), 22–31. http://dx.doi.org/10.5951/TCM.13.1.0022

Björklund, C., Marton, F., & Kullberg, A. (2021). What is to be learnt? Critical aspects of elementary arithmetic skills. *Educational Studies in Mathematics, 107*(2), 261–284. https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-021-10045-0

Campbell, J.I.E., & Xue, Q. (2001). Cognitive Arithmetic Across Cultures. *Journal of Experimental Psychology: General*, *120*, 299–315. http://dx.doi.org/10.1037/0096-3445.130.2.299

Cumming, J.J., & Elkins, J. (1999): Lack of Automaticity in the Basic Addition Facts as a Characteristic of Arithmetic Learning Problems and Instructional Needs. *Mathematical Cognition*, *5*(2), 149–180. http://dx.doi.org/10.1080/135467999387289

Deutsche Gesellschaft für Kinder- und Jugendpsychiatrie, Psychosomatik und Psychotherapie e. V. (2018). *S3-Leitlinie: Diagnostik und Behandlung der Rechenstörung.* Retrieved from https://www.bvl-legasthenie.de/images/static/pdfs/Leitlinien/S3-Leitlinie_Rechenstrung_Langfassung.pdf

Dowker, A., & Li, A.M. (2019). English and Chinese children’s performance on numerical tasks. *Frontiers in Psychology, 9* (2731), 1–11. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2018.02731

Fuson, K.C., & Kwon, Y. (1992). Korean children's single-digit addition and subtraction: numbers structured by ten. *Journal for Research in Mathematics Education, 23*(2), 148–165. https://psycnet.apa.org/doi/10.2307/749498

Gaidoschik, M. (2012). First-graders' development of calculation strategies: how deriving facts helps automatize facts. *Journal für Mathematik-Didaktik, 33*(2), 287–315. http://dx.doi.org/10.1007/s13138-012-0038-6

Gaidoschik, M. (2013). Warum wir aufhören sollten, über „Dyskalkulie" zu forschen. *Lernen und Lernstörungen, 2*(4), 249–250.

Gaidoschik, M. (2015a). Einige Fragen zur Didaktik des Hunderterraums. *Journal für Mathematik-Didaktik, 35*(1), 163–190. https://doi.org/10.1007/s13138-015-0071-3

Gaidoschik, M. (2015b). Vermeidbare und unvermeidbare Hürden beim Erlernen des Rechnens bis 100. In A. Steinweg (Ed.), *Entwicklung mathematischer Fähigkeiten von Kindern im Grundschulalter* (pp. 25–38). University of Bamberg Press.

Gaidoschik, M. (2016). Prävention von „Rechenschwächen": Was Fachdidaktik kann und könnte. Hauptvortrag an der 50. Jahresversammlung der GDM. In Institut für Didaktik der Mathematik und Informatik der Pädagogischen Hochschule Heidelberg (Ed.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (pp. 49–56). WTM-Verlag.

Gaidoschik, M. (2019). Didactics as source and remedy of mathematics learning difficulties. In A. Fritz, V. Haase & P. Räsänen (Eds.), *The International Handbook of Mathematical Learning Difficulties: From the Laboratory to the Classroom* (pp. 73–89). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97148-3

Gaidoschik, M. (2022). "Individual Educational Plans" for "dyscalculic" students in primary schools of South Tyrol: A questionable law, poorly implied. In J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi & F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)* (pp. 4413–4420). ERME / Free University of Bozen-Bolzano.

Gaidoschik, M., Deweis, K., & Guggenbichler, S. (2017b). How lower-achieving children profit from derived facts-based teaching of basic multiplication: Findings from a design re-search study. In T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 346–353). DCU Institute of Education and ERME.

Gaidoschik, M., Fellmann, A., Guggenbichler, S., & Thomas, A. (2017a). Empirische Befunde zum Lehren und Lernen auf Basis einer Fortbildungsmaßnahme zur Förderung nicht-zählenden Rechnens. *Journal für Mathematik-Didaktik, 38*(1), 93–124. http://dx.doi.org/10.1007/s13138-016-0110-8

Gaidoschik, M., Moser Opitz, E., Nührenbörger, M., & Rathgeb-Schnierer, E. (2021). Besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 111S*, 4–19.

Gazetta ufficiale N. 244 del 18 ottobre 2010. *Legge 8 ottobre 2010, n. 170.* Available at https://www.gazzettaufficiale.it/eli/id/2010/10/18/010G0192/sg

Geary, D.C., Bow-Thomas, C.C., Fan, L., & Siegler, R. (1996). Development of arithmetical competences in Chinese and American children: influence of age, language, and schooling. *Child Development, 67*(5), 2022–2044. https://doi.org/10.2307/1131607

Geary, D.C., Hoard, M.K., Byrd-Craven, J., Nugent, L., & Numtee, Ch. (2007). Cognitive mechanisms underlying achievement deficits in children with mathematical learning disability. *Child Development*, *78*(4), 1343–1359. https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2007.01069.x

Gerster, H.-D. (2009). Schwierigkeiten bei der Entwicklung arithmetischer Konzepte im Zahlenraum bis 100. In A. Fritz, G. Ricken & S. Schmidt (Eds.), *Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie* (pp. 248–268). Beltz.

Ginsburg, H. P. (1997). *Entering the child's mind: The clinical interview in psychological research and practice.* Cambridge University Press.

Grissemann, H. (1996). *Dyskalkulie heute. Sonderpädagogische Intervention auf dem Prüfstand.* Verlag Hans Huber.

Henry, V., & Brown R. S. (2008). First-grade basic facts: an investigation in teaching and learning of an accelerated, high-demanding memorization standard. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(2), 153–183. http://dx.doi.org/10.2307/30034895

Jacobs, C., & Petermann, F. (2007). *Rechenstörungen (Leitfaden Kinder- und Jugendpsychotherapie)*. Hogrefe.

Kaufmann, L., & Nuerk, H.C. (2005). Numerical development: current issues and future perspectives. *Psychology Science, 47*(1), 142–170.

Koponen, T., Sorvo, R., Dowker, A., Räikkönen, E., Viholainen, H., Aro, M., & Aro, T. (2018). Does multi-component strategy training improve calculation fluency among poor performing elementary school children? *Frontiers in Psychology, 9*(1187), 1–14. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2018.01187

Kucian, K., & von Aster, M. (2015). Developmental dyscalculia. *European Journal of Pediatrics, 174*(1), 1–13. http://dx.doi.org/10.1007/s00431-014-2455-7

Kucian, K., Kohn, J., Hannula-Sormunen M. M., Richtmann, V., Grond, U., Käser, T., Esser, G., & von Aster, M. (2012) Kinder mit Dyskalkulie fokussieren spontan weniger auf Anzahligkeit. *Lernen und Lernstörungen, 1*(4), 2012, 241–253. https://doi.org/10.1024/2235-0977/a000024

Landerl, K., Vogel, St., & Kaufmann, L. (2022). *Dyskalkulie. Modelle, Diagnostik, Intervention.4. überarbeitete und erweiterte Auflage.* Ernst Reinhardt Verlag.

Lee, C.-Y., & Kung, H.-Y. (2018). Math self-concept and mathematics achievement: Examining gender variation and reciprocal relations among junior high school students in Taiwan. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(4), 1239–1252. https://doi.org/10.29333/EJMSTE%2F82535

Lewis, K.E., & Fisher, M.B. (2016). Taking stock of 40 years of research on mathematical learning disability: methodological issues and future directions. *Journal for Research in Mathematics Education, 47*(4), pp. 338–371. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.47.4.0338

Moser Opitz, E. (2013). *Rechenschwäche/Dyskalkulie. Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern*. Haupt Verlag.

Rechtsteiner-Merz, C. (2013). *Flexibles Rechnen und Zahlenblickschulung. Entwicklung und Förderung von Rechenkompetenzen bei Erstklässlern, die Schwierigkeiten beim Rechnenlernen zeigen*. Waxmann.

Resnick, L. B. (1983). A developmental theory of number understanding. In H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 109–151). Academic.

Schäfer, J. (2005). *Rechenschwäche in der Eingangsstufe der Hauptschule.* Kovac. http://dx.doi.org/10.13140/RG.2.1.4401.6165

Scherer, P., Beswick, K., DeBlois, L., Healy, L., & Moser Opitz, E. (2016). Assistance of students with mathematical learning difficulties: How can research support practice? *ZDM – Mathematics Education, 48*(5), 633–649. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0800-1

Schipper, W., Wartha, S., & von Schroeders, N. (2011). *BIRTE 2. Bielefelder Rechentest für das zweite Schuljahr. Handbuch zur Diagnostik und Förderung.* Schroedel.

Sievert, H., van den Ham, A.-K., & Heinze, A. (2021). Are first graders' arithmetic skills related to the quality of mathematics textbooks? A study on students' use of arithmetic principles. *Learning and Instruction, 71,* 101401. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2020.101401

Steinberg, R. M. (1985). Instruction on Derived Facts Strategies in Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*(5), 337–355. https://doi.org/10.2307/749356

Sturman, L. (2015). What is there to learn from international surveys of mathematics achievement? In R. Cohen Kadosh & A. Dowker (Eds.), *Oxford handbook of numerical cognition* (pp. 430–444). Oxford University Press.

Thornton, C.A. (1978). Emphasizing thinking strategies in basic fact instruction. *Journal for Research in Mathematics Education, 9*(3), 214–227.

Thornton, C. A. (1990). Solution Strategies: Subtraction Number Facts. *Educational Studies in Mathematics, 21*(3), 241–263. https://doi.org/10.1007/BF00305092

Van de Walle, J., Karp, K., & Bay-Williams, J (2023). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally (11th Edition).* Pearson Education.

Verschaffel, L., Baccaglini-Frank, A., Mulligan, J. (2018). Special needs in research and instruction in whole number arithmetic. In M. Bartolini Bussi & X. Sun (Eds.), *Building the foundation: whole numbers in the primary grades. The 23rd ICMI study* (pp. 375–397). Springer.

von Aster, M.G. , Gross, M., Käser, T., Kucian, K., Ringwald, M., & Vögeli, C. (2014). *Dybuster Calcularis 2.0.* Available at http://www.calcularis.ch

Wilson, A., & Dehaene, S. (2004). *The number race.* Retrieved from https://www.thenumberrace.com/nr/home.php

Wittmann, E. Ch. (2015). Das systemische Konzept von Mathe 2000+ zur Förderung „rechenschwacher" Kinder. In H. Schäfer & Ch. Rittmeyer (Eds.), *Handbuch Inklusive Diagnostik* (pp. 199–213). Beltz.

Woodward, J. (2006). Developing Automaticity in Multiplication Facts: Integrating Strategy Instruction with Timed Practice Drills. *Learning Disability Quarterly, 29*(4), 269–289. https://psycnet.apa.org/doi/10.2307/30035554

Zhou, Z., & Perverly, St.T. (2005). Teaching addition and subtraction to first graders: a chinese perspective. *Psychology in the Schools, 42*(3), 259–272. http://dx.doi.org/10.1002/pits.20077

Creativity in mathematical learning: A model to explain the cognitive functioning of creative processes and provide general design requirements

Creatività nell'apprendimento della matematica: Un modello per spiegare il funzionamento cognitivo dei processi creativi e fornire requisiti generali di task design

Creatividad en el aprendizaje de las matemáticas: Un modelo para explicar el funcionamiento cognitivo de los procesos creativos y proporcionar requisitos generales de diseño de tareas

Alessandro Gelmi,[1] Marzia Garzetti[2] e Miglena Asenova[1;3]

[1]*Faculty of Education, Free University of Bozen-Bolzano, Italy*

[2]*University of Genoa, Italy*

[3]*NRD, University of Bologna, Italy*

Abstract. *The interest in creativity in mathematics education has increased in the last few years at all levels. Nevertheless, a comprehensive framework for creativity in mathematics education that supports the design of appropriate tasks is still missing. In this paper ta connection between different elements coming from mathematics education and psychology is built to provide a theoretical model for the explanation of the cognitive functioning of creative processes. For this purpose, the creativity characteristics of originality and flexibility are used to categorize creative processes, then the defined categories are cognitively characterized by elements of conceptual blending theory. Finally, general requirements of task design to support creativity in mathematics education are developed, consistently with the introduced model. The model can be used for 'navigating' the existing literature and identifying redundancies and synergies between different theoretical approaches; it can also be intended as a tool for detecting and classifying instances of creativity. Moreover, the introduced design requirements allow to work in the direction of task design to stimulate and foster creativity in mathematics education.*

Keywords: mathematics education; creativity; task design; cognitive model; design requirements

Sunto. *Negli ultimi anni, l'interesse per la creatività in didattica della matematica è aumentato a tutti i livelli. Tuttavia, manca ancora un framework completo per la creatività in didattica della matematica che supporti la progettazione di task appropriati. In questo articolo viene stabilita una connessione tra diversi elementi provenienti dalla didattica della matematica e dalla psicologia, al fine di fornire un modello teorico in grado di spiegare il funzionamento cognitivo dei processi creativi. A tal fine, due caratteristiche della creatività, che sono l'originalità e la flessibilità, vengono utilizzate per categorizzare i processi creativi; le categorie definite vengono caratterizzate cognitivamente mediante elementi della teoria di conceptual blending. Infine, vengono sviluppati dei requisiti generali per la progettazione delle attività con l'obiettivo di sostenere la creatività in didattica della matematica in coerenza con il modello introdotto. Tale modello può essere utilizzato per 'navigare' la letteratura esistente e identificare ridondanze e sinergie tra diversi approcci teorici; esso può essere anche inteso come strumento utile per individuare e classificare istanze di creatività. Inoltre, i requisiti di progettazione introdotti consentono di lavorare nella direzione della progettazione di task utili per stimolare e favorire la creatività in didattica della matematica.*

Parole chiave: educazione matematica; creatività; progettazione didattica; modello cognitivo; requisiti di task design

Resumen. *En los últimos años, el interés por la creatividad en la enseñanza de las matemáticas ha aumentado a todos los niveles. Sin embargo, sigue faltando un marco global para la creatividad en la educación matemática que respalde un diseño adecuado de las tareas. En este artículo se establece una conexión entre distintos elementos de la educación matemática y la psicología con el fin de proporcionar un modelo teórico que pueda explicar el funcionamiento cognitivo de los procesos creativos. Con este fin, se utilizan dos características de la creatividad, que son la originalidad y la flexibilidad, para categorizar los procesos creativos; las categorías definidas se caracterizan cognitivamente utilizando elementos de la teoría de la conceptual blending. Por último, se desarrollan requisitos generales para el diseño de actividades con el objetivo de apoyar la creatividad en la educación matemática de forma coherente con el modelo introducido. Este modelo puede utilizarse para 'navegar' en la literatura existente e identificar redundancias y sinergias entre diferentes enfoques teóricos; también puede entenderse como una herramienta útil para identificar y clasificar instancias de creatividad. Además, los requisitos de diseño introducidos permiten trabajar en la dirección de diseñar tareas útiles para estimular y fomentar la creatividad en la educación matemática.*

Palabras clave: educación matemática; creatividad; diseño didáctico; modelo cognitivo; requisitos de diseño de tareas

1. Introduction

There are at least two arguments in favor of the importance of creativity in mathematics education. Firstly, creativity is recognized as an important twenty-first century skill (Pellegrino & Hilton, 2012) necessary to face the exponential growth of innovation in all areas of life associated with technological progress and scientific advancement (Leikin & Sriraman, 2021). Secondly, creativity is a necessary condition for insightful and lasting learning, as it is an essential ingredient in problem solving processes (Haavold & Sriraman, 2022; Leikin & Elgrably, 2022; Schoevers et al., 2022), but also in argumentation processes, intended as a sequence of original and plausible arguments that are based on mathematical properties (Haavold et al., 2020; Lithner, 2008). Indeed, each authentic problem-solving activity, focused on a problematic situation never faced before, requires a certain kind of creative thinking.

Summing up, creativity in mathematics education is crucial not only for its practical value in preparing students for future scientific challenges but also as an integral part of the discipline itself, as its primary importance lies in fostering deep and lasting learning, essential for navigating future technological advancements. Therefore, creativity's role in mathematics should be valued for its own merit, beyond its specific practical applications. But how can creativity be stimulated in the context of the 'every day'-classroom-practice, which kind of tasks could be used and why are they appropriate in this sense?

While till now in mathematics education research an important effort was made to design suitable tasks for particular experimental settings, with the aim to produce diagnostic tools able to capture creativity instances (e.g., Leikin, 2013; Schindler & Lilienthal, 2022; Singer & Voica, 2022), general design requirements[1] for tasks that would allow to stimulate creativity are still underinvestigated. Such design requirements would greatly benefit research in mathematics education by enhancing our understanding of how to stimulate and develop creativity. They would also serve as valuable tools in teacher training, assisting educators in systematically designing suitable tasks. However, these task design requirements must be theoretically well founded on cognitive principles. This grounding is essential to explain how and why these requirements are crucial for designing tasks able to foster and potentially develop instances of creativity. Indeed, without a link of the design requirements to the cognitive tools, creativity stimulating tasks appear as a sort of 'black boxes' that transform non-creative students into creative ones. This paper presents a model

[1] We prefer to use the term 'design requirements' rather than 'design principles' because we are focusing on deducing such requirements theoretically, rather than inductively by abstracting from successful examples (Bell et al., 2004; McKenney & Reeves, 2018).

designed to generate these general design requirements. It integrates theoretical concepts from both mathematics education and psychology, with the goal of identifying design requirements tailored specifically to mathematics education.

2. State of the art, research problem and research questions

In this section, we first focus on the literature regarding the criteria for task design that promote creative thinking in mathematics education and then characterize the research problem and formulate the research questions.

2.1. State of the art

In their recent survey on creativity in mathematics, Leikin and Sriraman (2022) scrutinize 25 papers categorized under the title "Creativity related to practices and mathematical tasks." While all the papers of this category discuss tasks that may stimulate creativity, only a handful offer some arguments advancing the discussion on task design requirements. In the following we shortly discuss the five papers that are closely related to this topic, pointing out their relation to our focus on general task design requirements.

- Levav-Waynberg and Leikin (2012) produce a longitudinal study that compares knowledge and creativity development between experimental and control groups using student-written tests. The research focuses on certain creativity criteria, like fluency and flexibility, suggesting that they are more amenable to enhancement and thus more 'teachable' than other criteria, such as originality. This study sheds light on how task design might bolster creativity, but it also helps to clarify which aspects of creativity can be developed 'on a large scale' and which may need more targeted strategies to reach more students. However, the paper's emphasis is on the application of specific tasks rather than on establishing broad criteria for task design.
- Lee (2017) provides a diagnostic model for the graduation of teachers' ability to construct tasks suitable for creativity education. This approach is helpful to better understand how teacher can act on higher or lower levels in designing tasks to foster creativity, but it does not provide general requirements for task-design.
- Boesen et al. (2010) examine how different tasks affect students' mathematical reasoning during national tests. They find that fostering creativity requires challenging tasks that diverge from routine classroom activities and push students beyond their comfort zones. However, the study's purpose is primarily diagnostic and does not focus on establishing universal task design requirements.

- Aljarrah (2020) explores collective creativity in mathematical learning, identifying four key creative acts within groups: summing forces, expanding possibilities, divergent thinking, and assembling things in new ways. While the study highlights cognitive tools that support creativity, it does not connect them to task design criteria, which would be relevant for research on general task design requirements.
- Sriraman and Dickman (2017) propose a reflection on tasks that require insight into mathematical pathologies, that means examples of counterintuitive behavior, showing how they can support creativity in the classroom. This paper focuses on the characteristics that make mathematical problems suitable for creativity education, but it does not focus on the criteria to be used to support task design in general and does not explain how they are related to the emergence of creativity.

2.2. Research problem and research questions

While most of the contributions discussed in section 2.1. offer structured tasks to enhance creative thinking, possibly including some general design requirements, none of them entirely elucidate the assumption about the efficacy of such tasks in nurturing creativity in mathematics education. This is not at all surprising since the rationale of the articles is not focused on such general aspects, but if we look at the related literature from this perspective, there is a lack of a cohesive and thorough framework able to support understanding of creative processes and their cognitive underpinnings. Indeed, each of the presented papers introduces a set of tools or operational criteria specific to the problem faced in the research, but none provides a theoretical synthesis of such tools or operational criteria. This paper aims to reduce the heterogeneity and fragmentation of the scenario, marked by a variety of design solutions, partly alternative and partly redundant or overlapping, by providing an overarching framework. For this purpose, we explore the link between cognitive mechanisms and task design, supposing to significantly clarify in this way the characteristics of the methods and the means to enhance creativity in mathematics learning. To achieve this, we first aim to establish a theoretical basis for the emergence of creative features and then elucidate their cognitive functioning. The cognitive tools that support this cognitive functioning and foster creative thinking are supposed to bridge the gap between student’s creativity, as reported in the literature, and the requirements of task design intended to stimulate it.

The research question that emerges from the research problem characterized above is thus the following:

Which are general requirements of task design for tasks able to stimulate and *foster creativity in learning mathematics?*

Starting from what was previously mentioned about the limitations of current research on task design, this research question is divided into two sub-questions:

a) *Which are the characteristics of a theoretical model able to provide a synthetic and comprehensive explanation of the cognitive functioning of creative processes?*
b) *Which task-design requirements can be deduced from this model in order to stimulate and foster creativity in mathematical learning?*

3. Theoretical Framework

In this section, we present the theoretical frameworks we have drawn upon to answer the first research sub-question. In Section 3.1., we provide a preliminary clarification on the specific conception of creativity we focus on in this paper. In Section 3.2., we introduce the theory of conceptual blending, drawn from psychology, which serves as the primary theoretical reference to anchor the construction of our model for the explanation of the cognitive functioning of creative processes.

3.1. A suitable characterization of creativity

In mathematics education research, there is no universally agreed definition of creativity. Rather, there are common theoretical references where dimensions, types and characteristics of creativity are distinguished, and from which each study develops its own specific definition. In this section we clarify which *dimensions, types* and *characteristics of creativity* are relevant to our research purposes, and we present the concept of creativity we have chosen to work with.

1) *Dimensions*. With regard to the different dimensions of creativity, we consider Rhodes' (1961) work on the 4 P's of creativity, widely shared in mathematics education (e.g., Pitta-Pantazzi et al., 2018): creativity seen as a feature of either a *person* (understanding the traits, characteristics or attributes of the creative person), a *process* (describing the operations or stages of thinking used in the creative process), a *press* (examining the nature of situations and its context within the creative press), or a *product* (identifying outcomes and qualities of creative products). As clarified in section 2, in this paper we aim to provide an explanation of the cognitive functioning of creative processes. Accordingly, we focus our attention on the *process*, that is on creativity as a way of thinking, and do not consider

explicitly the other three dimensions[2].

2) *Types*. Regarding the types of creativity, we refer to the 4c model (Kaufman & Beghetto, 2009). These authors identified four types of creativity: (a) Big-Creativity (*Big-C*) exhibited by individuals who have won prestigious prizes and have gained long-term recognition; (b) Pro-creativity (*Pro-c*) or expert creativity; (c) Little-creativity (*little-c*) or ordinary creativity, manifested in everyday activities and discernible to others; and (d) Mini-creativity (*mini-c*), which is defined as the "novel and personally meaningful interpretation of experiences, actions and events" and is "involved in the construction of personal knowledge and understanding" (Beghetto & Kaufman, 2007, p. 73). In this paper, we aim to clarify the distinctive features of creative thinking processes that underpin personal learning in mathematics. Therefore, we focus exclusively on the 'mini-c' type of creativity.
3) *Characteristics of creativity*. Concerning the characteristics of creativity, we consider the psychometric models that have informed research on creativity in mathematics education (Joklitschke, et al., 2022). More specifically, we focus on two of the three criteria identified by Guilford (1959): *flexibility* (the number of different categories of solutions to the same problem) and *originality*[3] (the unusualness of solutions), while we do not consider fluency (the number of solutions) because this feature relates to the assessment of creative performance, which is beyond the scope of this article. Originally, the concepts of flexibility and originality were introduced to study divergent thinking and to define variables useful for the experimental measurement of a person's creative abilities. Rather than viewing them as indicators for the empirical observation of divergent thinking performances, we regard these characteristics of creativity as conceptual categories to describe creative processes in a broad sense.

Holding together the premises on *dimensions, types, and characteristics of*

[2] By this we do not mean that creativity can be reduced to cognitive aspects alone and/or that the process is separable from the other dimensions or is more important than them. Ours is merely a choice of analysis that follows from the research questions we are working on. Indeed, as Rhodes himself points out: "each strand has unique identity academically, but only in unity do the four strands operate functionally" (Rhodes, 1961, p. 307).

[3] Torrance's work (1974), which is also relevant in mathematics education, distinguishes similar characteristics of creativity, replacing the term 'novelty' with 'originality'. We consider these two terms interchangeable. However, as mentioned above, in this work we focus on the process dimension. Therefore, like flexibility, the characteristic of originality/novelty must also be understood in relation to this dimension. Thus, we do not speak of originality in absolute terms, but only in relation to thought processes that are unprecedented for the subject performing them.

creativity, in this study we focus on originality and flexibility as distinctive properties of the mini-c processes that inform mathematical learning.

Our goal is to explain the cognitive functioning of creative thinking processes that enable students to use prior knowledge in new ways and generate novel solutions, ideas, and strategies.

Creativity, as defined in our research, has been deeply discussed in mathematics education. Pitta-Pantazzi and colleagues (2022) highlight three essential forms of 'mini-c' creativity: (a) building intuition and abstractness of a mathematical concept; (b) creating, manipulating, and connecting representations; (c) expressing flexible thinking. We take these instances as a point of reference, in accordance with the concluding remark of the quoted study, not because they "present an exhaustive list," but because they "have the potential to capture mini-c related to various mathematical concepts (arithmetic, algebraic, geometric, statistical and measurement)" (Pitta-Pantazzi et al., 2022, p. 65). Indeed, the mini-c classification provides criteria that shed light on the cognitive requirements necessary for creativity tasks in mathematics education. In section 4, we will revisit these three 'mini-c'-instances, introducing them a in our model that connects them to the overarching characteristics of 'mini-c' processes and presents a systematic classification of creative processes grounded in their cognitive functioning.

3.2. Conceptual blending

In section 2 we highlighted a gap in mathematics education research: the lack of a detailed cognitive explanation for how instructional methods and tasks promote creativity. Existing requirements for task design propose ways to encourage original and flexible thinking, yet they do not adequately explain the cognitive functioning of creative processes. Consequently, these requirements provide assorted solutions but lack an overarching structure.

To tackle the issue of providing such an overarching structure, we turn to Fauconnier and Turner's theory on conceptual blending (Fauconnier & Turner, 2002; 2003). According to these authors:

> Conceptual blending is a basic mental operation that leads to new meaning, global insight, and conceptual compressions useful for memory and manipulation of otherwise diffuse ranges of meaning. It plays a fundamental role in the construction of meaning in everyday life, in the arts and sciences, and especially in the social and behavioral sciences. The essence of the operation is to construct a partial match between two input mental spaces, to project selectively from those inputs into a novel 'blended' mental space, which then dynamically develops emergent structure. (Facounnier & Turner, 2002, p. 2)

As we will explain in the following, creative thinking is one of the human processes that the theory of conceptual blending can help to clarify and characterize from a cognitive point of view. But let us first deepen some concepts involved in the definition of conceptual blending. A key concept referenced in the definition that requires further explanation is the one of 'mental space,' which is crucial in this context:

> Mental spaces are small conceptual packets constructed as we think and talk, for purposes of local understanding and action - they are very partial assemblies containing elements, structured by frames and cognitive models. (Facounnier & Turner, 2002, p. 2)

The idea of mental space is general in scope and in the context of this paper is to be understood as a cognitive framework in which different elements are related within ordered structures to organize knowledge and to gain explanatory and predictive control over experience. A precise set of rules, more or less explicit, informs each of these mental spaces, establishing which elements, which relations and which structural configurations are allowed within them. Examples of mental spaces which are also relevant to the exercise of creativity in learning mathematics are the scripts (Abelson, 1981). Scripts can be intended as anticipatory procedural schemas for the organization of ordinary situations, used to guide actions and strategic choices within a given context (D'Amore, 1999).

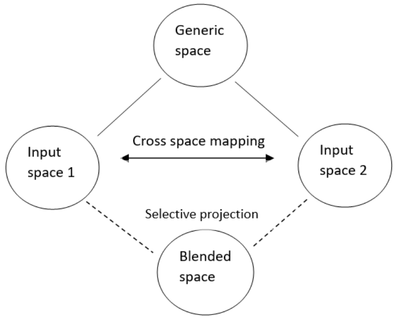
Conceptual blending operations are characterized by an interaction between two or more mental spaces:

In its most basic form, a conceptual integration network consists of four connected mental spaces: two partially corresponding input spaces, a generic space consisting of structures common to the inputs, and a blended space. (Facounnier & Turner, 2002, p. 4)

The basic structure of a conceptual blend is represented in Figure 1.

Figure 1

The basic structure of conceptual blending



The generic space allows homologies and correspondences to emerge between the two mental spaces, making their comparison and/or integration possible. In the blended space, on the other hand, the elements of the two input spaces are projected to bring forth an emergent novel space, with its own set of rules, elements, relations and structures:

> Projection allows the emergent structure to develop on the basis of composition (blending can compose elements from the input spaces to provide relationships that do not exist in the separate inputs), pattern completion (based on background patterns that are brought into the blend unconsciously), and elaboration (treating the blend as a simulation and 'performing' it imaginatively). (Facounnier & Turner, 2002, p. 4)

The blending process between two input spaces can occur in various ways, categorized into different types of "blending networks" (Facounnier & Turner, 2002, p. 6): *simplex networks*, *single-scope* and *double-scope networks*. In the following we characterize these blending networks.

In *simplexes networks*, input space 1 consists of a frame, which is a conventional, schematic organization of knowledge, and input space 2 consists only of specific elements that are assimilated within inputs space 1. By assimilation, we mean the process that allows the acquisition of new data using pre-existing mental frameworks or structures. In simplex networks, new external data from input space 2 are interpreted within the constituent rules of input space 1 and are thus integrated in it.

In *double-scope* and *single-scope networks*, both input space 1 and input space 2 consist of a frame. In *double-scope networks*, input space 1 and input space 2 are brought together, and they both contribute to the final organizational frame of the blended space. In *single-scope networks*, instead, the blended space inherits only the organizational frame of one of the two input spaces.

In section 4.1 we provide examples and a more detailed exploration of the blending networks simplex, single-scope, and double-scope. Our purpose is to utilize them to explain the cognitive functioning of creative processes involved in mathematical learning.

4. The Cognitive Creative Model and task design requirements

In this section, in response to the first research sub-question, we present a model to explain the creative functioning of creative processes.

The development of the model occurs in two phases. Firstly, in Section 4.1., we delve into the characteristics of originality and flexibility commonly associated with creative thinking. We define three distinct types of creative processes, each embodying originality and/or flexibility in varied ways. To relate these broad categories to mathematics education specifically, we link them with the 'mini-c' instances highlighted by Pitta-Pantazzi and colleagues (2022). Secondly, in Section 4.2., we advance to the explanatory phase, applying conceptual blending theory to clarify the cognitive functioning of the creative process categories established in 4.1.

4.1. The categories of creative processes

In this section we discuss the categorization of creative processes in the context of mathematics education, emphasizing the role of originality and flexibility as key characteristics of such processes.

We first use the characteristic of originality to distinguish between creative and non-creative processes. Subsequently, we introduce three different categories of creative processes, in which the property of originality, which they all share, relates differently to that of flexibility.

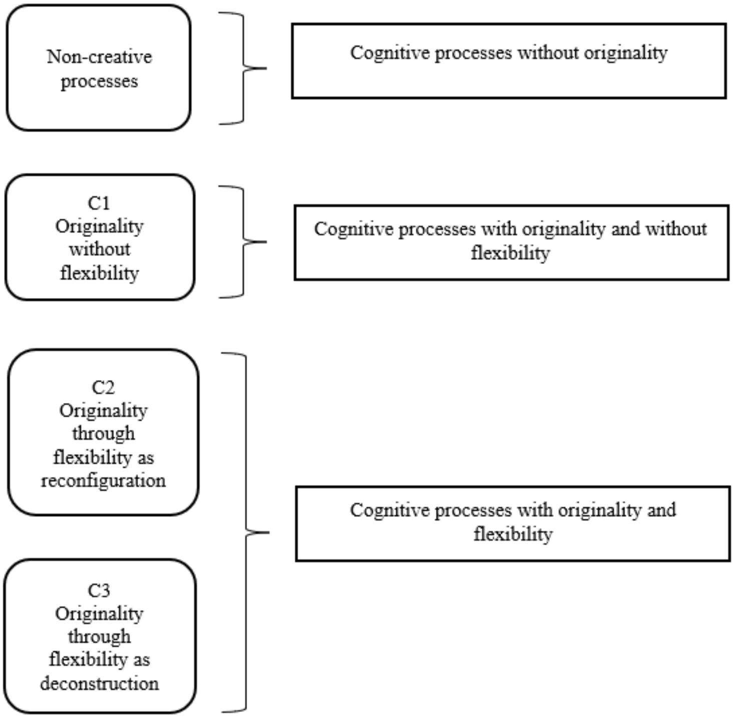
Originality is essential for a process to be considered creative. It involves elements of discovery and introduces new ideas, as opposed to reproductive thinking, which is about recalling or repeating existing knowledge (Lithner, 2008). For example, in mathematics education, solving problems requiring new strategies is seen as creative, while merely reproducing known procedures is not (Asenova et al., 2022; Zan, 1998).

In this sense, in our model the characteristic of originality is considered as a feature of each of the different types of creative processes.

The property of flexibility, on the other hand, is optional. Flexibility, when combined with originality, allows for the differentiation of three types of creative processes that we indicate as C1, C2, C3 (Figure 2).

Figure 2

The first step of the model: different categories of creative processes



C1 does not involve flexibility; C2 and C3 both connect originality to flexibility but involve flexibility in two different ways from a cognitive perspective. In the following we expose the three categories of creative processes, C1, C2 and C3, illustrating them by examples taken from the study of Pitta-Pantazzi et al. (2022) on mini-c instances in mathematics education.

1) *The first category C1* involves original thinking without flexibility. It is about logically combining known elements to discover new solutions or reasoning methods, maintaining their original properties. In mathematics education, instances of "involving insights of mathematical concepts" (Pitta-Pantazzi et al., 2022, p. 57), can fall into this category. In the specific example cited in the article, sixth-grade students encounter the concept of arithmetic mean through a realistic scenario in which various critics provide numerical scores for films. When faced with the problem of judging and comparing films based

on these numerical ratings, some students exhibited examples of processes akin to C1, reasoning as follows: if numbers quantify ratings, then it is reasonable to assume that sets of these numbers can be compared with each other to generate broader and more comprehensive evaluations. In this way, just by logically extending the premises of the initial situation, students creatively "exhibited understanding of the mean concept as a number that is representative of a set of numbers" (Pitta-Pantazzi et al., 2022, p. 57), which they had never met before.

2) *The second category C2* of creative processes integrates the property of originality with that of flexibility. In these cases, flexibility means that what is already known is not simply developed in continuity with its ordinary premises but is rethought from a new perspective.
    a. *Originality* emerges through operations of comparison, connection, and combination between elements that are generally not related and which, as a result, are reconfigured in their fundamental features. Several cases of mini-c that have emerged from research in mathematics education fall into this typology. Picking up on the previous example, students tackled the problem of film reviews not only by reasoning from the simple comparison of numerical grades but also by answering questions and using digital tools centered on the analogy between the calculation of the arithmetic mean and the visual operations of balancing weights on a seesaw. This is an example of mathematical insight in which flexible thinking supports creative reasoning. The discovery of a new function for numbers is developed around an analogical correspondence between usually distant and unrelated domains of experience, such as rating movies and balancing weights on a seesaw. In this case, moreover, the analogy is not only functional to an initial intuition of the concept of arithmetic mean but also supports a subsequent "Precision phase" (Pitta-Pantazzi et al., p. 54) in which students propose arguments and invent calculation strategies by developing the logical consequences of the analogy. The example is significant in clarifying how this type of creative process relates to another instance of mini-c relevant to mathematics teaching and learning, called "creation, manipulation, and connection of representations" (Pitta-Pantazzi et al., 2022, p. 60).
    b. *Flexibility* of the creative process C2 is expressed in the ability to identify innovative forms of knowledge representation and to work on semiotic transformations - treatments within the same semiotic register and conversions between two different semiotic registers (Duval, 1995; 2011/2017) – that are usually kept distinct and unconnected. In the

specific case examined here, against the backdrop of the heuristic analogy with balancing, the reasoning and calculations developed by the students are not confined to a single register but integrate different forms of representation: "These instances emerged as students were (i) exploring the different representations of the applet; (ii) switching between the pictorial digital balance representation and its verbal interpretation; (iii) recreating the balance model on their worksheets; and (iv) using the pictorial representation on their worksheets as a tool to find the mean" (Pitta-Pantazzi et al., 2022, p. 60).

3) *The third category C3* of creative processes is characterized by a different meaning of flexibility as the one used above. Flexibility is here intended as the ability to suspend and deconstruct established thinking structures to open up new creative possibilities. These creative processes are often linearly linked to the other two categories because they provide a premise or are recursively activated on already elaborated creative solutions to find alternatives. In mathematics education, the mini-c instance classified as "flexible thinking" (Pitta-Pantazzi et al., 2022, p. 62) best exemplifies this third category. The students in the study under consideration showed cognitive flexibility not only in the creative solutions with which they interpreted and represented the scores and their balancing but also in their ability to alternate and integrate different calculation strategies. Their strategies were based on the visual seesaw model and on the classical algorithm introduced to them by the teacher, without either of the two constituting a rigid constraint that prevented them from considering and valuing the other. Moreover, even within the same semiotic register and the same model or procedure, this type of cognitive flexibility emerged when students proposed different sets of numbers for the same mean and different strategies for identifying them (Pitta-Pantazzi et al., 2022).

So far, we introduced a classification in which the psychometric properties of originality and flexibility were reinterpreted as indicators to distinguish different kinds of cognitive functioning of creative processes and were explicitly linked to the mini-c instances identified in mathematics education. These different kinds of cognitive functioning of creative processes can now be characterized in reference to conceptual aspects. This will allow us to differentiate the cognitive mechanisms underlying different types of creative processes through operationalizable concept-building strategies from which general criteria for task design in education can be deduced.

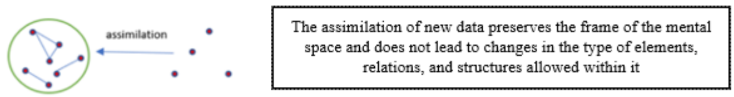
4.2. The characterization of the categories of creative processes through the theory of conceptual blending

In this section, we delve deeper into the cognitive functioning of creativity. Creative processes engage in conceptual blending strategies, while non-creative processes do not. We refer to different conceptual blending strategies to explain the distinct cognitive functioning within the three categories C1, C2, and C3 introduced in Section 4.1

Mental processes that do not involve creative thinking open a single mental space with unchanged rules and structures (Figure 3). They simply rely on cognitive organization already available in memory, effective for guiding interpretation and action. New data are assimilated preserving the frame of the mental space without changing the type of elements and their relations. In mathematics education, this is akin to exercises that reproduce formal mathematical knowledge without challenging or enriching established concepts and thinking strategies.

Figure 3

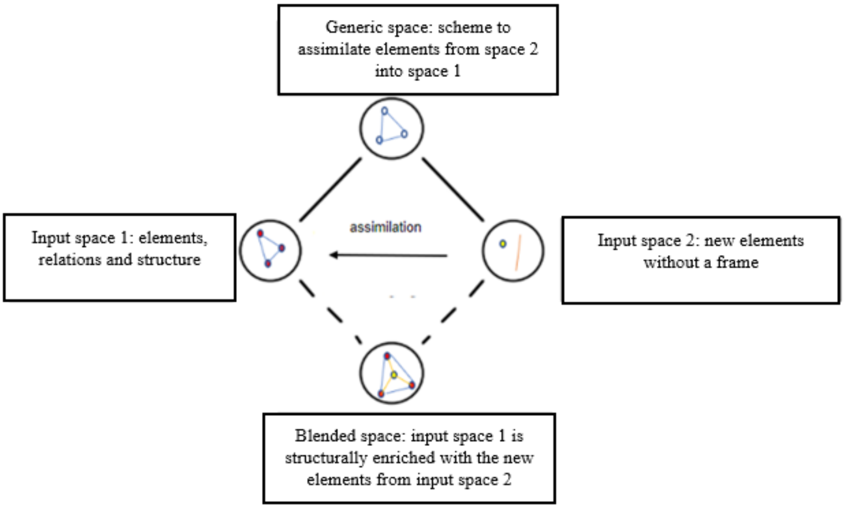
Representation of the cognitive functioning of a mental process that does not involve creative thinking: A single mental space is opened whose rules are reproduced and structures are preserved without substantial alteration



Creative processes, categorized as C1, C2, and C3, involve conceptual blending. Here, we refer to the three types of blending networks, *simplex, single-scope, and double-scope*, described in section 3.2., to frame these categories and explain their different cognitive functioning. In all these forms of conceptual blending, two mental spaces are involved as input spaces. In each of these forms, however, the relations between the two input spaces vary, and these distinctions can elucidate the differences between C1, C2, and C3 on a cognitive level, allowing also a distinction of two sub-cases for C2-creative processes.

Simplex networks explain the cognitive functioning of the first category of creative processes C1, in which originality is not accompanied by flexibility. In this case, the blending process involves the assimilation of new elements from input space 2 within the framework of input space 1 (see Figure 4).

Figure 4
Representation of the cognitive functioning of the C1-creative processes, in which originality is not accompanied by flexibility, based on the simplex network: the new external data are interpreted from the constituent rules of the initial mental space and are thus integrated within it



The resulting blending space is original compared to input space 1 because it introduces new elements and new relationships. However, it retains its original frame intact, which is not reconfigured but rather enriched and elaborated upon. The generic space represents a scheme that allows to assimilate elements from input space 2 into input space 1 without involving blending.

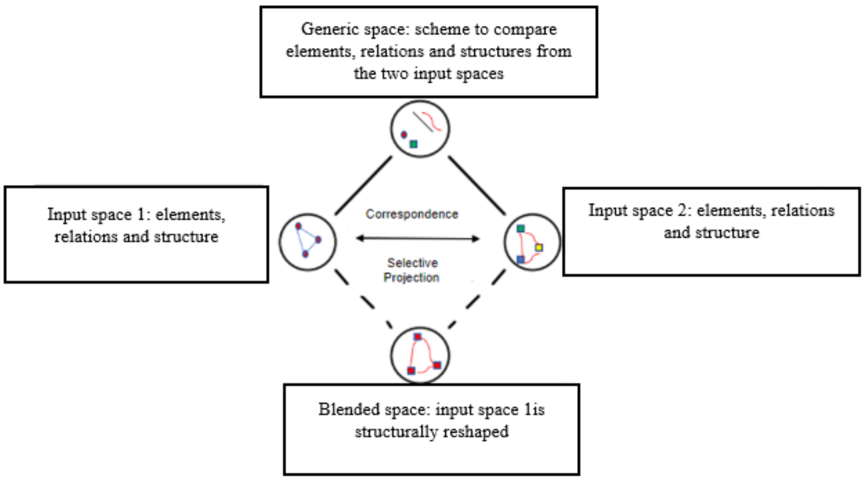
Carrying on the example discussed in section 4.1., input space 1 is rooted in the script that guides the critical evaluation of films. Within this space, numerical elements are employed to quantify judgments, serving as the foundation for numerical comparisons and relationships. When tasked with commenting on reviewers' individual judgments using provided scores, one simply engages in an exercise that does not enhance the structure of the mental space or challenge creative thinking. However, integrating different scores for the same film or comparing films with multiple scores introduces a second input space with unedited elements. While adhering to the basic rules of input space 1, this new input encourages the creative exploration of hypotheses and conceptual insights regarding numerical roles. Consequently, it allows for the introduction of new elements and relationships, such as numbers representing not only individual rankings but also averages.

Double scope networks and *single scope networks* explain the cognitive functioning of the second category of creative processes C2, allowing to distinguish two sub-categories of such processes. In both these cases, we start with two independent and unrelated input spaces, each providing a frame. The blending process that follows generates a new space that is not simply the enrichment of space 1 or 2 but is rather based on a profound qualitative transformation of the starting mental spaces.

In the case of the *double-scope networks*, input spaces 1 and 2 are brought together via analogical correspondences (i.e., recognition of similarities) between their elements, relations, and structures (see Figure 5).

Figure 5

Representation of the cognitive functioning of the first sub-category of C2- creative processes, in which originality is accompanied by flexibility, based on the double-scope network: two or more mental spaces that include unrelated elements, relations, and structures are brought together



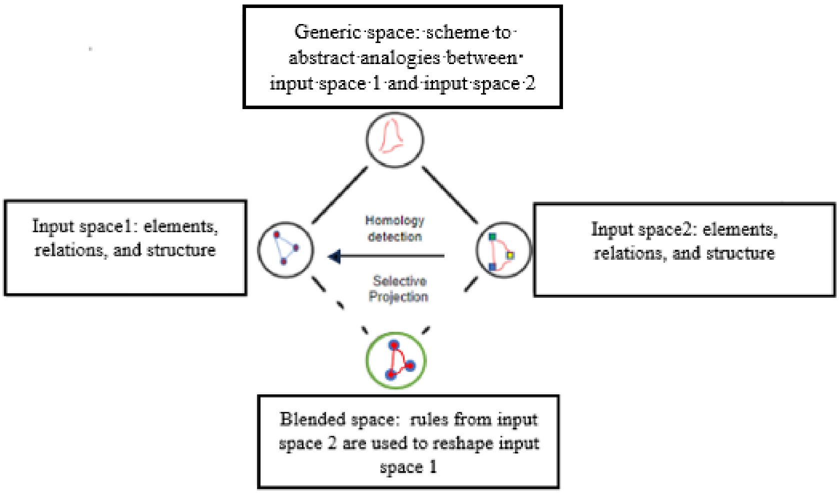
In this case the generic space represents a scheme that allows to compare elements, relations, and structures from the two input spaces.

Returning to the example of the arithmetic mean, tasks involving the visual seesaw model require more than just incorporating new data into the original script. They demand a creative and flexible effort to reinterpret it in the context of a new correlation with a distinct mental space related to balancing games on a seesaw. As a result of this divergent input, numbers are not seen only as rankings, but also as ‘weights,’ or ‘balance’, and new ways to connect and represent them are created, linked, and manipulated.

In the case of *single-scope networks*, instead, recognize elements, relations, and structures typical of one mental space as suitable for organizing other spaces. This leads to reinterpreting heterogeneous mental spaces under a common set of rules (homology detection), supporting cognitive flexibility to generalize (see Figure 6).

Figure 6

Representation of the cognitive functioning of the second sub-category of C2-creative processes, in which originality is accompanied by flexibility, based on the single-scope network: the elements, relations, and structures considered exclusive or typical of a mental space are recognized as suitable and functional for organizing other mental spaces as well



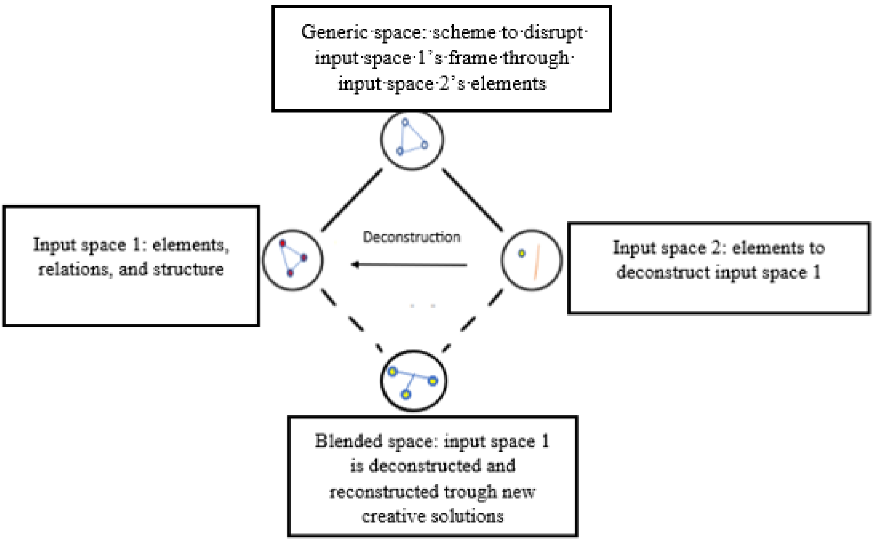
In this case the generic space represents a scheme that allows to abstract analogies between input space 2 and input space 1.

In the context of the example we are using to exemplify the cognitive functioning of the creative processes, this type of C2 process emerges, for example, when students start conversations or engage in problem-solving and problem-posing activities, in which the new conceptual insights into how numbers are used and represented are transferred to the evaluation of different films or even to completely different contexts that do not concern the critical evaluation of films in any way.

Simplex networks explain the cognitive functioning of C3-creative processes, but in a different way than they do in C1-creative processes. Indeed, the C3 category involves flexibility enabling individuals to break free from established forms of reasoning. This can be understood through a unique application of the simplex network. As introduced above, in this network, input space 1 consists of a frame, while input space 2 consists only of specific elements. Unlike C1, however, in this case blending with elements from space 2 does not enrich the frame of space 1; instead, it deconstructs it, allowing for the creation of entirely new solutions. (see Figure 7).

Figure 7

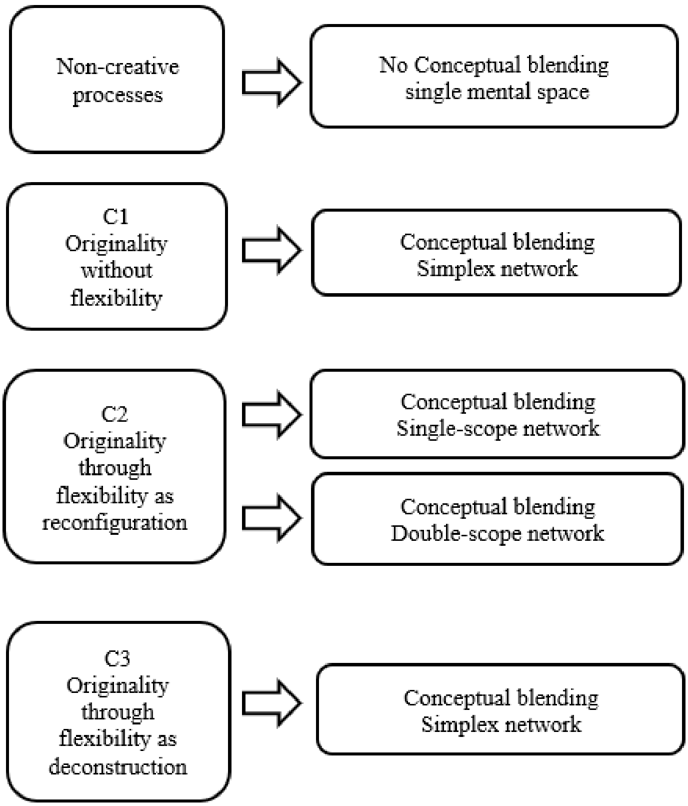
Representation of the cognitive functioning of the C3-creative processes, in which originality is accompanied by flexibility, based on simplex network: blending with a two-stage movement - a starting mental space is partially or totally deconstructed - the new input space is restructured by blending with other mental spaces - according to one of the other three types of networks



In our example, during the learning process, students engage in various C1 and C2 processes that enrich/restructure/expand the initial script regarding the numerical evaluation of films, with the creative discovery of the concept of mathematical mean and various strategies to calculate and represent it. However, they are not bound to mechanically follow the new rules of this mental space, even when they have creatively constructed them. In fact, especially when confronted with new disruptive and thought-provoking elements, they can suspend and/or alter the rules of this space to discover alternative ways to engage with ratings and averages.

Figure 8 offers a synthesis of the second step of the model, represented by the categorization of creative and not-creative processes, based on the conceptual blending networks. It shows how these networks explain the cognitive functioning of C1-,C2- and C3-processes.

Figure 8
The second step of the model: categorization of creative and non-creative processes through conceptual blending



5. General task design requirements

In this section we delineate general task design requirements to foster creativity in mathematics learning, building upon the model presented in Section 4. More specifically, in continuity with the categories of creative processes introduced above, four general types of task design requirements can be distinguished. In the following we characterize and discuss these four task design requirements.

The *first basic requirement* of task design states the importance of a mathematically significant problem defined in a context that is familiar for the student and defines a shared metal space. Suitable contexts for this *mathematically-significant-problematic-space-requirement* could be everyday experiences, narrative sources, or existing mathematical knowledge familiar to them. However, to ensure didactic significance in subsequent blending phases, the function and meaning of mathematical elements within this shared mental space must be clear and relatable. To establish this initial clarity, an extended phase of observation and dialogue with students could be necessary. A key requirement for generating this educational scenario, as emphasized in literature (Leikin & Sriraman, 2022), is presenting students with questions or problems of an appropriate degree of openness: not too open to lose relevance to the starting situation, yet not too closed to restrict creative thought. Therefore, accounting for the characteristics of the class and fostering a shared and open thinking space are vital for authentic and meaningful engagement with creativity in learning.

The *second requirement* focuses on the first category of creative processes, C1, and allows us to work on the creative insight of mathematical concepts with an *incremental-approach-requirement* that does not require flexible thinking. To enhance such creative processes, rooted in the simplex network of conceptual blending, it is crucial to introduce a new input space whose elements can mathematically enrich the initial situation. For instance, data can be presented, or thought-provoking questions can be posed, to introduce a new mathematical functionality that can be built from the initial elements and within the rules of the starting context. The conditions for this to happen depend on the teacher's ability to rethink the mathematical learning goals in the light of the starting situation and to propose them in a language consistent with the rules and structures of this shared mental space (e.g., in reference to the example used before, this could happen byframing the discovery of arithmetic mean as a problem of movies comparison). While this requirement ensures originality in thought processes, it does not explicitly prioritize flexibility. It is possible for students to spontaneously engage in more complex and flexible blending processes, but the primary focus of this requirement is not systematically fostering this aspect of creativity.

The *third requirement* affirms that tasks must require connection with elements that do not fit into the starting situation and allow students to discover and develop the divergent association independently. The main goal in this case is to work with tasks that transcend the rules of the initial situation through the association between different mental spaces. This *divergence-requirement* is related to the second category of creative processes, C2, and can be used to work with the type of cognitive flexibility based on double-scope blending or single-scope blending.

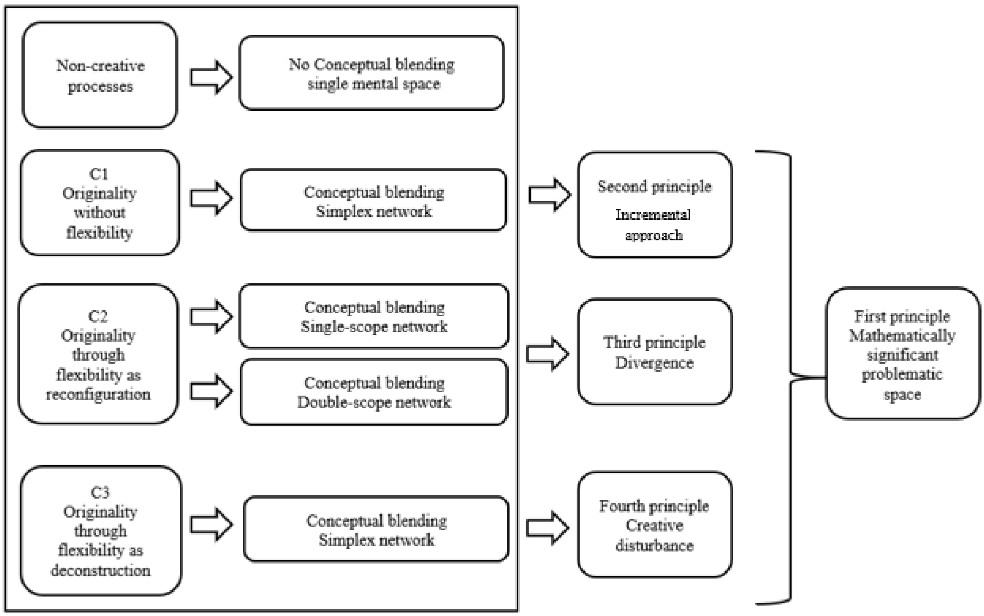
In the case of double-scope blending, task design must start from a divergent and mathematically significant interpretation of the elements encountered in the starting situation (e.g., average=balance). This premise can originate as much from the teacher's planning as from creative ideas that spontaneously emerge from students. It can be as much an incentive to develop analogical correspondences between different concepts or modes of representation (e.g., numerical calculation of the mean/verbal explanations/linear distances on the seesaw), as well as the request to manage eccentric and divergent associations (e.g., film scores - weights to balance).

In the case of generalization through single-scope blending, instead, task design must stimulate new associations that allow for the identification of alternative contexts in which to apply what has been previously discovered (e.g., where else can we use the seesaw model to solve problems with arithmetical means?).

The *fourth requirement* is focused on the kind of flexible thinking related to simplex blending, which belongs to the third category of creative processes, C3. What is needed in this case, are creative disturbance tasks, which allow to deconstruct the starting situation that needs to be reconfigured creatively. We thus refer here to a *creative-disturbance-requirement*. Teachers can move from the simple request for alternative solutions (e.g., can we use the seesaw to find different calculation strategies?) to targeted intervention on specific elements of the initial mental space by imposing additions, elisions, or substantial modifications on properties and structures (e.g., how to communicate the average scores without writing? How can we use as few numbers as possible?).

In summary, the *mathematically-significant-problematic-space-requirement* applies to all three categories of creative processes and allows us to establish the basic conditions for working on originality and generating conceptual blending processes. The other three requirements, instead, allow us to work on additional conditions to focus on the different categories of creative processes distinguished above: the *incremental-approach-requirement* allows us to focus on category C1, by working with simplex blending and without guaranteeing cognitive flexibility; the *divergence-requirement* focuses on category, C2, by working on cognitive flexibility with double-scope and single-scope blending; the *creative-disturbance-requirement* concerns the third category, C3, and focuses on simplex blending to work on the flexible deconstruction and reconstruction of acquired strategies and ways of reasoning. Figure 9 provides an overview of the four general requirements for task design, in connection to C1, C2, C3 and the corresponding conceptual blending networks.

Figure 9
Four general requirements for task design derived from the model



6. Discussion

As a result of what has been stated so far, the model presented in section 4 provides a complete answer to the first of the two research sub-questions addressed in this study: *Which are the characteristics of a theoretical model able to provide a synthetic and comprehensive explanation of the cognitive functioning of creative processes?*

We can answer this research question by first recalling the model's components and the relations between them, and then by explaining why the model is supposed to provide a synthetic and comprehensive explanation of the cognitive functioning of creative processes.

The theoretical model presented in section 4 is based on the definition of three distinct types of creative processes, each embodying the characteristics of originality and/or flexibility in varied ways. In it, the cognitive functioning of the creative process categories defined above is clarified by the conceptual blending networks taken from the theory of conceptual blending.

The model can be considered as providing a synthetic and comprehensive explanation of the cognitive functioning of creative processes at least for three reasons.

Firstly, the model does not merely provide point-by-point descriptions of specific creative performances but provides a general classification of creative processes based on an explanation of their cognitive functioning. Consequently, in addition to empirically observing how creative thinking supports meaningful learning, with this model it is also possible to clarify how this is possible on a cognitive level.

Secondly, the model has a unified and comprehensive nature. The different types of conceptual blending networks explain how creative processes work, without depending on the punctual analysis of specific examples. Indeed, the model aims to explain all possible implementations of mini-c instances in mathematics education and, possibly, to become a framework for further descriptive research aimed to detect mini-c instances that have not yet been considered.

Finally, the explanatory potential of the model is not limited to the psychological level but has clear educational implications. The theoretical language of conceptual blending is based on concept-building strategies that can be readily operationalized, starting from elements, relations, and structures of mental spaces, up to the dynamics of combination, correlation, and reconfiguration of different input spaces within integration networks. In this sense, the model allows us to explain which tasks are suitable for stimulating creative processes that support mathematical learning.

This last point leads us to the answer to the second research sub-question: *Which task-design requirements can be deduced from this model in order to stimulate and foster creativity in mathematical learning?*

Starting from the classification and explanation of mini-c processes at the cognitive level in the previous section, we have not only confirmed the importance of open tasks, already recognized in the literature (*mathematically-significant-problematic-space-requirement*), but we have also introduced other three general design requirements to structure these tasks in a way that stimulates and develops different types of creative processes: the *incremental-approach-requirement*, needed for creative processes where no flexibility is required; the *divergence-requirement*, needed to work on flexibility in the sense of divergent associations, analogical correspondences and generalization; the *creative-disturbance-requirement*, needed to enhance flexible creative processes where fixed mental patterns are deconstructed and reshaped.

In order to answer the main research question: *Which are general requirements of task design for tasks able to stimulate and foster creativity in learning mathematics?*, we should now explain in what sense the above mentioned task design requirements can be considered as general, but also specific to mathematics education.

The task design requirements listed above can be considered as general requirements because they are independent of the specificity of the mathematical content involved in the tasks. Furthermore, they cover a wide range of possible creative cognitive behaviors that are described and characterized by basic cognitive tools, recognized in the literature as conceptual building strategies on which human thinking processes are founded. But, at the same time, these requirements are suitable for mathematics education, as we have shown with the paradigmatic example of mini-c instances, such as the creative development of conceptual insights, the manipulation and connection of representations, and the exercise of flexible thinking, taken from research in mathematics education (Pitta-Pantazzi, et al., 2022) and specific to this domain of knowledge.

7. Conclusions

Our purpose in this paper was to investigate the possibility to work out general task design requirements able to support researchers and teachers in producing suitable tasks able to stimulate and possibly develop the emergence of creative behavior within 'every day' classroom settings. To do this, we needed a theoretical model able to explain how the characteristics we included in our definition of creativity (originality and flexibility) can be linked to the cognitive strategies of conceptual blending, considered as the basic cognitive tools in human thinking (the conceptual networks single-scope, simplex, double-scope). This allowed us to 'open' what we called the 'black box' of the creativity tasks that seem to transform non-creative students into creative ones. Indeed, we were able to explain which are the cognitive processes that presumably make such tasks work, but also to which extent creative processes differ from non-creative ones. However, our investigation took a step further in operationalizing these requirements. This was accomplished by the instantiation of the characterized cognitive strategies of creative thinking by the mini-c instances known from literature in mathematics education research.

Although we were able to answer our research questions positively, our investigation also has limits: it is purely theoretical and the model we provided needs to be validated by testing the effectiveness of the derived requirements in task design. This is certainly one of the possible future research paths.

But looking up a little from the objectives set out in this paper, we believe to have also prepared the ground for future research that can take several other directions. Indeed, given the research problem we started with, the results achieved by our investigation can be considered as relevant at different levels that go beyond the ones related to the research questions.

Firstly, the requirements of task design allow for educational design in which mini-c processes are not only generically induced but become the object of explicit reflection and can be consciously linked to specific learning goals[4]. This means that further research could be carried out to provide such links, based on concrete examples of mathematical topics.

Secondly, the requirements can unify the variety of existing models and observational studies within a synthetic classification based on a shared conceptual framework provided by conceptual blending. The empirical studies focused on open problems and multiple tasks in mathematics education fall under the first requirement, which sets general didactic and pedagogical conditions for attributing a creative character to learning processes. The other three requirements, which instead add more specific details for structuring tasks, allow us to simplify the heterogenous variety of psychological theories on task design (see section 2) to three essential categories. This is not only useful for generating tasks independently but also for 'navigating' the existing literature and identifying redundancies and synergies between different theoretical approaches. We believe that this could be an important topic to be developed and discussed within the field of the epistemology of mathematics education as a research domain (Asenova, 2023).

References

Abelson, R.P. (1981). Psychological status of the script concept. *American psychologist*, *36*(7), 715–729.

Aljarrah, A. (2020). Describing collective creative acts in a mathematical problem-solving environment. *The Journal of Mathematical Behavior*, *60*, 100819. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100819

Asenova, M. (2023) Is theoretical topic-specific research "old fashioned"? An epistemological inquiry about the ontological creativity of Mathematics Education Research. *Mathematics Education Research Journal* https://doi.org/10.1007/s13394-023-00471-z

[4] With this, we do not mean that students' creative thinking is rigidly predictable and that the requirements of task design should be used to control it. Even when designed to reach a precise learning target (e.g., discovering the average as balance), tasks should not be conceived as prediction and control mechanisms but as conditions that catalyze the free and personal expression of creative thought (Sriraman, 2022).

Asenova, M., D'Amore, B., Del Zozzo, A., Fandiño Pinilla, M.I., Iori, M., Marazzani, I., Monaco, A., Nicosia, G.G., & Santi, G. (2022). *I problemi di matematica nella scuola primaria tra ricerca didattica e prassi scolastica*. Pitagora. [Mathematics problems in primary school between didactic research and school practice].

Beghetto, R.A., & Kaufman, J.C. (2007). Toward a broader conception of creativity: A case for mini-c creativity. *Psychology of Aesthetics, Creativity, and the Arts*, *1*(2), 73–79. https://psycnet.apa.org/doi/10.1037/1931-3896.1.2.73

Bell, P., Hoadley, C. M., & Linn, M. C. (2004). *Design-Based research in education. In Internet Environments for Science Education* (pp. 73–88). Lawrence Erlbaum Associates. https://doi.org/10.4324/9781410610393

Boesen, J., Lithner, J., & Palm, T. (2010). The relation between types of assessment tasks and the mathematical reasoning students use. *Educational Studies in Mathematics*, *75*(1), 89–105.

D'Amore, B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica*. Pitagora. [Elements of Mathematics Education].

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations*. Prefazione di Bruno D'Amore. Springer International Publishing AG. (Original work published in Portuguese by Proem Editora, São Paulo, 2011). https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9

Fauconnier, G., & Turner, M. (2002). *The way we think: Conceptual blending and the mind's hidden complexities*. Basic Books.

Fauconnier, G., & Turner, M. (2003). Conceptual Blending, Form and Meaning. *Recherches en communication*, *19*, 57–86. https://doi.org/10.14428/rec.v19i19.48413

Guilford, J.P. (1959). Traits of creativity. In H. H. Anderson (Ed.), *Creativity and its cultivation* (pp. 142–161). Harper & Row.

Haavold, P.Ø., & Sriraman, B. (2022). Creativity in problem solving: Integrating two different views of insight. *ZDM–Mathematics Education*, *54*(1), 83–96.

Haavold, P., Sriraman, B., Lee, K.H. (2020). Creativity in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 145–154). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_33

Joklitschke, J., Rott, B., & Schindler, M. (2022). Notions of creativity in mathematics education research: A systematic literature review. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *20*(6), 1161–1181.

Kaufman, J.C., & Beghetto, R.A. (2009). Beyond big and little: The four C model of creativity. *Review of General Psychology, 13*, 1–12.

Lee, K.H. (2017). Convergent and divergent thinking in task modification: a case of Korean prospective mathematics teachers' exploration. *ZDM–Mathematics Education*, *49*(7), 995–1008. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0889-x

Leikin, R. (2013). Evaluating mathematical creativity: The interplay between multiplicity and insight1. *Psychological Test and Assessment Modeling*, *55*(4), 385–400.

Leikin, R., & Elgrably, H. (2022). Strategy creativity and outcome creativity when solving open tasks: Focusing on problem posing through investigations. *ZDM–Mathematics Education*, *54*(5), 1–15. http://dx.doi.org/10.1007/s11858-021-01319-1

Leikin, R., & Sriraman, B. (2022). Empirical research on creativity in mathematics (education): From the wastelands of psychology to the current state of the art. *ZDM–Mathematics Education*, *54*(1), 1–17. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01340-y

Levav-Waynberg, A., & Leikin, R. (2012). The role of multiple solution tasks in developing knowledge and creativity in geometry. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(1), 73–90. https://psycnet.apa.org/doi/10.1016/j.jmathb.2011.11.001

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in mathematics*, *67*(3), 255–276. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9104-2

McKenney, S., & Reeves, T. (2018). *Conducting educational design research*. Routledge.

Pellegrino, J.W., & Hilton, M.L. (Eds.). (2012). *Education for life and work: Developing transferable knowledge and skills in the 21st century*. National Academies Press.

Pitta-Pantazi, D., Christou, C., Demosthenous, E., Pittalis, M., & Chimoni, M. (2022). Nurturing mathematical creativity for the concept of arithmetic mean in a technologically enhanced 'personalised mathematics and mathematics inquiry' learning environment. *ZDM–Mathematics Education*, *54*(1), 51–66. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01308-4

Pitta-Pantazi, D., Kattou, M., & Christou, C. (2018). Mathematical creativity: Product, Person, Process and Press. In: Singer, F. (Ed.), *Mathematical Creativity and Mathematical Giftedness: Enhancing Creative Capacities in Mathematically Promising Students*(pp. 27–53). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73156-8_2

Rhodes, M. (1961). An analysis of creativity. *The Phi delta kappan*, *42*(7), 305–310.

Schindler, M., & Lilienthal, A.J. (2022). Students' collaborative creative process and its phases in mathematics: An explorative study using dual eye tracking and stimulated recall interviews. *ZDM–Mathematics Education*, *54*(1), 163–178. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01327-9

Schoevers, E.M., Kroesbergen, E.H., Moerbeek, M., & Leseman, P.P. (2022). The relation between creativity and students' performance on different types of geometrical problems in elementary education. *ZDM–Mathematics Education*, *54*(1), 133–147. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01315-5

Singer, F.M., & Voica, C. (2022). Playing on patterns: is it a case of analogical transfer? *ZDM–Mathematics Education*, *54*(1), 211–229. http://dx.doi.org/10.1007/s11858-022-01334-w

Sriraman, B. (2022). Uncertainty as a catalyst and condition for creativity: the case of mathematics. *ZDM–Mathematics Education*, *54*(1), 19–33. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01287-6

Sriraman, B., & Dickman, B. (2017). Mathematical pathologies as pathways into creativity. *ZDM–Mathematics Education*, *49*(1), 137–145. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0822-8

Torrance, E.P. (1974). *Torrance tests of creative thinking*. Scholastic Testing Service.

Zan, R. (1998). *Problemi e convinzioni*. Pitagora.

Insegnare la psicometria: Come aumentare l'interesse per una disciplina STEM in un corso di studi non-STEM

Teaching Psychometrics: How to increase interest in a STEM discipline in a non-STEM course of study

Enseñar la psicometría: cómo aumentar el interés en una disciplina STEM en un curso de estudio que no es STEM

Andrea Bosco
Dipartimento di Scienze della Formazione, Psicologia, Comunicazione
Università degli Studi di Bari Aldo Moro, Italia

Sunto. *Le discipline STEM e in particolare la matematica possono essere motivanti e utili anche per gli studenti che si iscrivono a corsi di laurea non-STEM. Tuttavia, queste discipline possono essere percepite come ostiche e meno rilevanti rispetto alle discipline più tradizionali, come le scienze umane o sociali. Per motivare gli studenti, è possibile definire chiaramente il valore delle discipline STEM. Presentare le discipline STEM in modo coinvolgente e accessibile. È possibile adottare metodologie didattiche innovative che stimolino l'interesse e la curiosità degli studenti e favorire il lavoro di gruppo che può aiutare gli studenti a comprendere meglio le discipline e a sviluppare competenze di collaborazione e problem solving. In particolare, ci si concentra sull'insegnamento della psicometria, una disciplina che richiede competenze matematiche e statistiche avanzate. La psicometria può essere motivante per gli studenti se viene presentata in modo chiaro e accessibile e se si concentra sulle applicazioni pratiche della disciplina. Le tecnologie possono essere utilizzate per rendere l'apprendimento della psicometria più coinvolgente e interattivo. Ad esempio, i docenti possono utilizzare software di simulazione per aiutare gli studenti a comprendere i concetti matematici e statistici. Tra le strategie didattiche che possono essere utilizzate per motivare gli studenti a studiare la psicometria, l'autore propone quindi l'uso delle tecnologie e la Team-based learning. In conclusione, le discipline STEM possono essere motivanti e utili anche per gli studenti che si iscrivono a corsi di laurea umanistici. Per motivare questi studenti, è importante definire chiaramente il valore delle discipline STEM, presentarle in modo coinvolgente e accessibile e favorire il lavoro di gruppo.*

Parole chiave: Didattica della psicometria; matematica; discipline STEM; tecnologie; team-based learning

Abstract. *STEM subjects, especially mathematics, can be motivating and useful for* *students who enroll in non-STEM undergraduate programs. However, these subjects can be perceived as difficult and less relevant than traditional subjects such as the humanities or social sciences. To motivate students, the author proposes a series of strategies, including clearly define the value of STEM subjects. Students need to understand how these subjects can be useful for their future careers and personal lives. Present STEM subjects in a stimulating and accessible way. Teachers can use innovative teaching methods that stimulate students' interest and curiosity. Foster teamwork. Teamwork can help students better understand STEM subjects and develop collaboration and problem-solving skills. In particular, the focus is on the teaching of psychometrics, a discipline that requires advanced mathematical and statistical skills. Psychometrics can be motivating for students if it is presented clearly and accessibly and if it focuses on the practical applications of the discipline. Technologies can be used to make the learning of psychometrics more stimulating and interactive. For example, teachers can use simulation software to help students understand mathematical and statistical concepts. Among the teaching strategies that can be used to motivate students,there is the team-based learning. In conclusion, STEM subjects can be motivating and useful for students who enroll in liberal arts, social and psychological undergraduate programs. To motivate these students, it is important to clearly define the value of STEM subjects, present them in a stimulating and accessible way, and foster teamwork.*

Keywords: teaching psychometrics; mathematics; STEM subjects; technologies; team-based learning

Resumen. *Las disciplinas STEM y, en particular la matemática, pueden ser motivadoras y útiles para los estudiantes que se matriculan en carreras que no son STEM. Sin embargo, estas disciplinas pueden percibirse como difíciles y menos relevantes que disciplinas más tradicionales, como las humanidades o las ciencias sociales. Para motivar a los estudiantes, se puede definir claramente el valor de las disciplinas STEM. Presentar las disciplinas STEM de una manera atractiva y accesible. Es posible adoptar metodologías docentes innovadoras que estimulen el interés y la curiosidad de los estudiantes y fomenten el trabajo en grupo, que puede ayudar a los estudiantes a comprender mejor las disciplinas y a desarrollar habilidades de colaboración y resolución de problemas. En particular, nos enfocamos en la enseñanza de la psicometría, una disciplina que requiere habilidades matemáticas y estadísticas avanzadas. La psicometría puede resultar motivadora para los estudiantes si se presenta de forma clara y accesible y si se centra en las aplicaciones prácticas de la disciplina. Se pueden utilizar tecnologías para hacer que el aprendizaje de la psicometría sea más atractivo e interactivo. Por ejemplo, los profesores pueden utilizar software de simulación para ayudar a los estudiantes a comprender conceptos matemáticos y estadísticos. Por esto, entre las estrategias didácticas que se pueden utilizar para motivar a los estudiantes a estudiar psicometría, el autor propone el uso de tecnologías y el aprendizaje basado en equipos. En conclusión, las disciplinas STEM también pueden ser motivadoras y útiles para los estudiantes que se matriculan en carreras de* *humanidades. Para motivar a estos estudiantes, es importante definir claramente el valor de las disciplinas STEM, presentarlas de una manera atractiva y accesible y fomentar el trabajo en equipo.*

Parablas clave: Enseñanza de la psicometría; matemáticas; disciplinas STEM; tecnología; aprendizaje en equipo

1. Introduzione

Si dice che il grande economista John Maynard Keynes fosse solito ripetere un vecchio proverbio inglese che suona più o meno così: si può portare il cavallo alla fontana, ma non lo si può convincere a bere. Di là del significato che questa massima aveva per uno dei principali sostenitori del liberalismo sociale, credo rappresenti una valida metafora dell'insegnamento. Il nostro compito è favorire l'apprendimento e correggere eventuali distorsioni nel metodo d'insegnamento e poi, però, dobbiamo saper attendere che chi apprende trovi la propria strada, che partecipi attivamente alla propria formazione. In alcuni casi la convergenza tra offerta e domanda di formazione è facile da realizzare. Alcune discipline mainstream o prototipiche all'interno di un corso di studi universitario trovano spontaneamente il pieno apprezzamento degli studenti e delle studentesse. Sono quelle discipline che apportano le conoscenze che erano fin dal principio interessati ad approfondire. Vi sono poi altre discipline che allo sguardo dell'esperto risultano vantaggiose per la piena espressione degli atti tipici di una professione e che però non mostrano la medesima validità di facciata di quelle prototipiche di cui sopra, risultano spesso più ostiche e meno chiaramente associabili a quello che, magari sulla base di un pregiudizio, è considerato il core business di una professione associata a un percorso di formazione universitaria. In questo breve saggio intendo affrontare proprio questo argomento: come si possono creare le condizioni per motivare gli studenti ad avvicinarsi, impegnarsi e appassionarsi allo studio di discipline STEM in corsi universitari non-STEM quali quelli umanistici o delle scienze sociali. Farò più direttamente riferimento agli insegnamenti riferibili al settore scientifico disciplinare di psicometria che costituiscono le discipline con maggiore contenuto tecnico – in senso matematico e statistico – tra quelle che gli studenti dei corsi universitari in psicologia incontrano nel loro percorso universitario e certamente quelle che di più sembrano divergere da ciò che è considerato prototipico all'interno di quei corsi di studi e dalla professione cui preparano.

Comincerò col definire sinteticamente le criticità intrinseche delle discipline STEM e tra queste della matematica. Passerò quindi a discutere le difficoltà associate all'insegnamento delle discipline STEM e della matematica in corsi di studio non-STEM, in particolare della psicometria, disciplina alleata della matematica e della statistica, nei corsi di psicologia. Concluderò con un cenno all'uso delle tecnologie al servizio dell'apprendimento di matematica, statistica e psicometria e alla *Team-based learning* applicata all'oggetto di questo saggio e a come questa strategia didattica si accordi perfettamente con le indicazioni che provengono da chi insegna queste discipline presso i corsi di psicologia. L'obiettivo è aumentare l'interesse, ottimizzare la performance di studentesse e studenti in queste discipline attraverso l'incremento della motivazione all'approfondimento, anche attraverso il peer-tutoring caratteristico del lavoro in team.

2. Le criticità nell'insegnamento delle discipline STEM

Le discipline STEM si riferiscono principalmente all'apprendimento di contenuti di Scienza, Tecnologia, Ingegneria e Matematica. Includono discipline come matematica, fisica, ingegneria, informatica, biologia, chimica e altre ancora. Queste discipline sono spesso fortemente interdisciplinari, nel senso che coinvolgono aspetti e contenuti relativi a più discipline. Richiedono anche l'affinamento, da parte dello studente, di una spiccata capacità di problem-solving (e.g., Hiebert, 1996), nonché una profonda comprensione dei concetti matematici e scientifici sottostanti.

La difficoltà di insegnare discipline STEM è dovuta, quindi, all'intersecarsi di ragioni differenti. Uno dei motivi principali è che le discipline STEM sono intrinsecamente complicate e richiedono una grande quantità di conoscenze e la comprensione di concetti di base senza i quali risulta estremamente difficile orientarsi. Quindi, da una parte i molti pre-requisiti che devono essere posseduti, dall'altra il problem-solving e, infine, l'intensa rete di conoscenze interdisciplinari, potrebbero giustificare la difficoltà d'insegnamento di queste discipline rispetto altri tipi di saperi.

La psicometria può essere pensata come una derivazione della matematica e della statistica applicata a problemi di misurazione quantitativa in psicologia. Include lo sviluppo e l'uso di test, i sondaggi e altri strumenti per misurare tratti psicologici, abilità e atteggiamenti e per analizzarne i dati raccolti nelle indagini empiriche condotte sul campo quanto in laboratorio.

2.1. Le criticità nell'insegnamento della matematica e discipline alleate in corsi di studio non-STEM: il caso della psicometria nei corsi di psicologia

Come dicevamo, può essere difficile insegnare discipline STEM in un corso umanistico perché le discipline STEM tendono ad essere altamente tecniche e richiedono agli studenti una buona comprensione e capacità di soluzione di problemi matematici e statistici. In un suo saggio Sartori (2011) attribuisce al grande psicologo americano e studioso dell’intelligenza Joy Guilford l’idea che lo sviluppo di una scienza derivi dalla sua capacità di fare uso della matematica, e certamente la psicometria - la psicofisica e la psicologia sperimentale ancor prima - costituiscono le più dirette articolazioni della matematica applicata alla psicologia quando ha cominciato a strutturarsi come scienza. È pertanto innegabile l’utilità delle applicazioni matematiche per istruire all’uso consapevole degli strumenti quantitativi che la scienza psicologica ha sviluppato nel tempo. D’altro canto, quando le matricole dei corsi triennali di psicologia arrivano a frequentare discipline che richiedono il ricorso alla matematica, provengono da percorsi della scuola secondaria superiore che hanno certamente fornito loro gli elementi di base dell’algebra e della geometria utili per affrontare i temi della disciplina psicometrica. Eppure, difficoltà e diffidenza nelle studentesse e negli studenti permangono e ciò è evidente dalle risposte ricevute nei questionari di valutazione degli insegnamenti di questo settore disciplinare. Solitamente i voti più bassi riguardano l’interesse che i rispondenti dichiarano per la disciplina.

Vediamo allora come un gruppo di docenti di statistica da sempre impegnato a insegnare questa disciplina declinata in corsi di studio psicologici ha pensato di poter risolvere il problema dell’accettabilità e dell’interesse per le discipline matematiche e statistiche a psicologia. Mi riferisco ad Aron, Coups e Aron che nel loro ‘Statistics for Psychology’, 6° edizione del 2014 (Aron et al., 2014) aprono il loro volume con una ricetta per il docente e una per lo studente che si approccia allo studio della disciplina.

Al docente gli autori anticipano che il loro obiettivo è stato da sempre di rendere l’apprendimento della disciplina veramente più piacevole e meno angosciante per gli studenti. Già questo obiettivo mi pare abbia un orientamento corretto. La letteratura scientifica sulla relazione vantaggiosa tra apprendimento ed emozioni positive è talmente copiosa che è irresponsabile non tenerne conto (e.g., Seligman et al., 2009). Quindi il primo compito che ci dobbiamo dare come docenti è quello di comunicare chiaramente che è possibile capire e usare quello che viene insegnato e che il rigore non necessariamente confligge con la piacevolezza delle attività proposte. Ma più in dettaglio, secondo gli autori già citati, quali sono gli ‘aspetti core’ dell’insegnamento della statistica e della psicometria agli psicologi?

2.1.1. Praticare il linguaggio matematico

Nella spiegazione è indispensabile fornire una descrizione accurata dei simboli (che devono essere riportati nella loro forma più semplice possibile), per evitare che restino dei dubbi sul significato degli elementi di base del linguaggio utilizzato. Le formule definitorie sono poste al centro della spiegazione di ogni argomento. Quando poi tali formule sono scelte per essere applicate, la quantità di dati da elaborare negli esercizi e nelle verifiche deve essere adeguatamente ridotta per rendere i calcoli gestibili. Quindi, resta importante insegnare il calcolo a mano, per esempio, di una varianza perché è importante essere consapevoli della pratica del calcolo, pure informando studentesse e studenti che i pacchetti statistici disponibili open source fanno quello stesso compito senza sforzo alcuno. La formula definitoria aiuta tutti gli studenti a procedere con la sequenza delle corrette operazioni. Per la varianza dovremo pertanto dire che il calcolo della varianza inizia con il calcolare lo scostamento di ogni valore della serie dalla media. Tutti gli scostamenti devono essere elevati al quadrato (operazione che elimina i segni), e poi si calcola la loro media. Tutto questo corrisponde alla formula semplificata $varianza = [\sum(X - M)^2]/N$ invece della più complicata (e corretta sul piano computazionale) $varianza = [\sum X^2 - (\sum x)^2/N]/N.$

Personalmente, mi chiedo anche se sia necessaria e imprescindibile per la diffusione della disciplina tra gli psicologi la pratica di mandare a memoria le formule o se non sia più vantaggioso consentire il loro recupero da un formulario. Questa pratica favorirebbe quanti potrebbero incontrare difficoltà specifiche di apprendimento a carico delle funzioni mnestiche. Tale abilità di base non dovrebbe essere al centro della verifica di profitto e anzi, insieme ad altri aspetti che non sono oggetto diretto di insegnamento, finisce per svolgere il ruolo di variabile confondente durante le verifiche di profitto (per una trattazione approfondita di questo tema si veda Coderre, 2022).

2.1.2. Usare più codici e più modalità nella spiegazione

Il secondo aspetto ha a che fare con i diversi codici che possono essere utilizzati durante l'introduzione degli argomenti in classe. È, pertanto, buona prassi adottata dai citati autori ricorrere a versioni sia numeriche che verbali delle spiegazioni e, ove possibile fornirne anche la versione visiva/grafica. I diversi modi di esprimere la medesima idea aumentano la possibilità che sia acquisita e consolidata nel tempo. Essi favoriscono inoltre i diversi stili cognitivi che, seppure non determinanti, possono dare un contributo al processo di apprendimento (per una rassegna recente Wang et al., 2022).

2.1.3. La psicometria come supporto alla lettura di articoli scientifici

Il terzo aspetto riguarda il ruolo che lo studio della statistica e della psicometria ha nell'apprendimento della tecnica di lettura degli articoli scientifici. Questo aspetto è certamente uno dei più rilevanti per giustificare la presenza di insegnamenti di discipline statistiche e psicometriche nei corsi di studio umanistici e psicologici, in particolare. Infatti, dovremmo essere attenti a comunicare che nel corso della vita professionale, il costante aggiornamento previsto dagli attuali ordinamenti professionali richiederà di dedicare parte del proprio tempo di lavoro alla lettura di articoli scientifici che nella maggior parte dei casi riporta, in modo non scolastico, le statistiche utilizzate, cioè senza spiegare dettagliatamente i passaggi, confidando implicitamente nella disponibilità di quelle nozioni nel lettore esperto.

2.1.4. La psicometria come supporto all'aggiornamento tecnico

Il quarto punto sottolinea il ruolo che ha l'aggiornamento e l'attualizzazione dei contenuti. È vero che dagli anni cinquanta in poi non sono stati introdotti nuovi metodi o tecniche che abbiano modificato significativamente il contenuto delle discipline statistiche e psicometriche, ma è altrettanto vero che i ricercatori si concentrano oggi più di allora su temi quali la dimensione dell'effetto, la potenza e i limiti dei test di significatività, gli esiti delle meta-analisi e su questi, più di tutti, sul ruolo che i computer e la politica dei software statistici open source hanno avuto nella diffusione di analisi statistiche sempre più sofisticate, appannaggio non più di pochi.

2.1.5. Agire sulla motivazione

Il quinto punto riguarda la necessità di agire direttamente sulla motivazione delle studentesse e degli studenti. La prima proposta per raggiungere l'obiettivo di avere in classe studentesse e studenti motivati consiste nel ricorso a esempi, argomenti o popolazioni che risultano interessanti per loro. È pertanto necessario fare ricorso a temi relativi alla psicologia nelle sue diverse declinazioni, come anche alle neuroscienze, affinché le studentesse e gli studenti apprezzino le specificità dei diversi approcci, sottolineando le soluzioni che la statistica e la psicometria trovano per comprendere in profondità quei temi, cercando quindi attivamente di contrastare quella sensazione che a volte si ha di studiare la teoria perché è necessario. Una seconda iniziativa riguarda una questione più sottile che ha che fare con la nozione di insight. In altri termini è estremamente utile rendere la spiegazione tanto semplice e sistematica da consentire che chi apprende possa dire frequentemente «ho capito», favorendo quindi quel senso di illuminazione che si ha quando si realizza che, finalmente, un concetto è diventato chiaro e si appresta a diventare familiare. È noto quanto ciò che ho descritto sostenga il senso di autoefficacia che è un mediatore favorente l'aumento della frequenza di comportamenti più significativi ai fini dell'apprendimento delle conoscenze e delle competenze tipiche della disciplina (la letteratura sui mediatori psicologici in grado di favorire l'apprendimento della matematica nei corsi universitari è copiosa, si veda p.e. Damrongpanit, 2019).

2.1.6. La psicometria come campo di ricerca dinamico

Il sesto suggerimento degli autori citati è di porre l'enfasi sui metodi statistici e psicometrici come campo di ricerca vivo, dinamico e in evoluzione. È necessario dedicare tempo per descrivere problemi nascenti e modi originali per risolverli, come anche narrare episodi legati a ricercatori famosi, alle applicazioni pratiche della disciplina, a fatti della storia della disciplina che possono risultare interessanti per studentesse e studenti e in grado di avvicinare chi studia all'argomento sempre più visto come uno sforzo umano, non dato in natura, di trovare un modo per dare un senso all'insieme di informazioni ottenute negli studi e nelle ricerche. L'obiettivo è di favorire un atteggiamento interrogativo e vigile, uno stile di apprendimento che sia il più vicino possibile a quello del ricercatore impegnato nella propria indagine.

2.2. Un patto in aula: Cosa chiedere agli studenti?

Ma cosa è richiesto alle studentesse e agli studenti da Aron, Coups e Aron per raggiungere l'obiettivo di padroneggiare gli aspetti più significativi della statistica in psicologia e della psicometria? Gli autori sono consapevoli che gli studenti di psicologia sono poco avvezzi alla matematica ma certamente più in sintonia con le idee. Per questa ragione ritengono necessario procedere con spiegazioni che mettano in evidenza l'importanza che la tecnica ha per il raggiungimento della conoscenza e la sua relazione con le idee sottostanti.

Il primo punto che potrebbe motivare allo studio della disciplina è il vantaggio connesso a una più approfondita comprensione degli articoli di ricerca. Senza una sufficiente base di conoscenza nelle discipline statistiche e psicometriche la lettura dei resoconti scientifici rischia di rimanere in superficie. Il secondo punto riguarda la possibilità di portare avanti la propria ricerca durante i master o i corsi di specializzazione. Nel contesto nordamericano e internazionale nel quale i tre studiosi hanno sviluppato la propria esperienza di insegnamento, la frequenza di master e specializzazioni richiede sistematicamente ad allieve e allievi di procedere con lo sviluppo di progetti di ricerca, di taglio clinico-applicativo senza dubbio, ma pur sempre attività che richiedono un massiccio lavoro sui dati raccolti. Il contesto italiano, purtroppo, non necessariamente richiede di procedere con una propria ricerca e analisi dei dati raccolti, soprattutto nei corsi di specializzazione che abilitano alla psicoterapia in cui la fase di descrizione e analisi dei casi conserva preminentemente la cifra di una valutazione aneddotica e raramente fondata sulla sistematica analisi dei dati in prospettiva statistica e psicometrica. La distanza che c'è all'interno dei corsi di formazione alla psicoterapia, in Italia significativamente demandata ai privati, tra analisi clinica - ideografica - e analisi statistica, probabilistica, psicometrica dei casi, si riflette anche nei corsi di studio universitari di II livello (master e corsi di studio magistrali) ove solo parzialmente si dà la giusta importanza all'approccio statistico e psicometrico al dato, e i laureandi sono impiegati nelle raccolte dei dati mentre le analisi statistiche sono demandate, di frequente, a figure intermedie e già avviate alla ricerca, come dottorandi, assegnisti e ricercatori junior. In questo contesto risulta più difficile consolidare l'idea che una buona preparazione di base in discipline statistiche e psicometriche può avere per la formazione professionale in psicologia.

Il terzo punto che potrebbe essere ben sviluppato e presentato nelle fasi di introduzione dei corsi di statistica e psicometria a psicologia è il valore aggiunto di riflessione e approfondimento che tali insegnamenti richiedono e che possono risultare di grande aiuto a chi intende indagare e analizzare comportamenti, atteggiamenti, rappresentazioni mentali degli esseri umani. In sostanza, le competenze e le conoscenze sviluppate nello studio della psicometria risultano di grande utilità per la maturazione di un atteggiamento critico e analitico.

2.3. Cosa consigliare a chi affronta lo studio della psicometria?

I tre autori già citati forniscono anche cinque suggerimenti fondamentali per il successo nello studio delle discipline statistiche e psicometriche nei corsi di studio psicologici.

2.3.1. Più logica che algebra

Il primo riguarda l'approccio allo studio, più orientato alla logica, ai concetti, ai principi che alla matematica. Più orientato ai perché che ai come. Sono proprio questi elementi a essere indispensabili nella professione psicologica. Una mera attenzione a ottenere i numeri giusti non produce uno scarso vantaggio competitivo nella strutturazione del proprio profilo professionale.

Il secondo riguarda la sequenzialità e la gerarchia dei concetti oggetto di studio. È indispensabile avere piena familiarità (che si conquista con lo svolgimento delle esercitazioni intermedie) con i concetti passati prima di passare ai successivi.

2.3.2. Aspetti pratici per un apprendimento di successo

Il terzo consiglio consiste nel seguire le lezioni con regolarità. La maggior parte degli argomenti è concatenato e la conoscenza è cumulativa. Interrompere il processo di apprendimento, può risultare svantaggioso.

Il quarto consiglio consiste nel profondere il massimo sforzo, di studio e di esercitazione, dalle prime lezioni, dal momento che gli elementi di base insegnati nelle prime lezioni risulteranno sempre utilizzati fino alla fine del percorso.

Ultimo ma non meno importante consiglio è di cercare il supporto e il confronto con gli altri studenti. I gruppi di studio e di discussione, il confronto sullo svolgimento delle esercitazioni, sono il valore aggiunto di qualunque processo di apprendimento. I docenti più accorti tendono a favorire questi scambi.

3. Metodologie didattiche innovative per favorire l'apprendimento delle discipline STEM in corsi di studio non-STEM

Esistono diverse tecniche di insegnamento efficaci ed evidence-based per le discipline STEM nei corsi universitari non-STEM. Queste includono l'uso di attività pratiche, simulazioni e studio di casi, nonché l'uso di ausili visivi quali diagrammi e grafici. In tutto questo la tecnologia può essere un supporto molto significativo per favorire l'apprendimento. Inoltre, è importante offrire agli studenti ampie opportunità di praticare e applicare le conoscenze acquisite. È importante definire obiettivi e aspettative chiare per gli studenti attraverso un patto d'aula, nonché frequenti valutazioni formative intermedie per garantire che gli studenti consolidino le conoscenze, la metacognizione e la fondamentale capacità di autovalutazione.

3.1. Le tecnologie al servizio dell'apprendimento delle discipline STEM

Le tecnologie possono svolgere un ruolo cruciale nel supportare l'apprendimento in vari ambiti, tra cui le discipline STEM - e tra queste la matematica - e anche la psicometria. Di là dal poter fornire una formula in grado di essere applicata in tutte le circostanze, è certamente vero che vi sono alcuni aspetti della tecnologia che sono ormai entrati a fare parte delle nostre pratiche formative (si veda p.e. Carreira et al. 2017). Ecco una serie di esempi di come le tecnologie possono migliorare l'apprendimento in queste aree:

3.1.1. Corsi online e piattaforme di apprendimento

I corsi online offrono accesso a una vasta gamma di argomenti STEM, consentendo agli studenti di imparare al proprio ritmo. Diverse piattaforme offrono corsi in vari ambiti STEM e tra queste la matematica. Tali piattaforme sono in grado di adattare i contenuti alle esigenze individuali degli studenti (vedi sotto paragrafo successivo). Queste piattaforme forniscono feedback immediato per aiutare a rinforzare i concetti, come anche commenti personalizzati in base agli errori commessi. Le più note e accreditate sono:

- Khan Academy (https://www.khanacademy.org/),
- Coursera (https://www.coursera.org/),
- edX (https://www.edx.org/).

Per quanto è in mia conoscenza, per la psicometria non esistono strumenti specifici. I corsi online potrebbero coprire argomenti relativi alla misurazione e alla valutazione psicologica.

3.1.2. Apprendimento adattivo

Le piattaforme di apprendimento adattativo utilizzano algoritmi per adattare i contenuti educativi proposti ai singoli studenti, adattando il livello di difficoltà in base ai progressi registrati. I sistemi di apprendimento adattativo possono identificare le aree in cui gli studenti incontrano difficoltà e fornire risorse mirate per rafforzare la loro comprensione di specifici concetti matematici. In psicometria esistono modelli di test adattativo che adattano dinamicamente la difficoltà/endorsability delle domande e degli item in base alle risposte del partecipante, garantendo una valutazione più accurata e rapida delle sue capacità. Non vi sono, per quanto in mia conoscenza, esperienze di apprendimento adattivo delle tematiche psicometriche.

3.1.3. Strumenti collaborativi e comunità online

Un'ulteriore evoluzione delle piattaforme di apprendimento sono le funzioni interne a queste pensate specificatamente per favorire il peer-tutoring e le abilità di interazione tra studenti. Le piattaforme collaborative online consentono agli studenti di lavorare insieme a progetti STEM, favorendo lo sviluppo di abilità di lavoro di squadra e la comunicazione orientata all'obiettivo. In psicometria le comunità online possono fornire uno spazio di confronto tra professionisti e studenti per discutere teorie e modelli psicometrici, condividere risorse e collaborare a progetti di ricerca.

3.1.4. Laboratori simulati, in virtual e augmented reality, gamification

Le simulazioni e i laboratori virtuali consentono agli studenti di esplorare concetti complessi in un ambiente controllato. Ad esempio, le simulazioni di fisica possono aiutare gli studenti a comprendere principi come la gravità e il movimento. In matematica possono illustrare concetti e modelli matematici, rendendo le idee astratte più tangibili e concrete. Gl strumenti grafici online, in cui è possibile modificare i parametri di una funzione per vederne immediatamente gli effetti nel grafico, possono aiutare a visualizzare le relazioni matematiche e ad acquisire familiarità con quanto succede, al cambiare dei parametri. In psicometria, le simulazioni possono essere utilizzate per illustrare i risultati dei test psicologici, i cambiamenti di un profilo al variare dei parametri e in funzione di diverse trasformazioni lineari e non-lineari dei punteggi ottenuti da un campione di partecipanti.

Le piattaforme gamificate spesso incorporano tecniche di risoluzione dei problemi e di pensiero critico. Esistono numerose app matematiche adatte a diversi gruppi di età, che aiutano gli studenti a esercitarsi e rinforzare i concetti matematici attraverso attività interattive e piacevoli (un esempio recente di applicazione in Lee et al., 2023). In psicometria gli strumenti software possono essere utilizzati per somministrare e analizzare valutazioni psicologiche in modo efficiente. Questi strumenti garantiscono procedure di test standardizzate e risultati accurati. Vi sono anche semplici applicazioni che permettono di esercitarsi con la capacità di cogliere visivamente, per esempio, la correlazione tra due variabili presentata mediante un grafico a dispersione (https://www.guessthecorrelation.com/).

La realtà aumentata e la realtà virtuale possono fornire esperienze immersive, consentendo agli studenti di esplorare virtualmente complessi fenomeni scientifici. Modelli 3D possono migliorarne la comprensione. Anche in matematica, e quindi per estensione in psicometria, si possono creare ambienti matematici interattivi, consentendo agli studenti di visualizzare concetti astratti in uno spazio tridimensionale o scenari virtuali di valutazioni psicometriche, fornendo un ambiente di test realistico per le persone sottoposte a valutazioni psicologiche.

3.1.5. Chatbot supportato da AI e apprendimento della matematica

Sempre più diffusi e al centro del dibattito, tra utilizzatori entusiasti e detrattori convinti, sono i sistemi di conversazione automatica gestiti da un agente di intelligenza artificiale. Ovviamente essi possono avere un ruolo anche nell'apprendimento della matematica e della psicometria. Un chatbot può assistere su una ampia varietà di concetti matematici, da aritmetica di base a argomenti più avanzati (e.g.; Lee & Yeo, 2022; Nguyen et al., 2019). Ecco alcuni modi in cui un chatbot orientato alla matematica può essere utile:

- risoluzione dei problemi: il chatbot può aiutare gli utenti a risolvere problemi matematici passo dopo passo, fornendo spiegazioni e assistenza lungo il percorso;
- fornire chiarimenti sui concetti: gli utenti possono chiedere al chatbot di spiegare concetti matematici specifici, aiutandoli a comprendere i principi sottostanti;
- training: il chatbot può generare e fornire problemi di pratica agli utenti da risolvere, aiutandoli a rinforzare la loro comprensione e migliorare le loro abilità;

- correzione degli esercizi: gli studenti possono utilizzare il chatbot per ottenere assistenza con i compiti di matematica, che si tratti di risolvere equazioni, disegnare funzioni o di qualsiasi altra attività matematica;
- personalizzazione, interazione, disponibilità: il chatbot può adattare le sue risposte in base al livello di competenza dell'utente, fornendo problemi più impegnativi per studenti avanzati o spiegazioni più semplici per neofiti. L'interfaccia conversazionale risulta più coinvolgente, rendendo il processo di apprendimento più accettabile anche per chi non si sente portato per la disciplina. Il sistema è in grado di fornire soluzioni e spiegazioni 24 ore al giorno, sette giorni su sette, in qualsiasi momento in cui lo studente senta il desiderio di studiare ed esercitarsi.

È certamente evidente che tanti vantaggi sono controbilanciati da rischi connessi con la possibilità di ottenere risposte non sempre appropriate. Risultano essere strumenti più utili per chi ha già un buon livello di preparazione che per il neofita assoluto che potrebbe non essere in grado di discernere tra risposte appropriate e inappropriate.

In sintesi, le tecnologie a nostra disposizione offrono una vasta gamma di strumenti e piattaforme che possono migliorare notevolmente l'esperienza di apprendimento in ambito STEM, della matematica e per estensione della psicometria fornendo opportunità di apprendimento interattivo, adattativo e collaborativo. L'integrazione di queste tecnologie negli ambienti educativi può contribuire a esperienze di apprendimento più efficaci e coinvolgenti per gli studenti.

3.2. Una proposta di team-based learning per l'insegnamento della psicometria

Oltre alle tecnologie riferibili a soluzioni ICT, vi sono anche le cosiddette tecnologie didattiche. Tra le tecniche innovative che possono essere utilizzate per favorire l'apprendimento della psicometria e di altre discipline STEM anche in contesti di studio non-STEM, ci sono sia il team-based learning (TBL, p.e. Lotti, 2019; Swanson et al., 2019)[5] che il problem-based learning (PBL, p.e. Thorndahl & Stentoft, 2020; Juandi & Tamur, 2021). Entrambe le strategie si riferiscono al modello generale cosiddetto di apprendimento attivo, il TBL è una strategia di classe capovolta (in cui si chiede agli studenti di arrivare in classe avendo già

[5] Si veda anche la 'Guida alla metodologia del Team Based Learning', predisposta da UNIGE Teaching and Learning Centre. Disponibile da https://utlc.unige.it/sites/utlc.unige.it/files/pagine/Guida%20alla%20metodologia%20del%20Team%20Based%20Learning.pdf

affrontato lo studio di uno o più argomenti) che mira all'applicazione delle conoscenze acquisite. È anche una metodologia formativa e valutativa che può essere utilizzata per giungere a una valutazione di profitto che tenga conto sia del lavoro individuale che di quello di gruppo. È una strategia basata su piccoli gruppi di studenti (5-7 persone) che collaborano per la maggior parte delle attività. Queste hanno sempre l'obiettivo di individuare le risposte corrette a quesiti o problemi applicativi che il docente propone. Mentre il PBL è un approccio didattico centrato sullo studente che si propone di analizzare un dato problema come base di partenza per pianificare l'apprendimento di nuove conoscenze necessarie per la sua soluzione. Per quanto è in mia conoscenza non ci sono esperienze già pubblicate nella letteratura internazionale sull'uso di tali approcci per l'insegnamento specificatamente della psicometria, ma vi sono altre esperienze in discipline alleate che possono essere usate come esempio. Entrambe queste strategie sono adatte all'insegnamento delle discipline STEM nei corsi non-STEM, poiché forniscono agli studenti un'esperienza pratica e applicativa e consentono loro di sviluppare capacità di risoluzione dei problemi avvalendosi anche del team work, pratica che richiede di acquisire specifiche abilità che sono sempre più richieste nel mondo del lavoro. Proviamo a fare un esempio di come potremmo impostare una lezione sulle proprietà fondamentali dei test psicologici adottando la strategia della TBL.

Partiremo dall'assegnare lo studio di un documento (che può anche essere corredato da video esplicativi, tabelle, *slide presentation*) che introduca l'argomento in modo basilare e in cui si descrivano le tre proprietà fondamentali per definire la qualità di un test psicologico che sono la sua attendibilità (con quale precisione il test è in grado di misurare ciò che intende misurare), la validità (metodi diversi per verificare quale variabile latente effettivamente misura) e le norme (quali sono i parametri ottenuti dalla popolazione tenendo conto delle stratificazioni più significative in funzione delle variabili: genere, età, livello di istruzione, professione etc.). Immaginiamo di concentrarci solo sulla prima delle tre proprietà. Si potrà fare riferimento alla sola teoria classica dell'errore oppure se si vuole rendere più completa la trattazione si potranno introdurre anche gli argomenti della teoria della generalizzabilità e la teoria della risposta all'item. Per ognuno dei modelli teorici sarà necessario presentare oltre ai presupposti, anche il dettaglio delle formule per ottenere gli indici in grado di rispondere ai quesiti sull'attendibilità del test. L'articolazione matematica è per ognuna di esse abbastanza complessa per cui è ragionevole pensare che già questa parte richieda più documenti e più occasioni d'incontro in aula. Quindi gli studenti arrivano in aula avendo, chi più chi meno, affrontato lo studio dell'argomento. Cosa li aspetta? La strutturazione del lavoro in aula è piuttosto rigida.

Il primo step è l'Individual Readiness Assurance Test (I-RAT) in cui ogni studente individualmente risponde a 10-20 domande a scelta multipla sulle nozioni principali. Questa fase di valutazione individuale ha lo scopo di favorire l'impegno di ognuno e quindi di avere una stima della preparazione di partenza. Immaginando una griglia di risposta a quattro alternative (una sola giusta), il rispondente ha a disposizione quattro punti per ogni domanda e potrà distribuire i suoi quattro punti in funzione del suo grado di sicurezza nel dare la risposta: tutti e quattro i punti su una sola alternativa nel caso di certezza, un punto a ogni alternativa in caso di assoluta incertezza. Ovviamente sono ammesse anche le soluzioni intermedie: due punti per due alternative che appaiono ugualmente probabili e così via. Lo scopo del rispondente è di ottimizzare la distribuzione dei punti a disposizione massimizzando il punteggio. Alla fine del tempo assegnato, il docente ritira i fogli di risposta.

Il secondo step è il cosiddetto Team Readiness Assurance Test (T-RAT). Gli studenti si raccolgono nei gruppi precedentemente costituiti dal docente sulla base del criterio di creare gruppi eterogenei per provenienza di studi precedenti, grado d'interesse per la disciplina etc. I gruppi devono nuovamente rispondere alle stesse domande a scelta multipla già proposte nel I-RAT. Il gruppo deve giungere alla scelta di una sola alternativa, e quando l'accordo non è pieno, i partecipanti al gruppo devono discutere tra loro per giungere a una convergenza. Se la risposta è corretta al primo tentativo, il gruppo ottiene il massimo punteggio, altrimenti subisce delle penalizzazioni nei tentativi successivi. Questa fase affina la collaborazione, il peer tutoring, e permette anche ai meno interessati o motivati di entrare in interazione positiva con gli altri componenti del gruppo. È un dato ormai acquisito in letteratura che la prestazione del gruppo è migliore della prestazione ottenuta anche dal migliore dei partecipanti. La collaborazione è piegata alle esigenze di ottenere una buona performance per il gruppo, e la valutazione ottenuta dal gruppo servirà a definire in parte il voto finale.

Il terzo step è il cosiddetto appello o ricorso. Durante lo svolgimento del T-RAT può emergere che alcune domande sono state formulate non chiaramente e che questo può aver causato una riduzione del punteggio. Se questo è avvenuto, il gruppo può fare ricorso usando un apposito modulo fornito dal docente. Alla fine della lezione tutti i ricorsi vengono esaminati dal docente; se accolti, danno diritto a una revisione del punteggio (ma solo per il gruppo che ha inoltrato il ricorso).

Questa parte della metodica ha lo scopo di fornire un feedback al docente sulla costruzione delle domande (alcune delle quali potrebbero essere state volutamente costruite in modo ambiguo o basate su informazioni non completamente contenute nei documenti da studiare e in questo modo attivare la discussione interna al gruppo) ma ha anche un secondo fine che è quello di fare sviluppare un atteggiamento critico ed esercitare la competenza argomentativa necessaria per scrivere il ricorso e, in caso di accoglimento, di ottenere la revisione del punteggio.

Il quarto step è la cosiddetta mini-lezione. Gli approcci per procedere con la mini-lezione sono molteplici. La versione più semplice consiste in una rilettura delle domande assegnate da parte del docente, una breve spiegazione connessa con lo specifico argomento della domanda, il riferimento alle parti dei documenti che maggiormente contribuivano a formulare la risposta corretta. Lo scopo è duplice: accertarsi che le nozioni di base siano effettivamente acquisite, ma anche soffermarsi su quegli aspetti che hanno generato durante le fasi del I-RAT e T-RAT un maggior numero di risposte errate.

L'ultimo step consiste nel Team Application (o T-APP). Il docente ha in precedenza individuato un problema aperto e pone una serie di domande a scelta multipla che possono anche richiedere di dover analizzare dati, applicare tecniche e ottenere dei parametri che poi dovranno essere interpretati. In questo caso, lo scopo non è tanto verificare la conoscenza di nozioni, ma piuttosto la capacità di trasferire le conoscenze acquisite sui dati provenienti da casi reali e farlo avvalendosi delle risorse del gruppo (ogni gruppo al suo interno potrebbe organizzarsi assegnando a ogni componente lo svolgimento di una parte dell'intera procedura). Per ogni domanda i gruppi hanno un certo tempo. Alla fine di questo tempo ogni gruppo indica qual è la risposta secondo loro corretta. Il docente non svela immediatamente chi ha dato la risposta corretta, ma piuttosto invita un portavoce di ogni gruppo (che può essere designato di volta in volta) a spiegare la linea di ragionamento ed eventualmente la scelta / il risultato dell'applicazione delle formule statistiche che hanno portato alla soluzione. Questa procedura stimola ulteriormente la riflessione, aiuta a comprendere gli altri punti di vista / le alternative di soluzione del medesimo problema, genera le condizioni per i processi di *self-correction*, stimola gli insight, trasforma la classe in un ambiente di apprendimento attivo, in una sorta di seminario in cui tutti i partecipanti possono avere un ruolo e dare un contributo alla propria e all'altrui formazione.

Il TBL prevede anche una procedura di autovalutazione, la cosiddetta 'Valutazione tra pari'. Tutti i componenti del gruppo sono chiamati a dare un giudizio sul contributo degli altri componenti, rispetto ad alcuni criteri scelti dal docente e condivisi fin da subito. Quello che segue è un elenco non esaustivo dei criteri più utilizzati:

Preparazione – i componenti del mio gruppo erano preparati quando sono venuti in classe? (il giudizio può essere dato in funzione degli esiti della discussione al T-RAT)

Contributo – essi hanno contribuito in modo produttivo e positivo alla discussione di gruppo (T-RAT) e al lavoro (T-APP)?

- Rispetto per le posizioni altrui – essi hanno incoraggiato gli altri a contribuire con le loro idee?
- Flessibilità – essi hanno cercato attivamente di integrare le posizioni quando vi era disaccordo su qualcosa?

La Valutazione tra pari è utile soprattutto per far sperimentare a studentesse e studenti il ruolo di valutatori, per capire e apprezzare le differenze tra stili comunicativi e atteggiamenti differenti, per capire che è possibile distinguere la prestazione sulla base del contributo alla riuscita del processo. In una parola, far uscire le studentesse e gli studenti dall'idea di un corpo studentesco indifferenziato, dare spazio ai talenti e riconoscere le specificità e le differenze.

4. Conclusioni

Se provassimo a rileggere il TBL alla luce delle indicazioni che Aron et al. (2014) considerano elementi chiave per la buona riuscita di un corso di statistica per psicologi e per estensione di psicometria, certamente scopriremmo che molti degli aspetti del TBL finiscono per incontrare le indicazioni dei tre autori.

Un TBL richiede certamente un lavoro preparatorio esteso da parte del docente, in primo luogo deve esplicitare gli obiettivi di apprendimento, e questo processo impone di fare una scelta, tenuto conto di variabili quali: le caratteristiche della classe (numerosità, provenienza, motivazione), il tempo a disposizione per le lezioni, il tipo di utilizzo che studentesse e studenti faranno di quelle conoscenze una volta completato il corso. In altri termini sarà necessario individuare chiaramente le competenze che saranno il vero obiettivo di apprendimento, stabilire le propedeuticità tra argomenti, i collegamenti tra loro. Procederà quindi con la definizione del problema che vuole mettere al centro del T-APP. Il problema utilizzato per la TBL deve rispondere a quattro principi conosciuti come le quattro S: deve essere <u>S</u>ignificativo, deve simulare qualcosa che il professionista di domani si troverà realmente a fare, deve essere lo <u>S</u>tesso per tutti i gruppi formati nella classe, la risposta deve essere <u>S</u>imultanea, infine deve richiedere una risposta <u>S</u>pecifica, chiara e univoca (non necessariamente nella forma di un valore numerico, si può trattare anche di un breve elaborato). In questo caso dovrà scegliere il problema tenendo conto dell'attualità dei contenuti, e per agire sulla motivazione dovrà ricorrere a esempi, argomenti che destino l'interesse degli studenti e che possano stimolare l'insight e l'autoefficacia, evidenziando come i metodi statistici e psicometrici sono un campo di ricerca dinamico. Farà riferimento, quando possibile, a problemi nascenti e modi originali per risolverli.

Il passaggio successivo per il docente è individuare le fonti delle informazioni che dovranno essere fornite agli studenti. È determinante che le fonti indicate permettano di rispondere a tutte le domande pensate per il RAT. Non vi sono limiti sul formato delle fonti, come abbiamo già detto, la molteplicità dei media aumenta la possibilità di incontrare i gusti e le preferenze delle studentesse e degli studenti. Il contenuto dei documenti dovrebbe richiedere uno studio indipendente di qualche ora (comunque non più di 10) e risultare sufficienti per affrontare RAT e T-APP. Quanto maggiore è la complessità dell'argomento tanti di più saranno i moduli da prevedere e per ogni modulo saranno preparati domande e problema. In questa fase il lavoro del docente richiede essenzialmente una riflessione sulla corretta sequenza con cui presentare gli argomenti all'interno del singolo modulo e tra i moduli tra loro. Se si vuole sottolineare anche in questa fase come la statistica e la psicometria possano aiutare a leggere gli articoli scientifici, se ne possono includere uno o più tra i materiali da studiare.

Nella preparazione delle domande a scelta multipla per i RAT, è importante ricordare che non devono essere troppe (spesso se ne preparano 10) ma ben distribuite tra i temi più rilevanti da trattare. Nel nostro caso le domande potrebbero riferirsi alle formule definitorie, alla teoria come anche all'applicazione di tecniche tenendo ben presente la necessità di limitare la complessità dei dati forniti se è richiesto lo svolgimento a mano dei calcoli. Non è escluso però, che i calcoli possano essere svolti ricorrendo a pacchetti statistici, se questo è stato oggetto di studio, e che si possano fornire formulari per evitare di pesare eccessivamente su aspetti non direttamente oggetto di studio (la capacità di memoria delle studentesse e degli studenti).

Nei materiali preparati per la mini-lezione, il docente ripercorre i contenuti su cui ha preparato le domande, soffermandosi principalmente su quegli aspetti del modulo che hanno raccolto un numero maggiore di errori nei RAT. In questa fase il docente può integrare le spiegazioni ricorrendo a modalità differenti: numerica, verbale-descrittiva, grafica.

Il lavoro basato sull'interazione tra studentesse e studenti e in particolare il T-RAT, il T-APP e la valutazione tra pari costituiscono delle metodiche tese ad attivare le vantaggiose sinergie basate sul peer tutoring, sul confronto tra pari che certamente sono alla base della riuscita di un percorso di apprendimento attivo. Una sistematica organizzazione delle attività di gruppo è in grado di far superare la diffidenza con cui spesso gli studenti approcciano le attività che rompono la routine della didattica frontale.

È chiaro a chi scrive che scardinare alcune convinzioni radicate nelle studentesse e negli studenti riguardo la propria attitudine alla matematica (p.e. Primi et al., 2020), a volte così scarsa nella percezione dei singoli da generare una vera e propria ansia per la matematica (p.e., Barroso et al., 2021), è un lavoro complesso che richiede dedizione e costanza. È altrettanto vero che l'innovazione didattica può venire in aiuto per dare un'occasione in più a ogni studentessa e a ogni studente di stupirsi di capire la matematica e di imparare a farne buon uso anche nella preparazione a professioni che, almeno apparentemente, sembrerebbe non debbano servirsene.

Riferimenti bibliografici

Aron, A., Aron, E.N., & Coups, E.J. (2014). *Statistics for psychology* (VI ed.). Pearson. [Ediz. it. A cura di G. Antonucci (2018). *Fondamenti di statistica. Introduzione alla ricerca psicologica*. Pearson.]

Barroso, C., Ganley, C.M., McGraw, A.L., Geer, E.A., Hart, S.A., & Daucourt, M.C. (2021). A meta-analysis of the relation between math anxiety and math achievement. *Psychological Bulletin, 147*(2), 134–168. https://psycnet.apa.org/doi/10.1037/bul0000307

Carreira, S., Clark-Wilson, A., Faggiano, E., & Montone, A. (2017). From acorns to oak trees: Charting innovation within technology in mathematics education. In F. Ferrara, E. Faggiano, & A. Montone (Eds.), *Innovation and Technology Enhancing Mathematics Education: Perspectives in the Digital Era* (pp. 9–35). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-61488-5_2

Coderre, E.L. (2022). Teaching Psychometrics: The Importance of Validity in Assessment Design. *College Teaching, 70*(1), 1–5. https://doi.org/10.1080/87567555.2022.2119929

Damrongpanit, S. (2019). From modern teaching to mathematics achievement: The mediating role of mathematics attitude, achievement motivation, and self-efficacy. *European Journal of Educational Research, 8*(3), 713–727. https://doi.org/10.12973/eu-jer.8.3.713

Guilford, J.P. (1954). *Psychometric methods.* McGraw-Hill.

Hiebert, J., Carpenter, T.P., Fennema, E., Fuson, K., Human, P., Murray, H., Olivier, A., & Wearne, D. (1996). Problem solving as a basis for reform in curriculum and instruction: The case of mathematics. *Educational researcher, 25*(4), 12–21.

Suparman, S., Juandi, D., & Tamur, M. (2021). Review of problem-based learning trends in 2010-2020: A meta-analysis study of the effect of problem-based learning in enhancing mathematical problem-solving skills of Indonesian students. *In Journal of Physics: Conference Series, 1722*(1), 012103. https://doi:10.1088/1742-6596/1722/1/012103

Lee, D., & Yeo, S. (2022). Developing an AI-based chatbot for practicing responsive teaching in mathematics. *Computers & Education, 191*, 104646. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2022.104646

Lee, J. Y., Pyon, C. U., & Woo, J. (2023). Digital twin for math education: A study on the utilization of games and gamification for university mathematics education. *Electronics, 12*(15), 3207. https://doi.org/10.3390/electronics12153207

Lotti, A. (2019). Il Team Based Learning (TBL): un metodo formativo per apprendere a lavorare in gruppo. In A. Dipace & V. Tamborra, *Insegnare in Università. Metodi e* *strumenti per una didattica efficace.* (pp. 141–165). Franco Angeli.

Nguyen, H.D., Pham, V.T., Tran, D.A., & Le, T.T. (2019). Intelligent tutoring chatbot for solving mathematical problems in High-school. In Mothe, J., Son, L.H., Quoc Vinh, N.T, *Proceedings of the 11th International Conference on Knowledge and Systems Engineering (KSE)* (pp. 1–6). IEEE. https://doi.org/10.1109/KSE.2019.8919396

Primi, C., Bacherini, A., Beccari, C., & Donati, M.A. (2020). Assessing math attitude through the Attitude Toward Mathematics Inventory–Short form in introductory statistics course students. *Studies in Educational Evaluation, 64*, 100838. https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2020.100838

Sartori, R. (2011). *Metodi e tecniche di indagine e intervento in psicologia - Colloquio, intervista, questionario, test.* LED.

Seligman, M. E., Ernst, R. M., Gillham, J., Reivich, K., & Linkins, M. (2009). Positive education: Positive psychology and classroom interventions. *Oxford review of education, 35*(3), 293–311. https://doi.org/10.1080/03054980902934563

Swanson, E., McCulley, L.V., Osman, D.J., Scammacca Lewis, N., & Solis, M. (2019). The effect of team-based learning on content knowledge: A meta-analysis. *Active learning in higher education, 20*(1), 39–50. https://doi.org/10.1177/1469787417731201

Thorndahl, K.L., & Stentoft, D. (2020). Thinking critically about critical thinking and problem-based learning in higher education: A scoping review. *Interdisciplinary Journal of Problem-Based Learning, 14*(1), 1–21. https://doi.org/10.14434/ijpbl.v14i1.28773

Wang, T.H., & Kao, C.H. (2022). Investigating factors affecting student academic achievement in mathematics and science: cognitive style, self-regulated learning and working memory. *Instructional Science, 50*(5), 789–806. http://dx.doi.org/10.1007/s11251-022-09594-

Frazioni e difficoltà in Matematica

Fractions and difficulties in Mathematics

Fracciones y dificultades en Matemática

Michele Giuliano Fiorentino[1] e Giuditta Ricciardiello[2]
[1]*Dipartimento di Matematica*
[2]*Dipartimento di Scienze della Formazione, Psicologia e Comunicazione*
Università di Bari, Italia

Sunto. *In questo lavoro si analizzano gli esiti di un percorso di formazione sul tema delle Frazioni e Numeri Razionali. Si affrontano riflessioni di tipo didattico e metodologico sui contenuti necessari per l'insegnamento di questo argomento e ci si occupa di indagare se i fattori non cognitivi come l'ansia da insegnamento da parte dei docenti, possano avere delle ripercussioni sui risultati degli studenti. Viene effettuata un'analisi di tipo quantitativo e qualitativo, infatti agli insegnanti è stata somministrata un'intervista scritta con domande relative alla loro disposizione emotiva e alla preoccupazione rispetto all'insegnamento di frazioni e numeri razionali e i seguenti test, per indagare alcuni fattori di tipo emotivo: il test AMAS (Abbreviated Mathematics Anxiety Scale) nella sua versione italiana; il test MTAS, Mathematic Teaching Anxiety Scale; il test MESI (Metacognizione, Emozioni, Strategie, Insegnamento).*

Parole chiave: frazioni, numeri razionali, didattica della Matematica, psicologia.

Abstract. *In this paper we analyze the results of a training course on the topic of Fractions and Rational Numbers. Didactic and methodological reflections on the contents necessary for the teaching of this topic are addressed and we investigate who non-cognitive factors such, as teaching anxiety, could influence students' results. A quantitative and qualitative analysis is carried out, indeed teachers were given a written interview with questions related to their emotional disposition and concerning the teaching of fractions and rational numbers. Then teachers were asked to answer the following tests: AMAS (Abbreviated Mathematics Anxiety Scale) in its Italian version; MTAS (Mathematic Teaching Anxiety Scale); MESI (Metacognition, Emotions, Strategies, Teaching).*

Keywords: fractions; rational numbers; Mathematics Education; psychology.

Resumen. *Este trabajo analiza los resultados de un curso de capacitación sobre el* *tema de Fracciones y Números Racionales. Se abordan reflexiones didácticas y metodológicas sobre los contenidos necesarios para la enseñanza de este tema y se investiga si factores no cognitivos como la ansiedad de parte de los docentes en la enseñanza de este tema puedan tener repercusiones en los resultados de los estudiantes. Se realiza un análisis cuantitativo y cualitativo, de hecho a los docentes se les suministró una entrevista escrita con preguntas relacionadas con su disposición emocional e inquietud respecto a la enseñanza de fracciones y números racionales y los siguientes tests, para investigar algunos factores de carácter emocional: el AMAS (Escala abreviada de ansiedad matemática) en su versión italiana; la prueba MTAS (Escala de Ansiedad en la Enseñanza de la Matemática); el test MESI (Metacognición, Emociones, Estrategias, Enseñanza).*

Parablas clave: fracciones, números racionales, didáctica de la matemática, psicología.

1. Introduzione

Quello delle Frazioni e Numeri Razionali è un tema molto indagato nell'ambito della didattica della matematica a causa delle difficoltà di apprendimento e di insegnamento che genera. Tali difficoltà sono legate a fattori cognitivi, emotivi e metacognitivi (Butterworth, 2005; D'Amore et al., 2006; Dowker, 2005). Studi recenti evidenziano come il dialogo tra *Mathematics Education e Developmental Psychology* (Dowker, 2005) apporti significativi contributi alla ricerca, dando vita a percorsi che da un lato permettono di individuare e analizzare alcune tra le principali difficoltà di apprendimento, dall'altro studiano i fattori emotivi che intervengono nel processo di insegnamento/apprendimento in ottica vygotskjiana.

Nonostante la vasta letteratura dedicata a questo tema e le molteplici proposte didattiche innovative, le frazioni e i numeri razionali continuano a rappresentare uno dei principali ostacoli nel curricolo scolastico sia in riferimento al processo di insegnamento sia a quello di apprendimento, sin dalla scuola primaria.

Il presente articolo si inquadra in una ricerca molto ampia che ha indagato quali sono i fattori psicologici non cognitivi di insegnanti e studenti che possono favorire o inibire il successo nelle performance matematiche in attività con le frazioni. In particolare, questo articolo si focalizza sull'analisi degli esiti di un percorso di formazione che ha coinvolto 36 insegnanti di scuola primaria e 14 di secondaria di primo grado. Oltre alle riflessioni di tipo didattico e metodologico sui contenuti necessari per insegnare bene l'argomento (Even et al., 2009; Shulman, 1986; Van Dooren et al, 2015), il presente studio si occupa di indagare se i fattori non cognitivi come l'ansia da insegnamento da parte dei docenti, possano avere delle ripercussioni sui risultati degli studenti.

Un'intervista scritta e un questionario sugli errori e sulle difficoltà degli studenti hanno rappresentato il punto di avvio della ricerca, per progettare l'intervento di formazione dei 50 docenti coinvolti. L'analisi delle risposte ha permesso di elaborare un percorso che tenesse conto dei contenuti didattici da affrontare in classe sulla base di teorie della didattica della matematica e di approcci metodologici che fossero funzionali a rendere il docente maggiormente sicuro e più consapevole delle sue conoscenze e meno preoccupato di come progettare attività didattiche efficaci.

2. Quadro di riferimento teorico

2.1 Le difficoltà di apprendimento dei numeri razionali e delle frazioni come contenuto matematico: teorie di riferimento

Gli studi sulle difficoltà di apprendimento di frazioni e numeri razionali sono ampiamente sviluppati a livello nazionale ed internazionale, attraverso la doppia lente della Mathematics Education e Develomental Psychology, proprio a causa della estrema complessità dell'argomento dal punto di vista epistemologico, ontogenetico e soprattutto didattico (D'Amore et al., 2019).

Le maggiori difficoltà derivano proprio dalle complessità intrinseche al concetto matematico stesso. Nella sua storia evolutiva il concetto matematico, infatti, ha generato gli ostacoli che a tutt'oggi permangono nel percorso di apprendimento degli studenti di tutte le età e di tutti i paesi del mondo (Torbeyns et al., 2015). Sono proprio queste iniziali difficoltà a segnare uno dei primi momenti di frattura tra il discente e la disciplina, sin dalle prime classi della scuola dell'obbligo (Pellerey et al., 1996) o che causano successive difficoltà nella costruzione di concetti matematicamente sempre più complessi e nel conseguimento di risultati scolastici soddisfacenti, nei gradi di scuola superiori (Obersteiner et al., 2019; Siegler et al., 2012; Torbeyns et al., 2015).

Le frazioni, i numeri razionali e la loro aritmetica rappresentano un elemento fondamentale per le teorie dello sviluppo cognitivo dello studente in generale e per lo sviluppo numerico in particolare (Dehaene, 1997; Hersh & Dehaene, 1998; Lortie-Forgues et al., 2015) e rappresentano uno dei temi maggiormente predittivi del successo scolastico con la matematica più avanzata (Lortie-Forgues et al., 2015; Siegler & Lortie-Forgues, 2017).

La *Teoria integrata dello sviluppo numerico* elaborata da Siegler (Siegler & Lortie-Forgues, 2014) mette in evidenza gli elementi di continuità tra i diversi insiemi numerici, considerando un modello unitario e coerente nello sviluppo della umana capacità di comprendere i numeri, lungo tutto l'arco della vita. Essa si fonda sul presupposto che per acquisire la comprensione e la conoscenza delle frazioni si debbano compiere alcuni passaggi concettuali nel processo di apprendimento: secondo questa teoria tutti i numeri rappresentano una grandezza e possono essere per questo confrontati e ordinati su un'unica retta numerica (Lortie-Forgues et al., 2015; Resnick et al., 2016). Le difficoltà sorgono nell'estensione da un insieme numerico all'altro. Si scopre infatti che alcune delle proprietà invarianti dei numeri razionali non appartengono ai numeri interi, che si comportano in modo differente. In accordo con Vosniadou (1994), vi è un cambio di visione concettuale nel passaggio da un insieme ad un altro, definito 'Conceptual change approach', che rende possibile la progressione della conoscenza. In tale passaggio si manifesta una contrapposizione tra le caratteristiche di ciascuno dei diversi insiemi numerici, che permette di riflettere sulle cause delle maggiori difficoltà di apprendimento delle frazioni e dei numeri razionali. Una tra le principali cause delle difficoltà è il 'Natural *Number Bias*' (NNB) (Ni & Zhou, 2005), ovvero quella tendenza innata della cognizione umana ad applicare ai numeri razionali le proprietà dei numeri naturali, cadendo in una serie di errori che dipendono proprio dalla estensione dei comportamenti invarianti (Courant & Robbins, 2009).

Un'altra difficoltà che affonda le sue motivazioni nel significato più profondo di numero razionale è quella di frazione come rapporto. Il numero razionale nasce per poter rendere possibile la divisione, operazione che in $\mathbb{N}$ non è sempre possibile (Villani, 2014).

Da un punto di vista più strettamente semantico dei numeri razionali, in letteratura moltissimi studi si sono concentrati sulla molteplicità di registri semiotici utilizzati per rappresentare questi numeri, considerando i significati più profondi che li caratterizzano (Fandiño Pinilla, 2023).

È proprio questa molteplicità di significati e di rappresentazioni a rendere questo tipo di numeri particolarmente interessante e allo stesso tempo estremamente complesso. Kieren ha per primo messo in evidenza i costrutti che caratterizzano i numeri razionali (decimali, rapporti, percentuali, quoziente), individuando in questa molteplicità di sfaccettature una delle maggiori cause delle difficoltà di apprendimento ad essi legate (Kieren, 1976).

I diversi approcci delle teorie presentate considerano la natura complessa del concetto di numero razionale a livello epistemologico e analizzano le più diffuse difficoltà a livello concettuale e procedurale.

Inoltre, la necessità di presentare il concetto di frazione nella sua interezza e non in modo frammentato puntando l'attenzione sui singoli costrutti che lo rappresentano, induce ad individuare uno schema che unifichi tali costrutti, cercando di metterli in relazione e operando una costruzione graduale di significati (Carpenter et al., 1993; Prediger, 2008).

In letteratura, inoltre, sono presenti studi che analizzano gli errori più comuni, che si manifestano nelle operazioni con le frazioni. In questo ambito uno degli errori più diffusi è riconducibile al NNB e si manifesta, nell'addizione tra due frazioni con denominatore diverso, attraverso la somma separata di numeratori e denominatori (Lortie-Forgues et al., 2015). Questo errore mette in luce una ‘generalizzazione inappropriata rispetto alle procedure aritmetiche dei numeri interi corrispondenti’ (Lortie-Forgues et al., 2015) e si verifica in tutte le parti del mondo.

2.2 Le teorie di riferimento per la formazione degli insegnanti. Una possibile strada per ridurre le difficoltà di apprendimento

La formazione degli insegnanti è uno tra gli argomenti portanti in Mathematics Education, in un quadro complesso e articolato che considera il processo di apprendimento strettamente legato a quello di insegnamento. Negli ultimi anni si sono sviluppati filoni di ricerca in quest’area e da essi sono emerse diverse teorie particolarmente significative e tra loro interconnesse.

La teoria di Shulman (1986) ha aperto la strada ad una serie di riflessioni che riguardano non solo le conoscenze disciplinari necessarie per poter insegnare una determinata disciplina, ma soprattutto quei fattori di natura pedagogica che sono intrinsechi nell’azione didattica del docente e che costituiscono ciò che l’autore definisce come Pedagogical Content Knowledge (PCK). Si tratta, secondo Shulman, di tutti quegli argomenti chiave che afferiscono ad una data disciplina, a tutte le loro rappresentazioni, alle più efficaci analogie o immagini legate ai concetti, agli esempi, agli errori più comuni, alle concezioni e, ancor di più, alle misconcezioni degli studenti riferite a ciò che deve essere insegnato, in un determinato ambito.

Per quel che concerne specificatamente la matematica, la teoria di Shulman fornisce una base per proporre diverse concettualizzazioni e modelli di conoscenza degli insegnanti, come per esempio il modello Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) (Hill et al., 2008). Tale modello teorico si sofferma non solo sulle conoscenze contenutistiche necessarie all’insegnante di matematica per poter insegnare, ma soprattutto su quali siano le conoscenze necessarie all’insegnante per ‘gestire’ l’errore in matematica, con una finalità costruttiva e produttiva. Più recente e maggiormente focalizzato è il modello del Mathematical Teacher’s Specialised Knowledge (MKTS) (Carrillo-Yañez et al., 2018), che afferisce ad un dominio nuovo rispetto alla Subject Matter Knowledge e alla Pedagogical Content Knowledge individuate da Shulman. La conoscenza disciplinare è necessariamente specializzata e va considerata secondo una visione olistica, complessa e articolata: in altre parole, il contenuto che deve essere insegnato non basta a sé stesso ma va inserito in una categoria più ampia che abbracci anche tutti quegli aspetti pedagogici che sono indissolubilmente legati ad esso.

In questo quadro così variegato si aggiungono ulteriori studi di Ball & Even

(2009) che forniscono una prospettiva per l'implementazione di interventi educativi che tengono conto della complessa articolazione di diversi contenuti e delle loro relazioni, suggerendo modi di intervenire nella pratica. Ball & Even (2009) sostengono che è fondamentale concentrare in modo efficace l'educazione degli insegnanti sulla pratica.

Questa situazione di 'formazione attraverso e nella pratica' (Even et al., 2009) consente al docente di autoregolarsi, di focalizzare l'attenzione sui processi attivati in una situazione di apprendimento, acquisendo piena consapevolezza di tutti gli elementi e delle conoscenze che sono necessarie e che caratterizzano i concetti in gioco.

Tenendo conto dell'obiettivo generale di far sviluppare al docente alcune conoscenze sullo sviluppo della sua professione, Fiorentino et al. (2023) hanno elaborato una nuova metodologia, che cerca di descrivere come effettuare una formazione in pratica. Essa ha lo scopo di concatenare l'esperienza dei docenti vissuta direttamente nella pratica di formazione di un determinato modello pedagogico, con la nuova esperienza di riflessione sulla loro precedente attività vissuta, individuando gli aspetti teorici chiave che caratterizzano il modello pedagogico oggetto della formazione.

In altre parole, essi elaborano un nuovo costrutto teorico, chiamato meta Discussione su un Modello Pedagogico (m-DMP), che costituisce un nuovo livello di discussione il cui obiettivo è la concettualizzazione del modello pedagogico su cui il docente si sta formando.

Come conseguenza, attraverso questa metodologia, i docenti in formazione migliorano la loro capacità di comprendere e interpretare le azioni degli studenti (Even et al., 2009) e riescono a pianificare interventi didattici basati sulla profonda analisi delle azioni e delle riflessioni degli studenti.

2.3 Le teorie didattiche per l'insegnamento e apprendimento di concetti matematici (e non solo delle frazioni)

La formazione dei docenti deve avere come obiettivo ultimo quello di rendere i docenti autonomi nel progettare attività di senso che favoriscano la corretta costruzione del concetto su cui si sta lavorando. Per essere efficace, dunque, il percorso deve affrontare l'aspetto più propriamente didattico e metodologico.

Una delle teorie che supporta le azioni dell'insegnante e favorisce la costruzione di concetti matematici è quella della Mediazione Semiotica (TMS) (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009). La TMS ha le sue radici nel socio-costruttivismo vygotskiano, secondo il quale gli studenti sono guidati dal loro insegnante a costruire conoscenze matematiche risolvendo compiti con l'uso di artefatti appositamente progettati e scelti.

L'attività di risoluzione di un problema aperto (Pehkonen, 1997) attraverso l'uso degli artefatti, conduce gli studenti in modo spontaneo a produrre conoscenze personali che, attraverso discussioni matematiche (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008) orchestrate dall'insegnante, si trasformano gradualmente in conoscenze matematiche condivise. Il problema aperto, per le sue caratteristiche, coinvolge situazioni complesse e sfaccettate e richiede capacità di pensiero critico e creativo per generare nuove idee, approcci e soluzioni. La creatività implica un modo di pensare fuori dagli schemi, stabilisce connessioni tra concetti apparentemente non correlati e permette l'esplorazione di possibilità alternative. L'uso di un problema aperto è cruciale per innescare una discussione matematica ricca ed efficace, durante la quale gli studenti costruiscono i significati matematici, passando da segni situati a segni condivisi. Il problema, se ben strutturato, può risultare sufficientemente stimolante per coinvolgere gli studenti sia a livello cognitivo che emotivo, nella loro veste di risolutori.

3. Problema di ricerca

Le frazioni e i numeri razionali in alcuni casi sviluppano difficoltà sia per gli studenti, sia per gli insegnanti, generando una disposizione emotiva negativa e 'preoccupazione', che ostacola l'intero processo di insegnamento-apprendimento.

Infatti, dal punto di vista didattico l'insegnante è condizionato dai suoi misconcetti, dal punto di vista psicologico è preoccupato del possibile fallimento dei suoi studenti. In particolare, la sua preoccupazione è legata alla percezione della carenza di strumenti in suo possesso per introdurre le frazioni e i numeri razionali 'diversamente' rispetto ai percorsi didattici tradizionali, suggeriti anche dai libri di testo.

Partendo da tali ipotesi, si è cercato di dare risposte alla seguente domanda di ricerca:

- Quali sono le emozioni/preoccupazioni dei docenti riguardo le frazioni? In che modo gli studenti percepiscono tali emozioni/preoccupazioni?

Dopo aver avviato un'indagine esplorativa sulle disposizioni emotive, sulle preoccupazioni e sugli atteggiamenti degli insegnanti, riguardanti la matematica e l'insegnamento delle frazioni, attraverso la somministrazione di test psicologici e un'intervista scritta, è stato progettato un percorso di formazione con un duplice obiettivo: da un lato favorire l'acquisizione di maggiori conoscenze su questa tematica e dall'altro fornire competenze di carattere teorico e metodologico per progettare attività didattiche efficaci e infine rendere gli insegnanti più consapevoli delle proprie conoscenze per gestire le preoccupazioni.

Il percorso di formazione ha riguardato entrambe le aree, quella psicologica e quella didattica, per studiare quali fossero le loro interconnessioni. Durante tale percorso si sono progettate diverse attività didattiche proposte successivamente nelle classi, analizzando gli effetti che tale corso ha avuto sulla progettazione e l'implementazione delle attività didattiche.

4. Metodologia della ricerca

Questo articolo presenta un percorso di ricerca sperimentale, inserito in una ricerca più ampia di tipo design-based research (Swan, 2014).

4.1 Partecipanti

Il campione dello studio è rappresentato da 50 insegnanti (36 di scuola primaria e 14 di scuola secondaria di I grado) di nove Istituti Scolastici della zona urbana di Bari e dei loro 950 alunni, circa, per un totale di 48 classi suddivise dalla terza primaria alla seconda secondaria di primo grado.

4.2 Strumenti e procedura

Il percorso sperimentale ha previsto una raccolta dati sui due campioni, docenti e alunni. La raccolta dei dati dei docenti è avvenuta in incontri pianificati on-line, sulla piattaforma Teams, attraverso dei Google Moduli. In dettaglio, agli insegnanti è stata somministrata un'intervista scritta con domande relative alla loro disposizione emotiva e alla preoccupazione rispetto all'insegnamento di frazioni e numeri razionali e i seguenti test, per indagare alcuni fattori di tipo emotivo: il test AMAS (Abbreviated Mathematics Anxiety Scale) nella sua versione italiana (Caviola et al., 2017), per valutare l'ansia da Matematica legata al ricordo; il test MTAS, Mathematic Teaching Anxiety Scale, (Hunt & Sari, 2019) che valuta l'ansia da insegnamento della matematica in due diverse dimensioni: l'ansia del docente rivolta verso sé stesso, verso la propria pratica didattica e la propria abilità percepita, definita come area del Self, e l'ansia rivolta verso i propri studenti, una sorta di preoccupazione del docente verso il raggiungimento del successo scolastico in matematica, da parte dei suoi alunni; il test MESI (Metacognizione, Emozioni, Strategie, Insegnamento) (Moè et al., 2010) che misura quegli aspetti di carattere emotivo e metacognitivo, le strategie e la soddisfazione lavorativa dell'insegnante.

Successivamente, è stato chiesto agli insegnanti di compilare un questionario sulla loro percezione rispetto agli errori più comuni commessi dagli alunni, in riferimento a quattro problemi sulle frazioni.

Da ultimo, è stata richiesta una analisi a priori sulle difficoltà e sulle possibili modalità risolutive di un problema aperto sulle frazioni. Tale problema aperto è stato successivamente utilizzato in una progettazione didattica realizzata nelle classi.

Per validare il percorso di ricerca sperimentale è stata effettuata un‘analisi qualitativa del questionario a domande aperte e dell’intervista somministrati agli insegnanti, secondo i criteri di credibilità, attendibilità, trasferibilità e confermabilità (Guba, 1981), per garantirne l‘attendibilità. I ricercatori hanno ripetutamente letto i testi e li hanno interpretati individualmente, facendo riferimento alle domande di ricerca e al quadro teorico; poi hanno discusso i temi emergenti, fino a concordare quelli più rilevanti (Sharma, 2013).

I dati raccolti attraverso le misure psicologiche sono stati elaborati con il software SPSS. I dati sono analizzati, complessivamente, secondo una metodologia Mixed Method (Almalki, 2016; Bosica, 2022).

5. Il percorso di ricerca sperimentale

Il progetto di ricerca sperimentale è stato sviluppato attraverso le seguenti fasi:
Fase 1 - Raccolta dei dati attraverso la somministrazione di intervista e questionario;
Fase 2 - Formazione degli insegnanti;
Fase 3 - Sperimentazione nelle classi;
Fase 4 - Raccolta e analisi dei dati.
In questo articolo si focalizza l’attenzione sulla descrizione e l’analisi della fase 1 e della fase 2.

5.1 Fase 1 - raccolta dei dati attraverso la somministrazione di intervista e questionario

Nella prima fase si è proposta un‘intervista scritta con 9 domande, ideata sulla base degli studi di Di Martino e Zan (Di Martino & Zan, 2010), nella quale si è chiesto agli insegnanti di esprimere le loro emozioni riguardo al tema frazioni e numeri razionali, al fine di indagare la loro disposizione emotiva ed eventuali credenze e misconcezioni inerenti al concetto matematico di frazione.

Il questionario poneva alcune domande inerenti allo stesso concetto, con l’obiettivo di far emergere i più comuni errori degli studenti e i diversi stati d’animo dei docenti, il loro atteggiamento rispetto all’insegnamento delle frazioni.

5.2 Fase 2 - La formazione degli insegnanti

L’intervento formativo è stato strutturato in due momenti: un primo momento di formazione on-line (a causa delle restrizioni da Covid-19), e un secondo momento di incontri in presenza per la progettazione delle attività da sperimentare nelle diverse classi.

Durante gli incontri on-line la formazione ha riguardato gli aspetti epistemologici legati al tema di frazione e numeri razionali, alle principali difficoltà di questo contenuto matematico e agli errori più comuni commessi dagli studenti e alcune teorie e metodologie della didattica della Matematica. Questa prima parte è stata strutturata per rispondere al bisogno emerso da parte dei docenti circa i contenuti matematici: l'intervista ha evidenziato alcune incertezze di carattere epistemologico.

Si è dato poi seguito all'attività con un percorso di formazione 'in e attraverso la pratica' (Even et al., 2009) che ha consentito ai docenti coinvolti di sperimentare in prima persona, assumendo il ruolo di studenti, cosa accade durante il processo di apprendimento. Dopo aver risolto in diversi modi un problema aperto sulle frazioni, sulla base della teoria interpretativa (Carrillo-Yañez et al., 2018; Mellone et al., 2018) è stata richiesta un'analisi a priori del problema e la riflessione su protocolli risolutivi di studenti di classe V. Obiettivo di questa attività è stato quello di mettere i docenti nelle condizioni di scoprire il valore della previsione delle azioni dei loro studenti, e di acquisire la capacità di interpretare gli errori e di ipotizzare diverse possibili strategie risolutive. Questa attività è stata svolta attraverso il confronto e una discussione collettiva tra docenti. Anche questa attività è stata progettata in seguito all'analisi delle caratteristiche degli insegnanti coinvolti, per i quali abbiamo ritenuto opportuno effettuare una formazione basata sui problemi aperti, in quanto questi suscitano insicurezza per come sono strutturati.

Altro momento saliente degli incontri di formazione è stata la condivisione di un percorso metodologico e didattico innovativo, progettato sulla base della TMS, che ha riguardato la progettazione di attività sperimentali, l'individuazione di alcuni artefatti con potenziale semiotico significativo rispetto ai compiti assegnati da realizzare nelle loro classi.

Le attività progettuali, basate sui principi metodologici condivisi durante la fase di formazione, rispondevano ai diversi obiettivi per fasce di età degli studenti a cui le attività erano destinate.

6. Analisi dei risultati

6.1 Emozioni/preoccupazioni dei docenti riguardo alle frazioni

Per dare una risposta alla domanda di ricerca, in questa sezione si illustrano alcuni dei risultati preliminari particolarmente significativi, emersi dall'analisi degli strumenti di indagine qualitativa (intervista e questionario) usati con gli insegnanti.

Riportiamo qui di seguito l'analisi delle risposte dei docenti ad alcune domande particolarmente significative dell'intervista scritta, rispetto alla loro disposizione emotiva.

Domanda n. 5
Puoi descrivere brevemente gli argomenti di matematica che ti piace insegnare o quelli che ti preoccupano? Perché?

Ins. 1: I numeri decimali mi preoccupano un po'. Probabilmente per la mia inesperienza.
Ins. 31: Le divisioni a due cifre è complesso perché richiedono più operazioni ed astrazioni da parte dei bambini.
Ins. 2 [...] Già dalla divisione con il divisore a due cifre ho cominciato ad avere qualche preoccupazione su quale potesse essere il metodo più semplice da comprendere anche perché è difficile utilizzare dei materiali di supporto.
Ins. 30: Mi preoccupano i numeri decimali, le equivalenze, i numeri relativi forse perché gli alunni fanno più fatica a comprenderli.
Ins. 38: Sicuramente le difficoltà maggiori le riscontro nell'insegnamento della matematica in quarta e quinta primaria. In particolare, frazioni, operazioni con i numeri razionali, equivalenze.
Ins. 50: Mi preoccupo sempre di riuscire a rendere chiari ai bambini proprio quegli argomenti come le frazioni che richiedono una capacità di astrazione e ragionamento che per tanti è una conquista che avviene pian piano.
Ins. 18: Mi preoccupa insegnare le frazioni perché non mi è chiaro il ragionamento da intraprendere per poterlo spiegare agli studenti.
Ins. 33: Mi diverto quando spiego ai ragazzi i rapporti le proporzioni, le percentuali e metto in evidenza il legame che essi hanno con le frazioni come rapporti fra numeri.
Ins. 16: Non mi rassicura l'insegnamento delle potenze e delle frazioni per i risultati che i ragazzi spesso conseguono.

Dall'analisi delle risposte alla domanda 5 emerge che il 70% degli insegnanti intervistati esprime preoccupazione ed emozioni negative rispetto all'insegnamento delle frazioni e degli argomenti ad esse strettamente connesse, come ci si aspettava. Mentre una piccola percentuale, di circa 10%, esprime emozioni positive. In particolare, attraverso una precisa analisi testuale, è risultato che 5 docenti sono preoccupati di insegnare le divisioni a due cifre (tra i quali gli Ins. 31 e Ins. 2); per 5 docenti i numeri decimali, le equivalenze e l'intero sistema metrico decimale rappresentano un tema che suscita preoccupazione (tra i quali Ins. 1 e Ins. 30); per 10 insegnanti sono le frazioni il tema che genera emozioni negative (tra i quali Ins. 18, Ins. 38, Ins. 50); solo in 3 casi le frazioni provocano divertimento nell'insegnante (tra i quali Ins. 33). Si può notare come, in alcuni casi, l'insegnante giustifica le sue affermazioni facendo esplicito riferimento agli effetti del suo insegnamento sulle emozioni e sull'apprendimento degli studenti (Ins. 31, Ins. 16, Ins. 18, Ins. 30).

Nella domanda successiva si chiede un riferimento esplicito ad argomenti di matematica che suscitano emozioni intense dichiarando quali emozioni.

Domanda n. 6
Ci sono degli argomenti di Matematica che ti fanno provare emozioni particolarmente intense (sia positive, che negative)? Se sì, potresti dire quali argomenti sono, cosa provi e perché?

Ins. 30: I numeri decimali, le equivalenze e i numeri relativi mi procurano un po' di ansia e di paura perché penso che non tutti gli alunni riusciranno a comprenderli. Mi diverto a spiegare le moltiplicazioni e le tabelline e a fare giochi e gare perché è bello vedere l'entusiasmo dei bambini.
Ins. 43: Mi entusiasmano [...] problemi con le frazioni.
Ins. 37: Riguardo alle frazioni, mi piace la sensazione che si prova a semplificare. Ciò si verifica sia riducendo ai minimi termini la singola frazione, sia con la semplificazione a croce tra due o più frazioni nella moltiplicazione. È una procedura divertente con cui si gioca con i numeri, sostituendo gli uni con altri via via minori.
Ins. 12: Il concetto di divisione, i numeri decimali. Mi chiedo sempre se sono stata in grado di spiegare l'argomento in maniera semplice e comprensibile.
Ins. 41: Non mi piace molto insegnare le unità di misura e le equivalenze perché vedo spesso le difficoltà di alcuni bambini.
Ins. 48: Le frazioni sono sempre state un po' ostiche, probabilmente perché è una lacuna mai colmata.
Ins. 24: Per quanto riguarda le frazioni, invece, sono serena negli esercizi più semplici e compilativi, mentre quelli più concreti e differenti generano in me un senso di inadeguatezza e ho difficoltà a gestirli, anche se mi metto costantemente in gioco.
Ins 16: Probabilmente le frazioni… ma, non so dare una risposta standard perché dipende dal feedback che ricevo dagli studenti. Ciò che li interessa e li coinvolge mi suscita emozioni positive, ciò che genera in loro noia e disinteresse mi preoccupa.

Dall'analisi delle risposte alla domanda 6 emerge che il 60% degli insegnanti intervistati esprime emozioni intense, tra cui preoccupazione, paura, senso di inadeguatezza, ancora una volta rispetto all'insegnamento delle frazioni e degli argomenti ad esse strettamente connessi, come ci si aspettava. Mentre una più alta percentuale rispetto alla domanda 5, circa il 30%, esprime emozioni positive. In particolare, attraverso una precisa analisi testuale, è risultato che 30 docenti sono preoccupati di insegnare numeri decimali, equivalenze, frazioni, divisione e unità di misura. Gli insegnanti dichiarano che tali argomenti suscitano in loro emozioni negative in riferimento al processo di insegnamento (tra i quali Ins. 48, Ins. 24). Inoltre, molti di loro legano le preoccupazioni e le emozioni negative all'atteggiamento, in genere negativo, e all'apprendimento manifestati dai bambini (tra i quali Ins. 41, Ins. 16).

La domanda successiva ha l'obiettivo di indagare ancora più specificatamente lo stato d'animo degli insegnanti riguardo le frazioni, nell'ottica della loro azione didattica:

Domanda n. 8
Sapresti descrivere il tuo stato d'animo di fronte all'eventualità di insegnare le frazioni in una classe che ti viene assegnata? Potresti spiegare i motivi di questo stato d'animo?

Ins. 31: Di solito il primo approccio <u>è positivo</u> ma quando si incomincia a passare ai <u>numeri decimali</u> e percentuali <u>temo che non sia comprensibile.</u>
Ins. 15: <u>Il timore di sbagliare non avendo le idee chiare sull'argomento</u>.
Ins. 2: Preoccupazione per i<u>l passaggio dalla frazione al numero decimale</u> e quindi alla frazione intesa come numero vero e proprio. Perché rispetto ai numeri naturali cambiano tutte le regole anche nel calcolo.
Ins. 30: Sono <u>serena e tranquilla</u> perché è un argomento che <u>mi piace</u> e gli alunni sono entusiasti quando lo studiano.
Ins. 18: <u>Proverei ansia</u> perché si tratterebbe di un argomento per me nuovo.
Ins. 49: Di fronte all'eventualità di insegnare le frazioni in una classe provo, all'inizio, <u>emozioni contrastanti</u> perché, accanto alla <u>gioia di affrontare un argomento</u> così importante e trasversale, c'è sempre un po' di <u>timore di non scegliere la strategia didattica adeguata</u> al contesto in cui si opera.
Ins. 13: <u>Lo affronto non completamente serena</u> perché anche con un approccio laboratoriale <u>so già che molto probabilmente non sarò efficace per tutti i miei studenti.</u>
Ins. 41: <u>Mi sentirei abbastanza serena,</u> a me piace scoprire strategie sempre più efficaci.
Ins. 14: <u>Sarei preoccupata</u> se fosse una classe che non conosco e che non mi conosce.
Ins. 7: <u>Insofferenza e distacco</u>, forse perché non mi sono mai sentita padrona dell'argomento
Ins. 48: <u>Insicurezza</u>, […].
Ins. 38: <u>Ansia perché non padroneggio completamente l'argomento</u>. Dopo vari corsi e webinar sull'argomento mi rendo conto che c'è tanto da imparare sulle

frazioni. C'è un mondo dietro che a volte è sconosciuto

Ins.16: <u>sarei preoccupata dei risultati che potrei avere</u> perché, per l'esperienza fino ad ora avuta, spesso <u>questo argomento risulta ostico per i ragazzi e provoca allontanamento dalla disciplina.</u>

La percentuale di risposte che denotano una emozione non positiva è piuttosto alta; infatti 32 docenti su 50 (pari al 64%) esprimono sensazioni negative. Dalle risposte riportate, emergono tra le espressioni maggiormente ricorrenti quelle che denotano ansia, preoccupazione, disagio… Piuttosto ricorrente è anche la preoccupazione del docente di far bene il proprio lavoro, di scegliere le strategie didattiche e le metodologie più efficaci per poter garantire il successo formativo per tutti gli studenti.

L'aspetto che intimorisce di più è il passaggio dai numeri sotto forma di frazione ai numeri decimali (ad esempio, Ins. 2). Nel passaggio da una rappresentazione semiotica all'altra l'insegnante, infatti, teme di non essere in grado di guidare i suoi studenti alla piena comprensione del significato di questa nuova rappresentazione. Il problema risiede, a nostro avviso, proprio nella limitata consapevolezza del docente su come legare tra loro le diverse rappresentazioni (Kieren, 1976).

Interessante è anche notare che qualcuno (come ad es. Ins. 18 ed Ins. 30) sembra contraddirsi. Quando nella domanda n. 6 si chiede loro di indicare argomenti che causano sensazioni ed emozioni particolarmente intense la Ins. 18 dichiara che «non c'è nessun argomento» e la Ins. 30 afferma che «I numeri decimali, le equivalenze e i numeri relativi mi procurano un po' di ansia e di paura»; nel rispondere alla domanda 8 che è più esplicitamente rivolta alle frazioni l'Ins. 18 dichiara che proverebbe «ansia perché si tratterebbe di un argomento per me nuovo» (Ins. 18) mentre la Ins. 30 si sentirebbe «serena e tranquilla perché è un argomento che mi piace e gli alunni sono entusiasti quando lo studiano». Queste risposte potrebbero denotare una difficoltà nell'esprimere la propria disposizione emotiva, oppure una carenza concettuale sul legame tra frazioni e numeri decimali.

6.2 Influenza delle preoccupazioni degli insegnanti sugli studenti

Una lettura globale del questionario ci fornisce elementi di riflessione legati alla domanda di ricerca. Pur non essendo presenti, tra le domande dell'intervista, esplicite richieste del rapporto tra docente e studente e dell'eventuale legame che intercorre tra le proprie disposizioni emotive e quelle degli studenti, molti insegnanti fanno riferimento alla relazione con i loro studenti e alle loro emozioni positive legate alle reazioni degli studenti, come ad esplicitare una relazione di causa-effetto tra le due dimensioni.

Ins. 50: Essendo alla primaria, non ci sono argomenti che mi preoccupano di per sé, ma mi preoccupo sempre di riuscire a rendere chiari ai bambini proprio quegli argomenti come le frazioni che richiedono una capacità di astrazione e ragionamento che per tanti è una conquista che avviene pian piano.
Ins. 18: Mi preoccupa insegnare le frazioni perché non mi è chiaro il ragionamento da intraprendere per poterlo spiegare agli studenti.
Ins. 27: La mia preoccupazione sta nel fatto che non ho strumenti adeguati per attivare i ragazzi su argomenti che andrebbero trattati precocemente, in primaria, e ho timore che in prima media sia già ‘troppo tardi’, visto che ci vuole molto tempo per assorbire e far propri i trucchi di calcolo mentale, e mi sembra di fare qualcosa di molto dispendioso in termini di tempo, e di non averne mai abbastanza.
Ins. 13: Sicuramente le frazioni sono un argomento problematico perché non tutti gli studenti ne acquisiscono significato e operatività in modo efficace.
Ins. 28: Adoro insegnare tutti gli argomenti di matematica perché trovo stimolante trovare le modalità coinvolgenti di tutte le lezioni per renderle accessibili a tutti
Ins. 14: Mi piace insegnare la matematica con agganci ed esempi reali o materiale strutturato e non. Mi preoccupano i numeri decimali, perché temo che gli allievi possano non comprendere bene l’argomento.
Ins. 3: L’emozione più grande si prova quando si legge negli occhi dei propri alunni che hanno capito e che sono sereni.
Ins. 44: Non c’è un argomento in particolare che mi piaccia più degli altri. Di sicuro tutte le volte che devo spiegare un argomento nuovo, mi sento sempre un po’ a disagio per paura di non riuscire a farlo comprendere bene ... poi man mano che lo introduco e vedo i risultati negli alunni, ne sono soddisfatta oppure no.
Ins. 38: Le emozioni positive emergono quando si vedono i progressi degli alunni e la loro capacità di mettere in pratica nelle situazioni reali quanto acquisito. Ovviamente in questo percorso è facile che si provi talvolta un sentimento di frustrazione e fallimento dinanzi alle difficoltà degli alunni. Mi sento sempre responsabile delle loro difficoltà di apprendimento.
Ins. 25: L’emozione che provo è vedere gli alunni muoversi con autonomia.
Ins. 16: [...] Dipende dal feedback che ricevo dagli studenti. Ciò che li interessa e li coinvolge mi suscita emozioni positive.

Dall’analisi dei dati emerge che l’80% dei docenti intervistati fa esplicito riferimento agli studenti, legando le proprie emozioni negative alla difficoltà degli alunni di comprendere e costruire adeguatamente i concetti di frazione e numeri decimali e le proprie emozioni positive al successo degli studenti, al loro entusiasmo e alla loro autonomia nel processo di apprendimento.

Anche l’indagine di tipo quantitativo, che si è servita dei test AMAS, MTAS e MESI, ha evidenziato delle correlazioni tra l’ansia dell’insegnante e l’ansia dello studente (vedi Figura 1).

Dall'analisi qualitativa dei dati si evidenzia che, per quanto riguarda i docenti, maggiore è stata la loro ansia da apprendimento e da valutazione in matematica nel ricordo di quando erano bambini, altrettanto alta è la loro ansia da insegnamento come docenti nella dimensione rivolta verso i loro allievi (Hunt & Sari, 2019): i docenti che ricordano di essere stati ansiosi verso le attività di matematica si mostrano preoccupati di fare le scelte didattiche corrette, per favorire il percorso di apprendimento dei loro alunni.

Per quello che riguarda la relazione tra insegnanti e alunni, dalle correlazioni effettuate sui risultati dei test si evince che a minore ansia da insegnamento della matematica da parte del docente, corrispondono minore ansia da apprendimento degli alunni e migliori risultati accademici nelle performance in matematica.

In altri termini, un'alta performance degli studenti è associata ad una bassa ansia del docente, così come ad una bassa ansia da apprendimento degli studenti sono associati bassi livelli di ansia dei docenti rivolta verso sé stessi.

Figura 1

Matrice di correlazione

Matrice di Correlazione

Matrice di Correlazione

			Docenti						
		TAQ_TOT	PUPIL	SELF	AMAS_APP	AMAS_VAL	Mat_Tot	AMAS_AP	AMAS_VAL (2)
TAQ_TOT	r di Pearson	—							
	valore p	—							
PUPIL	r di Pearson	0.043	—						
	valore p	0.535	—						
SELF	r di Pearson	–0.143 *	0.270 ***	—					
	valore p	0.040	<.001	—					
AMAS_APP	r di Pearson	0.060	–0.515 ***	0.017	—				
	valore p	0.387	<.001	0.805	—				
AMAS_VAL	r di Pearson	0.019	–0.391 ***	0.281 ***	0.901 ***	—			
	valore p	0.787	<.001	<.001	<.001	—			
Mat_Tot	r di Pearson	–0.062	–0.013	0.171 *	0.093	0.075	—		
	valore p	0.376	0.852	0.014	0.182	0.280	—		
AMAS_AP	r di Pearson	0.376 ***	–0.059	–0.264 ***	0.004	–0.038	–0.204 **	—	
	valore p	<.001	0.401	<.001	0.957	0.586	0.003	—	
AMAS_VAL (2)	r di Pearson	0.599 ***	0.103	–0.135	0.087	0.042	–0.113	0.528 ***	—
	valore p	<.001	0.138	0.052	0.214	0.547	0.103	<.001	—

Nota. * p < .05, ** p < .01, *** p < .001

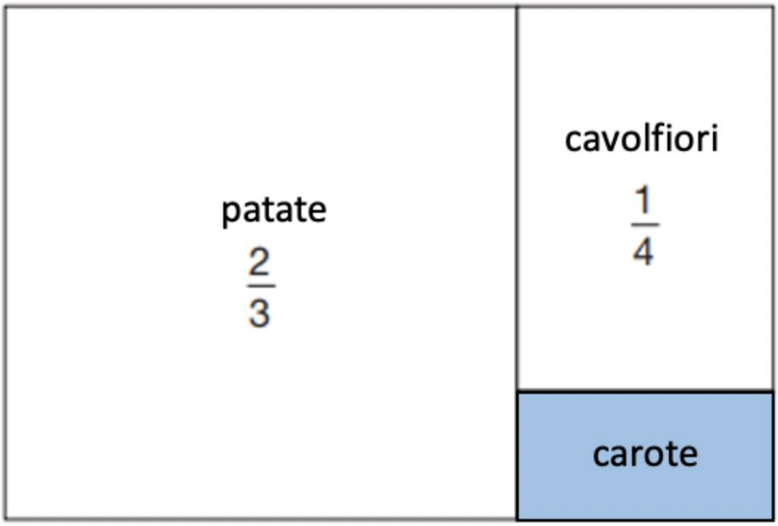
6.3 Il corso di formazione per la gestione dei fattori emotivi, nello sviluppo delle attività didattiche

Dopo aver preso atto delle emozioni che i docenti provano riguardo all'insegnamento delle frazioni, si è passati ad una attività di formazione in pratica. Tale attività è stata ispirata da un problema aperto (Figura 2), che offre molteplici livelli di intervento.

Il problema è stato utilizzato per avviare una riflessione sugli errori degli studenti e sulle difficoltà che gli insegnanti si aspettano. È stato risolto dai docenti i quali ne hanno successivamente fatto una analisi a priori secondo la teoria interpretativa (Mellone et al., 2018). Infine, è stato utilizzato per realizzare attività sperimentali nelle classi, insieme agli studenti.

Figura 2
Il problema dell'orto

Il problema dell'orto
Questo è il disegno di un orto. Mostra le parti (frazioni) del giardino coltivate con patate e cavolfiori. La parte restante è coltivata con carote.
Quale parte dell'orto è coltivata con le carote?
Spiega il tuo ragionamento.



Qui di seguito si riportano le risposte degli insegnanti alle domande circa le difficoltà e gli errori che, secondo loro, gli studenti incontrerebbero di fronte ad un problema di questo tipo.

Domanda n. 1
Rispetto alle usuali difficoltà riscontrate dai tuoi studenti nell'apprendimento delle frazioni, a quali difficoltà andrebbero incontro i tuoi alunni nel risolvere questo problema?

Alcune tra le risposte:

Ins. 2: Non riuscirebbero ad addizionare le frazioni con denominatore diverso.

Ins. 4: Capire che per risolvere il quesito devono ridurre le frazioni allo stesso denominatore. Penso che li spiazzerebbe il fatto di trovare le due frazioni con diverso denominatore, quasi fossero due oggetti non collegati né collegabili. Penso che avrebbero difficoltà anche a capire che per risalire alla frazione mancante debbano sottrarre al numero 1 le altre due frazioni. Ho riscontrato ad esempio la difficoltà nel calcolare la frazione complementare a quella data, che per me era invece quasi banale.

Ins. 5: Capire come calcolare il denominatore. Avrebbero difficoltà nel considerare parte dell'intero frazioni con denominatore diverso.

Ins. 10: Rimarrebbero interdetti.

Ins. 12: Non tutti sarebbero in grado di capire di dover lavorare con frazioni equivalenti.

Ins. 13: Solo adesso mi accingo a presentare agli alunni questo argomento.

Ins: 14 Moltissime difficoltà.

Ins. 16: Trovare indicate frazioni con denominatori diversi e non intuire di ricondurle allo stesso denominatore per individuare la parte mancante.

Ins. 17: Una delle difficoltà per un bambino di scuola primaria potrebbe essere quella di non avere a disposizione oggetti identici (denominatori uguali).

Ins. 20: La percezione di non riuscire a quantificare la frazione carote da un punto di vista visivo per la presenza di denominatori diversi.

Ins. 24: Non saper svolgere l'esercizio; Non saper ricostruire le parti dell'intero; Si bloccherebbero e avrebbero timore a svolgere l'esercizio.

Ins. 28: Nel comprendere bene la traccia.

Ins. 22: A come calcolare la frazione di orto destinata alle carote.

Ins. 27: Problemi legati alla comprensione del testo e alla difficoltà di immaginarsi la situazione in maniera pratica.

Ins. 34: Andrebbero in ansia.

Ins. 38: Avrebbero difficoltà nell'individuare la risposta.

Ins. 41: Avrebbero difficoltà nel gestire frazioni con denominatori diversi.

Ins. 53: Il livello di difficoltà del problema è superiore alle loro conoscenze.

Gli esempi qui riportati possono essere esemplificativi per il diverso tipo di risposta fornita dai docenti.
Dal punto di vista del contenuto matematico, il 38% degli insegnanti fa esplicito riferimento ai 'denominatori diversi' come causa di difficoltà. 6 insegnanti richiamano le frazioni equivalenti, 3 le frazioni complementari e altri, tra cui l'Ins. 45 e Ins. 8, fanno riferimento alla procedura risolutiva.

Un elemento particolarmente interessante, a nostro avviso, è la percentuale di docenti che fornisce una risposta generica, che si limita a parafrasare il problema o non dà alcuna risposta: 18 insegnanti, pari al 36 %, rispondono in modo vago (come ad esempio Ins. 14, 24, 28, 34, 38), un paio si limitano a fare una parafrasi della domanda del problema (come l'Ins. 22), altri evitano di fornire una risposta.

Questa tipologia di risposte, a nostro avviso, è caratterizzata da uno stile attributivo esterno, ovvero gli insegnanti individuano nello studente l'unico responsabile del fallimento. In questa fase iniziale gli insegnanti intervistati mostrano un atteggiamento di 'deresponsabilizzazione' della propria azione didattica, individuando come cause delle difficoltà dei loro studenti elementi di carattere cognitivo (come la comprensione della traccia, il ricordare e applicare correttamente una procedura) o emotivo (come l'ansia).

Il questionario prosegue con una domanda che ha l'obiettivo di avviare una riflessione maggiormente focalizzata sul senso dell'errore e sul suo valore.

Domanda n. 2
Quali sono gli errori che ti aspetti, in riferimento a questo problema?

A titolo esemplificativo vengono qui riportate alcune tra le risposte maggiormente significative:

Ins. 2: Tirerebbero ad indovinare, molti risponderebbero un terzo.
Ins. 4: Errori di impostazione del procedimento. Errori di calcolo di somma e differenza tra frazioni.
Ins. 5: Potrebbero pensare che ci sia un errore nella traccia per la presenza di denominatori differenti.
Ins. 10: Qualcuno potrebbe affrettarsi senza ragionare.
Ins. 13: Non saper confrontare le frazioni presentate con un denominatore diverso.
Ins. 16: Potrebbero sommare le frazioni.
Ins. 20: La difficoltà di risoluzione.
Ins. 33: Errori di calcolo dell'operazione, mancata risoluzione a causa di difficoltà legate a considerare l''intero uguale all'unità.
Ins. 39: Che la somma delle frazioni di patate e cavoli per loro rappresenti la frazione coltivata a carote!
Ins. 25: Tanti.
Ins. 26: In un approccio prettamente aritmetico l'errore che mi aspetto è la somma dei denominatori.
Ins. 9: Spesso non portano a termine i calcoli, cioè si fermano al primo risultato ottenuto, senza pensare che alla richiesta effettiva del comando.
Ins. 35: Pensare che il problema sia irrisolvibile o considerarsi incapaci.
Ins. 37: L'errore più frequente potrebbe essere il calcolo del m.c.m. oppure nella trasformazione nelle frazioni equivalenti.
Ins. 36: Che non riescano a risolverlo.
Ins. 45: Errori di procedura, errori sull'esecuzione delle addizioni/sottrazioni tra frazioni, mancata applicazione del concetto di frazione complementare.

Ins. 16: Potrebbero sommare le frazioni.
Ins. 11: Risposte non date, risposte a caso, non motivate. Operazioni non richieste.

- Da una analisi puntuale, le risposte degli insegnanti rispetto agli errori che gli studenti potrebbero commettere in riferimento a questo problema possono essere così categorizzate: errori dovuti alla fretta, alla superficialità, al mancato ragionamento o a rinuncia da parte dello studente a causa di ragioni emotive;
- errori di tipo procedurale non meglio specificati o riconducibili alla risoluzione parziale del problema;
- errori di calcolo nelle operazioni con le frazioni, nel calcolo del mcm…;
- errori che dipendono dal contenuto matematico come l'unità frazionaria, la relazione tra parti di uno stesso intero, somma tra frazioni con denominatori diversi, il concetto di intero e di parti di un intero, la divisione in parti non uguali di uno stesso intero…

Questi ultimi errori sono effettivamente gli stessi riconosciuti in letteratura (DeWolf & Vosniadou, 2015; Lortie-Forgues et al., 2015; Siegler & Lortie-Forgues, 2017; Torbeyns et al., 2015) e rappresentano le maggiori difficoltà che gli studenti incontrano nella risoluzione di problemi con le frazioni.

L'analisi di tipo qualitativo mette in risalto che il 20% dei docenti non risponde esplicitamente alla domanda, ma fornisce una risposta generica (Ins. 10, 25, 36…). Tale risposta non ammette alcuna possibilità di intervento da parte del docente: l'errore sembra dipendere solo dagli studenti, dalla loro frettolosità, dalla loro scarsa abitudine a riflettere o dallo scarso esercizio dedicato al tema, riducendo drasticamente il coinvolgimento e la responsabilità dell'insegnante.

Il 16% dei docenti (tutti di scuola secondaria di I grado) fanno riferimento alle procedure e all'applicazione di formule per la risoluzione del problema, il 20% fa riferimento a generici 'errori di calcolo' senza meglio indicare il tipo di errore. Di questi, 6 sono docenti di scuola primaria e questo dato appare piuttosto interessante: alla scuola primaria solitamente non si eseguono operazioni con le frazioni secondo procedure algoritmiche definite. Ci si domanda, quindi, a quale tipo di errore di calcolo si riferiscano le docenti. Si pensa, piuttosto, che l'espressione 'errore di calcolo' sia più che altro una tipologia di errore a cui si fa comunemente riferimento nella valutazione.

Nel complesso le risposte degli insegnanti evidenziano una certa consapevolezza delle difficoltà del tema matematico, ma denotano una certa difficoltà da parte dei docenti, sia nella gestione dell'argomento in oggetto e sia nell'approccio metodologico didattico da adottare per l'insegnamento dello stesso.

Riflessioni interessanti nascono dal confronto delle risposte dei diversi questionari, da parte degli stessi insegnanti. L'Ins. 13, rispondendo alla domanda su quali si pensa siano le difficoltà che i propri studenti incontrerebbero nel risolvere il problema dell'orto, aveva inizialmente dichiarato che «Non tutti sarebbero in grado di capire di dover lavorare con frazioni equivalenti» esplicitando così l'effettiva problematica legata al tema di frazioni e numeri decimali. Però lo stesso insegnante, in riferimento ad una domanda su quali si pensa siano le cause che determinano gli errori, rispetto alla risoluzione del problema in questione, evidenzia l'aspetto puramente meccanico della risoluzione del problema, legato ad una procedura che va ricordata: «ricordare come calcolare il minimo comun denominatore».

Si è ritenuto indispensabile, durante il corso di formazione, attirare l'attenzione dei docenti sull'aspetto relazionale della matematica, lasciando passare in secondo piano quello procedurale. È vero infatti che, al termine del percorso i docenti di alunni di classe III primaria hanno verificato che i loro alunni, pur non conoscendo affatto la procedura di calcolo del mcm sono stati perfettamente in grado di risolvere il problema, ricorrendo al concetto di 'unità di misura' che può ricoprire l'intero campo, nonché singolarmente le altre porzioni di campo coltivate con ortaggi differenti.

Le riflessioni nelle attività di gruppo tra docenti, durante l'analisi del problema e la sua soluzione, hanno messo in luce che le difficoltà da loro individuate possono essere risolte con un approccio che miri alla costruzione del significato profondo del concetto di frazione e non all'applicazione di una procedura meccanica che rischia di essere dimenticata.

La domanda n. 3 va maggiormente a fondo e mira ad indagare le cause degli errori degli studenti.

Domanda n. 3
Quali sono, secondo te, le cause di questi errori?

Qui di seguito solo alcune delle risposte più significative:

Ins. 11: Poca fiducia in sé stessi, paura di mettersi in gioco, poca riflessione, poca concentrazione, ansia di rispondere.
Ins. 5: Mancanza di riflessione e poca abitudine ad eseguire esercizi che presentano inferenze.
Ins. 12: Percorso didattico non adeguato.
Ins. 21: Ragionamento sbagliato.

Per gli insegnanti, le cause degli errori degli studenti sono di molteplice natura.

Un’alta percentuale dei docenti (68%) manifesta attribuzione esterna di responsabilità, individuando negli studenti e nel loro comportamento le cause degli errori (mancata comprensione del concetto nelle sue numerose sfaccettature, mancanza di ragionamento o errori di ragionamento, scarsa capacità di astrazione, non comprensione del testo del problema, scarso esercizio, scarsa attenzione o poca predisposizione…).

Un’esigua minoranza (6%) riconosce le caratteristiche epistemologiche complesse del tema matematico e il 20% riconosce tra le cause degli errori motivazioni di tipo didattico (didattica tradizionale, didattica non laboratoriale e distante dal concreto, percorsi didattici non efficaci…). L’ultimo 6% non risponde o fornisce risposte errate.

L’ultima domanda su cui si vuole concentrare l’attenzione chiede ai docenti di ipotizzare strategie per affrontare e risolvere il problema, in un’ottica di rimozione delle difficoltà.

Domanda n. 4
Quale intervento didattico pensi possa favorire il superamento di tali difficoltà ed evitare di incorrere negli errori?

Ins. 1: Esercitazioni pratiche con uso di materiale non strutturato.
Ins. 4: Probabilmente la manipolazione di oggetti concreti che rappresentino l’intero e le sue parti e che permettano di vedere come frazioni con denominatore diverso siano di fatto riconducibili a frazioni equivalenti rappresentanti porzioni diverse di uno stesso intero. Relativamente agli errori nella somma e differenza di frazioni, penso che lezioni precedenti che possano insistere sul calcolo mentale del mcm tra semplici numeri, con la stesura condivisa delle strategie ad esso relative, possa aiutare gli studenti all’automatizzazione dei calcoli necessari.
Ins. 6: Lettura ad alta voce della traccia del quesito da parte dell’insegnante.
Ins. 12: Stampare il foglio che rappresenta l’orto e farlo piegare.
Ins. 14: Si potrebbe lavorare con un modellino di carta che riproduca le parti unitarie contenute nelle frazioni.
Ins. 16: Trovare un modo semplice per far capire il meccanismo che c’è dietro il quesito.
Ins. 19: Il ricorso a questo tipo di esercizio.
Ins. 25: L’intervento didattico sull’argomento delle frazioni deve essere il più possibile laboratoriale, deve fare scoprire caratteristiche e proprietà delle frazioni attraverso la proposizione continua di situazioni problematiche di difficoltà crescente e la abitudine all’uso di materiale concreto per rappresentare le frazioni e risolvere le situazioni problematiche con esse.

Ins. 30: Lavorare sul significato delle parti di un intero, utilizzando diversi modelli.
Ins. 34: Allenarsi svolgendo molti calcoli di m.c.d. utilizzando differenti coppie o triplette di denominatori. Per le tabelline memorizzazione anche attraverso l'uso di tavole pitagoriche.
Ins. 35: Lavoro laboratoriale sulle frazioni.
Ins. 46: Favorire la comprensione, il ragionamento e lasciare spazio alle attività laboratoriali.

Per il 42% dei docenti la didattica laboratoriale e la didattica legata a situazioni pratiche e sperimentali rappresenta l'intervento didattico che ridurrebbe le difficoltà. Il 34 % fa riferimento esplicito all'uso di strumenti, materiale non strutturato, modelli concreti (foglio di carta da piegare e tagliare, foglio quadrettato, cartoncino…). Solo per una minoranza di docenti la soluzione sta nel fare molto esercizio, nella lettura ad alta voce della traccia, nell'individuare il meccanismo. Per questi si delinea un approccio di tipo maggiormente procedurale, rivolto al prodotto più che al processo e alla costruzione del profondo significato di frazione (10%).

6.4 Il passo successivo: verso il cambiamento di atteggiamento del docente

Dall'analisi dei primi tre strumenti si delinea una certa predisposizione verso un approccio didattico diverso rispetto a quello tradizionale. I docenti sembrano essere consapevoli del fatto che l'approccio laboratoriale e le attività manipolative concrete legate a problemi aperti siano più funzionali alla costruzione dei significati e alla profonda comprensione del concetto di frazione.

Per permettere che queste idee trovino il loro fondamento in attività didattiche condivise, si passa alla fase di formazione 'in pratica' (Ball & Even, 2009). Tale attività consente una trasformazione della pratica didattica attraverso azioni concrete realizzate dagli insegnanti, durante la formazione: i docenti sono messi nella condizione di tenere traccia dei loro processi di pensiero, migliorando le loro conoscenze disciplinari (*teachers' knowledge*) attraverso una meta-riflessione sulla pratica didattica rivolta agli studenti *(knowledge in teaching*) (Even et al., 2009).

A questo scopo è stato utilizzato proprio il 'problema dell'orto' per avviare quella riflessione di carattere matematico e metacognitivo.

Il 'problema dell'orto', infatti, mostra di avere tutte le caratteristiche di un problema aperto (Pehkonen, 1997): non avendo un'unica modalità di soluzione, consente al docente di acquisire consapevolezza della sua effettiva conoscenza (ciò che Ball e Bass definiscono Mathematical Knowledge for Teaching (Loewenberg Ball et al., 2008) riguardo a un tema specifico e permette di discutere con i colleghi secondo i principi della discussione collettiva (Bartolini

Bussi, 1989a, 1989b). L'analisi a priori, svolta nell'ottica della teoria interpretativa (Mellone et al, 2018), mette l'insegnante nella posizione di interrogarsi sulle conoscenze dei suoi studenti attraverso la verifica delle proprie, permette di fare previsioni su quelle che saranno le difficoltà degli allievi, non perdendo mai di vista i contenuti indispensabili per poter insegnare.
Attraverso le domande poste nell'analisi a priori gli insegnanti riflettono sulle difficoltà attese, sul collegamento ai contenuti matematici in riferimento alle Indicazioni Nazionali del 2012 e sulle possibili strategie risolutive per affrontare il problema.

Per mettere in evidenza il cambiamento di atteggiamento dei docenti e l'acquisizione di una maggiore consapevolezza nella loro azione didattica, si riporta qui di seguito il confronto tra le risposte ad alcune domande dell'intervista, del questionario generale sulle difficoltà del problema e dell'analisi a priori.

Si sceglie di mettere a confronto alcune domande dei tre strumenti qualitativi che denotano un cambiamento nell'atteggiamento da parte di alcuni insegnanti.

Tabella 1
Questionario sulle difficoltà e analisi a priori

Intervista scritta	Questionario sulle difficoltà (in riferimento al problema dell'orto)	Analisi a priori (problema dell'orto)
9) Quali pensi siano le maggiori difficoltà che incontrano i tuoi studenti con le frazioni (riconoscere frazioni equivalenti, individuare unità frazionarie, calcolare la frazione di un numero, moltiplicare o dividere frazioni…)?	*5) Se dovessi proporre questo problema alla tua classe, qual è l'aspetto che maggiormente ti preoccupa?*	*4) Prova ad individuare tutte le possibili strategie risolutive (corrette) che pensi possano sviluppare gli studenti e anche quelle che, secondo te, un esperto potrebbe mettere in atto, ma gli studenti no (spiegando il perché).*
Ins. 2: Per i miei alunni sicuramente i primi problemi nascono nel considerare le frazioni come numeri e quindi collocarli sulla linea dei numeri.	*Ins. 2:* Probabilmente non riuscirebbero a ripeterlo in autonomia	*Ins. 2:* Nella scuola primaria non vengono affrontate le addizioni con denominatore diverso. Gli studenti di scuola primaria dovrebbero essere guidati per la risoluzione attraverso la scoperta delle frazioni equivalenti con lo stesso denominatore per

		poterle sommare e trovare quella complementare che è la frazione corrispondente alla parte restante coltivata con carote.
Ins. 5: La collocazione delle frazioni sulla linea dei numeri...perché ho notato che i bambini fanno fatica a 'vedere' l'intero che va per es. da zero ad uno sulla linea dei numeri.	*Ins. 5:* (mi preoccupa) che non si soffermino sull'analisi completa degli elementi noti; l'intuizione della esatta procedura.	*Ins. 5:* Partendo dalla visualizzazione e dalla manipolazione della figura intera i bambini potrebbero notare in prima istanza che l'intero è suddiviso in 3 parti e che la parte delle carote (il colore differente aiuta la valutazione) è contenuta 4 volte in ciascuna di esse; sommando tutte le parti arriverà a capire che la parte delle carote rappresenta la dodicesima parte, cioè l'unità frazionaria dell'intero. Dal punto di vista dell'esperto: manipolando (anche attraverso azioni di ritaglio) la parte delle carote si potrebbe facilmente osservare che è contenuta 4 volte nell'intera sezione che rappresenta 1/3 dell'intero di partenza (tralasciando la frazione che corrisponde ai cavolfiori). Quindi si giunge alla conclusione che la parte delle carote rappresenta l'unità frazionaria dell'intero, ossia 1/12. Proseguendo il ragionamento, per deduzione, si arriverà a capire che la frazione 1/4 non è altro che una diversa suddivisione dell'intero (non in 3 ma in 4 parti). L'esperto potrebbe anche indurre il ragionamento su un livello matematico più astratto attraverso l'impostazione di una espressione.

Ins. 8: La difficoltà maggiore è associare alla frazione il numero razionale corrispondente e in particolare confrontare le frazioni e collocarle sulla linea dei numeri.	*Ins. 8:* Il fatto che non capiscano che non devono fermarsi al primo risultato ottenuto.	*Ins. 8:* Strategie risolutive degli studenti: 1. Strategia mediante uso rappresentazione grafica: lo studente suddivide l'intero orto (il rettangolo grande) in tanti rettangoli congruenti al rettangolo che rappresenta la parte coltivata con le carote. Successivamente conta il numero di rettangoli ottenuti e si accorge che sono in tutto 12 e che quindi la parte delle carote rappresenta 1/12. 2. Strategia mediante calcolo aritmetico: lo studente addiziona le due frazioni note, mediante il calcolo del m.c.m. dei denominatori, e sottrae la frazione ottenuta dall'intero. 3. Strategia mediante calcolo aritmetico per sottrazioni successive: lo studente sottrae dall'intero prima la frazione 2/3, successivamente alla differenza ottenuta sottrae la frazione 1/4. Strategia risolutiva esperto: La procedura è la stessa del punto 2, ma i calcoli vengono rappresentati mediante un'espressione aritmetica.

Queste tre risposte vogliono essere solo esemplificative e mettere in evidenza come l'analisi a priori consenta una riflessione approfondita e circostanziata, che permette al docente, nel confronto con i colleghi, di dare forma concreta alle ipotetiche azioni degli studenti, in classe. Queste poche risposte tracciano in modo abbastanza chiaro una 'evoluzione' nell'atteggiamento del docente verso questo argomento. In un primo momento, infatti, le risposte degli insegnanti circa le difficoltà degli studenti, i loro errori e le eventuali strategie per intervenire su di essi sono apparse piuttosto generiche e poco circostanziate, come se l'argomento restasse 'fermo' nella sua complessità e distante dalla reale pratica didattica. Quando, invece, si chiede ai docenti di lavorare concretamente sulla risoluzione del problema e di riflettere su quali potrebbero essere le difficoltà degli studenti, sulle loro azioni reali, l'attività a cui i docenti si riferiscono diventa anch'essa reale ed è perfettamente rispondente a ciò che accade in classe. Non si parla più di studenti ipotetici, di difficoltà teoriche, di strategie eventuali: si tratta di affrontare e risolvere un problema, di guardarlo con gli occhi dell'esperto (docente) e con quelli dello studente che deve gradualmente costruire il suo sapere.

Grazie all'analisi a priori del problema dell'orto i docenti hanno manifestato una maggiore consapevolezza di quali sono le conoscenze matematiche coinvolte, riconoscendole ed esplicitandole, di quali potrebbero essere le strategie messe in atto dagli studenti e di quali metodologie possono essere utilizzate per progettare e realizzare un'attività didattica da proporre nelle classi.

Quando i docenti, riuniti in piccoli gruppi, sono stati chiamati a ragionare sulle possibili strategie risolutive messe in atto dagli studenti, hanno fatto riferimento ad alcune idee che potrebbero rappresentare azioni concrete dei loro alunni. Gli studenti diventano reali e gli insegnanti ne immaginano le azioni, come se fossero lì, davanti a loro. Così immaginano che i ragazzi faranno ricorso ad artefatti quali foglio di carta quadrettata, righello, compasso… per risolvere il problema in modo empirico. Si prevede la realizzazione su carta del disegno dell'orto e la creazione dell'unità frazionaria 'carote' per ricoprirlo, riempirlo. Ci si aspetta la realizzazione su carta del disegno dell'orto e la divisione della figura in parti uguali con l'ausilio del righello, creando una sorta di 'griglia'. La parte coltivata a carote diventa l'unità di misura per ricoprire tutto il campo e consente di giungere alla soluzione. Qualcuno ipotizza l'utilizzo del righello (e del compasso) per prendere le misure e verificare attraverso i calcoli qual è il rapporto tra area dell'intero orto e area della parte coltivata a carote. Per gli studenti di scuola secondaria di I grado i docenti prevedono l'esecuzione di calcoli con le frazioni e l'utilizzo di alcune 'regole' quali l'individuazione del mcm, la somma e la differenza tra frazioni, la realizzazione di espressioni numeriche con le frazioni.

Ciò che emerge in modo condiviso è la trasformazione delle frazioni note in frazioni equivalenti con lo stesso denominatore per poterle, poi, sommare. L'idea di lavorare con le frazioni equivalenti permette a tutti gli alunni, anche quelli più piccoli, di risolvere il problema, senza fare ricorso ad algoritmi di calcolo con le frazioni (obiettivo non previsto dalle I.N. per la scuola primaria).

Il momento di analisi a priori, dunque, mette d'accordo tutti i docenti: il problema può essere affrontato nelle diverse classi, dalla III primaria alla III media, attraverso modalità e approcci diversi, ma consente a tutti gli studenti di affrontare il concetto di frazione da più punti di vista, contribuendo alla costruzione graduale di un concetto articolato e complesso come esso è.

6.5. Conclusioni

Riflessioni a posteriori permettono di comprendere quale sia il valore formativo di una attività 'nella e per la pratica' durante la formazione dei docenti. Sperimentare in prima persona la risoluzione di un problema, realizzarne un'analisi a priori riflettendo sulle possibili strategie risolutive e sugli errori più probabili contribuisce ad arricchire l'esperienza dell'insegnante che prosegue la sua formazione professionale 'in e attraverso la pratica'.

In questo tipo di attività il docente costruisce la consapevolezza della propria MKT, riflette attraverso un confronto con i suoi colleghi su come poter affrontare in classe, con gli alunni, un determinato problema, avendo chiari gli obiettivi che si è prefisso di raggiungere.

Queste azioni generano un effetto sinergico di riduzione del senso di disagio e preoccupazione che il docente prova riguardo a temi particolarmente complicati, come quello delle frazioni e dei numeri razionali, e permettono un cambio di atteggiamento verso il contenuto da insegnare e la modalità didattica da utilizzare per ottenere migliori risultati in classe.

A nostro avviso, la doppia natura del problema da cui è partita la ricerca offre una base interessante per ulteriori percorsi di ricerca. Come è noto, tutti gli aspetti di carattere psicologico coinvolti nel processo di insegnamento che riguardano docenti e studenti (emozioni nell'insegnamento, senso di autoefficacia, motivazione, ansia da insegnamento, autostima, relazione con il proprio insegnante…) si legano strettamente ad aspetti più propriamente di carattere didattico. Le problematiche legate alle difficoltà di apprendimento riguardano più strettamente i docenti, i quali sono chiamati a riconsiderare non soltanto le loro conoscenze disciplinari (ciò che Shulman definisce *content knowledge* (Shulman, 1986)) ma anche (e soprattutto) le conoscenze di tipo pedagogico (*pedagogical content knowledge* e la sua revisione più recente in *mathematical knowledge for teaching* di Ball e Bass (Ball & Bass, 2002) e metodologico che possono rappresentare un mezzo per dare senso alle proprie scelte didattiche e per progettare e realizzare attività che mirino a ridurre le difficoltà per gli studenti.

Riferimenti bibliografici

Almalki, S. (2016). Integrating Quantitative and Qualitative Data in Mixed Methods Research—Challenges and Benefits. *JEL,* *5*(3), 288. https://doi.org/10.5539/jel.v5n3p288

Ball, D.L., & Bass, H. (2002). Toward a Practice-Based Theory of Mathematical Knowledge for Teaching. In E. Simmt & B. Davis (Eds.), *Proceedings of the 2002*

Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group (pp. 3–14). CMESG/GCEDM.

Ball, D.L., & Even, R. (2009). Strengthening practice in and research on the professional education and development of teachers of Mathematics: next steps. In R. Even & D.L. Ball, *The professional education and development of teachers of mathematics* (pp. 255–259). New York.

Bartolini Bussi, G. (1989a). La discussione collettiva nell'apprendimento della Matematica (parte 1). *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, 12*(1), 5–49.

Bartolini Bussi, G. (1989b). La discussione collettiva nell'apprendimento della Matematica (parte 2). *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, 12*(5), 616–654.

Bartolini Bussi, G., & Mariotti, M. A. (2009). Mediazione semiotica nella didattica della matematica: Artefatti e segni nella tradizione di Vygotskij. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, 32*(A-B), 269–294.

Bartolini Bussi, M.G, & Mariotti, M.A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English & M.G. Bartolini Bussi (Eds.), *Handbook of Interantional Reserach in Mathematics Education* (II ed.) (pp. 746–783). Routledge Taylor & Francis Group.

Bosica, J. (2022). Using a Mixed Methods Approach to Study the Relationship Between Mathematics Anxiety, Mathematics Teacher Efficacy, and Mathematics Teaching Anxiety in Preservice Elementary School Teachers in Ontario. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 22*(1), 190–209. https://doi.org/10.1007/s42330-022-00203-8

Butterworth, B. (2005). The development of arithmetical abilities. *Journal of Child Psychology and Psychiatry, 46*(1), 3–18. https://doi.org/10.1111/j.1469-7610.2004.00374.x

Carpenter, T.P., Fennema, E., & Romberg, T.A. (Eds.). (1993). *Rational numbers: An integration of research*. Erlbaum.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model*. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Caviola, S., Primi, C., Chiesi, F., & Mammarella, I.C. (2017). Psychometric properties of the Abbreviated Math Anxiety Scale (AMAS) in Italian primary school children. *Learning and Individual Differences, 55*, 174–182. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2017.03.006

Courant, R., & Robbins, H. (2009). *Che cos'è la matematica? Introduzione elementare ai suoi concetti e metodi*. A cura diI. Stewart (II ed. riveduta). Bollati Boringhieri.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M., Marazzani, I., & Sbaragli, S. (2019). *Difficoltà di apprendimento in Matematica. Il punto di vista della didattica*. Pitagora.

D'Amore, B., Radford, L., & Bagni, G. T. (2006). Ostacoli epistemologici e prospettiva socio-culturale. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, 29B*(1), 11–40.

Dehaene, S. (1997). *The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics*. Oxford University Press.

DeWolf, M., & Vosniadou, S. (2015). The representation of fraction magnitudes and the whole number bias reconsidered. *Learning and Instruction, 37*, 39–49. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.07.002

Di Martino, P., & Zan, R. (2010). 'Me and maths': Towards a definition of attitude grounded on students' narratives. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*(1), 27–48. https://doi.org/10.1007/s10857-009-9134-z

Dowker, A. (2005). *Individual differences in arithmetic: Implications for psychology, neuroscience and education*. Psychology Press.

Even, R., Ball, D.L., Artigue, M., & Hodgson, B.R. (Eds.). (2009). *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics: The 15th ICMI Study* (Vol. 11). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09601-8

Fandiño Pinilla, M.I. (2023). *Le frazioni. Matematica, storia e didattica*. Bonomo.

Fiorentino M.G., Mariotti M.A., Montone A. (2023). Prospective mathematics teachers' professional development through Meta Discussion on a Pedagogical model. In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi, & E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 3435–3442). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME.

Guba, E. (1981). Criteria for Assessing the Trustworthiness of Naturalistic Inquiries. Educational *Technology Research and Development 29*,(2), 75–91. https://doi.org/10.1007/BF02766777

Hersh, R., & Dehaene, S. (1998). The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics. *American Mathematical Monthly, 105*(10), 975–976. https://doi.org/10.2307/2589308

Hill, H.C., Blunk, M.L., Charalambous, C.Y., Lewis, J.M., Phelps, G.C., Sleep, L., & Ball, D.L. (2008). Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction: An Exploratory Study. *Cognition and Instruction, 26*(4), 430–511. https://doi.org/10.1080/07370000802177235

Hunt, T. E., & Sari, M. H. (2019). An English Version of the Mathematics Teaching Anxiety Scale. *International Journal of Assessment Tools in Education, 6*(3), 436–443.. https://doi.org/10.21449/IJATE.615640

Kieren, T.E. (1976). *On the Mathematical, Cognitive, and Instructional Foundations of Rational Numbers. Number and Measurement. Papers from a Research Workshop. Research Report 238* ERIC Information Analysis Center for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Loewenberg Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Lortie-Forgues, H., Tian, J., & Siegler, R.S. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? *Developmental Review, 38*, 201–221. https://doi.org/10.1016/j.dr.2015.07.008

Mellone, M., Ribeiro, C.M., & Jakobsen, A. (2018). Characterizing prospective teachers' knowledge in/for interpreting students' solutions. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula, 3*, 50–62. https://doi.org/10.33683/ddm.18.3.3.1

Moè, A., Pazzaglia, F., & Friso, G. (2010). *Motivazioni, emozioni, strategie e insegnamento: MESI; questionari metacognitivi per insegnanti*. Erickson.

Ni, Y., & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and Learning Fraction and Rational Numbers: The Origins and Implications of Whole Number Bias. *Educational Psychologist, 40*(1), 27–52. https://doi.org/10.1207/s15326985ep4001_3

Obersteiner, A., Dresler, T., Bieck, S.M., & Moeller, K. (2019). Understanding Fractions: Integrating Results from Mathematics Education, Cognitive Psychology, and Neuroscience. In A. Norton & M.W. Alibali (Eds.*), Constructing Number* (pp. 135–162). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-00491-0_7

Pehkonen, E. (A c. Di). (1997). *Use of open-ended problems in mathematics classroom. Research Report 176*. Dept. of Teacher Education, University of Helsinki & ERIC.

Pellerey, M. & Orio, F. (1996). La dimensione affettiva e motivazionale nei processi di apprendimento della matematica, *ISRE, 2*, 52–73.

Prediger, S. (2008). The relevance of didactic categories for analysing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions. *Learning and Instruction, 18*(1), 3–17. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2006.08.001

Resnick, I., Jordan, N.C., Hansen, N., Rajan, V., Rodrigues, J., Siegler, R.S., & Fuchs, L.S. (2016). Developmental growth trajectories in understanding of fraction magnitude from fourth through sixth grade. *Developmental Psychology, 52*(5), 746–757. https://doi.org/10.1037/dev0000102

Sharma, S. (2013). Qualitative Approaches in Mathematics Education Research: Challenges and Possible Solutions. *Education Journal, 2*(2), 50–57. http://dx.doi.org/10.11648/j.edu.20130202.14

Shulman, L.S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4–14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Siegler, R.S., & Lortie-Forgues, H. (2014). An Integrative Theory of Numerical Development. *Child Development Perspectives, 8*(3), 144–150. https://doi.org/10.1111/cdep.12077

Siegler, R.S., & Lortie-Forgues, H. (2017). Hard Lessons: Why Rational Number Arithmetic Is So Difficult for So Many People. *Current Directions in Psychological Science, 26*(4), 346–351. https://doi.org/10.1177/0963721417700129

Siegler, R.S., Duncan, G.J., Davis-Kean, P.E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., Susperreguy, M.I., & Chen, M. (2012). Early Predictors of High School Mathematics Achievement. *Psychological Science, 23*(7), 691–697. https://doi.org/10.1177/0956797612440101

Swan, M. (2014). Design Research in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 148–152.). Springer.

Torbeyns, J., Schneider, M., Xin, Z., & Siegler, R. S. (2015). Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three different continents. *Learning and Instruction, 37*, 5–13. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.03.002

Van Dooren, W., Lehtinen, E., & Verschaffel, L. (2015). Unraveling the gap between natural and rational numbers. *Learning and Instruction, 37*, 1–4. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2015.01.001

Villani, V. (2014). *Cominciamo da Zero*. Pitagora.

Vosniadou, S., & Verschaffel, L. (2004). Extending the conceptual change approach to mathematics learning and teaching. *Learning and Instruction*, *14*(5), 445–451. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.014

RECENSIONI

Lolli, G. (2023). *Ritratto di un logico da giovane. Dedalo.*

Recensione di Bruno D’Amore

Gabriele Lolli è certo uno degli studiosi italiani più prestigiosi; la sua produzione in Logica matematica è ben nota a tutti coloro che la coltivano e a tutti coloro che la insegnano o l’hanno insegnata per decenni, come il sottoscritto. Lo considero come un autore di grande generosità intellettuale; per quanto mi concerne, ricordo solo che è stato gentilmente autore di varie prefazioni a miei testi, conferenziere a convegni per insegnanti da me organizzati (per esempio nel convegno di Castel San Pietro Terme numero 13, nel novembre 1999) e sempre disponibile a fornire consigli e a dare pareri. Ricordo che, messo in difficoltà dallo studio di una teoria relativa alle infinità dei diversi insiemi numerici, teoria totalmente diversa da quella di Cantor – Dedekind classica, seppi che Gabriele aveva dato una dimostrazione di coerenza per essa o, per lo meno, una dimostrazione di non contraddittorietà. Per me questo era sufficiente, dato il suo prestigio e la mia fiducia. Gli chiesi copia di tale dimostrazione e me la inviò il giorno stesso. La studiai con attenzione e, com’era ovvio, la trovai del tutto convincente. Il che mi diede totalmente fiducia in tale teoria.

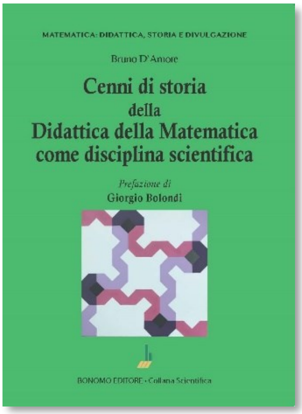
Ho letto tutti i libri pubblicati da Gabriele: ho una scansia della biblioteca specificamente dedicata ad essi; questo nuovo libro di Gabriele non è dedicato alla logica matematica ma è particolarmente affascinante, e per vari motivi. Uno è certamente dato dal piacere di conoscerlo meglio, la sua vita da giovane, da studente liceale fino al suo entrare nel mondo della ricerca universitaria. Con particolari affascinanti, delicati, a volte ironici, ma sempre profondi. L’altro è legato a una dettagliata rassegna di quelle che sono (e che noi adulti spesso dimentichiamo) le complessità della vita di un giovane che deve compiere in un’età non matura una scelta per la vita, per esempio quella relativa alla propria appartenenza a gruppi etici, religiosi, sociali, politici. La maggior parte degli intellettuali che hanno fatto di queste scelte una storia personale difficilmente narrano la complessità insita in queste decisioni, per esempio quelle religiose. (Tra l’altro la sua narrazione di questo aspetto è straordinariamente simile a quello da me vissuto, personalmente). Di personaggi così celebri si raccontano le scelte, la loro evoluzione, il successo, non la difficoltà che sta alla base di tutto ciò, le perplessità, gli ispiratori, siano essi esseri umani o fatti contingenti. Gabriele lo fa con realismo, ma allo stesso tempo con sarcasmo e ironia, fatti che ti colpiscono perché, leggendo, senti la verità, la profondità di quegli anni, la difficoltà del dover necessariamente condurre delle scelte. Per esempio, le perplessità relative alle scelte della carriera universitaria da intraprendere come studente sono delicate, profonde, ironiche (mi ripeto), a volte sarcastiche, ma esprimono appieno la difficoltà di un giovane che si appella alle esperienze vissute e ai desideri per il suo futuro, assai poco prevedibile a 18 anni.

Lui, poi, ci aggiunge, sempre, con realismo e ironia, allo stesso tempo, racconti relativi a ogni altro genere di rapporti relazionali: i genitori, la famiglia, gli amici, gli insegnanti, i compagni, i confidenti, gli adulti e le ragazze che hanno con lui relazioni diverse, fra cui quelle affettuose, sempre narrate con arguzia, rispetto e sincerità.

Ti conquista, questa lettura, assai di più, credo, se conosci già l'autore, se ne sai valutare la profonda serietà scientifica, la incredibile capacità analitica. Certo, dicevo, leggi dicendoti che ci vuole un grande coraggio a raccontarsi così sinceramente; ma anche questo è utile al lettore, chiunque egli sia. E lo sarebbe assai, utile, se si tratta di un giovane alle prime esperienze di vita. Vedo attorno a me tanti ragazzi i cui impegni sociali e culturali sono miseri, senza che essi se ne accorgano, perché non hanno confronti possibili, perché non ne parlano seriamente né con compagni, colleghi, amici, né tanto meno con i genitori o, in generale, con adulti. E così, ti rendi conto di come sia diverso essere, almeno in nuce, quel personaggio che è Gabriele, con i suoi turbamenti giovanili, e quei tanti ragazzi per lo più abbandonati a sé stessi che hanno come esperienza solo quelli che ora chiamano "i mezzi sociali di comunicazione" ma che, per lo più, di comunicazione non sono. Sarebbe bello esplorare questi mondi e metterli a confronto. Gabriele ha avuto, come molti di noi, scontri con un sé stesso altro, possibile, per quanto mi concerne, dicevo prima, sociale, religioso, filosofico, di impegno morale e politico (in senso vasto). Li ha affrontati praticamente da solo, e poi ha preso decisioni in ciascuno di questi campi. Decisioni che a volte sono difficili da prendere, che provocano sofferenza. Io ricordo bene casi analoghi per quanto mi riguarda. Lui racconta tutto ciò in modo naturale, tanto che, dicevo, sarebbe bello che un giovane sapesse di tutto ciò, che leggesse di come un altro giovane, beh: giovane di qualche decennio fa, ha superato gli scogli creati dalle decisioni da dover prendere. Poi, nel mondo della logica matematica, quello che sarebbe diventato il suo mondo, ha trovato una strada eccellente, ha scoperto in sé formidabili mezzi del tutto insospettati, è apparso il Gabriele che tutti conosciamo. Che tutti conosciamo, ora, anche grazie a questa fantastica narrazione autobiografica.

Sarebbe bello che i colleghi docenti di matematica (no, non solo di matematica) potessero leggere e riflettere su questa autobiografia. Perché non credano che uno diventi quel che è Gabriele, un'autorità internazionale senza limiti, per caso o per fortuna, o senza soffrire nelle scelte che la vita ti obbliga a fare.

D'Amore, B. (2023). *Cenni di storia della Didattica della Matematica come disciplina scientifica*. Bonomo.



Recensione di Miglena Asenova, Maura Iori, Andrea Maffia e George Santi

Ogni disciplina, arrivata a un certo punto della propria evoluzione, inizia inevitabilmente a storicizzarsi, a riflettere su sé stessa, a vedersi, seppure con molte eterogeneità nel proprio interno, come un tutt'uno, con una sua identità che la colloca nel tempo e nello spazio sociale, culturale e storico. Per quanto riguarda la Didattica della Matematica, un processo di storicizzazione potrebbe sembrare prematuro, data la giovane età della disciplina stessa. Infatti, essa muove i suoi primi passi come disciplina scientifica negli anni '70-'80 del XX secolo e dunque non ha che una cinquantina d'anni. Un periodo assai breve, se paragonato per esempio alla storia millenaria della Matematica, che sembra non richiedere un approfondito studio storico. Tuttavia, il momento storico in cui viviamo è particolarmente propizio per una riflessione in questo senso che, almeno in prima istanza, non può che essere fatta da chi quegli inizi li ha vissuti in prima persona. La riflessione storica risulta necessaria anche alla luce della ricchezza e proliferazione di teorie che la complessità dei processi di apprendimento impone. L'analisi storica può aiutare il lettore interessato alla Didattica della Matematica a orientarsi nella rete di teorie, rintracciando le origini epistemologiche e culturali che hanno caratterizzato lo sviluppo dei diversi filoni di ricerca.

Il libro *Cenni di storia della Didattica della Matematica come disciplina scientifica* di Bruno D'Amore è proprio questo: una riflessione sull'evoluzione storica della Didattica della Matematica come disciplina scientifica, scritta con la consueta maestria narrativa dell'Autore, che accompagna il lettore in un viaggio affascinante.

Con una narrazione avvincente e ben articolata, l'Autore guida il lettore lungo un percorso denso di momenti significativi, partendo dall'interesse crescente che i matematici hanno manifestato sin dall'antichità per le questioni legate all'insegnamento e all'apprendimento della matematica. Si approfondisce poi l'impatto della riforma denominata Nuova Matematica o Matematica Moderna nel promuovere il linguaggio della teoria degli insiemi, ovvero la cosiddetta 'insiemistica', sin dai primi livelli scolastici in molte nazioni del mondo, suscitando controversie e critiche da parte di illustri matematici in Francia, in Italia e in molte altre parti del mondo.

In particolare, l'Autore analizza in modo critico i contributi di Zoltan Dienes e Georges Papy, nel periodo che va dagli anni '60 ai primi anni '90 del XX secolo, evidenziando come le loro idee abbiano gradualmente perso rilevanza nel contesto in evoluzione della Didattica della Matematica. Questi contributi sono inseriti nel quadro teorico definito dall'Autore come 'Didattica A', intesa come *Ars docendi*, ovvero l'arte di insegnare, basata (spesso) su strumenti e materiali considerati quasi miracolosi, ma privi di una giustificazione scientifica riguardo alla loro efficacia.

Nel corso del libro, oltre a Dienes e Papy, vengono presentati altri importanti esponenti internazionali della 'Didattica A', offrendo così una panoramica completa delle figure di spicco di quell'epoca nel campo dell'educazione matematica. Infine, l'Autore narra dell'emergere sulla scena di Guy Brousseau, il primo studioso a sviluppare una teoria riguardante le situazioni di insegnamento-apprendimento specifiche della Matematica e le relative dinamiche.

Proseguendo nel percorso entriamo nel contesto in cui, sotto l'egida del Ministero dell'Istruzione dell'Università e della Ricerca, presso molte università italiane nascono i Nuclei di Ricerca in Didattica (NRD). Si tratta di un passo importante che segna il riconoscimento anche istituzionale di una disciplina scientifica che porta il nome di Didattica della Matematica. La stesura di nuovi programmi per la scuola primaria, frutto della collaborazione tra Ministero ed esperti di questa nuova disciplina, rappresenta solo il primo passo nelle ripercussioni concrete di questo importante sviluppo. Segue poi quello che, dal punto di vista epistemologico (poiché, come ben sappiamo, storia ed epistemologia sono strettamente intrecciate in ogni disciplina) rappresenta forse il pezzo più forte della riflessione in questo libro e che si snoda soprattutto attorno ai seguenti argomenti: (1) perché è lecito considerare la Didattica della Matematica come una disciplina scientifica; (2) perché i ricercatori in Didattica della Matematica devono essere dei matematici; (3) perché la Didattica della Matematica può essere interpretata come teoria scientifica all'interno della Matematica applicata; (4) che cosa contraddistingue gli oggetti matematici nel contesto della Didattica della Matematica.

L'analisi critica del fenomeno didattico e della sua evoluzione storica conduce poi a una riflessione sull'inevitabile emergere di nuove teorie in Didattica della Matematica e sulla necessità di sviluppare nuove metodologie di ricerca in risposta a questa evoluzione. Seguono poi esempi di ricerche in Didattica della Matematica, accuratamente documentati e utili sia al lettore più interessato agli aspetti teorici, sia al lettore più interessato agli aspetti pratici delle dinamiche in aula nelle ore di Matematica.

Ciò che rende unico questo libro, oltre alle ricche informazioni storiche e alle riflessioni metateoriche che contiene, è il fatto che l'Autore narra queste vicende avendole vissute in prima persona. Le vicende scientifiche si intrecciano strettamente con quelle umane: la maggior parte dei protagonisti di questa storia, considerati ormai giganti della Didattica della Matematica, sono esseri umani che l'Autore ha conosciuto di persona, con i quali ha dibattuto e collaborato, sia in occasioni formali che informali e conviviali. L'autore li presenta proprio nella loro veste umana più autentica, offrendo al lettore non solo una panoramica esaustiva della disciplina, ma anche una narrazione avvincente e personale che testimonia il legame intimo tra lo sviluppo scientifico e le relazioni umane nel contesto della Didattica della Matematica.

La matematica e la sua didattica, Anno 32, n. 1, 2024
ISSN 1120-9968