¿Cómo emerge el pensamiento algebraico?

El caso del pensamiento algebraico factual

Rodolfo Vergel
Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá (Colombia)

Este artículo discute el fenómeno de la emergencia del pensamiento algebraico factual en estudiantes jóvenes. La primera parte expone una contextualización del problema, investigado a partir de la forma en que surgen y evolucionan nuevas relaciones entre el cuerpo, la percepción y el inicio del uso de símbolos, a medida que los estudiantes participan en actividades sobre generalización de patrones. La segunda parte aborda algunas herramientas analíticas de la teoría de la objetivación. En la tercera, se expone la metodología, la cual presenta sintéticamente la recolección de datos y sus análisis. En el resto del artículo se discuten algunos resultados que pretenden alimentar reflexiones sobre el desarrollo del pensamiento algebraico.

Palabras clave: *pensamiento algebraico factual, indeterminancia, analiticidad, análisis multimodal.*

¿How does algebraic thinking emerge?: The case of factual algebraic thinking

This paper discusses the phenomenon of the emergence of factual algebraic thinking in young students. The first part sets the problem in context by exploring the way in which new relationships between the body, perception and initiation of use of symbols emerge and evolve as students participate in activities about generalising patterns. The second part deals with some analytical tools in the theory of objectification. The third part presents the methodology, which addresses data gathering and analysis. The rest of the paper discusses some findings that can fuel thoughts on the development of algebraic thinking.

Keywords: *factual algebraic thinking, indeterminacy, analyticity, multimodal analysis.*

En términos epistemológicos, es aceptado que los modos de conceptualizar, conocer y pensar no pueden ser adecuadamente descritos solamente en términos de prácticas discursivas. Es importante considerar los recursos cognitivos, físicos y perceptuales que los estudiantes movilizan cuando trabajan con ideas matemáticas. Tales recursos o modalidades incluyen comunicaciones simbólicas y orales así como dibujos, gestos y el movimiento corporal (Radford, Edwards y Arzarello, 2009).

Asumimos como un problema didáctico la emergencia de formas de pensamiento algebraico en el contexto de las acciones a través de las cuales los alumnos expresan sus generalizaciones. Estas generalizaciones podrían no ser tan sofisticadas (entendiendo lo sofisticado como expresiones en términos de signos alfanuméricos). Debemos reconocer que las formulaciones que expresan las generalizaciones de los alumnos pueden componerse de acciones tales como gestos, ritmos, miradas, palabras, esto es, de formulaciones que se expresan y se despliegan en el espacio y el tiempo.

De esta manera, el propósito de este artículo es mostrar evidencias de la manera en que emerge, en estudiantes jóvenes, el pensamiento algebraico, en particular el factual (Radford, 2010a). Dicha emergencia se explora en términos de la forma en que surgen y evolucionan nuevas relaciones entre el cuerpo, la percepción y el inicio del uso de símbolos, a medida que los alumnos participan en actividades sobre generalización de patrones.

Marco teórico

En esta sección abordamos el gesto en tanto medio semiótico de objetivación, y presentamos algunos desarrollos acerca del pensamiento algebraico desde los estudios e investigaciones adelantados por el profesor Luis Radford.

El gesto como un medio semiótico de objetivación

El gesto, como un medio semiótico de objetivación, juega un papel importante en la expresión de las intencionalidades de los sujetos y en su proceso de conceptualización. Por ejemplo, en la caracterización de gesto en el sentido otorgado por Kendon (1987), se hace corresponder este término con la idea de gesticulación, «los gestos que ocurren en asociación con el discurso y que parecen estar estrechamente relacionados con éste, como parte de la elocución, se denominan gesticulaciones» (Kendon, 1987).

Lo que distingue el pensamiento aritmético del algebraico es el hecho de que, en este último, se tratan cantidades indeterminadas de una manera analítica. El pensamiento algebraico está caracterizado por tres elementos: el sentido de indeterminancia, la analiticidad y la designación simbólica

El carácter mediador de los gestos en los procesos de resolución de problemas, es destacado por Radford (2005, p. 143) cuando sostiene que:

> *Los gestos son parte de esos medios que permiten a los estudiantes objetivar el saber, es decir, les permiten darse cuenta de los aspectos conceptuales que, debido a su propia generalidad, no pueden ser completamente mostrados en el mundo concreto.*

En los procesos de objetivación del saber, este investigador visibiliza en el papel de los gestos las intenciones de comunicación de algún aspecto de los objetos culturales, por ejemplo, secuencias de patrones. Para Radford (2005):

> *Ellos [los gestos] son elementos indispensables en el* proceso de objetivación *del saber de los estudiantes. Los gestos ayudan a los estudiantes a hacer visibles sus intenciones, a notar las relaciones matemáticas y a tomar conciencia de los aspectos conceptuales de los objetos matemáticos.*

Sobre el pensamiento algebraico

Desde los estudios realizados por Radford es posible inferir que lo que distingue el pensamiento aritmético del algebraico es el hecho de que en este último se tratan cantidades *indeterminadas* de una manera *analítica*.[1] En otras palabras, se consideran cantidades indeterminadas (por ejemplo, incógnitas o variables) como si fueran conocidas y realizamos cálculos con ellas como lo hacemos con números conocidos.

Asumimos el pensamiento algebraico como una forma particular de reflexionar matemática-mente. En tanto saber es un conjunto de procesos corporizados de acción y de reflexión constituidos histórica y culturalmente. De acuerdo con Radford (2010), el pensamiento algebraico está caracterizado por tres elementos estrechamente relacionados:

- El sentido de *indeterminancia* (objetos básicos como incógnitas, variables y parámetro), aquello como opuesto a la determinancia numérica.
- La *analiticidad*, como forma de trabajar los objetos indeterminados, es decir, el reconocimiento del carácter operatorio de los objetos básicos.
- La *designación simbólica* o *expresión semiótica* de sus objetos, esto es, como la manera específica de nombrar o referir los objetos.

La indeterminación y el carácter analítico están ligados en un esquema o *regla* que permite a los estudiantes tratar con cualquier figura de la secuencia, cualquiera que sea su tamaño. Es una regla ejemplificada en casos particulares (por ejemplo, 12 más 12, más 1), donde los números son tratados no como meros números sino como constituyentes de algo más general. Es más, el sentido de la indeterminancia refiere a una sensación de indeterminación que es propio de los objetos algebraicos básicos como incógnitas, variables y parámetros (Radford, 2010*b*).

Radford (2010*a*) reconoce tres formas de pensamiento algebraico o estratos caracterizados por los medios semióticos de objetivación movilizados por los sujetos en su actividad reflexiva, incluyendo percepción, movimientos, gestos, lenguaje natural (factual, contextual y simbólica). Precisamos en este trabajo el constructo pensamiento algebraico factual, en el cual los medios semióticos de objetivación movilizados son los gestos, los movimientos, el ritmo, la actividad perceptual y las palabras. En este estrato de pensamiento la indeterminancia no alcanza el nivel de la enunciación, pues se expresa en acciones concretas, por ejemplo, a través del trabajo sobre números; por lo que podemos afirmar que en este estrato la indeterminancia queda implícita. Por ejemplo, el alumno señala con la mirada, con su índice, realiza movimientos con un lápiz, dice «aquí», señala y dice «más 2».

Metodología: recolección de datos y análisis

Los datos provienen de una investigación doctoral que indagó las formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos y alumnas jóvenes (Vergel, 2014). Asumimos una concepción multimodal del pensamiento humano según la cual es importante la inclusión del cuerpo en el acto de conocer. En este sentido es clave analizar los recursos cognitivos, físicos y perceptuales que los estudiantes utilizan cuando trabajan con ideas matemáticas (Radford, Edwards y Arzarello, 2009). Esto significa que dicho análisis debe tener en cuenta la relación de los diferentes recursos semióticos movilizados durante la actividad (lenguaje escrito, lenguaje hablado, gestos, acciones, etc.).

La recolección de la información estuvo precedida por el diseño previo de tareas acerca de generalización de patrones. Este acopio se realizó en cuatro fases (Vergel, 2014):

- Fase 1: grabación en vídeo de todas las actividades de clase. Esta grabación se realizó con una cámara que capturó, en algunos momentos, la sesión de clase completa, y en otros, discusiones focalizadas de algunos grupos en el aula de clase en el momento de resolver las tareas.
- Fase 2: obtención de las hojas de trabajo de cada estudiante. Si la actividad no terminaba en una sesión, las hojas de trabajo se re-

La recolección de la información estuvo precedida por el diseño previo de tareas acerca de generalización de patrones, el cual se realizó en cuatro fases: grabación en vídeo de todas las actividades, obtención de las hojas de trabajo, transcripción de los vídeos y análisis final del trabajo realizado

cogían y se entregaban nuevamente en la siguiente sesión.

- Fase 3: transcripción de todos los vídeos correspondientes a las sesiones de trabajo.
- Fase 4: análisis de vídeos y de las hojas de trabajo en los cuales había evidencia de los procesos de resolución de las tareas sobre generalización de patrones.

Resultados y discusiones

Presentamos una de las tareas propuestas en la investigación doctoral (Vergel, 2014). Esta pretendía, junto con la actividad desplegada, además de familiarizar a los estudiantes con este tipo de secuencias, instaurar una forma de trabajo en pequeños grupos para que interactuaran y comunicaran sus propuestas de solución. A partir de

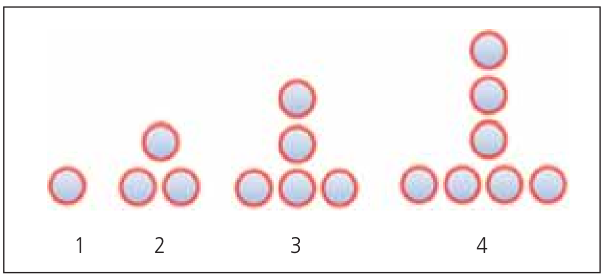


Imagen 1. Secuencia figural apoyada por representación tabular presentada en la tarea

los requerimientos o ítems 1 y 2, queríamos indagar las maneras en que podían identificar el patrón en la secuencia, cuyo término general corresponde a $2n-1$, con $n=1,2,3, \ldots$

Desde nuestra perspectiva teórica de la objetivación, consideramos necesario que la profesora Johanna introdujera las secuencias. Ella dibujó en el tablero la secuencia de la imagen 1 e inició el siguiente diálogo:

[L1] Profesora Johanna: En el tablero yo he hecho unos dibujos, yo quiero que ustedes miren muy bien esos dibujos y que me digan ¿qué características encuentran ahí? o ¿qué cosas ven ahí? Entonces muy bien, entonces vamos por allá (…) José que está levantando la mano.

[L2] José (*mirando el tablero*): En el 1 (*levanta un dedo indicando «1»*) hay una bola (*dibuja la bola con el dedo*) y en el 2 (*levanta dedos índice y corazón*) hay 3 (*baja los dedos anteriores y levanta los otros tres dedos*), porque de «pa' allá» hay 2 y de «pa' arriba» también (*levanta las cejas, como buscando aprobación de la profesora*).

[L3] Profesora Johanna: Ok, entonces miren lo que dice José: que en el 1 hay una bola; no las vamos a llamar bolas sino círculos, ¿vale?, que en el 1 (*señala la figura 1*) hay una bola y en el 2 (*señala la figura 2*) hay 3, ¿listo?... (*señala a Santiago*) ¿me recuerdas tu nombre (…)?

[L4] Santiago: Santiago.

[L5] Santiago: Eh (…), es que parece, en el 2 (señala las figuras con todos los dedos de la mano derecha) hay 2 bolas abajo y parece que se le montara (*levanta un poco la mano y luego la baja rápidamente, simulando estar montando un círculo sobre el otro*) la del 1 encima (*con la otra mano, señala la figura 1 y hace como si la corriera encima de la figura 2*) de la 2 (…).

[L6] Profesora Johanna: «Ajam», bien.

[L7] Santiago: (…) y eso sigue (*hace círculos hacia la derecha con su mano diestra*) sucesivamente hasta el 4.

[L9] Profesora Johanna: Eso sigue sucesivamente hasta el 4.

Consideramos este el primer contacto cultural de los estudiantes con este tipo de situaciones que involucran secuencias figurales apoyadas por representación tabular. El trabajo de la profesora Johanna consiste, básicamente, en lograr que ellos perciban características de esta figura e identifiquen el patrón a través del cual la secuencia se forma. Más específicamente, ella quiere llevar a los alumnos a tomar conciencia de la estructura espacial de la secuencia (Radford, 2013) como primer paso hacia la objetivación de la característica común que se desprende de una lectura que atiende a la estructura numérico-espacial de la secuencia.

Un aspecto a resaltar en esta labor conjunta consiste en el indexical temporal que usa Santiago en su respuesta (L7) «sigue sucesivamente», lo cual sugiere que ha identificado la comunalidad o característica común, es decir, la relación entre las figuras de la secuencia. Nuestro análisis sugiere que Santiago quiere predicar no sobre una figura particular sino sobre todas las figuras trascendiendo el aquí y el ahora, sin embargo, no ha logrado generalizar la comunalidad a todos los términos de la secuencia, es decir, no ha logrado plantear una abducción (Radford, 2013).

Luego de esta interacción con el grupo en general, los estudiantes comenzaron a trabajar de manera individual, y posteriormente en pequeños grupos. Contaron el número de círculos en las figuras 1, 2, 3 y 4, e identificaron rápidamente que el número de círculos aumentaba en el mismo número cada vez. Sin embargo, ya que los alumnos notaron esta relación recursiva entre las figuras consecutivas, les pedimos que nos explicaran si había alguna manera de encontrar el número de círculos en la figura 25, sin construir la figura, o como fue solicitado en el ítem 3, «Mateo quiere construir la figura 25. Explica lo que debe hacer para construirla».

Intentábamos lograr que los estudiantes produjeran una explicación que mostrara indicios de alguna generalidad en relación con la manera de construir figuras grandes. Más específicamente, queríamos invitarlos a producir una generalización de la propiedad, o característica común, a los términos subsecuentes de la secuencia, esto es, a plantear una abducción (Radford, 2013). Mostramos a continuación las producciones de Esneider, Jenny y Luis Felipe, en tanto las consideramos representativas (imágenes 2-6).

[L10] Profesora: Listo, a ver Esneider cuéntanos, por ejemplo, a ver ¿cuál fue tu solución? Explícame la figura 5.

[L11] Esneider: En la figura 5 me dieron 9 círculos.

[L12] Profesora: En el 5 (*refiriéndose a la figura 5*) te dieron 9 círculos, en el 5 ¿cómo te dieron esos 9 círculos? A ver, ¿por qué?

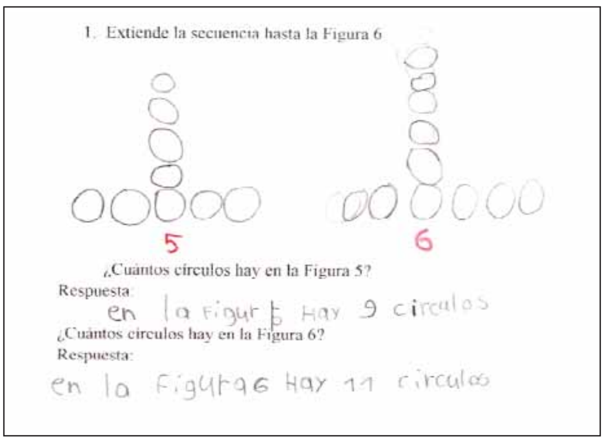


Imagen 2. Producción de Esneider a la solicitud 1 de la tarea

[L13] Esneider: Eh… porque eh… aquí primero, tiene que ir abajo 5 círculos (*señalando la fila de la figura 5*) y como en el 4 (*figura 4*) habían 4 círculos abajo (*señalando la fila de la figura 4*) ahora se le ponen 4 círculos encima (*señalando los 4 círculos de la columna de la figura 5 contando de arriba hacia abajo*).

[L14]. Profesora: A ver, espérenme un segundito, a ver Esneider, tú me dices que aquí hay 5 (*señalando los círculos de la fila de la figura 5*) porque aquí había cuatro (*señalando los círculos de la fila de la figura 4*) y que aquí hay 4 (*señalando los círculos de la columna de la figura 5*) ¿por qué?

[L15] Esneider: Eh (…) porque encima del 5 (*señalando la fila de la figura 5*) se colocan los números anteriores (*haciendo referencia con su mano a las figuras anteriores*).

En este caso, Esneider encuentra una manera de construir las figuras 5 y 6 en la cual su *intención perceptiva* (Radford, 2013) juega un papel importante. Observa que, por ejemplo, la figura 4 se ha construido poniendo tres círculos verticales como aparecen horizontalmente en la figura anterior (figura 3). No tiene dificultades con la construcción de los círculos horizontales, pues ha reconocido una función del número de la figura en relación con el número de círculos horizontales. En su declaración (L13) «eh… porque eh… aquí primero, tiene que ir abajo 5 círculos», el sentido de obligatoriedad en la sentencia «tiene que ir primero», pone en evidencia la movilización de intención perceptiva como un recurso semiótico al reconocer la manera en que se ha configurado la secuencia, al menos en relación con los círculos en posición horizontal.

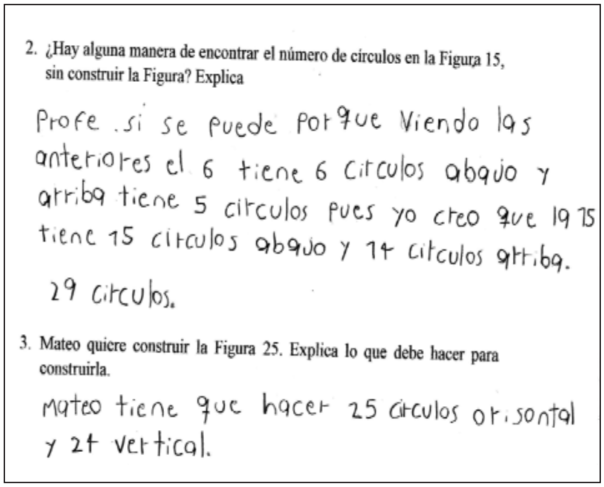
Esneider acompaña sus señalamientos (imagen 3) con sentencias (L13, L15) y con su actividad perceptual. Esta acción lingüística-perceptiva-gestual se convierte en un nodo semiótico, es decir, un segmento de la actividad semiótica en la que signos que pertenecen a diferentes sistemas semióticos se complementan para lograr una toma de conciencia de la manera en que la tarea puede ser atacada desde un punto de vista algebraico (Radford, 2013).

Desde nuestra perspectiva teórica de la objetivación, reconocemos que el conocimiento y comprensión de un objeto de saber por parte de los estudiantes es posible mediante el encuentro con la comprensión que otros individuos tienen de este objeto (Bajtín, 1979, 2009; Vygotski, 1931, 2000). La presencia de los otros compañeros y de

Imagen 3. Coordinación multimodal de recursos semióticos en una secuencia de señalamientos de Esneider frente al ítem 1 de la tarea. En la figura de la izquierda moviliza un gesto indexical señalando los círculos horizontales. La figura del centro muestra el recurso de Esneider del número de círculos horizontales de la figura anterior. Finalmente, en la figura de la derecha, se muestra cómo el estudiante retorna a la figura 5 y hace un deslizamiento para describir la posición y el número de círculos que deben ir en la posición vertical. Reconstrucción del vídeo

la profesora Johanna no es periférica. En la vía hacia el saber, la relación sujeto-objeto está mediatizada no solo por los artefactos, sino por la presencia del otro en una especie de relación de alteridad bajtiniana. Esta idea de ser a través de los otros nos conminó a propiciar los espacios para que los estudiantes lograran interactuar. Por ejemplo, la producción de Jenny y luego la de Luis Felipe siguen de manera similar el trabajo efectuado por Esneider, o tal vez, para ser más precisos, consideran los acuerdos generados en la discusión de clase. En relación con los ítems 2 y 3, Jenny deja ver en su producción que se ha apoyado en las tres figuras anteriores y la 4 y la 5 construidas por ella.

La evidencia mostrada en la imagen 4 sugiere que Jenny ha objetivado una regularidad y ha concebido las figuras como divididas en dos líneas, la «de arriba» y la «de abajo» (realmente, la fila vertical y la horizontal). Su intención fenomenológica (Radford, 2013) le permite atender a estas determinaciones sensibles e incluso notar diferencias y similitudes. Las diferencias estarían dadas por los números de círculos en las dos líneas, mientras que las similitudes por las maneras en que se conforman las figuras. Ella dice: «…


2. ¿Hay alguna manera de encontrar el número de círculos en la Figura 15, sin construir la Figura? Explica

Profe .si se puede porque viendo las anteriores el 6 tiene 6 circulos abajo y arriba tiene 5 circulos pues yo creo que la 15 tiene 15 circulos abajo y 14 circulos arriba. 29 circulos.

3. Mateo quiere construir la Figura 25. Explica lo que debe hacer para construirla.

mateo tiene que hacer 25 circulos orisontal y 24 vertical.

Imagen 4. Producción de Jenny sobre los ítems 2 y 3 de la tarea

pues yo creo que la 15 tiene 15 círculos abajo y 14 círculos arriba…», como parte de la respuesta al ítem 2. En este caso, «el trabajo algebraico sobre el terreno fenomenológico va a reposar sobre la articulación de dos estructuras diferentes: una de tipo numérica y otra de tipo espacial» (Radford, 2013). Jenny establece una relación entre el número de la figura y el número de círculos en la parte horizontal, por un lado, y, por otro, una

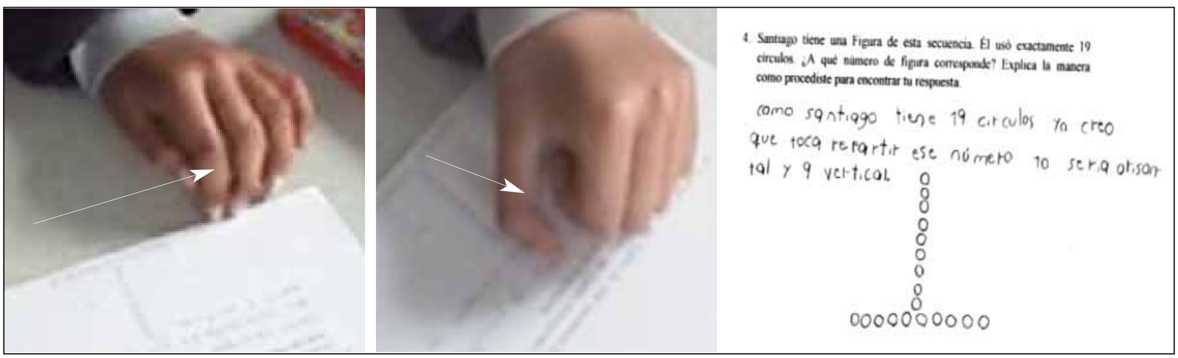


Imagen 5. Secuencia de gestos como deslizamientos de Jenny. La imagen de la izquierda muestra el deslizamiento de la mano de Jenny indicando los círculos horizontales. La imagen del centro presenta un deslizamiento hacia arriba para indicar los círculos verticales. Reconstrucción del video. A la derecha, la producción de Jenny en relación con el ítem 4 de la tarea

Capturar la regularidad no es suficiente para garantizar la generalización, pues tal regularidad debe generalizarse, es decir, transformarse en abducción

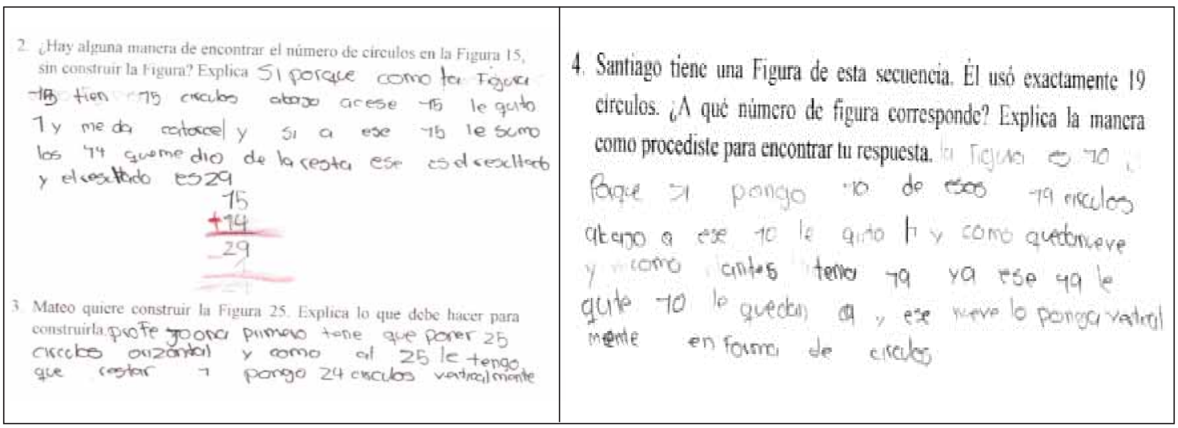
relación entre el número de círculos horizontales y el número de círculos verticales. Para esta estudiante, el número de círculos verticales equivale al número de círculos horizontales menos uno. El trabajo llevado a cabo en el terreno fenomenológico, por ejemplo, a través de la manera espacial de percibir la secuencia, permite a Jenny responder al ítem 3 rápidamente.

El ítem 4 pretendía profundizar en el uso de la regularidad o la captura del patrón. Dado un número de círculos particular de la secuencia, queríamos que los estudiantes explicaran la manera en que procedieron para encontrar su respuesta. Si bien era una figura «construible» pues está en el campo perceptual de los estudiantes, queríamos que ellos movilizaran otros medios semióticos, por ejemplo, recursos lingüísticos.

De acuerdo con las imágenes de la izquierda y del centro de la imagen 5 de la página anterior, sugerimos que tanto la actividad perceptual como el deslizamiento de la mano están indicando una percepción espacial de la figura. El capturar la regularidad, sin embargo, no es suficiente para garantizar la generalización, pues tal regularidad debe generalizarse, es decir, transformarse en abducción.

Las relaciones establecidas por Jenny son también puestas en funcionamiento por parte de Luis Felipe (imagen 6). En su respuesta al ítem 2, explicita la suma que le permite obtener el número de círculos en la figura 15. Este procedimiento le abona el camino para proponer el mensaje a Mateo en el ítem 3. Por su parte, con respecto al ítem 4, manifiesta que la figura es la 10 «porque si pongo 10 de esos 19 círculos abajo a ese 10 le quito 1…».

Observemos que en estas acciones los niños están operando sobre números, sobre casos particulares. Esta forma de proceder presenta funciones corporeizadas o predicadas con una variable tácita (Radford, 2010), las cuales hacen parte de la instanciación del saber entendido como posibilidad, en este caso, pensamiento algebraico factual (los estudiantes están instanciando una forma de pensamiento algebraico que ha quedado codificada en la cultura), pues la indeterminancia no alcanza el nivel de la enunciación o del discurso.


2. ¿Hay alguna manera de encontrar el número de círculos en la Figura 15, sin construir la Figura? Explica si porque como la Figura 15 tien 15 circulos abajo a ese 15 le quito 1 y me da catorce y si a ese 15 le sumo los 14 que me dio de la resta ese es el resultado y el resultado es 29

15
+14
29

3. Mateo quiere construir la Figura 25. Explica lo que debe hacer para construirla. profe yo diría primero tiene que poner 25 circulos orizontal y como al 25 le tengo que restar 1 pongo 24 circulos verticalmente

4. Santiago tiene una Figura de esta secuencia. Él usó exactamente 19 círculos. ¿A qué número de figura corresponde? Explica la manera como procediste para encontrar tu respuesta. la Figura es 10 porque si pongo 10 de esos 19 circulos abajo a ese 10 le quito 1 y como queda nueve y como antes tenía 19 ya ese 19 le quito 10 le queda 9 y ese nueve lo pongo vertical mente en forma de circulos

Imagen 6. Producción de Luis Felipe sobre los ítems 2, 3 y 4 de la tarea

Más bien, está presente a través de la aparición de algunos de sus casos (1, 2, 3, 4, 5, 6, 15). En otras palabras, la expresión semiótica o denotación se hace a través de una actividad multimodal en la que intervienen la percepción, los gestos, los símbolos matemáticos y el lenguaje natural (Radford, 2013). No vemos explícitamente una analiticidad en tanto carácter operatorio de lo indeterminado, más bien estaríamos ante la presencia de una analiticidad intuida o proto-analiticidad.

Síntesis y comentarios finales

Aceptamos que los resultados encontrados tienen que darse porque estamos estableciendo, en la tarea, exigencias que permiten a los estudiantes posibilidades de expresión semiótica, sin embargo, al mismo tiempo, estas imponen limitaciones, pues inducimos a los estudiantes a centrar sus indagaciones en casos particulares.

Consideramos que los requerimientos hechos en este contexto numérico propulsan formas culturales de interacción y de cooperación que hacen pensar en que sus significados (culturales) necesariamente van a tener un anclaje histórico vinculado justamente con lo numérico. Las denotaciones de los estudiantes a través de actividades multimodales y la emergencia de una proto-analiticidad son aspectos que pagan tributo al contexto numérico en el que instanciaron el pensamiento algebraico factual.

Nota

1. El énfasis es mío.

Referencias bibliográficas

BAJTÍN, M. (2009): *Estética de la creación verbal.* México. Siglo XXI, 1979.

KENDON, A. (1987): «On gesture: Its complementary relationship with speech», en SIEGMAN, A.W.; FELDSTEIN, S. (eds.): *Nonverbal behavior and communication.* Nueva Jersey. Lawrence Erlbaum, pp. 65-97.

RADFORD, L. (2005): «¿Why do gestures matter? Gestures as semiotic means of Objectification», en HELEN, L.; CHICK, J.; VINCENT, L. (eds.): *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Vol. 1. Melbourne. University of Melbourne, pp. 143-145.

— (2010*a*): «Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective». *Research in Mathematics Education*, vol. 12(1), pp. 1-19.

— (2010*b*): «Layers of generality and types of generalization in pattern activities». *PNA,* vol. 4(2), pp. 37-62.

— (2013): «En torno a tres problemas de la generalización», en RICO, l., y otros (eds.): *Investigación en Didáctica de la Matemática.* Homenaje a Encarnación Castro. Granada. Comares, pp. 3-12.

RADFORD, L.; EDWARDS, L.; ARZARELLO, F. (2009): «Beyond words». *Educational Studies in Mathematics,* vol. 70(3), pp. 91-95.

VERGEL, R. (2014): *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años).* Tesis doctoral no publicada. Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Bogotá).

VYGOTSKI, L.S. (2000): *Obras escogidas.* Vol. 3. Madrid. Visor, 1931.

Referencias del autor

Rodolfo Vergel

Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá (Colombia)

rodolfovergel@gmail.com

Líneas de trabajo: pensamiento algebraico.

Este artículo fue solicitado por Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas en noviembre de 2014 y aceptado en enero de 2015 para su publicación.