

Le scelte dell'insegnante relative al concetto di angolo¹

Silvia Sbaragli², George Santi³

Publicato in: Sbaragli S., Santi G. (2012). Le scelte dell'insegnante relative al concetto di angolo. *Bollettino dei docenti di matematica*. 65, 35-55. ISBN 978-88-86486-87-3.

In this research, we highlight that pupil's misconceptions about the concept of angle, extensively treated in literature, depend also on the didactic choices made by the teachers in didactic transposition of knowledge and in the educational design. It is often driven by unique and binding choices which do not take into account that mathematical objects usually have various definitions elaborated in the history of mathematics. Mathematical objects are usually imposed by the teacher, instead of being the result of mediation and negotiation within a community of practices, with the aim of reaching a shared knowledge by the pupils. Another important cause of difficulty, on which this research specifically concentrates, consists in the incoherencies in the intentionality of the teachers deriving from a limited and unaware use of the semiotic means of objectification with respect to the conceptual and cultural aspect of the knowledge they want pupils to reach.

1. Introduzione

Un termine molto usato da decenni nella ricerca in Didattica della matematica è la parola «misconcezione»; tale parola viene interpretata in modi diversi dai vari Autori ma assume nella maggior parte dei casi semplicemente connotati negativi, come sinonimo di «errore», «giudizio erroneo», «idea sbagliata», ma anche «equivoco» o «malinteso». Per questa ragione le misconcezioni vengono spesso citate quando si fa riferimento alla didattica relativa agli errori.

Molti Autori concordano sul fatto che i primi usi di questo termine, nel senso di «errore» o di «malinteso», si sono avuti nel dominio della Fisica o dell'Economia. Si fa riferimento di solito a lavori di Di Sessa (1983); di Kahneman e Tversky (a partire dal 1982) riguardo ai processi decisionali; di Voss et al. (1989).

Una delle prime apparizioni documentate del termine «misconception» in Matematica avviene in USA nel 1981, ad opera di Wagner (1981), in un lavoro che tratta dell'apprendimento di equazioni e funzioni; sempre nel 1981 esce un celebre testo di Kieran (1981) sull'attività di risoluzione delle equazioni. Appaiono poi numerosi lavori

¹ Il presente articolo è una sintesi del seguente pubblicato in lingua inglese: Sbaragli S., Santi G. (2011). Teacher's choices as the cause of misconceptions in the learning of the concept of angle. *International Journal for Studies in Mathematics Education*. Rivista online: <http://periodicos.uniban.br/index.php/JIEEM/article/view/194/196> San Paolo, Brasile: Uniban. 4 2, 117-157.

² DFA-SUPSI, Locarno - NRD, Bologna.

³ NRD, Bologna.

nel 1985 nei quali il termine «misconcezione» è esplicito: Schoenfeld (1985), Shaughnessy (1985) e Silver (1985), che lo usano per lo più a proposito di *problem solving*, insieme al termine «convinzioni».

In Silver (1985, pp. 255-256) è detto esplicitamente che vi è un forte legame tra le misconcezioni e le convinzioni errate.

In Schoenfeld (1985, p. 368) si evidenzia come gli studenti possano sviluppare in modo corretto delle concezioni scorrette, soprattutto per quanto riguarda procedure.

Come si vede bene, nella prima metà degli anni '80 ci fu un intenso lavoro degli studiosi di Didattica della matematica su questo tema.

In seguito diversi Autori hanno preso in esame in maniera critica il sostantivo misconcezione, per esempio nell'ambito della Scuola Francese; in una lettera privata che ci ha gentilmente autorizzato a rendere pubblica, Colette Laborde dichiara:

«Il termine misconcezione che ha origine negli Stati Uniti potrebbe non essere il termine più appropriato se ci si riferisce alla conoscenza degli studenti 'non corretta' (...). Ogni concezione ha un suo dominio di validità e funziona per quel preciso dominio. Se questo non avviene, la concezione non sopravvive. Ogni concezione è in parte corretta e in parte non corretta. Quindi sembrerebbe più conveniente parlare di concezioni rispetto ad un dominio di validità e cercare di stabilire a che dominio queste appartengono» (riportato in D'Amore, Sbaragli, 2005, p. 12).

Tenuto conto delle posizioni dei diversi Autori e delle occorrenze a volte anche piuttosto diverse di questo termine, riteniamo che l'attenzione sulle misconcezioni, fin dal loro apparire nel mondo delle scienze (non matematiche), sia stato molto produttivo perché ha costretto gli studiosi a non identificare più gli errori con qualche cosa di assolutamente negativo, da evitare a tutti i costi, ma anche a prodotti umani dovuti a situazioni in via di evoluzione. Sempre più, negli anni, si è venuto a delineare un significato condiviso di «misconcezioni» come cause di errori o meglio ancora cause *sensate* di errori, cause che sono spesso ben motivabili e a volte addirittura convincenti (D'Amore, Sbaragli, 2005, p. 12).

Un altro approccio possibile, non lontano dalla posizione di Laborde e da noi scelto, è quello di conservare tale termine ma di analizzarlo in modo più costruttivo, fornendogli un'interpretazione più elaborata e meno negativa che tenga conto dell'attuale ricerca in Didattica della matematica e che permetta di indagare più in profondità le cause del mancato apprendimento. Da questo punto di vista, inizialmente in D'Amore (1999, p. 124) e successivamente in D'Amore e Sbaragli (2005, p. 19) si parla di misconcezione non come situazioni del tutto o certamente negative, ma anche come possibili momenti di passaggio, in corso di sistemazione, a volte necessari per la costruzione di un concetto.

Le misconcezioni così intese sono state da noi distinte in due grandi categorie: *inevitabili* ed *evitabili* (Sbaragli, 2005, p. 56 e succ.). Le prime misconcezioni sono quelle che non dipendono direttamente dalla trasposizione didattica effettuata dal docente né dall'ingegneria didattica, ma dalla necessità di dover dire e mostrare qualcosa per poter spiegare un concetto; sapere, che non potrà mai essere esaustivo di ciò che si sta proponendo anche a causa delle caratteristiche ontogenetiche legate all'allievo. Le seconde misconcezioni dipendono proprio dalle scelte che l'insegnante fa per effettuare la trasposizione didattica e scelte concernenti l'ingegneria didattica che possono condizionare negativamente la formazione degli allievi.

In questo articolo focalizziamo la nostra attenzione sulle «misconcezioni evitabili», analizzate in una cornice «semiotico-culturale» (Radford, 2006), considerando

l'«intenzionalità» dell'insegnante come una possibile causa di tali misconcezioni relative all'argomento angolo.

2. Quadro teorico

2.1 Approccio semiotico-culturale

Facciamo riferimento all'approccio semiotico culturale proposto da Luis Radford a partire dagli anni 2000 che attribuisce un ruolo centrale alla semiotica inserita in una visione antropologica del pensiero, degli oggetti matematici e dell'apprendimento. Sia gli oggetti matematici che l'apprendimento richiedono un'attività riflessiva mediata, ma i due processi sono profondamente diversi l'uno dall'altro; infatti, scrive Radford: *«Mentre i nuovi concetti culturali nascono da attività riflessive mediate compartite nella zona di sviluppo prossimale della cultura, l'apprendimento scolastico consiste nel processo di trasformare attivamente e creativamente questi concetti culturali incarnati nei testi, negli artefatti, nel linguaggio e nelle credenze in oggetti di coscienza. Questo processo nel quale soggetto e oggetto si modificano a vicenda, è il processo di significazione in cui la conoscenza soggettiva e quella oggettiva si fondono»* (Radford, 2006, p. 60).

Radford chiama questo processo, che porta l'allievo a prendere coscienza dell'oggetto matematico, «oggettivazione» (Radford, 2005a, p. 116).

Riferendosi alla fenomenologia di Edmund Husserl (1913-1959), Radford (2006) associa l'oggettivazione, intesa come attribuzione di significato, a un «atto intenzionale» che mette in relazione il soggetto con l'oggetto di conoscenza e fornisce un particolare intendimento di tale oggetto. Quando consideriamo la conoscenza scientifica, in particolare la matematica, si pone il problema della natura interpersonale e generale degli oggetti matematici che non si lascia catturare dal significato soggettivo e situato che caratterizza gli atti intenzionali. In «Idee per una fenomenologia pura e una filosofia fenomenologica», Husserl risolve il problema distinguendo tra l'atto intenzionale che determina il modo in cui l'oggetto si presenta alla coscienza (noesis) e il contenuto concettuale dell'esperienza individuale (noema). A ciascuna esperienza intenzionale del soggetto, noesis, corrisponde un particolare significato concettuale, il noema (Husserl, 1965).

La fenomenologia di Husserl, da intendersi come un'epistemologia e non come un'ontologia, attribuisce centralità al ruolo del soggetto, ma presuppone da un lato l'esistenza di un oggetto trascendente che assicura coerenza e unità ai diversi atti intenzionali dell'individuo e dall'altro relega l'esperienza intenzionale a una relazione che coinvolge esclusivamente il soggetto e l'oggetto.

Osserva Merleau-Ponty (2003, p. 219) commentando Husserl: *«'Idee II' mette in luce, sotto la 'cosa materiale oggettiva', una rete di implicazioni dove non si sente più la pulsazione della coscienza costituente. Tra i movimenti del mio corpo e le 'proprietà' della cosa che questi movimenti rivelano, il rapporto è quello fra l'io posso' e le meraviglie che esso ha il potere di suscitare. (...). Nel corpo, e per mezzo suo, non c'è solo un rapporto a senso unico di colui che sente con ciò che egli sente: il rapporto si inverte, la mano toccata diventa toccante, ed io sono obbligato a dire che in questo caso il tatto è diffuso nel corpo, che il corpo è 'cosa senziente, soggetto-oggetto'»*.

Secondo l'approccio semiotico-culturale che stiamo seguendo, non possiamo ridurre la nostra esperienza individuale a una solitaria interazione sensoriale e cognitiva con il mondo, ma il modo in cui entriamo intenzionalmente in contatto con la realtà è intrinsecamente determinato da fattori storici e culturali. I mediatori, gli artefatti, i gesti, i simboli, le parole che Radford chiama «mezzi semiotici di oggettivazione» (Radford, 2003) non sono dei semplici arnesi con i quali manipoliamo il mondo ma mediatori dei nostri atti intenzionali, portatori di una conoscenza storica costruita dall'attività cognitiva delle generazioni precedenti. Tali mezzi determinano e costituiscono le pratiche socialmente condivise nelle quali si sviluppano i processi di oggettivazione: *«Quello che ci appare di fronte nella nostra esperienza intenzionale è dunque sempre delimitato dalla storia culturale dei mezzi che utilizziamo per apprenderlo. Nella trattazione di Husserl dunque manca il riconoscimento di un fatto essenziale, vale a dire che nel dare significato a qualcosa ricorriamo al linguaggio, ai gesti, ai segni o ad oggetti concreti attraverso i quali rendiamo le nostre intenzioni manifeste e che il linguaggio, i segni e gli oggetti trasmettono una intelligenza incarnata (Pea, 1993) e portano dentro di sé, in un forma condensata, l'esperienza che si è sviluppata nella storia dell'attività cognitiva e artistica e gli standard scientifici dell'indagine (Lektorsky, 1984)»* (Radford, 2006, p. 52).

Allievi e insegnanti si trovano immersi in un contesto sociale e culturale in cui trovano oggetti che rientrano nella loro cultura. L'insegnante ha istituzionalmente il compito di guidare l'allievo nel processo di oggettivazione, affidandosi ai mezzi semiotici di oggettivazione e ai modi culturali di significazione che la storia e la cultura gli mettono a disposizione.

È utile alla nostra analisi tenere conto del fatto che, seguendo Godino e Batanero (1994) e D'Amore e Godino (2006), agli elementi appena richiamati è possibile attribuire una dimensione personale e istituzionale. Il sistema di pratiche coinvolge sia un singolo individuo sia un gruppo di individui istituzionalmente riconosciuto, nello specifico la classe; lo stesso si può dire per l'oggetto matematico che esiste sia in una relazione personale con un soggetto sia in una relazione istituzionale con la cultura dalla quale è emerso e con il gruppo sociale che gli conferisce un valore di conoscenza. Lo stesso punto di vista è sostenuto da Radford: *«Vorrei porre l'accento sul fatto che è vantaggioso pensare al significato come un costruito a due facce, come due facce della stessa medaglia. Da un lato il significato è un costruito soggettivo: è il contenuto soggettivo come è inteso dalle intenzioni dell'individuo. Il significato è legato all'esperienza e alla storia personale più intima dell'individuo; esprime ciò che rende l'individuo unico e singolare. Dall'altro lato e allo stesso tempo il significato è anche un costruito culturale nel senso che, prima dell'esperienza soggettiva, all'oggetto intenzionale dell'individuo (l'objet visé) sono stati attribuiti valori culturali e un contenuto teorico che sono riflessi e rifratti dai mezzi semiotici utilizzati per riconoscerlo»* (Radford, 2006, p. 53).

L'apprendimento come processo di oggettivazione richiede un allineamento tra la dimensione personale e intenzionale dell'allievo e quella istituzionale che coinvolge gli aspetti storici e culturali. I processi di insegnamento-apprendimento comportano una dialettica tra gli aspetti personali e quelli istituzionali portando all'unificazione delle due dimensioni verso un significato unitario.

La costruzione di tale significato, in cui si realizza l'unità dell'individuo con la propria cultura, è possibile attraverso i mezzi semiotici di oggettivazione che conducono l'atto intenzionale dell'individuo verso l'oggetto matematico. Tali mezzi semiotici hanno

quindi ragione di esistere in quanto al servizio dell'intenzione dell'individuo e, al contempo, permettono di incarnare la conoscenza e modi di razionalità costruiti storicamente dalle generazioni precedenti, contribuendo alla creazione di uno spazio di significato condiviso che realizza l'unità tra persona e cultura, tra significato personale e significato istituzionale, tra l'intenzione individuale e l'oggetto a cui l'intenzione è rivolta.

È necessario, dunque, considerare la rete complessa di pratiche individuali e sociali, di significati, consuetudini, credenze e convinzioni in cui l'insegnante deve quotidianamente orientarsi quando attiva i mediatori per favorire l'apprendimento del sapere matematico da parte dei suoi allievi; si tratta di una rete dalla quale possono emergere comportamenti incoerenti dell'insegnante.

È in quest'ottica che si possono interpretare le misconcezioni evitabili all'interno della prospettiva semiotica culturale. In effetti, tali misconcezioni dipendono direttamente dalle scelte degli insegnanti legate alla trasposizione didattica e all'ingegneria didattica; due fattori che, alla luce della cornice semiotica culturale, risultano determinanti per allineare il significato personale dell'allievo e quello culturale, quando l'insegnante gestisce le pratiche d'aula.

Vogliamo quindi valutare se l'insegnante riesce a unificare il suo significato personale e quello culturale utilizzando in modo appropriato i mezzi semiotici di oggettivazione, ossia se gli atti intenzionali dell'insegnante e il significato oggettivato dai mezzi semiotici risultano coerenti con il significato culturale dell'oggetto angolo che propone in classe. L'esistenza di incoerenza da questo punto di vista può creare negli allievi misconcezioni (della categoria evitabili); misconcezioni che, da un punto di vista semiotico, comportano l'incapacità da parte dell'allievo di coordinare adeguatamente le diverse rappresentazione quando egli cerca di dare senso all'oggetto matematico.

2.2 L'oggetto matematico angolo

In questo lavoro si è scelto di concentrare l'attenzione sull'argomento «angolo», analizzando alcune ricerche presenti in ambito internazionale. Vanno ricordati i numerosi articoli di Mitchelmore su questo tema, tra i quali Mitchelmore e White (2000) che propongono una teoria nella quale l'evoluzione della concettualizzazione dell'angolo viene presentata tramite tre livelli di astrazione sequenziali: gli allievi iniziano da esperienze fisiche relative all'angolo classificandole in specifiche situazioni, per poi passare a contesti sempre più generali, fino a raggiungere domini astratti che si ottengono dalle diverse elementari concezioni matematiche che hanno gli studenti dell'angolo. Gli Autori mettono in evidenza in questi passaggi le difficoltà a coordinare differenti aspetti di tale concetto. Secondo questa teoria è importante che la definizione formale di un concetto matematico catturi l'essenza delle elementari concezioni matematiche dalle quali essa si è astratta. Viene inoltre presentata una ricerca condotta su 192 allievi tra i 7 e i 14 anni per analizzare come loro usano il concetto di angolo per modellizzare 9 situazioni fisiche e per esprimere similarità tra queste.

Un'applicazione di tale teoria si trova in Prescott, Mitchelmore e White (2002) dove, a partire dai dati forniti da un gruppo di 12 insegnanti coinvolti in una ricerca pilota, viene mostrato come un'unità didattica che utilizza il paradigma di insegnamento per astrazione proposto in Mitchelmore e White (2000) e citato in precedenza, porta a buon

apprendimento. Nell'articolo vengono anche mostrate aree per un miglioramento ulteriore dell'unità didattica.

Sempre degli stessi Autori ricordiamo i lavori di ricerca: Mitchelmore (1997) e Mitchelmore e White (1998) che hanno confermato che i bambini si formano diverse situazioni concettuali di angolo fin dall'inizio della scuola quindi indipendentemente dall'insegnamento ricevuto.

D'Amore e Marazzani (2008) mostrano come, nel corso dei millenni, la matematica ha elaborato varie definizioni dell'oggetto angolo. Alcune di esse sono profondamente diverse tra loro. Anche se nelle aule italiane ne domina attualmente una, non è detto che sia l'unica esatta (in altri Paesi, ne sono diffuse altre). Si è dimostrato che, spontaneamente, giovani allievi preferiscono fare ricorso a una delle altre, anche se non sono state usate o richiamate in aula. In particolare, vengono presentate 8 diverse definizioni di angolo e si mostra come, in colloqui individuali, studenti di diverse età, prima e dopo la presentazione di una di esse in aula, facciano spontaneamente riferimento ad altre.

Risulta evidente dalla letteratura di ricerca la complessità della costruzione cognitiva dell'oggetto matematico angolo da parte degli studenti. In tal senso, Foxman e Ruddock (1983) e Mitchelmore e White (1998) mettono in evidenza come gli studenti, che dovrebbero già aver concettualizzato l'oggetto matematico angolo, non riescono a incorporare la rotazione come modo di considerare tale concetto. In quest'ultimo articolo vengono citate altre ricerche che confermano questo aspetto. Inoltre, Mitchelmore (1998) dimostra che circa 1/3 di studenti di prima media sottoposti alla ricerca hanno un dominio di applicazione di questo concetto piuttosto limitato non riuscendo a riconoscere similarità tra diversi aspetti che coinvolgono l'angolo.

Vadcard (2002) propone come significativa la nozione di angolo come inclinazione, pur essendo un'interpretazione molto trascurata nella ricerca in didattica e nell'insegnamento. La motivazione di tale scelta verte sull'importanza storica di questa definizione, utilizzata da Euclide nel I libro degli *Elementi*, e sull'applicazione di tale definizione usata ad esempio dai topografi. Nell'articolo vengono inoltre analizzati i libri di testo per identificare le pratiche attraverso le quali gli studenti costruiscono le nozioni di angolo.

Sono inoltre numerosi i lavori che riportano una rassegna sulle diverse definizioni di angolo presenti nella storia della matematica; ricordiamo in particolare D'Amore (1985) dove ne vengono mostrate 8 che vanno dall'interpretazione scelta da Euclide (300) a quella di Hilbert del XX secolo; Mitchelmore (1989), Roels (1985) e Schweiger (1986) classificano le diverse definizioni di tale concetto dal punto di vista matematico, concentrandosi più che altro su tre particolari classi di definizioni ritenute più ricorrenti: angolo come rotazione di una semiretta rispetto ad un'altra attorno a un punto comune; angolo come due semirette con un'origine in comune e angolo come regione formata dall'intersezione di due semipiani.

Strehl (1983) propone un'analisi delle diverse definizioni di angolo utilizzate nei libri scolastici; analogamente Lo, Gaddis e Henderson (1996) riportano un'analisi dei testi previsti per insegnanti di scuola elementare in formazione usati in US.

Kaiser (2005) mette in evidenza le analogie che intercorrono tra le convinzioni degli allievi di prima media riferite allo sviluppo della nozione di angolo con le diverse convinzioni di grandi matematici del passato. In particolare, nell'articolo vengono confrontate le discussioni avvenute tra gli studenti sul tema angolo, posti in situazioni di

insegnamento che favorivano la comunicazione, con le convinzioni e i dibattiti rintracciabili nella storia della matematica nel trattare questo argomento.

3. Le motivazioni di ricerca

La scelta in ambito scolastico di un argomento da proporre porta ad una terna che sempre viene esaminata quando si discute di trasposizione didattica:

- il Sapere (l'angolo, nelle sue diverse accezioni) da un punto di vista matematico;
- quel sapere che viene scelto in aula dall'insegnante come sapere da insegnare;
- quel sapere personale che ciascun allievo possiede e che scaturisce dalla propria esperienza; un sapere sul quale è necessario fondare ogni studio relativo alla trasposizione didattica.

A volte, i saperi in gioco possono essere addirittura contrastanti, per esempio quando ingenuamente l'insegnante crede che vi sia una sola concettualizzazione possibile dell'oggetto matematico e, di conseguenza, una sola definizione, quella in suo possesso. Come è emerso nelle ricerche presentate nel quadro teorico, può avvenire che la definizione proposta istituzionalmente in aula contrasti con l'immagine intuitiva che lo studente si è già costruito, grazie ai contesti d'uso esterni alla scuola. Nel proporre una definizione, occorre dunque vagliare bene le difficoltà che avrà lo studente a cancellare o a superare la propria immagine intuitiva, forse già costituitasi in modello, e sostituirla con quella proposta dall'insegnante. Se è vero che la definizione di un oggetto matematico dovrebbe essere il risultato di mediazioni e negoziazioni all'interno di una comunità di pratiche, occorre allora che ciascuno dei componenti la comunità porti il suo contributo personale, secondo le proprie convinzioni, negoziando i saperi nella microsocietà classe e giungendo, auspicabilmente, ad un sapere condiviso.

In questa ricerca vogliamo dimostrare che le scelte relative alle definizioni degli oggetti matematici e alle rappresentazioni semiotiche attraverso le quali vengono mostrati, non vedono coinvolti gli allievi che devono disambiguare la rappresentazione loro proposta nella prassi didattica e oggettivare l'oggetto, ma solo coloro che tentano una trasposizione. Ipotizziamo che si tratta solo di una mediazione fatta dall'insegnante che vuole condurre i propri allievi verso quel sapere condiviso dagli adulti, dagli insegnanti, dai matematici, appartenenti ad una determinata cultura, mentre il soggetto in fase di apprendimento è tenuto a debita distanza da tali negoziazioni. Inoltre, vogliamo verificare se la definizione scelta dall'insegnante per far apprendere ai propri allievi il concetto di angolo è univoca e se risulta addirittura in contrasto con le scelte semiotiche effettuate dall'insegnante per presentare tale argomento. Ipotizziamo inoltre che tali scelte semiotiche risultino limitate e stereotipate. Questi aspetti, scelta univoca della definizione e delle proposte semiotiche, mancanza di negoziazione da parte degli allievi e incoerenza nell'intenzionalità dell'insegnante tra aspetto concettuale e proposte semiotiche, possono essere alcune delle cause delle difficoltà degli allievi, emerse in numerose ricerche, nel gestire il concetto di angolo.

Nello specifico, le domande di ricerca che ci siamo posti sono le seguenti:

D1 Nella trasposizione didattica dell'oggetto angolo gli insegnanti hanno in mente un'unica definizione da proporre agli studenti o ipotizzano di lavorare sulle diverse

interpretazioni di tale concetto che emergono dagli allievi e che sono presenti nella storia della matematica?

D2 Da parte degli insegnanti che vogliono proporre ai propri allievi una determinata definizione di angolo, c'è coerenza tra i mezzi semiotici di oggettivazione scelti per presentare tale concetto e la definizione alla quale si vuole giungere?

D3 Le proposte semiotiche fornite dagli insegnanti per presentare l'argomento angolo risultano varie, oppure stereotipate e limitate?

4. Ipotesi di ricerca

I1 A nostro parere, nell'effettuare la trasposizione didattica dell'oggetto angolo la maggior parte degli insegnanti propone ai propri allievi un'unica definizione, la più diffusa nei libri di testo, senza negoziare con gli allievi le proprie convinzioni.

I2 A nostro parere non sempre c'è coerenza da parte dell'insegnante tra i mezzi semiotici di oggettivazione proposti in classe agli allievi per far apprendere l'angolo e la definizione verso la quale intende indirizzarli. A volte, in effetti, possono subentrare consuetudini e stereotipi nelle scelte semiotiche, mancanza di analisi critica e di riflessione personale sulla situazione da proporre in classe che possono creare questo tipo di incoerenza.

I3 A nostro parere le proposte semiotiche relative all'oggetto angolo risultano stereotipate e limitate, derivanti in modo quasi esclusivo dalle proposte dei libri di testo.

5. Metodologia di ricerca

L'esempio emblematico da noi scelto è quello dell'angolo e delle sue rappresentazioni semiotiche.

La ricerca si sviluppa in due fasi: la prima si basa su colloqui effettuati a insegnanti di scuola primaria relativi al concetto di angolo e ai mezzi semiotici di oggettivazione scelti per comunicare questo sapere in classe, mentre la seconda su domande riguardanti l'aspetto concettuale dell'angolo poste ai relativi allievi di V primaria.

Prima fase

Sono stati intervistati individualmente 20 insegnanti di scuola primaria di diverse città d'Italia ai quali sono state poste le seguenti domande grazie alle quali è nata una discussione tra l'intervistato e il ricercatore. Le prime tre domande sono volutamente vaghe e ampie per introdurre l'argomento, far emergere le convinzioni degli insegnanti e il loro modo di lavorare in classe, dal quale far scaturire in seguito importanti informazioni per questa ricerca.

- 1) Che cosa vorresti che i tuoi allievi sapessero relativamente all'angolo?
- 2) Da dove parti per far raggiungere questo apprendimento?
- 3) Che cosa proponi agli allievi su questo tema?
- 4) Hai in mente un'unica definizione di angolo da proporre ai tuoi allievi oppure diverse?
- 5) Che rappresentazione scegli per parlare di angolo in classe?

- 6) Perché scegli questa rappresentazione?
- 7) Fornisci anche altre rappresentazioni dell'angolo?

Seconda fase

In seguito sono stati intervistati individualmente 8 allievi di V primaria per ciascuna classe dei 20 insegnanti sottoposti alla ricerca, per un totale di 160, che sono stati scelti a sorteggio. A questi allievi è stato chiesto tramite intervista: Siamo in geometria... che cos'è per te un angolo? Da questa domanda si partiva per capire più in profondità le convinzioni degli allievi sull'angolo.

Durante le interviste agli insegnanti e agli allievi si mettevano a disposizione un foglio e una penna in caso di richiesta esplicita. Le interviste sono state registrate.

6. Risultati di ricerca

6.1 Prima fase. Gli insegnanti

Riportiamo di seguito le risposte ottenute alle sette principali domande poste ai 20 insegnanti intervistati.

Domanda 1), 2), 3) e 4)

Alla prima domanda, 14 insegnanti rispondono elencando finalità utilitaristiche intrinseche alla matematica, allo scopo di saper gestire le tipiche richieste scolastiche su questo tema, come sapere riconoscere i vari tipi di angolo: acuto, retto, piatto, ottuso, giro, ..., sapere misurare l'ampiezza di un angolo con il goniometro, saper risolvere problemi con gli angoli, saper fare i confronti delle ampiezze degli angoli, Solo 4 di questi insegnanti fanno riferimento esplicito alla realtà esterna alla scuola: «Vorrei che i miei allievi riuscissero a risolvere i problemi che coinvolgono gli angoli anche quando saranno fuori dalla scuola»; per gli altri, l'apprendimento del concetto di angolo sembra esclusivamente interno alla scuola, legato al successo scolastico, senza legami con la realtà esterna. Gli altri 6 insegnanti rispondono con finalità più concettuali, ribadendo l'importanza di acquisire il significato di angolo in geometria.

Per introdurre il concetto di angolo, la totalità degli insegnanti afferma di fare riferimento all'ambiente che circonda i bambini, per far vivere le esperienze agli allievi in prima persona con il corpo, facendo toccare con mano e ricercare angoli prevalentemente retti, per poi fare i confronti con altri tipi di angoli. Solo 2 insegnanti dichiarano di iniziare l'apprendimento dell'angolo dalle convinzioni degli allievi, ma subito dopo affermano che successivamente dicono che cos'è un angolo in matematica, senza negoziare ulteriormente con gli allievi il significato di tale oggetto matematico; in sostanza, più che lavorare sulle convinzioni degli allievi viene fatta semplicemente un'indagine di ciò che pensano.

Tutti gli insegnanti intervistati dichiarano di avere in mente un'unica definizione di angolo alla quale far giungere i propri allievi. Nessuno ipotizza di fornire agli allievi diverse definizioni di angolo o di lavorare sulle definizioni proposte dagli allievi. Per proporre la definizione scelta, gli insegnanti dichiarano di mostrare ai propri allievi diverse classiche situazioni presenti nei libri di testo e di fornire la definizione che

vogliono far apprendere, senza accettare di negoziare con gli allievi interpretazioni diverse.

Dalle affermazioni degli insegnanti emerge che la definizione dell'angolo proposta in classe dagli insegnanti non è il risultato di mediazioni e negoziazioni all'interno della microsocietà classe per giungere a un sapere condiviso, ma imposto dall'insegnante.

In particolare,

- 14 insegnanti su 20 dichiarano che scelgono come definizione di angolo da proporre ai propri allievi: «La parte di piano compresa tra due semirette con un'origine in comune». Tale definizione è sicuramente la più ricorrente in Italia tra gli insegnanti di scuola di base e di conseguenza tra gli studenti; la sua origine è incerta e appare a partire dal XVII secolo in Europa.

3 dei 14 insegnanti dimenticano di parlare di origine in comune delle due semirette, ma dai gesti si intuisce che stanno facendo questa scelta concettuale senza saperla esplicitare in modo corretto, inoltre 4 dei 14 insegnanti dichiarano che la parte di piano è illimitata. È evidente che in questa situazione, l'aggettivo «illimitata» è pleonastico dato che si riferisce ad una parte di piano «aperta», ma dall'intervista successiva si rivela che ben 5 degli insegnanti che non lo esplicitano non hanno consapevolezza dell'illimitatezza della parte di piano implicita nella definizione scelta, dato che come vedremo in seguito, pensano all'angolo come a una parte di piano limitata, localizzata in corrispondenza dell'origine dell'angolo.

Gli altri 6 insegnanti fanno invece le seguenti scelte:

- 1 parla di inclinazione di due rette [scelta che ricorda Euclide, III secolo o Proclo (412-486)];

- 1 considera l'angolo come cambio di direzione di due rette [scelta che ricorda Eudemo di Pergamo (attivo nel 325)];

- 1 parla di due semirette con un'origine in comune [impostazione che ricorda Hilbert (1899)];

- 1 di ampiezza di due semirette [facendo quindi una scelta esclusivamente metrica; una scelta metrica è presente in Carpo di Antiochia (II sec.) che definisce l'angolo la distanza delle linee (...) che lo comprendono];

- 2 parlano di rotazione di due semirette con un'origine in comune una sull'altra (scelta nata fin dal XVIII-XIX sec. e sviluppatasi in Gran Bretagna).

[Per un approfondimento delle diverse definizioni di angolo nella storia, ci siamo serviti di D'Amore (1985)].

Domanda 5)

A questa domanda 12 insegnanti rispondono che per rappresentare l'angolo usano un «archetto» vicino all'origine dell'angolo che limita una parte di piano; 10 di questi insegnanti chiedono di poterlo disegnare per mostrarcelo meglio.

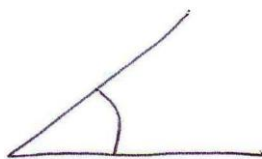


Figura 1. Schizzo a mano libera di un insegnante.

Tale rappresentazione non è univoca nei libri di testo italiani di ogni livello scolastico dato che a volte l'angolo viene raffigurato punteggiato fino ad un immaginario archetto o sfumato esaltando l'illimitatezza della parte di piano, o indicato con un asterisco, ..., ma dalla maggioranza degli insegnanti intervistati la rappresentazione per mezzo di un archetto è considerata «la» rappresentazione per eccellenza, quella che rispecchia meglio delle altre l'angolo, senza una motivazione concettuale, ma più che altro di convenzione e abitudine.

Gli altri 8 insegnanti in 3 casi colorano una parte di piano limitata fino a un archetto, rientrando in qualche modo nella stessa scelta degli altri insegnanti e gli altri 5 colorano la parte di piano mostrandone l'illimitatezza.

La motivazione del mezzo semiotico di oggettivazione scelto non verte sul volere mettere maggiormente in risalto alcune proprietà della definizione dichiarata nelle domande precedenti; anzi, in alcuni casi, è la rappresentazione grafica convenzionale stessa che fa perdere il senso della definizione che si vuole far apprendere ai propri allievi, che può essere riletta anch'essa come mezzo semiotico di oggettivazione. Ossia si evidenzia, in 17 insegnanti su 20, incoerenza tra l'intenzione esplicitata dal punto di vista istituzionale e il mezzo semiotico di oggettivazione scelto per parlare del concetto in oggetto.

Incoerenza. Analizziamo più in profondità questa incoerenza tra l'intenzione di ciò che si vuole far raggiungere concettualmente in classe e il mezzo semiotico di oggettivazione scelto per comunicare, prendendo in considerazioni le diverse definizioni scelte dagli insegnanti per parlare di angolo.

Parte di piano. Dei 14 insegnanti che dichiarano che l'angolo è la parte di piano compresa tra le due semirette con l'origine in comune, 9 scelgono come mezzo semiotico per parlarne l'archetto, 3 scelgono la parte di piano colorata fino all'archetto e 2 puntano l'attenzione sull'illimitatezza della parte di piano.

I 12 insegnanti che scelgono di indicare l'archetto o di colorare la parte di piano fino all'archetto danno importanza con tali mezzi semiotici grafici di oggettivazione alla limitatezza della parte di piano e non alla illimitatezza; proprietà, quest'ultima, che è invece contemplata dalla definizione scelta, dato che la parte di piano derivante dalla definizione risulta «aperta».

In seguito all'intervista, le scelte di questi 12 insegnanti sono state divise in due categorie: 5, nella *manca di consapevolezza sul sapere matematico in gioco* e 7, nella *manca di senso critico nei confronti della propria scelta*.

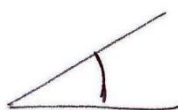
- Riportiamo una parte di intervista dei *due tipi di incoerenza*. Iniziamo dalla *manca di consapevolezza sul sapere in gioco*.

Ric.: Perché hai scelto questa rappresentazione?

C.: Perché l'angolo si rappresenta così.

Ric.: In che senso si rappresenta così?

C.: Quando si vuole parlare di un angolo si disegna così:



e gli allievi sanno che parliamo di angolo.

Si nota come questa scelta appaia univoca agli occhi di quell'insegnante. Eppure, come sostiene Duval (2006, p. 598): «All'opposto di questa riduzione delle rappresentazioni semiotiche al semplice ruolo di surrogato degli oggetti matematici, o a quello di espressione di rappresentazioni mentali, noi ci fermeremo su ciò che costituisce la caratteristica fondamentale di ogni prassi matematica: la *trasformazione* di rappresentazioni semiotiche. *Perché, in matematica, una rappresentazione è interessante solo se può essere trasformata in un'altra rappresentazione.* È soltanto nella misura in cui rispondono a questa esigenza fondamentale che le rappresentazioni semiotiche possono indicare qualcosa di «reale» e di razionalmente esplorabile, cioè diventare il mezzo di accesso a oggetti altrimenti inaccessibili».

L'intervista continua nel seguente modo:

Ric.: Indica qual è l'angolo del quale stai parlando su questa figura.

(C. indica la parte di piano fino all'archetto).

Ric.: Fino a dove arriva l'angolo?

C.: Fino a qui (indica l'archetto)

Ric.: Puoi andare oltre questo archetto?

C.: No, arriva fino a qui.

Ric.: Non possiamo andare oltre l'archetto?

C.: In questo caso no.

Ric.: E in quali casi si può andare oltre?

C.: Se l'angolo è più grande.

(Disegna un altro angolo apparentemente della stessa ampiezza, con semirette e archetto più lungo).



Da questo stralcio di intervista emerge come le misconcezioni sull'angolo derivanti da rappresentazioni grafiche riscontrate classicamente in allievi e riportate in letteratura (Fischbein, Tirosh, Melamed, 1981; Foxman, Ruddock, 1984; Tsamir, Tirosh, Stavy, 1997), siano presenti in alcuni casi negli insegnanti stessi e di conseguenza trasferite ai propri allievi.

L'intervista continua nel seguente modo:

Ric.: Perché hai scelto questa rappresentazione?

C.: Perché questo è il modo di rappresentare l'angolo.

Ric.: È il modo scelto da chi?

C.: Da tutti, in tutti i libri è così.

Ric.: E ti piace questa rappresentazione?

C.: Sì, l'ho sempre fatta così, non vedo perché dovrei cambiarla.

Ric.: Che cos'è per te un angolo?

C.: È la parte di piano compresa tra due semirette che partono da uno stesso punto.

Ric.: E com'è questa parte di piano?

C.: In che senso?

Ric.: Che proprietà ha questa parte di piano?

C.: Non capisco.

Ric.: Questa parte di piano di cui parli è limitata o illimitata?

C.: Guarda il suo disegno, pensa un po' e poi risponde:

C.: È limitata dalle semirette.

Ric.: E qui com'è? (Il ric. indica la parte di piano illimitata)

C.: Arriva fino a qui (indica l'archetto).

Ric.: Perché quando ti ho chiesto che cos'è un angolo non mi hai detto che arriva fino all'archetto?

C.: Perché non si dice, ma poi si fa vedere nel disegno.

L'insegnante afferma che l'angolo è limitato da due semirette il che implica che l'angolo ha una natura illimitata. Poi si riferisce «all'archetto» per giustificarne la limitatezza.

Si nota come il mezzo semiotico grafico di oggettivazione sia incoerente rispetto a quello verbale esplicitato, pur essendo quest'ultimo quello che l'insegnante dichiara avrebbe voluto far apprendere ai propri allievi. Interpretando ciò dal punto di vista di Duval non c'è coordinazione di registri, eppure «*il coordinamento di registri è la condizione per la padronanza della comprensione in quanto essa è la condizione per una differenziazione reale tra i concetti matematici e la loro rappresentazione. Costituisce una soglia il cui superamento cambia radicalmente l'attitudine di fronte ad un tipo di attività o ad un dominio (...). Ora, questo coordinamento non ha niente di spontaneo*» (Duval, 1995, p. 259).

Consideriamo anche il seguente stralcio di intervista di un insegnante dei 7 che risulta incoerente per *manca di senso critico nei confronti della propria scelta*. L'insegnante sceglie come rappresentazione di colorare la parte di piano fino all'archetto, ma è consapevole dell'illimitatezza della parte di piano scelta come definizione di angolo.

Ric.: Nella definizione che hai scelto la parte di piano è limitata o illimitata?

S.: Illimitata

Ric.: Come mai hai scelto di rappresentare l'angolo con una parte di piano fino a un archetto?

S.: L'ho sempre disegnata così e mi sembra che gli allievi lo vedano (l'angolo).

Ric.: Non dici agli allievi che potrebbero continuare a colorare?

S.: Forse qualche volta, ma poi abbiamo deciso fin da subito di rappresentarlo così.

Ric.: Ti sembra una buona scelta?

S.: Adesso che mi ci fai pensare forse no, ma è questione di abitudine e non ci si pensa a tutto ciò che si propone.

L'insegnante è consapevole della illimitatezza dell'angolo, ma la rappresentazione figurale che propone è inconsistente con il suo obiettivo e la sua intenzione. Quando il ricercatore porta la sua attenzione sull'adeguatezza di tale rappresentazione, l'insegnante diventa consapevole dell'incoerenza di questo mezzo semiotico. La domanda del ricercatore ha attivato il controllo razionale dell'insegnante.

Anche negli insegnanti che scelgono le altre definizioni si notano in diversi casi incoerenze tra l'intenzione concettuale alla quale vogliono far tendere i propri allievi e i mezzi semiotici scelti per esplicitarla. I 3 insegnanti che parlano di angolo come: inclinazione di due rette; cambio di direzione di due rette; due semirette con un'origine in comune, scelgono come rappresentazione grafica di dare risalto alla parte di piano illimitata, pur non essendo una proprietà caratteristica della definizione proposta.

Risulta invece coerente l'insegnante che definisce l'angolo come ampiezza di due semirette e che sceglie come mezzo semiotico di oggettivazione l'archetto per dare risalto alla misura dell'angolo. Archetto, che viene visualizzato a detta dell'insegnante anche dal goniometro, strumento di misura dell'angolo.

La stessa coerenza emerge nei 2 insegnanti che definiscono l'angolo come rotazione di due semirette con un'origine in comune e che puntano l'attenzione sull'archetto come mezzo semiotico che visualizza il processo dinamico di rotazione.

Questa coerenza non viene qui posta in relazione con un giudizio sull'efficacia della scelta didattica, il che esula dagli scopi di questo articolo.

Domanda 6)

Per tutti gli insegnanti intervistati, la motivazione della scelta del mezzo semiotico grafico di oggettivazione è legata al fatto che tale rappresentazione è quella prevalentemente in uso e convenzionale in Italia, per questo viene percepita come vincolante e spesso univoca, la rappresentazione «matematicamente corretta». I mezzi di oggettivazione appaiono talmente vincolanti da far perdere il senso critico di ciò che viene proposto in aula, inoltre non risultano costruiti socialmente nell'ambiente classe, ma imposti. Tra le motivazioni delle scelte, due insegnanti parlano anche della forma del goniometro che richiama quella dell'archetto, motivazione assai superficiale, che confonde un concetto con lo strumento di misura utilizzato per valutarne la grandezza relativa.

In generale, non si rilevano da parte degli insegnanti scelte concettuali o personali consapevoli legate al concetto in gioco. Eppure, come sostengono D'Amore e Godino (2006, pp. 26-27): *«Ci pare di poter affermare che il significato degli oggetti matematici comincia come pragmatico, relativo al contesto; ma, tra i tipi di uso relativi a quel significato, ne esistono alcuni che permettono di orientare i processi di insegnamento – apprendimento della matematica. Questi tipi di usi vengono oggettivizzati attraverso il linguaggio e finiscono con il costituire referenti del lessico istituzionale»*; tali usi che orientano i processi di insegnamento-apprendimento non vengono favoriti dalle scelte vincolanti degli insegnanti intervistati.

Domanda 7)

Le rappresentazioni scelte per modificare la propria richiesta iniziale rientrano tra le tre già menzionate.

In particolare, va osservato che 5 insegnanti non riescono a ipotizzare un modo diverso di rappresentare l'angolo rispetto all'archetto preso in considerazione nella seconda domanda; questo fatto mette in evidenza la rigidità di tale mezzo semiotico che è diventato ormai univoco nella mente di alcuni insegnanti. Gli altri 7 insegnanti che avevano scelto l'archetto, in seguito colorano una più estesa parte di piano, ma rimangono in 4 casi vincolati alla sua limitatezza; segno che in questo caso l'archetto non rappresenta solo un indicatore della parte di piano considerata, ma anche un visualizzatore della parte limitata.

I 3 insegnanti che avevano inizialmente colorato la parte di piano fino all'archetto, in 2 casi cambiano solamente tipo di colorazione: uno tratteggia e uno punteggia la parte di piano limitata, in 1 caso viene mostrato solo l'archetto come rappresentazione dell'angolo.

I 5 insegnanti che avevano colorato la parte di piano cercando di dare risalto all'illimitatezza, in 3 casi non mostrano alternative di rappresentazione se non cambiare tipo di tratteggio, mentre in 2 casi mostrano l'archetto.

In uno di questi ultimi due casi emerge un *cambio di senso* derivante dalla trasformazione semiotica di trattamento nel passaggio da una rappresentazione in un'altra nello stesso registro semiotico (D'Amore, 2006; D'Amore, Fandiño Pinilla, 2008; Santi, 2010). Questo cambio emerge dall'affermazione esplicita di un'insegnante: «*Se rappresentiamo l'angolo in questo modo, allora stiamo parlando dell'angolo come ampiezza*» (sta parlando della rappresentazione con l'archetto), mentre in precedenza aveva parlato di angolo come parte di piano compresa tra due semirette con un'origine in comune e aveva fornito una rappresentazione cercando di dare risalto alla parte di piano illimitata. Questo esempio sembra confermare quanto emerge dalle ricerche di D'Amore e Fandiño in cui si assiste a comportamenti semiotici inaspettati rispetto alle conclusioni che costituiscono il cuore della teoria elaborata da Duval (1995, 2006). Infatti, Duval considera la *conversione* – il passaggio da una rappresentazione in un sistema semiotico a un'altra in un altro sistema semiotico - l'operazione che caratterizza il funzionamento cognitivo tipico della matematica e la principale fonte di difficoltà nel suo apprendimento. Questo esempio, invece, mostra che anche il *trattamento* è causa di difficoltà nella concettualizzazione di un oggetto matematico; nell'esempio che stiamo esaminando, si presenta con un cambio di senso dell'oggetto angolo che comporta uno stravolgimento del suo significato generale. L'insegnante associa l'ampiezza dell'angolo a una rappresentazione R_1 e la sua definizione ad un'altra R_2 senza riconoscere il riferimento al medesimo oggetto concettuale, confondendo così l'oggetto matematico con la sua rappresentazione. Il cambio di senso può essere interpretato come un disallineamento tra più significati intrapersonali rispetto al significato interpersonale e generale, culturalmente e storicamente costruito.

6.1 Seconda fase. Gli allievi

Le convinzioni sull'angolo emerse grazie alle interviste effettuate a 160 allievi intervistati di V primaria rientrano tra le seguenti:

- *Angolo come parte di piano limitata da un archetto*. 62 allievi sostengono che l'angolo è la parte colorata fino all'archetto utilizzato per indicarlo. La maggioranza chiede di poter disegnare e visualizza il colore esaltando la limitatezza della parte di piano; in alcuni casi viene anche indicato l'archetto, in altri rimane visualizzato indirettamente dalla parte limitata colorata che rimane ben definita all'interno dei due lati dell'angolo e che sembra non potersi estendere oltre ad un certo limite. Alla domanda se è possibile procedere colorando oltre l'archetto, gli allievi rispondono che l'angolo arriva fino a lì (nel senso che è limitato): G.: «Arriva fino a qui, altrimenti si va fuori dall'angolo».

Questa categoria era già emersa negli insegnanti, ma non c'è una correlazione stretta tra la proposta dell'insegnante e le risposte degli allievi; in effetti, diversi di questi studenti non sono scolari degli insegnanti che rientrano in questa categoria.

- *Angolo come due segmenti consecutivi*. 18 allievi affermano che due segmenti consecutivi rappresentano l'angolo stesso: «Sono queste due linee qui».

- *Angolo come archetto*. 21 allievi affermano e indicano con i gesti sul tavolo o sul disegno che l'angolo coincide con l'archetto stesso:

S.: «È questo l'angolo» (indica sul tavolo vicino a un suo vertice un archetto).

Ric.: «Questo cosa? Mostralo meglio».

S.: «Questo qui» (indica di nuovo una linea curva).

Ric.: «Che cosa intendi?».

S.: «Da qui a qui» (indica una linea curva che unisce due spigoli del tavolo).

- *Angolo come lunghezza di un archetto*. 9 allievi sostengono che l'angolo è la lunghezza dell'archetto rappresentato: «L'angolo è quanto è lungo questo» (indica l'archetto).

Queste ultime tre categorie non sono presenti tra quelle degli insegnanti e mettono in evidenza quanto la rappresentazione semiotica grafica proposta dall'insegnante abbia preso il sopravvento sull'aspetto concettuale, forviandone il significato. In questo caso il *senso* dato dagli allievi all'oggetto matematico angolo risulta diverso rispetto a quello proposto dall'insegnante sia in termini verbali che grafici. Questo dimostra con quanta cautela è necessario proporre rappresentazioni di un oggetto matematico e soprattutto quanto sia importante indagare l'interpretazione data dagli allievi a tali rappresentazioni.

- *Angolo come parte di piano illimitata*. 34 allievi parlano della parte di piano compresa tra due semirette con un'origine in comune: D.: «È la parte di piano compresa tra due semirette». Alla domanda: Ric.: «Disegna un esempio di angolo», 21 allievi rappresentano due semirette con l'origine in comune ed evidenziano l'illimitatezza di una delle due parti di piano: «È tutta questa parte qua» (indica tutta la parte di piano); mentre i restanti 13, dopo aver rappresentato in 8 casi due segmenti con un estremo in comune e negli altri 5 casi due semirette con l'origine in comune, indicano tutti una parte di piano limitata tra i due segmenti o semirette, rientrando così nella prima categoria. Si evidenzia quindi un'incoerenza tra la definizione scelta per parlare di angolo e la rappresentazione grafica di tale oggetto matematico; incoerenza emersa anche tra le risposte degli insegnanti e commentata nel paragrafo 6.1. Il mezzo semiotico verbale dichiarato dagli allievi contrasta con quello figurale, ma tale contrasto sembra non essere percepito dagli studenti, né in precedenza dagli insegnanti. In questo caso c'è correlazione tra le convinzioni degli insegnanti e quelle degli allievi, in effetti questi 13 risultano studenti degli insegnanti che mostravano questo tipo di incoerenza. Questo esempio mette in evidenza quanto le convinzioni degli insegnanti condizionano le pratiche d'aula. Si percepisce cioè una relazione causale tra convinzioni e misconcezioni, dato che le misconcezioni degli allievi sembrano derivare direttamente da misconcezioni del docente e dalle sue convinzioni, secondo una sequenza come la seguente: convinzione del docente → misconcezione del docente → misconcezione dell'allievo → convinzione dell'allievo.

- *Angolo come punto-origine*. 12 allievi sostengono che l'angolo è il punto dove si incontrano due segmenti o due semirette, indicate nel tavolo o sul disegno: «È questo punto qui».

Questa categoria non è presente tra le risposte degli insegnanti ed è diffusa in modo uniforme tra le diverse classi. Tale categoria deriva dal linguaggio comune che concepisce l'angolo come un vertice.

- *Angolo come ampiezza*. 4 allievi parlano di angolo esclusivamente come grandezza:

S.: «È un'ampiezza».

Ric.: «Che cos'è un'ampiezza?».

S.: «Quanto è grande da qui a qui» (indica due spigoli del tavolo).

I 4 allievi sono studenti di un docente che concepiva l'angolo nello stesso modo, dimostrando così una correlazione tra le risposte degli allievi e le intenzioni dell'insegnante.

In generale, le risposte degli allievi non sono correlate con le intenzioni concettuali e culturali esplicitate dagli insegnanti, in particolare emerge con molta più forza il mezzo semiotico di oggettivazione grafico proposto dagli insegnanti piuttosto che il fine concettuale che l'insegnante intendeva raggiungere. In alcuni casi il mezzo semiotico grafico proposto prende talmente il sopravvento da snaturare l'intenzione dell'insegnante stesso, come il caso dell'angolo concepito come la lunghezza dell'archetto o l'archetto stesso. In questo caso gli allievi confondono la rappresentazione grafica con il concetto stesso che si voleva proporre. Inoltre emergono tra le risposte degli allievi categorie non previste dall'insegnante che derivano dall'uso quotidiano della lingua comune (angolo come sinonimo di vertice) e da una limitata interpretazione dei pochi o a volte univoci mezzi di oggettivazioni proposti in classe. L'univocità dei mezzi di oggettivazione proposti in aula è in contrasto sia con i riferimenti teorici rientranti nell'ambito della semiotica sia con quelli specifici dell'angolo.

7. Conclusioni

I risultati di ricerca mostrano che le misconcezioni possedute dagli allievi sul concetto di angolo, rilevate da diverse ricerche, dipendono anche dalle scelte didattiche effettuate dagli insegnanti, scelte spesso univoche e vincolanti che non tengono conto che gli oggetti della matematica hanno di solito varie definizioni che la storia ha elaborato, ciascuna delle quali può cogliere uno o più degli aspetti specifici dell'oggetto in questione. Ciascuna definizione tende a cogliere di quell'oggetto particolarità specifiche. In particolare, nel caso dell'angolo, le diverse definizioni che la storia ci ha consegnato sono addirittura spesso essenzialmente diverse, tanto che si può ipotizzare che l'oggetto «angolo» è l'insieme delle caratterizzazioni che ciascuna definizione evidenzia. Se una delle definizioni fosse epistemologicamente più conveniente, o più facile, o più vicina all'identità di quell'oggetto..., allora si dovrebbe fare di tutto per proporla e renderla universale; nel caso dell'angolo, però, ognuna delle definizioni che la storia ha elaborato presenta dei problemi addirittura di accettazione intuitiva.

In particolare, in D'Amore e Marazzani (2008) si è evidenziato che *tutte* le definizioni che la storia ha creato sono contemporaneamente presenti, a livello intuitivo, fra gli studenti intervistati: a fronte di un oggetto matematico unico, si vede come esistano varie interpretazioni e vari modelli che tendono a rappresentare caratteristiche di quell'oggetto. Risulterebbe quindi didatticamente importante rispettare le interpretazioni di angolo che emergono dagli allievi. Siamo in effetti in pieno accordo con Mitchelmore e White (2000, p. 234) quando sostengono: «Una terza implicazione del nostro studio è che le definizioni verbali di angolo rischiano di non aiutare i bambini. Solo quando gli studenti hanno imparato a riconoscere la similarità tra molti contesti in cui l'angolo è definito è facile che accettino una definizione che è espressa nei termini di un unico contesto che può essere applicato a tutti i contesti». Eppure, dalle interviste agli insegnanti emerge che la definizione proposta agli allievi risulta univoca e non è il

risultato di mediazioni e negoziazioni all'interno di una comunità di pratiche, con il fine di giungere ad un sapere condiviso, ma imposta dall'insegnante stesso.

Altra importante causa di difficoltà sulla quale si è concentrata in modo specifico questo articolo sono le incoerenze nell'intenzionalità degli insegnanti derivanti da un uso limitato e inconsapevole dei mezzi semiotici di oggettivazione rispetto all'aspetto concettuale e culturale del sapere al quale si vuole far giungere i propri allievi. La complessità dell'apprendimento del concetto di angolo da parte degli allievi, messa in evidenza dalla letteratura di riferimento, è quindi amplificata dalle scelte dell'insegnante riguardanti la trasposizione didattica del sapere e l'ingegneria didattica adottata.

L'intenzionalità attribuisce all'individuo, in questo caso all'insegnante, un ruolo fondamentale nella possibilità di attribuire senso agli oggetti matematici, ma tale intenzionalità deve essere gestita con consapevolezza per poter essere efficace didatticamente. In effetti, l'incoerenza tra l'intenzionalità esplicitata dall'insegnante tramite il mezzo di oggettivazione verbale e il mezzo di oggettivazione grafico, scelti per esprimere tale concetto, può essere la fonte di misconcezioni evitabili nella mente dell'allievo. La scelta dei segni non è in effetti neutra o indipendente; come sostiene Radford (2005b, p. 204): «*I mezzi semiotici di oggettivazione offrono possibilità diverse per svolgere un compito per designare oggetti ed esprimere intenzioni. (...) Occorre quindi saper individuare i mezzi semiotici di oggettivazione per ottenere oggetti di coscienza*», tale individuazione va gestita con forte senso critico da parte dell'insegnante.

Riferendoci a Husserl (1913-1959), i risultati di questa ricerca mettono in evidenza che l'insegnante, nelle pratiche d'aula, troppo spesso crea incoerenza tra l'atto intenzionale che determina il modo in cui l'oggetto si presenta alla coscienza (noesis) e il contenuto concettuale dell'esperienza individuale (noema). La coerenza e unità dei diversi atti intenzionali dell'insegnante sembrano non essere sempre presenti nelle pratiche d'aula per quanto riguarda l'angolo.

I risultati della ricerca dimostrano che le decisioni prese dall'insegnante per presentare l'argomento angolo si basano su proposte derivanti dalla noosfera, più che da scelte personali consapevoli, e vertono sul fornire all'allievo sempre e solo univoche rappresentazioni convenzionali senza analizzarne i tratti distintivi con gli allievi. Ma come sostiene Duval, la concettualizzazione degli oggetti matematici non avviene ricorrendo a uno solo di questi possibili sistemi semiotici, poiché il significato è forgiato dall'azione reciproca dei diversi sistemi semiotici. «*La comprensione comincia con l'articolazione, da parte del soggetto, di due registri di rappresentazione. In altre parole, non si può mai considerare che un tipo di rappresentazione è migliore di un altro se l'individuo non è capace di controllare, da solo e nei due sensi, la conversione da un tipo di rappresentazione proposto dall'insegnante in un altro registro di rappresentazione*» (Duval, 2006, p. 613). L'insegnante ha il compito delicato di guidare e sostenere lo studente nella coordinazione di mezzi semiotici di oggettivazione eterogenei, ciascuno dei quali è di per sé articolato e difficile da essere gestito, per evitare che così l'allievo, o l'insegnante stesso, confonda l'oggetto matematico con una sua rappresentazione.

I mezzi semiotici di oggettivazione non devono cioè diventare scelte *a priori* derivanti dall'esterno della situazione d'aula, senza nessuna analisi critica da parte dell'insegnante. Come sostengono Fandiño e D'Amore (2009), un docente di matematica avrebbe bisogno per insegnare di una forte competenza matematica acquisita per approfondimento personale oltre che sulla disciplina, anche sulla storia e

sulla visione epistemologica di ogni singolo oggetto, così da riflettere, paragonare, analizzare ed evitare le situazioni qui descritte.

Risulta quindi indispensabile per il superamento di *misconcezioni inevitabili* e l'assenza di *misconcezioni evitabili*, fornire una grande varietà di mezzi semiotici di oggettivazione opportunamente organizzati e integrati in un sistema sociale di significazioni rappresentato dalle pratiche matematiche condivise dagli allievi gestite con consapevolezza e coerenza da parte dell'insegnante.

Bibliografia

- D'Amore B. (1985). L'idea di «angolo» nell'antichità e la sua evoluzione. *Le scienze matematiche e il loro insegnamento*. 1, 6-18.
- D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.
- D'Amore B. (2006). Oggetti matematici e senso. Le trasformazioni semiotiche cambiano il senso degli oggetti matematici. *La matematica e la sua didattica*. 4, 557-583.
- D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2008). Change of the meaning of mathematical objects due to the passage between their different representations. In: Menghini M., Furinghetti F., Giacardi L, Arzarello F. (eds.) (2008). *The First Century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education*. Atti del Convegno Omonimo, Roma 5-8 marzo 2008. WG 5. Roma: Istituto della Enciclopedia Italiana. Collana Scienza e Filosofia.
- D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2009). La formazione degli insegnanti di matematica, problema pedagogico, didattico e culturale. *La matematica e la sua didattica*. 23, 3, 261-298.
- D'Amore B., Godino D.J. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica*. 1, 9-38.
- D'Amore B., Marazzani I. (2008). L'angolo, oggetto matematico e modello spontaneo. *La matematica e la sua didattica*. 22, 3, 285-329.
- D'Amore B., Sbaragli S. (2005). Analisi semantica e didattica dell'idea di «misconcezione». *La matematica e la sua didattica*. 2, 139-163.
- Di Sessa A. (1983). Phenomenology and the evolution of intuition. In: Gentner D., Stevens A. (eds.) (1983). *Mental models*. Hillsdale, N.J.: Laurence Erlbaum. 15-33.
- Duval R. (1995). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Actes de l'École d'été 1995*. [Trad. it.: *La matematica e la sua didattica*. 3, 1996, 250-269].
- Duval R. (2006). Trasformazioni di rappresentazioni semiotiche e prassi di pensiero matematico. *La matematica e la sua didattica*. 4, 585-619.
- Fischbein E., Tirosh D., Melamed U. (1981). Is it possible to measure the intuitive acceptance of mathematical statement? *Educational Studies in Mathematics*. 12, 491-512.
- Foxman D., Ruddock G. (1984). Concepts and skills: Line symmetry and angle. *Mathematics in School*. 13, 9-13.
- Godino J.D., Batanero C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 14, 3, 325-355.

- Hilbert D. (1899). *Gründlagen der Geometrie*. Stuttgart: G.G. Teubner. [Noi facciamo riferimento all'edizione italiana: *Fondamenti della geometria*, a cura di Carlo F. Manara e P. Canetta, Milano: Feltrinelli, 1970].
- Husserl E. (1913-1959). *Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie*. Dordrecht: Kluwer. [Noi facciamo riferimento all'edizione italiana: *Idee per una fenomenologia pura e una filosofia fenomenologica*, Libro I, § 89, a cura di Enrico Filippini, Torino: Einaudi, 1965].
- Kahneman D., Tversky A. (1982). On the study of statistical intuitions. In: Kahneman D., Slovic P., Tversky A. (eds.). *Judgement under uncertainty: heuristics and biases*. Cambridge: Cambridge University Press. 493-508.
- Kaiser J.M. (2005). Struggles with developing the concept of angle: comparing sixth-grade students' discourse to the history of the angle concept. *Mathematical Thinking and Learning*. 6, 3, 285-306.
- Kieran C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational studies in mathematics*. 12, 317-326.
- Lo J.J., Gaddis K., Henderson D. (1996). Building upon student experience in a college geometry course. *For the Learning of Mathematics*. 16(1), 34-40.
- Merleau-Ponty M. (2003). *Il filosofo e la sua ombra. Segni*. A cura di Andrea Bonomi, traduzione di Giuseppina Alfieri. Milano: Il Saggiatore.
- Mitchelmore M.C. (1989). The development of children's concepts of angle. In: G. Vergnaud (ed.) (1989). *Proceedings of the 13th International Conference on the Psychology of Mathematics Education*. Paris. 2, 304-311.
- Mitchelmore M.C. (1997). Children's informal knowledge of physical angle situations. *Learning and Instruction*. 7, 1-19.
- Mitchelmore M.C. (1998). Young students' concepts of turning. *Cognition and Instruction*. 16, 265-284.
- Mitchelmore M.C., White P. (1998). Development of angle concepts: a framework for research. *Mathematics Education Research Journal*. 10(3), 4-27.
- Mitchelmore M.C., White P. (2000). Development of angle concepts by progressive abstraction and generalisation. *Educational Studies in Mathematics*. 41, 209-238.
- Prescott A., Mitchelmore M.C., White P. (2002). Student difficulties in abstracting angle concepts from physical activities with concrete materials. In: Barton, Bill et al. (2002). *Mathematics education in the South Pacific*. 1-2, 583-591.
- Radford L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization. *Mathematical Thinking and Learning*. 5(1), 31-70.
- Radford L. (2005a). Body, Tool, and Symbol: Semiotic Reflections on Cognition. In E. Simmt and B. Davis (eds.) (2005). *Proceedings of the 2004 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group*.
- Radford L. (2005b). La generalizzazione matematica come processo semiotico. *La matematica e la sua didattica*. 2, 191-213.
- Radford L. (2006). The Anthropology of Meaning. *Educational Studies in Mathematics*. 61, 39-65.
- Roels G. (1985). *Het fenomeen hoek* (The angle phenomenon). *Wiskunde en Onderwijs*. 11, 127-138.
- Santi G. (2010). *Changes in meaning of mathematical objects due to semiotic transformations: a comparison between semiotic perspectives*. PhD dissertation.

- Università di Palermo. Pubblicata sulla rivista GRIM (Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento delle Matematiche) [Università di Palermo, Italia].
- Sbaragli S. (2005). Misconcezioni «inevitabili» e misconcezioni «evitabili». *La matematica e la sua didattica*. 1, 57-71.
- Schoenfeld A.H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.
- Schweiger F. (1986). Winkelbegriff und Winkelmaß (The angle concept and angle measurement). *Mathematik im Unterricht*. 11, 1-9.
- Shaughnessy J.M. (1985). Problem-Solving derailers: The influence of misconceptions on problem-solving performance. In: Silver E.A. (ed.) (1985). *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum. 399-415.
- Silver E.A. (1985). Research on teaching mathematical problem solving: some under represented themes and needed directions. In: Silver E.A. (ed.) (1985). *Teaching and learning mathematical problem solving. Multiple research perspectives*. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum. 247-266.
- Strehl R. (1983). *Anschauliche Vorstellung und mathematische Theorie beim Winkelbegriff* (Visualisation and mathematical theory of the angle concept). *Mathematica Didactica*. 6, 129-146.
- Tsamir P., Tirosh D., Stavy R. (1997). Intuitive rules and comparison tasks: The grasp of vertical angles. In: Makrides G.A. (ed.) (1997). *Proceedings of the first mediterranean conference: Mathematics education and applications*, Nicosia, Cyprus Pedagogical Institute and Cyprus Mathematical Society.
- Vadcard L. (2002). Conceptions de l'angle chez des élèves de seconde. *Recherches en didactique des mathématiques*. 22(1), 77-120.
- Voss J. F., Blais J., Means M.L., Greene T.R., Ahwesh E. (1989). Informal reasoning and subject matter knowledge in the solving of economics problems by naïve and novice individuals. In: Resnick L.B. (ed.) (1989). *Knowing, learning and instruction: Essays in honor of Robert Glaser*. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum. 217-250.
- Wagner S. (1981). Conservation of equation and function under transformations of variable. *Journal for research in mathematics education*. 12, 107-118.