La capacità di riconoscere “analogie”: il caso di area e volume

Silvia Sbaragli
N.R.D. - Dipartimento di Matematica - Università di Bologna – Italia
A.S.P. – Locarno - Svizzera

con la collaborazione di:
Luigina Cottino, Claudia Gualandi, Carla Nobis,
Adriana Ponti, Mirella Ricci

Lavoro eseguito nell’àmbito del programma strategico di ricerca: «*Aspetti metodologici (teorici ed empirici) della formazione iniziale ed in servizio degli insegnanti di matematica di ogni livello scolastico*», con fondi dell’Università di Bologna.

Questo articolo è stato oggetto di pubblicazione in:
Sbaragli S. (2006). La capacità di riconoscere “analogie”: il caso di area e volume. *La matematica e la sua didattica.* 2, 247-285.

Summary. *In this research we show that among primary and secondary school teachers there are rooted misconceptions regarding assumed relationships between areas and volumes of solid figures. It derives that the obstacle to the construction of a satisfactory mathematical knowledge of these relationships has not an epistemological nature, as it has been pointed out by research literature, but mainly a didactic one. Moreover we show that analogy represents a little known strategy that is not exploited by teachers from a didactic viewpoint, although it is one of the basic objectives of mathematical teaching.*

Resumen. *Con esta investigación se quiere demostrar que, en algunos docentes de las escuelas primarias y del primer año de secundaria, radican misconcepciones a propósito de supuestas relaciones necesarias entre área y volumen de figuras sólidas. Esta investigación evidencia cómo en una construcción matemática satisfaciente de este argumento, actúan sí obstáculos epistemológicos, como se encuentra en la literatura internacional, pero* *básicamente obstáculos didácticos. Además se presenta que la analogía es una estrategia poco conocida y poco aprovechada desde un punto de vista didáctico por parte de los docentes, a pesar de ser uno de los objetivos básicos de la enseñanza de la matemática*

Sunto. *In questa ricerca si vuole dimostrare che, presso insegnanti di scuola primaria e secondaria di primo grado, risiedono misconcezioni radicate a proposito di supposte relazioni necessarie tra aree e volumi di figure solide, che fan sì che l'ostacolo alla costruzione di una conoscenza matematicamente soddisfacente di queste relazioni non è di natura epistemologica, com'è stato rilevato dalla letteratura di ricerca, bensì prevalentemente di natura didattica. Inoltre si vuole dimostrare che l'analogia rappresenta una strategia poco conosciuta e non sfruttata dal punto di vista didattico dai docenti, pur essendo uno degli obiettivi basilari dell'insegnamento matematico.*

Resumo. *Nesta perquisa queremos demonstrar que mesmo entre professores de escola primária e secundaria de primeiro grau permanecem misconcepções eraizadas sobre supostas relações necessárias entre áreas e volumes de figuras sólidas, tais que podemos deduzir que o obstaculo à contrução de um conhecimento matematicamente satisfatório destas relações não è de tipo epistemológico, como ressaltou a literatura de pesquisa, mas essencialmente de tipo didático. Queremos além demonstrar que a analogia representa uma estratégia pouco conhecida e não esplorada didáticamente pelos professores, mesmo sendo um dos objectivos fundamentais do ensino matemático.*

Résumé. *Par cette recherche on veut démontrer que dans l'esprit des enseignants de l'école primaire et secondaire peut-on trouver de solides méconnaissances concernantes certaines relations, supposées existantes, entre aire et volume de figures solides, ce qui fait que l'obstacle à la construction d'une connaissance mathématiquement satisfaisante de ces relations n'est pas de nature épistémologique (comme a été relevé par la littérature de recherche), mais en grande partie de nature didactique. On veut en outre démontrer que l'analogie représente une stratégie, didactiquement peu connue et peu exploitée par les enseignants, même si elle représente un des objectifs primaires de l'enseignement mathématique.*

Zusammenfassung. *Ziel dieser Forschung ist zu zeigen, dass die Primar- und Sekundar- Schullehrer verankerte falsche Vorstellungen über vermuteten Beziehungen zwischen Flächeninhalt und Volumen geometrischer Körper besitzen; daraus folgt, dass die Hindernissen bezüglich auf einem mathematisch korrekten Aufbau dieser Beziehungen nicht von epistemologischer Natur, wie es oft in der Forschungsliteratur behauptet ist, sondern von didaktischer Natur sind. Ferner, mit dieser Forschung, zeigt man,* *dass die Analogie eine zu wenig bekannte und gar nicht ausgenutzte didaktische Strategie ist, obwohl sie ein der wichtigsten Ziele der mathematischen Erziehung ist.*

1. Premessa e quadro teorico

Questo lavoro segue una precedente ricerca riguardante le convinzioni di insegnanti e studenti relative alle relazioni tra perimetro e area di una figura piana (D’Amore, Fandiño Pinilla, 2005), nella quale si analizzano le convinzioni degli insegnanti e degli studenti sulle supposte relazioni tra questi due concetti, convinzioni spesso basate su tentativi di confermare sempre maggiorazioni o minorazioni tra queste entità, se poste in relazione. I risultati di quella ricerca, descritta in modo più puntuale nel paragrafo successivo, mostrano che l’ostacolo che si oppone alla costruzione da parte degli studenti di una conoscenza riguardante le relazioni tra “perimetro ed area” non è solo di natura epistemologica, com’è stato rilevato dalla letteratura di ricerca bensì soprattutto di natura didattica; esso quindi risiede soprattutto nelle scelte didattiche.

Siamo partiti da questi risultati per studiare in questa nuova ricerca l’*analogia* tra le relazioni attese, verificate o smentite, tra perimetro ed area di una figura piana, e quelle tra *area e volume* di una figura solida, in una sorta di analogia tutta da confermare: perimetro sta ad area (di una figura piana) come area sta a volume (di una figura solida).

In particolare, ci siamo messi nella condizione di valutare se viene colta, e di conseguenza sfruttata, dagli insegnanti intervistati e resi consapevoli dei risultati della prima ricerca, l’analogia tra le situazioni proposte nel piano e nello spazio, che permetterebbe di non dover rianalizzare i problemi posti, dall’inizio, come se la situazione precedentemente proposta nel piano non avesse alcun legame con quella proposta successivamente nello spazio. Se cioè gli insegnanti che avevano preso possesso cognitivo delle relazioni tra perimetro ed area sapessero trasferirle, per analogia, a relazioni tra area e volume.

Abbiamo deciso di rivolgere la nostra attenzione solo ad insegnanti in quanto riteniamo che per questa problematica sia questo il campione di analisi più interessante, dato che, come afferma Zan: «Si può riconoscere che nella formazione delle convinzioni ha una notevole responsabilità il tipo di insegnamento ricevuto» (Zan, 1998). Ciò evidentemente riguarda

il problema delle convinzioni e delle concezioni degli insegnanti [ampi quadri teorici su questo tema sono riportati in D'Amore, Fandiño Pinilla (2004) e in Campolucci et al. (2006), ai quali rimandiamo].
La vastità della tematica affrontata in questa ricerca, fa sì che il quadro teorico di riferimento risulta legato a tre differenti tematiche: (1) area e perimetro, per la quale rimandiamo a D'Amore e Fandiño Pinilla (2005); (2) area e volume e (3) analogia. Risulta impossibile dare un quadro di riferimento completo; è per questo motivo che, per non appesantire troppo la lettura, abbiamo deciso di limitare la nostra analisi solo a quei riferimenti bibliografici che, in qualche modo, hanno davvero condizionato l'indirizzo della nostra attuale ricerca.

Per quanto riguarda area e volume, ricordiamo i classici studi condotti da Vergnaud (1983; Vergnaud et al., 1983; Ricco et al., 1983) che hanno mostrato le diverse difficoltà che incontrano gli allievi in età compresa tra gli 11 e i 15 anni a rappresentarsi e a cogliere le diverse concezioni del concetto di volume; in particolare, l'Autore riporta un'interessante esperienza didattica effettuata con allievi di 12-13 anni su questo argomento.
Assumono poi particolare importanza per questa trattazione le considerazioni di Rogalski (1979) che segnala che uno dei grandi problemi dell'apprendimento di misure di superficie e volume, sta nel fatto che esistono specifici ostacoli concettuali che si rafforzano l'un l'altro: i cambi di dimensione, lo specifico statuto delle unità di misura, le relazioni esistenti tra l'unità di misura di superfici e volumi con l'unità di misura di lunghezze.
Interessante è pure la riflessione proposta in Iacomella e Marchini (1990), in cui si evidenzia il contrasto esistente tra le misure dirette (es. con geopiani, quadrettature, teorema di Pick) e indirette (es. tramite il ricorso alle formule, facendo appello a misure lineari) di una superficie e come questo contrasto possa costituire un ostacolo alla comprensione. Analogo contrasto può dunque esistere tra le misure dirette (es. con contenitori graduati) e quelle indirette di volume.
Rouche (1992) mette in evidenza che la determinazione dell'area di un rettangolo, come prodotto delle misure di due segmenti, è un esempio di misura indiretta, difficile da essere accettato e costruito concettualmente; questa difficoltà continua a valere anche per i volumi, se non addirittura amplificata.

Considerazioni analoghe sono sostenute da Chamorro (1997; 2001-2002) che mostra come didatticamente si faccia prevalere per le grandezze multidimensionali, superficie e volume, il prodotto di misure; questo comporta che non vi sia una reale valutazione della comprensione da parte degli alunni della bidimensionalità e tridimensionalità, dato che tutto ciò che si richiede nelle valutazioni è semplicemente l'applicazione di una formula. La difficoltà implicita in questo discorso deriva dal fatto che non tutte le grandezze si prestano con la stessa facilità ad una misura diretta, dato che essa risulta possibile solo quando si dispone di un sistema di misure che la facilita, come nel caso della massa e della capacità, in cui la misura diretta è indubbiamente più semplice da determinare direttamente, rispetto a quella della superficie e del volume.
Del volume parla anche Bartolini Bussi in un articolo (1989) dove vengono presentati i risultati della progettazione e sperimentazione di una sequenza didattica in una quinta primaria relativa a questo tema.
Inoltre, per quanto concerne le difficoltà nel percepire le relazioni tra area e volume, uno dei riferimenti più illustri risale a Galilei che considera in *"Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze"* (1638) i due cilindri (aventi la stessa area superficiale) che si possono ottenere arrotolando un foglio di carta rettangolare nelle due disposizioni possibili, sfruttando le diverse dimensioni del foglio stesso. Con questa costruzione, Galilei nota come i due volumi dei cilindri così ottenuti, stanno fra loro come le altezze *contrariamente prese*. Eppure, come afferma lo stesso Galilei, la gente è sempre convinta che i cilindri costruiti in tal modo, avendo la stessa superficie curva, *devono* avere anche lo stesso volume: «Di qui s'intende la ragione d'un accidente che non senza meraviglia viene sentito dal popolo; ed è come possa essere che il medesimo pezzo di tela più lungo per un verso che per l'altro, se ne facesse un sacco da tenervi dentro del grano, come si costuma fare con un fondo di tavola, terrà più servendoci per l'altezza del sacco della minor misura della tela e con l'altra circondando la tavola del fondo, che facendo per l'opposito: come se, per esempio, la tela per un verso fusse 6 braccia e per l'altro 12, più terrà quando con la lunghezza di 12 si circondi la tavola del fondo, restando il sacco alto braccia 6, che se si circondasse un fondo di 6 braccia, avendone 12 per altezza. Ora, da quello che si è dimostrato, alla generica notizia del contenere più per quel verso che per questo, si aggiunge la specifica e particolare scienza del quanto ei contenga più; che è che tanto più terrà quanto sarà più

basso, e tanto meno quanto più alto: e così, nelle misure assegnate essendo la tela il doppio più lunga che larga, cucita per la lunghezza terrà la metà manco che per l'altro verso; e parimente avendo una stuoia, per fare una bugnola, lunga venticinque braccia e larga, per esempio, sette, piegata per lo lungo terrà solamente sette misure di quelle che per l'altro verso ne terrebbe venticinque».

Il misconcetto[1] legato alle relazioni tra area e volume, analizzato così sapientemente da Galilei, fa parte delle considerazioni di diversi altri Autori. Piaget et al. (1960) citano questo classico esempio in riferimento alla conservazione della superficie; Stavy e Tirosh (2001) riprendono questa trattazione come sostegno all'ipotesi dell'esistenza della teoria, chiamata dalle due autrici, delle "regole intuitive": «Molte risposte che la letteratura descrive come concezioni errate potrebbero essere interpretate come l'evoluzione di alcune comuni regole intuitive». Tra le conclusioni proposte vi è la seguente: «Abbiamo dimostrato che le risposte degli studenti nei problemi di matematica e scientifici non si accordano necessariamente con i modelli e i concetti scientifici. Spesso, tali risposte sono determinate da alcune caratteristiche del problema che attivano le specifiche regole intuitive correlate» (Stavy e Tirosh, 2001).

Ciò è legato all'idea di modello intuitivo spiegata da Fischbein (1985a): «Il termine "intuitivo" può avere, nei confronti dei modelli, due significati distinti tra loro connessi: uno è il significato generale di rappresentazione pittorico-comportamentale, l'altro si riferisce più specificamente alla capacità che certi modelli hanno di suggerire direttamente una soluzione come quella che si impone per la sua evidenza. (…). Per creare un supporto intuitivo alla ricerca intellettuale, ai concetti e alle operazioni mentali tendiamo ad associare spontaneamente modelli significativi dal punto di vista intuitivo»; ma: «L'insistere eccessivamente nel fornire suggerimenti intuitivi usando rappresentazioni artificiali e troppo elaborate può fare più male che bene».

Tornando alla conservazione del volume, altri esempi sono stati trattati da Piaget (1976), come il confronto tra quantità uguali di acqua in due recipienti di forma diversa, dal quale Piaget rilevò che i bambini fino ai 5 o 6 anni di età fanno attenzione soltanto alle altezze dell'acqua nelle

---

[1] Sul significato di questo termine, si vedano le riflessioni critiche proposte in D'Amore, Sbaragli (2005) ed in Sbaragli (2005).

due tazze, affermando che: «C’è più acqua nella tazza più alta».
Sempre a proposito di conservazione, in uno scritto precedente, Piaget e Inhelder (1975) sostengono: «È ovvio che il motivo per la non conservazione della materia fisica deve essere lo stesso di quello delle entità matematiche: il primato della percezione diretta sulle elaborazioni intellettuali», ribadendo in questo libro e in altri successivi la loro opinione che tale schema di conservazione si sviluppa durante la fase delle operazioni concrete.
In effetti, questi studi classici erano basati soprattutto sugli insuccessi dei giovani allievi che sembravano dipendere, secondo questi due Autori e secondo molti altri dopo di loro, solamente da determinati stadi di età e non dallo sviluppo linguistico del soggetto. Come riportano D’Amore e Fandiño (2005), le conclusioni di Piaget furono sottoposte a severa critica da parte di studiosi successivi (si veda: Resnick e Ford, 1981).
Il tema della conservazione continua ad essere oggetto di studio, come dichiarano Stavy e Tirosh (2001), a difesa della loro teoria delle regole intuitive; a tal proposito Livne (1996) fece delle prove con studenti di scuola superiore (16-18 anni di età) concernenti aree e volumi. Per l’area totale di solidi veniva proposta una situazione nella quale vi erano due scatole congruenti di cartoncino a forma di parallelepipedo; una veniva accartocciata su sé stessa in modo da diminuire il volume e lasciare inalterata l’area, mentre l’altra non veniva modificata. Agli studenti veniva chiesto se l’area della scatola non accartocciata è maggiore, minore o uguale rispetto all’area della scatola accartocciata. Livne rivelò che soltanto una percentuale molto bassa di studenti riteneva che l’area totale delle facce si conservava inalterata. Nella stessa ricerca presentò anche una situazione nella quale erano contemplati entrambi i concetti, di area e volume. Si chiedeva agli studenti di scuola superiore di confrontare il volume e l’area totale di un solido pieno a forma di parallelepipedo, prima e dopo averlo diviso in quattro parti. Le conclusioni rilevarono che circa il 30% degli studenti sostenevano che oltre a conservarsi il volume si conservasse anche l’area totale. Attenzione viene dedicata da D’Amore e Fandiño (2005) sul fatto che questo tipo di risposta possa variare in base al linguaggio utilizzato nel fare la domanda, al modo e soprattutto all’ordine con il quale si pongono le domande.
Dei “problemi della conservazione” parla anche in modo esplicito ed approfondito Chamorro (2001-2002).

Inoltre, un'interessante analisi che verte sulle convinzioni degli insegnanti di scuola primaria relative al concetto di volume e sul processo di insegnamento-apprendimento di tale sapere, è riportato in Sáiz Roldán (2003) dove si dimostra che le convinzioni e concezioni degli insegnanti relative a questo tema risultano essere incomplete o scorrette. In particolare, tra le concezioni prevalgono gli aspetti quantitativi, basati sull'obiettivo che di solito ci si pone di avere tre dati numerici da moltiplicare tra loro per applicare una formula. Il numero diventa così il significato preponderante di tutte le dissertazioni dei docenti; questo fa sì che alcuni dei problemi individuati negli allievi per quanto riguarda il volume possono essere spiegati in base alle concezioni degli insegnanti, assai limitate rispetto alla varietà di significati che possono essere associati a tale concetto.

La nostra attuale ricerca oltre a rivolgersi alle relazioni tra area e volume, si basa sull'importanza di riconoscere "analogie" per valutare le relazioni nel passaggio tra piano e spazio.
Il significato del termine *analogìa*, nell'accezione comune della lingua italiana tratto dell'Enciclopedia Treccani, Roma, 2002, è il seguente: "relazione di somiglianza, uguaglianza di rapporti, proporzione matematica". In particolare, l'origine più antica, come suggerisce la sua radice greca (analoghía), si fonda sul concetto matematico di proporzione che stabilisce una similitudine come uguaglianza di rapporti. Ma la nostra interpretazione trascende questo significato particolare e va anche oltre quella di Pesci (2002) che, a proposito di pensiero proporzionale, mette in evidenza l'ostacolo didattico che si può generare quando si punta esclusivamente l'attenzione su termini e proprietà che sembrano esclusivi del concetto di proporzione, senza far cogliere l'analogia strutturale tra le situazioni di proporzionalità ed altre situazioni moltiplicative, e soprattutto quando non si favorisce l'uso consapevole delle proprietà aritmetiche che, ancora prima dell'impatto con la proporzionalità, gli allievi conoscono già a proposito di rapporti ed uguaglianze.
Al di là del riferimento specifico all'analogia nell'àmbito delle proporzioni, vi sono molti Autori illustri che trattano esplicitamente dell'importanza dell'analogia nel campo della didattica della matematica. A tal proposito, Brousseau (2004), in un interessante articolo su una modellizzazione dell'insegnamento della matematica,

afferma: «Il docente deve dunque dissimulare le sue intenzioni con un artificio didattico: scegliere domande le cui risposte possono essere costruite dall’allievo, ricorrere ad analogie, suggerire metodi ecc.»; Speranza (1988) sostiene: «Corrispondenze e analogie strutturali, tema che, a sua volta, è la chiave di volta del pensiero matematico-strutturale. A mio avviso il ritrovare analogie è uno dei momenti essenziali del pensiero critico: ritengo che sia utile lasciare che gli allievi si sbizzarriscono a inventare qualche analogia, anche se poi una più attenta critica potrà farne dimenticare molte fra quelle inventate».

Fischbein (1985b, p. 130) ribadisce l’importanza dell’analogia in riferimento ai modelli intuitivi: «Compito della didattica della matematica è quello di correggere, migliorare, arricchire il fondamento intuitivo corrispondente ai vari “campi concettuali” matematici e, certamente, di migliorare il più possibile il controllo delle strutture concettuali. Eventuali conflitti tra il livello intuitivo, il livello algoritmico e il livello formale non possono essere eliminati ignorando semplicemente il livello intuitivo. (…) Lo studente deve essere aiutato a prendere coscienza di tali conflitti». A questo scopo, per superare difficoltà derivanti dal forte peso che hanno i modelli intuitivi, l’Autore consiglia, tra le strategie, proprio quella di fare ricorso all’uso dell’analogia. Il celebre esempio che l’Autore propone è il seguente: «“Con 2 dollari si può comprare una bottiglia di 0,75 l di aranciata. Quanto costa 1 l di aranciata?” Per superare questa difficoltà si possono usare varie strategie. Una di queste consiste nel fare ricorso a un problema, connesso all’altro per analogia, ma i cui dati numerici vadano d’accordo con le richieste intuitive. Per esempio: “Con 10 dollari si possono comprare 5 l di aranciata. Quanto costa 1 l?” (…) Con la stessa procedura si può risolvere anche il problema di partenza».

Anche se, come riferisce Bazzini (1995), citando Fischbein: «Non dobbiamo però dimenticare che se i vari tipi di ragionamento analogico da una parte possono favorire la costruzione di conoscenze, dall’altra possono indurre a conclusioni erronee nel momento in cui vengano enfatizzati o distorti particolari aspetti a svantaggio di altri. Se l’analogia è una potenziale generatrice di ipotesi, può essere anche causa di misconcetti o fraintendimenti (Fischbein, 1987, 1989)». In effetti, capita spesso che, quando il soggetto si trova in forte incertezza di fronte a un problema da risolvere, tende a trasformare un certo nucleo di informazioni da un dominio ben conosciuto ad un altro meno noto, tramite un trasferimento per analogia. Può avvenire allora che si assumano per valide corrispondenze analogiche che invece non sono accettabili per quei particolari sistemi. Si parla, in questo caso, di analogie "tacite" che possono inserirsi nel processo cognitivo e perturbarlo.

Ancora, Stavy e Tirosh (2001) sostengono l'importanza dell'analogia, affermando che lo scopo primario dell'insegnamento matematico e scientifico è quello di incoraggiare gli studenti a trasferire la conoscenza da un caso specifico ad altri. Eppure numerosi studi al riguardo hanno dimostrato che gli studenti non fanno tali auspicati collegamenti, spesso a causa dell'inadeguatezza del sistema formativo (Noss, Hoyles, 1996).

Così come fece Fischbein, anche Stavy e Tirosh (2001) propongono tra le metodologie che permettono di aiutare gli studenti a superare gli effetti delle regole intuitive, l'insegnamento per analogia: «Nell'insegnamento per analogia, agli studenti per prima cosa viene presentato un "compito di riferimento", nel quale sono assenti caratteristiche irrilevanti capaci di innescare l'uso di una determinata regola intuitiva (tale compito di riferimento di solito stimola una risposta esatta). Più avanti, agli studenti viene proposta una serie di "compiti di collegamento" fondamentalmente simili, in cui caratteristiche non rilevanti, in grado di stimolare la regola intuitiva, sono via via sempre più evidenti. Da ultimo, viene proposto un "compito-obiettivo", in grado di suggerire esplicitamente la regola intuitiva [una descrizione dettagliata dell'approccio sull'insegnamento per analogia viene riportata da Clement (1993)]». L'efficacia di tale sequenza di istruzioni nell'aiutare gli studenti a vincere le regole intuitive relative agli angoli venne comprovata da Tsamir (1997).

Sempre a proposito della funzione del ragionamento analogico, nel processo di ristrutturazione della conoscenza individuale e del superamento di misconcetti, va ricordato il lavoro di Brown e Clement (1989).

Attente riflessioni riguardanti l'analogia in situazioni problematiche sono fornite da Lucangeli e Passolunghi (1995). Da questo punto di vista, le due Autrici citano varie ricerche che si sono focalizzate su un particolare tipo di *transfer* che avviene quando si presenta un problema base e poi uno ad esso analogo (Reeves e Weisberg, 1993; 1994; Ross, 1987); sembra che siano proprio i dettagli del problema e il contesto in cui è stato appreso, a guidare il *transfer* che porta alla soluzione. In

seguito le due Autrici parlano in modo puntuale del *transfer* analogico, che avviene quando il problema di base e il problema *target* sono analoghi, cioè quando entrambi condividono la stessa struttura risolutiva; in tal caso la soluzione del problema base può essere trasferita al problema target (Gentner e Gentner, 1983). Di questo fatto, le Autrici forniscono anche un’ampia bibliografia.
Anche Bazzini (1995) sostiene l’importanza del pensare per analogia, concependola come una strategia fondamentale per aiutare gli allievi nella costruzione del sapere, in una continua interazione tra ciò che si sa già e ciò che deve essere acquisito. Per l’Autrice, il pensare per analogia, aiuta a codificare e organizzare le nuove conoscenze, a recuperare quelle archiviate in memoria e a creare nuovi schemi concettuali, in linea con il pensiero di Mason (1992), che considera l’analogia uno strumento potente per apprendere in maniera relazionale, ossia connettere “pezzi” di sapere disponendo di sistemi di riferimento atti a strutturare e comprendere campi problematici nuovi, senza rimanere bloccati da una conoscenza “inerte”.
In particolare, Bazzini (1995) sottolinea contemporaneamente l’importanza didattica e la necessaria cautela che è necessario adottare nel far uso dell’analogia: «Il ragionamento analogico da una parte richiede e dall’altra stimola la flessibilità mentale, facilitando l’apprendimento. Come abbiamo già osservato, si tratta dunque di liberare la conoscenza: “inerte” e utilizzarla in situazioni nuove. Naturalmente, l’uso dell’analogia nell’istruzione non è esente da rischi e non per niente l’analogia è stata definita una “lama a doppio taglio”. Proprio per questo è necessaria un’analisi attenta delle unità didattiche programmate che permetta all’insegnante di favorire un uso produttivo del ragionamento analogico, prevenendo anche le possibili insidie».

Come si vede, il quadro scientifico di riferimento è di straordinaria complessità ed ampiezza su ciascuno dei versanti, oggetto della presente ricerca.

2. Problemi di ricerca, ipotesi di risposta e metodologia

2.1 Il punto di partenza

Nella ricerca di D’Amore e Fandiño (2005) si è dimostrato che, per quanto concerne i due concetti geometrici di *perimetro* e *area di una*

figura piana, sono numerose e radicate le misconcezioni possedute da alcuni insegnanti e allievi di ogni livello scolastico.
In particolare, molte di queste misconcezioni si fondano su presunte relazioni di dipendenza stretta tra questi due concetti sul piano relazionale, del tipo:
se A e B sono due figure piane, allora:

- se (perimetro di A > perimetro di B) allora (area di A > area di B)
- idem con <
- idem con = (per cui: due figure isoperimetriche sono necessariamente equiestese);
- e viceversa, scambiando l'ordine "perimetro – area" con "area – perimetro".

In particolare, in tale ricerca veniva chiesto ad insegnanti e allievi di mettere in relazione i perimetri (**p**) di due figure con le loro rispettive aree (**A**), mostrando un esempio per ciascuno dei seguenti 9 possibili casi; in questo modo si voleva evidenziare che le "relazioni" sopra riportate non valgano in modo acritico e generalizzato.

p	**A**	**p**	**A**	**p**	**A**
>	>	>	=	>	<
=	>	=	=	=	<
<	>	<	=	<	<

Nella prima casella "> **>"** si chiede di trovare due figure tali che, passando dalla prima alla seconda, il perimetro cresca e l'area cresca, e così via.
I risultati di D'Amore e Fandiño (2005) rivelano le numerose difficoltà ad accettare l'esistenza di tutti i 9 casi e a riuscire a trovare due figure per ogni casella; più in generale, dimostrano la presenza di misconcezioni radicate a proposito di supposte relazioni, che si crederebbero necessarie, tra la variazione del perimetro e dell'area in funzione della variazione di una figura piana.

2.2 La presente ricerca. Problemi di ricerca, metodologia e ipotesi di risposta

Le scelte metodologiche di questa ricerca seguono le fasi già usate in D'Amore e Fandiño (2005).
Vogliamo puntualizzare fin da ora che questa ricerca, a differenza della

precedente, è stata effettuata esclusivamente su ricercatori e insegnanti di scuola primaria e secondaria di primo grado e tutte le prove sono state fatte sotto forma di intervista individuale.

• **Fase 1.** Inizialmente, per dare l’avvio alla ricerca, abbiamo posto a metà dei soggetti intervistati la seguente domanda:
- Nello spazio ho due solidi, se il secondo ha rispetto al primo area maggiore, avrà anche volume maggiore?

Dopo aver ricevuto la risposta si effettuava la seconda domanda:
- Nel piano ho due figure, se la seconda rispetto alla prima ha perimetro maggiore avrà anche area maggiore?

All’altra metà dei soggetti intervistati si ponevano le stesse domande ma invertite come ordine.

Successivamente, veniva effettuata una breve intervista per indagare se gli insegnanti avevano mai riflettuto su questo argomento e se conoscevano esempi di figure, sia nel piano che nello spazio, che contraddicevano le risposte fornite.

Ipotesi Fase 1. Ipotizzavamo che i risultati relativi alla fase 1 sarebbero stati diversi in base all’ordine delle domande (anche per quanto evidenziato, a questo stesso proposito, in D’Amore, Fandiño, 2005).
Essendo più conosciute le nozioni legate al piano rispetto a quelle relative allo spazio (in particolare che a perimetro uguale non corrisponde *necessariamente* area uguale), piuttosto che l’analogo sapere riferito allo spazio, ipotizzavamo che gli insegnanti avrebbero teso a sbagliare maggiormente nel primo caso che coinvolge per primo lo spazio, piuttosto che nel secondo. Nel primo caso ipotizzavamo, però, che qualche insegnante, dopo aver sentito la seconda domanda relativa al piano, volesse addirittura cambiare anche la risposta sbagliata fornita alla prima domanda, manifestando così di aver colto l’analogia tra un sapere posseduto e uno non del tutto dominato. Invece, nel secondo caso, essendo il sapere della prima domanda conosciuto da diversi insegnanti, ipotizzavamo che gli intervistati avrebbero teso a trasferirlo anche nella seconda domanda, effettuando così un ragionamento analogico tra piano e spazio. Nel primo caso, a nostro parere, le misconcezioni basate su supposte relazioni obbligatorie tra i concetti geometrici in oggetto sarebbero risultati più forti, dato che lo spazio rappresenta un àmbito nel

quale in genere le persone, anche gli insegnanti, hanno avuto modo di riflettere meno rispetto al piano [uno dei motivi potrebbe essere che lo si considera un sapere da sottovalutare dal punto di vista scolastico, rispetto al piano (Arrigo, Sbaragli, 2004)]; mentre, nel secondo caso, avrebbe potuto essere d'aiuto nel rispondere, l'uso dell'analogia rispetto alle domande poste.
Questa prima fase permette quindi di indagare:
- eventuali usi dell'analogia
- difficoltà concernenti lo spazio
- come può incidere l'ordine delle domande poste sulle risposte date.

• **Fase 2.** Successivamente, abbiamo chiesto se esistono per perimetro e area tutti i 9 casi di relazione visti in precedenza [legati alla ricerca di D'Amore e Fandiño (2005)] (si chiedeva se esistono due figure tali che: la seconda rispetto alla prima abbia, perimetro maggiore e area maggiore, ..., seguendo la tabella indicata sopra); poi si domandava di completare la tabella cercando esempi opportuni in modo personale.
Dopo che l'insegnante considerava la propria tabella conclusa, si esplicitava a tutti, indipendentemente dalla prestazione, che sì, è possibile trovare tutti e 9 i casi, e si mostravano e spiegavano in dettaglio i 9 esempi riportati in allegato 1. Seguiva poi un'intervista utile per indagare le convinzioni, i dubbi, le incertezze e l'eventuale cambio di convinzione degli insegnanti su questo argomento. Le domande erano del tipo: È vero o non è vero che viene spontaneo pensare che all'aumentare del perimetro di una figura piana, ne aumenti l'area, in generale? È vero o non è vero che bisogna fare uno sforzo, per *convincersi* che le cose NON stanno così? Sapevi prima di questa attività che NULLA si può dire a priori del legame tra "aumento (uguaglianza, diminuzione) del perimetro" ed "aumento (uguaglianza, diminuzione) dell'area" di due date figure piane, la seconda ottenuta dalla prima?

Ipotesi fase 2. I risultati di tale fase non rientrano tra gli obiettivi di questa ricerca dato che questa tappa rappresenta solo il punto di partenza per creare l'analogia con la fase successiva, della quale ci occuperemo in modo puntuale. In ogni caso, prevedavamo che le risposte fornite dagli intervistati fossero confrontabili con quelle ottenute nella ricerca precedente.

• **Fase 3.** Conclusa la seconda fase, si chiedeva agli stessi insegnanti se secondo loro si possono realizzare 9 casi analoghi anche per area e volume di figure solide e si domandava di completare la seguente tabella (si chiedeva se esistono due figure solide tali che: la seconda rispetto alla prima abbia, area maggiore e volume maggiore, e così via…).

A	**V**	**A**	**V**	**A**	**V**
>	>	>	=	>	<
=	>	=	=	=	<
<	>	<	=	<	<

In questo modo si voleva vedere se gli insegnanti erano in grado di sfruttare l’analogia tra piano e spazio, ossia tra ciò che avevano appena risolto individualmente, o del quale erano venuti a conoscenza tramite l’allegato 1 mostrato dal ricercatore, e il nuovo problema proposto.
Seguiva un’intervista per indagare le convinzioni e gli eventuali cambi di convinzioni degli insegnanti che verteva su domande relative alle presunte relazioni tra area e volume del tipo: È vero o non è vero che viene spontaneo pensare che all’aumentare dell’area di una figura solida, ne aumenti il volume, in generale? Sei convinto che NULLA si può dire a priori del legame tra “aumento (uguaglianza, diminuzione) dell’area” ed “aumento (uguaglianza, diminuzione) del volume” di figure solide?
In tale intervista, si ponevano anche domande relative all’analogia tra questa situazione e quella precedente: Come hai fatto a trovare questi casi nello spazio? Che cosa hai sfruttato? Ti sono serviti i 9 casi del piano? Per lo spazio, reputi che sia la stessa situazione del piano o consideri che sia diverso? Che cosa hai provato quando, dopo la fase su perimetro e area, ti sono state proposte domande su area e volume?
Quando l’intervista pareva conclusa, si mostravano e si spiegavano i 9 casi dello spazio riportati in allegato 2, ottenuti per estensione da quelli dell’allegato 1, e si ponevano alcune domande sulle possibili relazioni tra area e volume di figure solide del tipo: Riesci ad accettare che non esistono relazioni obbligate tra area e volume di figure solide? Risulta facile accettare i 9 esempi?;
e altre domande sull’analogia tra questa situazione e quella precedente del tipo: Che cosa pensi ora? Sei riuscito a cogliere l’analogia tra le due situazioni? Fino a che punto? La intuisci? Ci avevi mai pensato? Reputi importante l’analogia? Perché?

Ipotesi fase 3. A nostro parere, la maggioranza degli insegnanti

intervistati, dopo aver osservato i 9 casi nel piano, avrebbero intuito che esistono i 9 casi anche nello spazio, utilizzando così una prima analogia; ma pensavamo altresì che, probabilmente, non sarebbe così automatico trovare tutti i casi, segno di una mancanza di consapevolezza piena del pensiero analogico tra gli esempi visti nel piano e quelli da trovare nello spazio. Molti insegnanti, a nostro parere, avrebbero affrontato il problema come se non ci fosse stata una fase analoga precedente. Prevedevamo che i casi più semplici di passaggio per analogia tra il piano e lo spazio avrebbero riguardato le figure concave che, di solito, non vengono colte in modo spontaneo dagli insegnanti (D'Amore, Fandiño, 2005); prevedevamo infatti che, il fatto d'aver mostrato le 9 configurazioni della fase 2, alcune delle quali sono figure concave, avrebbe aiutato a far pensare a questo genere di figure anche nello spazio.
Ipotizzavamo che questa terza fase, oltre a rilevare uno scarso uso dell'analogia da parte degli insegnanti, avrebbe mostrato che, presso alcuni, vi sono misconcezioni radicate a proposito di supposte relazioni necessarie tra area e volumi delle figure solide, pur avendo visto esempi contrari nel piano. Ossia, ipotizzavamo che, senza l'uso dell'analogia, per gli insegnanti sarebbe risultato difficile trovare i 9 esempi nello spazio (specialmente nel caso in cui l'area deve diminuire e il volume aumentare), dato che lo spazio risulta essere un àmbito poco conosciuto.

In particolare, a noi interessava rilevare il *mutamento delle convinzioni*; volevamo indagare cioè se, dopo aver mostrato gli esempi, gli insegnanti fossero disposti a cambiare idea ammettendo, se è il caso, personali carenze relative ai concetti di area e volume e all'uso dell'analogia.
Diventava così essenziale far esprimere le convinzioni dei soggetti *prima* e *dopo* gli esempi; per raggiungere questo scopo, più che fare dei test, diventava essenziale ricorrere ad interviste.
Come indicatori delle nostre ipotesi, abbiamo deciso di assumere o le stesse ammissioni esplicite dei soggetti sottoposti alla prova, o la evidenza oggettiva delle loro eventuali difficoltà.

2.3 Domande generali di ricerca

Siamo ora in grado di formulare domande di ricerca come segue:

D1. Presso gli insegnanti di scuola primaria e secondaria di primo grado vi è piena consapevolezza della mancata esistenza di relazioni obbligate

tra area e volume di figure solide o vi sono problemi di costruzione concettuale in questo àmbito?
D2. Gli insegnanti riescono a cogliere l’analogia tra la situazione proposta nel piano e quella proposta nello spazio? Più in generale, l’analogia è una capacità posseduta dagli insegnanti?

D3. Se l’intervistato non ha intuito personalmente l’analogia tra le situazioni proposte in esame nel passaggio tra piano e spazio, dopo avergliela illustrata, è capace di coglierla e farne uso? Ne riconosce l’importanza? Quali ritiene essere le cause del suo eventuale mancato uso?

2.4 Ipotesi generali di risposta

I1. A nostro parere, gli insegnanti di scuola primaria e secondaria di primo grado non hanno piena consapevolezza della mancata esistenza di relazioni obbligate tra area e volume di figure solide. Molto probabilmente, dalle affermazioni degli insegnanti emergeranno quindi radicate misconcezioni e difficoltà concernenti lo spazio. Prevediamo quindi che si manifestino evidenti problemi di costruzione concettuale in questo àmbito da parte degli insegnanti [tale ipotesi deriva dai risultati ottenuti nel piano da D’Amore e Fandiño (2005), che saranno a nostro avviso addirittura notevolmente amplificati nel passaggio allo spazio]. Sarà anche possibile che, anche dopo aver visto gli esempi, si manifesti da parte di alcuni insegnanti qualche resistenza. Azzardiamo quindi l’ipotesi che, così com’è stato dimostrato da D’Amore e Fandiño (2005) per “perimetro e area”, l’ostacolo alla costruzione di una conoscenza matematicamente soddisfacente delle relazioni tra “area e volume” di figure solide non sia *solo* di natura epistemologica, come evidenziato dalla letteratura di ricerca, ma *anche* di natura didattica. Anzi, riteniamo che in questo caso gli ostacoli didattici saranno ancora più accentuati, dato che ai modelli intuitivi si somma la scarsa preparazione degli insegnanti su concetti inerenti lo spazio (Arrigo e Sbaragli, 2004).

I2. A nostro parere gli insegnanti intervistati non riusciranno a cogliere spontaneamente l’analogia delle due situazioni proposte nel piano e nello spazio, ossia non riusciranno a sfruttare gli esempi trovati o mostrati nel piano a sostegno di ciò che devono ottenere nello spazio.

Più in generale, prevediamo che, dalle affermazioni degli insegnanti, emergerà che l'analogia è una strategia che non usano personalmente (e che non viene di conseguenza sviluppata dal punto di vista didattico).
I3. Riteniamo che, dopo aver mostrato l'esistenza dell'analogia tra la situazione proposta nel piano e quella presentata nello spazio, gli insegnanti riusciranno a coglierla e a riconoscerne le potenzialità per l'apprendimento. Ossia, prevediamo che a questo punto gli insegnanti ne riconoscono l'importanza dal punto di vista didattico, valutandola come una strategia fondamentale per facilitare gli alunni nella costruzione del sapere, che però non sanno dominare e sviluppare didatticamente.
Inoltre, a nostro parere, gli insegnanti individueranno le cause dell'eventuale mancato uso di tale strategia in fattori "esterni", come: l'assenza di formazione in questo campo, la mancata presenza di questo sapere sui libri scolastici, il non aver mai incontrato prima persone che li facessero riflettere su tale aspetto, …
È anche probabile che gli insegnanti manifesteranno il proprio disagio nei confronti di questi argomenti che non sono stati oggetto di una personale riflessione.

2.5 Campione di ricerca

Nel 2004 abbiamo sottoposto alla seconda e terza fase di questa ricerca 5 collaboratori, docenti di scuola primaria, senza che fossero a conoscenza della ricerca (allora in corso) di D'Amore e Fandiño (2005) e abbiamo analizzato le loro convinzioni relative a questo tema.
La metodologia scelta con questi insegnanti è stata quella già presentata nei paragrafi precedenti. I risultati avuti, riportati nel prossimo paragrafo, mettono in evidenza difficoltà nella gestione di questo sapere. Si è così rivelato necessario effettuare un percorso di formazione per questi insegnanti, durato vari mesi, per far sì che avvenissero in loro cambi di convinzioni su questo argomento.
Successivamente, si è chiesto a questi insegnanti di farsi carico della ricerca, proponendo loro stessi di svolgere la terza fase della ricerca ad alcuni insegnanti che avevano collaborato in precedenza al lavoro di D'Amore e Fandiño (2005) e tutte e tre le fasi ad insegnanti di scuola primaria e secondaria di primo grado. Le indicazioni che dovevano seguire nell'effettuare questa ricerca sono quelle presentate nei paragrafi precedenti.
In totale, i numeri di *insegnanti* sottoposti alla prova sono stati:

- 5 collaboratori, docenti della scuola primaria sui quali si sono analizzate le convinzioni e il cambio di convinzioni (sottoposti alle fasi 2 e 3);
- 5 insegnanti-ricercatori della ricerca precedente: 3 di scuola primaria e 2 di scuola superiore (sottoposti alle fase 3, dato che la fase 2 era stata oggetto della ricerca da loro condotta);
- 28 insegnanti, 20 della scuola primaria e 8 della scuola secondaria di primo grado (sottoposti alle fasi 1, 2 e 3);

3. Risultati di ricerca

In questo capitolo presentiamo i risultati ottenuti con le tre tipologie di insegnanti. Riporteremo tra «» le frasi che, a nostro avviso, confermano le nostre affermazioni e che ci sembrano più rappresentative.
Vogliamo puntualizzare che tutte le registrazioni e le tabelle con i disegni originali degli intervistati sono a disposizione, presso l’Autrice, di chiunque voglia approfondire questo argomento.

3.1 Convinzioni e cambi di convinzioni dei collaboratori

Le prestazioni avute nella fase 2 dai 5 collaboratori sottoposti alla ricerca, sono confrontabili con i risultati ottenuti da D’Amore, Fandiño (2005); in effetti, 4 insegnanti su 5 hanno incontrato difficoltà alla richiesta di trovare tutti i 9 casi per perimetro e area; solo 1 insegnante è riuscito a trovarli senza troppi problemi, a suo dire grazie ad alcuni approfondimenti di geometria che aveva effettuato in precedenza.
Dal nostro punto di vista, risulta interessante osservare che nessuno dei 5 insegnanti è riuscito a riconoscere fin dall’inizio l’analogia tra coppie di caselle della tabella di perimetro e area. Ossia nessuno ha analizzato inizialmente la tabella scoprendo così che i casi da trovare sono solo 5 e non 9, dato che in 4 casi è possibile sfruttare ciò che si è già trovato, scambiando semplicemente l’ordine delle figure. Di questo fatto si sono accorti solo 3 insegnanti su 5 in corso d’opera, ossia man mano che venivano trovati esempi. Riportiamo un’affermazione di un’insegnante ricavata dall’intervista (che si è svolta successivamente): «Non ho colto come i due termini, perimetro e area fossero in relazione nell’organizzazione della tabella, se non nel momento della rappresentazione, solo allora mi sono accorta dei casi contrari. Per ogni caso cercavo il caso possibile senza far uso delle rappresentazioni precedenti».

Dopo aver trovato i 9 casi di perimetro e area e dopo aver mostrato l'allegato 1 con le soluzioni fornite dal ricercatore, si è chiesto agli insegnanti di prevedere se secondo loro esistono i 9 casi anche per area e volume di figure solide. Di questi 5 insegnanti, 2 sostenevano di sì, mentre 3 si dichiaravano indecisi, dimostrando così di non cogliere con sicurezza e immediatezza l'analogia tra piano e spazio.
Quando poi si è chiesto di trovare tutti i 9 casi nello spazio, 4 insegnanti su 5 hanno avuto notevoli difficoltà, a tal punto da riuscire a completare solo alcune caselle. Le difficoltà nello spazio si sono amplificate rispetto al piano, tranne che per 1 insegnante che riesce a sfruttare l'analogia partendo dai 9 casi proposti dal ricercatore nel piano, che sono risultati più semplici da trasferire rispetto ai propri, essendo questi ultimi basati su calcoli e non su aspetti visuali.
Le maggiori difficoltà incontrate dai 5 insegnanti risiedono nei concetti che coinvolgono lo spazio, così come si rileva dall'intervista successiva: «Quando poi ci hai proposto la seconda tabella per la relazione tra area e volume ancora una volta mi sono detta che forse erano possibili tutti e nove i casi, ma ero molto in difficoltà a pensare alle figure da disegnare e con i volumi mi rendo conto che sono davvero con una fitta nebbia nel cervello»; «Quando mi hai consegnato la seconda tabella con il rapporto area-volume, ho pensato per qualche secondo che potevano esserci esempi anche qui per i 9 casi, ma che avevo bisogno di trovarli per esserne sicura. Immediatamente mi sono bloccata e avevo la testa in panne perché non mi venivano in mente solidi per poter accontentare il primo esempio; il mio problema era: "Come faccio a dire se l'area è uguale, maggiore o minore visto che sono solidi?". Il tutto avveniva in pochi secondi. Io sentivo un forte imbarazzo e credo, a ripensarci bene, che il problema fosse che l'area dei solidi non è per me così semplice e di immediato possesso come concetto poiché c'è l'area laterale e quella delle basi, inoltre se penso a solidi di rotazione la difficoltà per me aumenta con l'area del cerchio, non parliamo poi della sfera. Ancora una volta il mio problema è stato un problema di misura che forse nasconde un problema di comprensione profondo dei concetti di area e volume».

Gli stessi 4 insegnanti in difficoltà, nell'intervista successiva affermano che, pur avendo trovato personalmente e visto i 9 casi forniti dal ricercatore nel piano, non sono riusciti a sfruttarli nello spazio, ossia non sono riusciti a sfruttare l'analogia delle situazioni proposte: «Non ho

trasferito nello spazio i casi che avevo rappresentato nel piano, non ho riconosciuto spontaneamente l’analogia tra i casi nel piano e nello spazio»; «Neanche per un momento ho pensato che potevo trasferire almeno qualche esempio della prima tabella alla seconda. Sic!»; «Sono rimasta malissimo: mi sono sentita crollare il mondo; ho provato una forte umiliazione. Ho ripensato ai miei insegnamenti: ho cominciato dallo spazio e sono arrivata al piano; sono passata dall’uno altro, ma non ho fuso i due livelli. Se era il perimetro era quello, così per l’ area e il volume».
Del disagio provato nell’affrontare questa richiesta parla anche un’altra insegnante che ribadisce il bisogno e la voglia di saperne di più: «Non sono molto fiera di me se ripenso alla reazione che ho avuto, ero convinta di essere un po’ più capace sia da un punto di vista teorico che pratico. Questa tua proposta è l’ennesima situazione in cui mi trovo a ripensare profondamente alle mie conoscenze, alle mie convinzioni e mi rendo conto che devo approfondirle con un mio maggiore coinvolgimento (quello che di solito chiedo ai bambini)».

Dall’intervista emergono molti dubbi e considerazioni sulla propria azione didattica: «Mi sono detta che c’è una grossa difficoltà da parte mia a pensare per analogie e di conseguenza mi chiedo come e quanto ciò possa influenzare la mia attività di insegnante»; «La prova mi ha lasciato molto perplessa, mi sono sentita sconfortata, ho ripensato a quanti esercizi di calcolo di perimetro, area, volume, a quante poche attività di immaginazione e manipolazione di figure diverse nel piano e nello spazio e soprattutto a quanta poca riflessione sulle relazioni in gioco nel piano, nello spazio, tra piano e spazio»; «Ripensando a me, alla mia storia di studente non ho ritrovato percorsi o momenti di studio che mi abbiano stimolato a cogliere analogie in matematica, mentre penso con facilità alla analogia nella letteratura o in scienze, forse perché piano e spazio vengono ancora considerati per difficoltà due mondi separati con regole proprie senza alcuna relazione».

Venti giorni dopo la proposta della ricerca al gruppo di collaboratori, una di loro invia al ricercatore questa lettera: «Insieme alle altre ho riprovato a capire e ad approfondire le relazioni delle due tabelle, non ti nascondo che ora con quella sul perimetro e l’area sono più sicura, ma con l’altra ho ancora parecchie perplessità e mi sono riproposta di lavorarci ancora da sola prima di andare a proporla ad altre colleghe. A

proposito della ricerca, mi sembra davvero bella e utile! Più di me chi può dirtelo? Ho toccato con mano come sia importante l'analogia nella risoluzione di problemi e come insegno male, non avendo per prima io capacità analogiche!».
Questa voglia di approfondire tali situazioni, ha portato a un notevole studio individuale e di gruppo da parte dei 5 insegnanti, durato più di un anno, basato anche su incontri di approfondimento e formazione sui diversi aspetti del quadro teorico. Tale percorso di studio ha prodotto un notevole cambio di convinzioni e una maggiore acquisizione di sicurezza su questi argomenti (e non solo); di questo sono testimonianza le seguenti affermazioni: «La scoperta dell'esistenza dell'analogia illumina il sapere»; «Finalmente ora mi sento di poterne cogliere il significato con più consapevolezza»; «Nel mondo al di fuori della scuola si possono trovare molte situazioni in cui è in gioco la capacità di stabilire relazioni e di questo dovremmo tenerne conto. Io credo che molto più spesso dovremmo chiederci se quello che proponiamo ai nostri alunni è efficace oppure no senza aver paura dei cambi di convinzione»; «Avere la possibilità di approfondire è fondamentale per essere insegnanti diversi, io sono diversa da prima con i miei alunni e ho delle soddisfazioni enormi, vedo i comportamenti dei bambini e ogni volta mi stupisco dei risultati che osservo»;[2] «Non trovo altre parole per dirti quanto sarebbe fondamentale per ogni insegnante poter entrare in un'altra fase della vita lavorativa: quella in cui sono messi a nudo i propri apprendimenti e la propria umanità con una profondità mai neanche immaginata!».

3.2 Gli insegnanti-collaboratori della ricerca precedente

I risultati ottenuti con i 5 insegnanti-collaboratori della ricerca di D'Amore e Fandiño (2005) sono nettamente migliori di quelli presentati nel paragrafo precedente e di quelli che saranno esposti nel paragrafo successivo, anche se non nascondono alcune difficoltà.
In effetti, avere piena cognizione della fase 2, oggetto della ricerca da loro gestita, che aveva consentito una personale riflessione su tale argomento, ha permesso di ottenere buoni risultati anche nella fase 3: «A

[2] Come sostengono Tirosh e Graeber (2003): «Le convinzioni possono essere un ostacolo ma anche una potente forza che permette di effettuare cambiamenti nell'insegnamento».

me è servito molto fare questo lavoro su perimetro e area, per le riflessioni che mi sono trovata a fare sull’argomento, ma anche per le riflessioni che facevano le persone che intervistavo». Segno che riflessioni profonde su un certo sapere portano ad effettiva consapevolezza.

4 insegnanti hanno affermato con sicurezza che esistono i 9 casi anche per area e volume, riconoscendo l’analogia con la situazione da loro ben conosciuta nel piano: «Secondo me è uguale al piano». Solo una insegnante si dimostra un po’ indecisa: «Direi di sì, ma non so».

- 2 insegnanti di scuola primaria espongono però subito le loro difficoltà nei confronti dello spazio: «Intuitivamente sono certa che c’è la soluzione per tutti i 9 casi, però ho grosse difficoltà»; «Non è mica facile trovarli nello spazio, lo spazio è difficile da gestire»; difficoltà confermate durante la ricerca delle coppie di figure per ogni casella.
- L’altra insegnante di scuola primaria, invece, dopo un primo momento di insicurezza: «Non mi vengono esempi, ma penso che… sì, si possono trovare, anzi, ne sono proprio sicura», trova tutti e 9 i casi sfruttando l’analogia tra piano e spazio.
- Per quanto riguarda i 2 insegnanti di scuola superiore, uno inizia subito a pensare ai 9 casi che troverà senza difficoltà, mentre l’altro mostra un po’ di insicurezza e difficoltà a trovare gli esempi.

Sono quindi 3 gli insegnanti (2 di scuola primaria e 1 di scuola superiore) per i quali non è stato semplice trovare le coppie di figure per ciascuna delle 9 caselle: «C’è qualche problema in più nello spazio. Ho già fatto quelle relative nel piano, ma qui nello spazio mi sento davvero in difficoltà»; ma alla fine tutti sono riusciti a completare la tabella. Di questi, i 2 insegnanti di scuola primaria inizialmente non hanno pensato alla simmetria della situazione, ma hanno lavorato caso per caso; solo in un secondo momento hanno sfruttato questa relazione, incontrata nel piano. Inoltre, per completare la tabella hanno effettuato numerosi calcoli cercando conferma nelle formule e non nell’aspetto concettuale o visuale: «I miei disegni sono imprecisi, ma sono il risultato di calcoli corretti». Una di loro esegue calcoli per più di mezz’ora.[3]

---

[3] Interessanti da questo punto di vista sono le considerazioni sui calcoli in geometria per la determinazione di aree e perimetri di Chamorro (1997; 2001-2002) e di Sáiz Roldán (2003) riportate nel quadro teorico.

Le difficoltà incontrate da queste 3 insegnanti sono da ricercare nell'incapacità di padroneggiare il mondo tridimensionale e di saper sfruttare in pieno l'analogia come strategia risolutiva nel passaggio tra piano e spazio (solo una di queste insegnanti usa le figure concave analizzate nella ricerca precedente).
Gli altri 2 insegnanti, invece, dimostrano di sfruttare in pieno l'analogia con gli esempi del piano che già conoscono, usando dove possibile le figure concave e le relazioni di dualità che avevano già incontrato.
Di questi, uno è il professore-ricercatore delle superiori che completa velocemente la tabella grazie alle sue conoscenze concettuali, ma affermando però di avere notevoli difficoltà nella visualizzazione e rappresentazione dello spazio tridimensionale: «Capisco che basta dalla stessa figura toglierne una parte per ottenere una figura concava, così da avere il volume minore e l'area maggiore, ma visualizzarmelo o rappresentarlo per me è davvero difficile. Ho sempre avuto difficoltà in questo»; mentre l'altra è un'insegnante di scuola primaria che da 6 anni segue un percorso di progettazione e sperimentazione della geometria dallo spazio al piano e viceversa (Arrigo e Sbaragli, 2004; Cottino e Sbaragli, 2005). Questo percorso di formazione basato sull'analogia tra i due àmbiti, a detta sua, è stato di aiuto per risolvere la situazione tramite il passaggio tra piano e spazio e viceversa: «Ora io vedo l'analogia tra piano e spazio, per esempio ho fatto un'attività di frazionamento del rettangolo e poi del prisma. Ho così visto le stesse relazioni passando alla tridimensionalità». Nel completare la tabella ad un certo punto afferma: «In questo caso, io devo ragionare prima nel piano» (poi disegna un parallelepipedo con un "buco" a forma di cubo nel caso di volume minore e area maggiore, e nel caso speculare scrive analogo). L'uso di tale strategia le ha permesso di completare l'intera tabella senza effettuare neanche un calcolo; questo dimostra che profonde riflessione su questi aspetti portano a notevoli cambiamenti nelle prestazioni.
In effetti, i 5 insegnanti affermano che, prima di partecipare alla ricerca di D'Amore e Fandiño (2005), non avevano mai riflettuto su questo argomento; possedevano quindi misconcezioni basate sulle supposte relazioni necessarie tra perimetro/area e area/volume: «Prima non avevo un'idea precisa su queste cose, anche sul piano non avevo mai riflettuto da questo punto di vista, vedevo sempre figure singole. Eravamo abituati a pensare che se cresceva un aspetto cresceva anche l'altro»; «Eravamo abituati a vedere scatole più piccole che diventano più grandi (sta

intendendo della stessa forma) e così se aumentava il volume aumentava anche la superficie»; ma dopo queste due esperienze come ricercatori e intervistati affermano con passione la voglia di trasferire questi nuovi saperi in classe: «Non ci avrei mai pensato prima di questa ricerca, ma ora mi sento capace di gestirlo con i mie allievi, peccato che non abbia al momento classi nelle quali poterlo fare»; «Anche quest’ultima richiesta mi ha chiarito ulteriormente le idee, ora mi sento più forte e in grado di poterlo proporre in classe»; «Poche volte si riflette su queste cose, di solito si chiedono calcoli su una figura, mai si chiede il confronto, eppure sono aspetti importantissimi».

Nell’intervista successiva gli insegnanti riconoscono l’importanza dell’analogia e la voglia di saperne di più di questa strategia che risulta essere poco conosciuta e sfruttata didatticamente: «È importante, bisognerebbe sfruttarla su di noi e con i bambini»; «Sono cose che vanno affrontate meglio anche da noi insegnanti, non sono cose banali e non si trattano tutti i giorni. Anch’io mi sono sentita in difficoltà ad usarla, ma mi piace affrontare argomenti sconosciuti, quindi voglio mettermi ad approfondirlo».
È importante tener conto che questo campione di insegnanti, così come il precedente, è molto particolare, in quanto si tratta di insegnanti-ricercatori abituati a mettersi in discussione ed a riflettere criticamente sul proprio sapere e sul proprio operato, quindi disposti a non abbattersi alle prima difficoltà, cosa che invece non sempre è avvenuto tra gli intervistati riportati nel prossimo paragrafo.

3.3 Gli insegnanti di scuola primaria e secondaria di primo grado

Fase 1. I risultati avuti con i 20 insegnanti di scuola primaria, 10 sottoposti alle seguenti due domande:

- Nello spazio ho due solidi, se il secondo ha rispetto al primo area maggiore, avrà anche volume maggiore?
- Nel piano ho due figure, se la seconda rispetto alla prima ha perimetro maggiore avrà anche area maggiore?

e 10 alle stesse due domande ma invertite come ordine, sono i seguenti:

10 insegnanti di scuola primaria		**10 insegnanti di scuola primaria**	
Prima domanda nello spazio	**Seconda domanda nel piano**	**Prima domanda nel piano**	**Seconda domanda nello spazio**
sì	no	no	sì
sì	sì	sì	no
sì	no	sì	sì
no	no	non so	non so
non so	no	non so	non so
non so	sì	sì	sì
sì	sì	no	sì
sì	no	no	sì
non so	non so	no	sì
non so	no	no	sì

Dall'analisi delle risposte emerge che l'ipotesi secondo la quale i risultati relativi a questa fase variano in base all'ordine delle domande non si è verificata.

In generale, si nota che le misconcezioni basate sulle supposte relazioni tra perimetro/area e area/volume sono nettamente più radicate nello spazio piuttosto che nel piano, indipendentemente dall'ordine delle domande; questo mette in evidenza le carenze che possiedono gli insegnanti nei confronti dello spazio e le difficoltà a cogliere l'analogia delle due situazioni proposte.

Riportiamo di seguito un esempio per ogni coppia di domande: nel piano un'insegnante afferma: «No, non è detto, dipende dalle figure», e subito dopo nello spazio sostiene: «Sì, per me è così, però non mi sono mai posta il problema»; viceversa, un insegnante nello spazio afferma: «Mi viene da dire di sì», mentre nel piano sostiene: «No, perché ho immaginato un rettangolo di base 10 e altezza 1 che rispetto a un altro rettangolo non è detto che se aumenta il perimetro aumenta l'area».

L'ipotesi in base alla quale, ponendo prima la domanda nello spazio e poi nel piano, alcuni insegnanti ritrattino la risposta scorretta data alla prima domanda, come conseguenza della risposta conosciuta nel piano, non si è mai verificata; segno che nessuno è riuscito a riconoscere a posteriori l'analogia delle due situazioni. Sono 3 gli insegnanti che confermano le stringenti relazioni nello spazio e le smentiscono nel

piano, senza accorgersi dell’incoerenza delle risposte fornite.
Inoltre, dalle 10 risposte alle domande dal piano allo spazio, si nota una maggiore conoscenza della non esistenza dell’obbligo di tali relazioni nel piano, che però non viene trasferita nello spazio; segno ancora una volta dell’incapacità a cogliere l’analogia delle due situazioni.
Occorre in ogni caso precisare che anche le risposte che coinvolgono un sì o un no, quasi mai sono legate ad affermazioni decise; nella quasi totalità degli insegnanti si percepisce una grande indecisione che poi sfocia in una risposta non proprio convinta, soprattutto nei riguardi dello spazio. Le risposte tipiche sono del tipo: «Diciamo di sì, anche se non sono tanto certa»; segno che questi saperi non sono posseduti dagli insegnanti.
Dall’intervista emerge che nessun insegnante di scuola primaria aveva riflettuto in precedenza su queste relazioni nello spazio, mentre 7 insegnanti su 20 lo avevano fatto nel piano: «Nel piano mi è capitato qualche volta di ragionare su figure lunghissime che poi avevano l’area minore rispetto ad un quadrato con lo stesso perimetro, allora mi è capitato di rifletterci, mentre nello spazio no, non mi è mai capitato». Le giustificazioni che emergono per questa carenza sono spesso legate alla mancanza di formazione in questo campo: «Non avevo mai dovuto riflettere prima su queste cose. Nessuno me lo aveva mai fatto notare» o, qualche volta, al programma scolastico: «Non ho mai pensato a questa relazione, adesso nel programma di geometria non ho ancora affrontato lo spazio»; «Lo spazio non lo dobbiamo fare così tanto».
Alla richiesta di trovare esempi di figure che contraddicono le domande poste, sia nel piano che nello spazio, sono ancora una volta di più gli insegnanti che riescono ad individuarli nel piano, alcuni contraddicendo la loro risposta iniziale, mentre si conferma una notevole difficoltà nella gestione dello spazio. Solo 4 insegnanti su 20 riescono a trovare esempi nello spazio, sfruttando soprattutto le figure concave; di questi, solo 2 contrastano così la risposta iniziale.
5 insegnanti, invece, dalla ricerca degli esempi hanno trovato conferma alla loro risposta scorretta. Ad esempio, un insegnante pensa ad un cubo e ad un cono contenuto nel cubo; esegue dei calcoli per trovare area e volume di entrambi e conclude che area e volume del cubo sono entrambe maggiori di quelle del cono. Fa’ altri tentativi, aumentando il raggio del cono, oppure la sua altezza, e alla fine conclude: «No, nello spazio se aumenta l’area aumenta sicuramente anche il volume».

Sono molti gli insegnanti che dicono di non riuscire a trovare esempi perché non si ricordano le formule e si giustificano dicendo che è da molto tempo che non hanno più la quinta classe.

I risultati avuti con gli 8 insegnanti di scuola secondaria di primo grado, essendo un campione assai limitato, non sono generalizzabili; possiamo tuttavia affermare che i soggetti analizzati dimostrano di possedere minori insicurezze, soprattutto a proposito del piano, ma ancora notevoli difficoltà nella gestione dello spazio e nel riconoscimento dell'analogia; tali carenze saranno più visibili nella terza fase. In effetti, come si può verificare dalla tabella seguente, la maggioranza degli intervistati sottoposti alle stesse domande poste agli insegnanti di scuola primaria, tende spontaneamente ad affermare che vi sia una dipendenza stretta tra l'aumento/diminuzione dell'area e l'aumento/diminuzione del volume.

4 insegnanti di scuola secondaria di primo grado		**4 insegnanti di scuola secondaria di primo grado**	
Prima domanda nello spazio	**Seconda domanda nel piano**	**Prima domanda nel piano**	**Seconda domanda nello spazio**
sì	no	no	no
sì	sì	no	no
no	no	no	sì
sì	no	no	sì

Fase 2. Come ipotizzato, i risultati avuti in questa fase negli insegnanti di scuola primaria e secondaria di primo grado sono confrontabili con quelli riscontrati nella ricerca di D'Amore e Fandiño (2005) il che dimostra che l'ostacolo che si oppone alla costruzione di una conoscenza soddisfacente delle relazioni tra "perimetro ed area", non è solo di natura epistemologica bensì soprattutto di natura didattica. Dopo aver mostrato e fatto riflettere sull'allegato 1, contenente le 9 coppie di figure del piano, diversi insegnanti, che non erano riusciti a completare la tabella, hanno manifestato il loro stupore per vari fattori:
- l'esistenza di tutti i casi: «Credevo che il caso <, > fosse impossibile e invece non è neanche difficile»;
- il ricorso a figure concave: «Non avrei mai pensato assolutamente alle figure concave»;
- gli esempi concettuali e visuali senza calcoli numerici: «Sono molto

più semplici di quelle trovate da me, non ci sono neanche i conti, che bello! Mi rendo conto come per me area e perimetro siano dei calcoli aritmetici, infatti non ho pensato di modificare, scomporre le figure, ma cercavo le soluzioni solo nei numeri»;
- la legge di dualità: «Non avrei mai pensato ai casi uno l'inverso dell'altro».

In generale si percepisce sorpresa nella quasi totalità degli insegnanti nei confronti di questo "nuovo" sapere: «È la prima volta che vedo una cosa del genere. Non ci sarei mai arrivata»; «Non avevo mai riflettuto su queste cose, ma mi piace aver fatto questo lavoro, è molto bello»; «Chi lo avrebbe mai detto!».
Quando l'analisi della tabella pareva conclusa, con le considerazioni e riflessioni degli insegnanti che dimostravano di aver capito i diversi casi, si passava alla terza fase.

Fase 3. Dopo aver mostrato la tabella da completare con i 9 casi nello spazio, si è chiesto agli insegnanti se esistono coppie di figure per esemplificare ogni caso.
A questa sollecitazione, i 20 insegnanti di scuola primaria rispondono nel seguente modo:
- 8 rispondono di no: «Nello spazio non è la stessa cosa che nel piano. Puoi togliere qualcosa e far diminuire il volume. Però non credo che siano tutte possibili»; «No, il piano e lo spazio non sono paragonabili»;
- 5 rispondono di sì: «È la stessa cosa, ma soprattutto per lo spazio devi pensarci. Per me è ancora più complicato»;
- 7 si dicono indecisi perché lo spazio non lo conoscono: «A questa domanda non so proprio rispondere; forse sì o forse no».

In generale, si nota una totale assenza del riconoscimento dell'analogia delle due situazioni; addirittura 2 insegnanti affermano: «Non mi devo far forviare dalla prima tabella»; «Viene spontaneo dire di sì perché mi ricordo quello che ho fatto prima, però non è così».
Quando poi si è chiesto di trovare i 9 casi:
- 6 insegnanti su 20 riescono a completare la tabella, ma solo 2 sfruttano l'analogia con i casi precedenti; gli altri 4 la completano cercando casi diversi, senza sfruttare la legge di dualità, ma ricordandosi che è lecito usare figure concave;
- 14 insegnanti non pensano ai casi analizzati nel piano e non riescono a completare interamente la tabella; addirittura 4 insegnanti rinunciano

subito senza trovare neanche un caso: «Come è possibile trovare esempi nello spazio? Non mi ricordo le formule e non so immaginarle»; «Come si fa a disegnare nello spazio? Non ce la faccio proprio».

In generale, si percepisce ancora una volta la generale difficoltà di gestione dello spazio: «Nello spazio è veramente complicato».

Interessanti sono 2 insegnanti che ritrattano la propria ipotesi corretta iniziale non riuscendo a trovare i 9 casi: «Avrei pensato che era possibile se valeva la stessa relazione delle isoperimetrie, ma non è così».

Successivamente, quando vengono mostrati i 9 casi dello spazio ottenuti da quelli del piano per analogia, la totalità degli insegnanti mostra di averla finalmente colta: «Sì, adesso, dopo che mi hai mostrato e fatto capire tu gli esempi la vedo, ma mentre la facevo non ci ho proprio pensato»; «In fin dei conti non ci si deve spaventare dello spazio; le leggi sono simili»; «Solo con entrambi gli esempi sono riuscita a coglierla, prima non l'avevo mai pensata. Adesso mi è più facile»; e non nascondono il proprio stupore: «Era così semplice? Non ci avrei mai pensato».

Nell'intervista, quando si è chiesto se durante lo svolgimento erano riusciti a cogliere qualche analogia tra la situazione perimetro/area e area/volume, la grande maggioranza risponde con tutta sincerità di non esserci riusciti: «No, non ho più pensato alla situazione precedente»; «Non ho pensato di utilizzare le stesse figure della prima tabella, non ho visto l'analogia, perché non mi sono mai trovata in una situazione simile. Come insegnante lavoro sul cambio di figura con lo stesso perimetro e la stessa area, ma non li metto in relazione. Nello spazio poi mai!»; «Non ho pensato di utilizzare le stesse figure della prima tabella. Per me questi lavori sono completamente una novità. Non ho nella mia esperienza mai pensato di passare dal piano allo spazio trasformando le figure. Le figure del piano sono come staccate dalle figure nello spazio»; «Lo spazio mi ha confuso, cercavo figure diverse, non ho fatto riferimento alle precedenti, non ci ho proprio pensato. Come sono lontani piano e spazio per me, e sì che avevo già visto i casi nel piano, ma non li ho visti come una possibilità per costruire nello spazio… erano nel piano».

Alcuni sostengono di averla pensata o colta in parte: «L'avevo pensata, ma la paura dello spazio mi ha bloccata perché penso che le leggi nello spazio siano più complicate»; «L’avevo colta in parte»; uno sostiene di averla pensata, ma si concentra su dettagli poco importanti: «Sì, ho pensato che era nello stesso stile. Ho usato i cubetti come i quadratini»; uno afferma di averla percepita anche se prima non ci aveva riflettuto, in effetti è uno degli insegnanti che ha individuato gli esempi nello spazio analoghi a quelli del piano: «Sì, infatti anche nello spazio ho pensato di costruire figure concave come nell’altro. Però non ci avevo mai pensato prima, me ne rendo conto adesso che ho fatto questo lavoro, ma veramente non avevo mai riflettuto prima su queste cose».

Le sensazioni che gli insegnanti sostengono di aver provato sono le seguenti: «Ero un po’ in panico, non ricordavo le formule dei volumi perché siamo più abituati alle figure del piano. Noi abbiamo fatto la tridimensionalità alle magistrali solo l’ultima parte della quarta»; «Ho fatto veramente uno sforzone»; «Provo un’angoscia terrificante, però sono curiosa e voglio sapere. Non un’angoscia come se vedo un cadavere, ma è l’angoscia della mia ignoranza, si può recuperare»; «Mi ha mandato in crisi, mi sento impotente e incapace»; «Mi sono sentita confusa»; e un grande stupore davanti al cambio di convinzione: «Ho avuto un po’ di sorpresa».

Alla domanda se ritengono importante lavorare sull’analogia a scuola, tutti sostengono che effettivamente lo è e ne riconoscono le diverse potenzialità: «Bè, sì, bisognerebbe»; «Importantissima perché economizza. È un percorso intelligente. Non puoi però utilizzare l’analogia in modo meccanico perché potrebbe portare fuori strada»;[4] «Se si fanno dei confronti tutto è più chiaro e si fa meno fatica. Invece di pensare due volte lo penso una volta sola»; «Sì, molto. Perché ti fa cogliere degli elementi comuni a due cose che tu reputi diverse perché poste in settori diversi»;
ma quasi tutti si dicono incapaci di metterlo in pratica: «Mi rendo conto che è importante e che queste cose non si fanno abbastanza a scuola. Bisogna farlo, ma io non so come farlo»; le motivazioni della mancata messa in pratica rientrano tra le seguenti:

- incapacità: «Non so, forse perché non ci si pensa, io non ne so abbastanza. Mi piacerebbe saperne di più. Fammi sapere di più, se hai materiale passamelo»;

[4] Qui vanno ricordate le considerazioni di Fischbein (1987, 1989) e di Bazzini (1995).

- mancanza di tempo: «Ci vuole troppo tempo, si fa fatica a lavorare così»;
- mancanza di formazione: «I miei insegnanti non me ne hanno mai parlato»;
- mancanza di vera implicazione da parte dell'insegnante: «Il mancato uso è dovuto al fatto che l'insegnante vuole fare meno fatica. Pensare per analogia vuol dire ragionare e per far ragionare devi preparare la lezione in un certo modo. Non ci poniamo questo obiettivo. La scuola va avanti con metodi vecchi».

I risultati ottenuti dagli insegnanti di scuola secondaria di primo grado sono confrontabili con quelli ottenuti da quelli di scuola primaria, sia per le prestazioni nello spazio che per l'uso dell'analogia.
Degli 8 insegnanti intervistati, solo 3 riescono a trovare i 9 casi nello spazio e, di questi, solo 1 sfrutta completamente l'analogia con la situazione precedente.
Le autodichiarazioni esplicite di difficoltà fatte da questi insegnanti, sia per lo spazio che per il riconoscimento dell'analogia, sono minori di quelli di scuola primaria, ma non cambia la prova evidente ed oggettiva delle loro difficoltà; le autodichiarazioni ottenute rientrano comunque tutte tra le tipologie di dichiarazioni riportate per gli insegnanti di scuola primaria.
In particolare, negli insegnanti di scuola secondaria si nota un maggiore disagio, evidente nei gesti e nei comportamenti, per non riuscire a risolvere la situazione, per non saper gestire il sapere dello spazio e l'uso dell'analogia, che spesso è sfociato in giustificazioni legate al contesto esterno: mancanza di formazione, programma scolastico lacunoso, libri di testo non adeguati, …

4. Risposte alle domande di ricerca

Siamo ora in grado di rispondere alle domande di ricerca formulate in 2.3.

R1. I risultati dimostrano che presso gli insegnanti di scuola primaria e secondaria di primo grado non vi è consapevolezza della mancata esistenza di relazioni obbligate e predeterminate tra area e volume di figure solide. Vi sono quindi notevoli problemi di costruzione concettuale in questo àmbito che fan sì che l'ostacolo alla costruzione di una conoscenza matematicamente soddisfacente delle relazioni tra “area e volume” di figure solide da parte degli studenti, rilevata dalla letteratura di ricerca, non è solo di natura epistemologica bensì prevalentemente di natura didattica, come è avvenuto per la ricerca precedente su “perimetro e area” (D’Amore, Fandiño, 2005). Anzi, i risultati attestano che, in questo caso, gli ostacoli didattici sono ancora più accentuati, dato che ai modelli intuitivi si sommano le difficoltà di gestione dello spazio che, dalle affermazioni e prestazioni degli insegnanti, risulta essere un argomento poco conosciuto e di difficile gestione. Non si sono invece manifestati casi in cui, anche dopo aver visto gli esempi dei 9 casi nello spazio, alcuni insegnanti hanno manifestato qualche resistenza. In effetti, più che di resistenza si può parlare per alcuni docenti di iniziale difficoltà a comprendere gli esempi, che sono stati accettati e capiti da tutti dopo opportune e dettagliate spiegazioni. Va qui ricordato che tali carenze sono molto minori in chi ha avuto modo di riflettere in profondità in modo specifico sull’àmbito geometrico o sul ruolo dell’analogia.

R2. Le nostre ipotesi sono ampiamente confermate. La quasi totalità degli insegnanti intervistati non è riuscita a cogliere l’analogia tra piano e spazio; ossia, i docenti non sono riusciti a sfruttare gli esempi del piano a sostegno di ciò che avviene nello spazio, affrontando la seconda situazione come se non avesse nulla a che vedere con la proposta precedente.
A detta degli insegnanti stessi, l’analogia è una strategia che non viene sfruttata personalmente dalla quasi totalità dei docenti di scuola primaria e anche dalla maggioranza degli insegnanti di scuola secondaria di primo grado; questo comporta di conseguenza che non viene neppure presa in esame dal punto di vista didattico come strategia di apprendimento o di risoluzione.

R3. Dopo aver mostrato e spiegato l’esistenza di analogia tra la situazione proposta nel piano e quella presentata nello spazio, gli insegnanti sono riusciti a coglierla e a riconoscerne le potenzialità per l’apprendimento. Ossia, gli insegnanti hanno riconosciuto l’importanza dal punto di vista didattico di questa strategia che potrebbe facilitare non solo gli allievi, ma anche loro stessi, nella costruzione del sapere. Eppure, a detta degli insegnanti stessi, questa metodologia non è da loro dominata e valorizzata; per questo molti docenti hanno esplicitamente manifestato il proprio disagio nei confronti di questi argomenti

(l'analogia e la conoscenza dello spazio) che non sono mai stati oggetto di una precedente riflessione personale.
Le cause del mancato uso didattico dell'analogia e della non conoscenza dello spazio dipendono, a detta degli insegnanti, sia da fattori esterni, come: l'assenza di formazione su questo argomento, la mancata presenza sui libri scolastici, le manchevolezze durante i loro studi dove questi argomenti sono stati ignorati, la mancanza di tempo …; sia su fattori interni dipendenti da loro stessi: incapacità personale di coglierla, indolenza nella preparazione di attività, …

5. Conclusioni

Questa ricerca ha dimostrato che le misconcezioni radicate a proposito di supposte relazioni necessarie tra aree e volumi delle figure solide risiedono presso gli insegnanti di scuola primaria e secondaria di primo grado; inoltre si è dimostrato che l'analogia è una strategia sconosciuta e non sfruttata dal punto di vista didattico dalla quasi totalità dei docenti intervistati.
Una reazione molto diffusa in entrambi i livelli scolastici è la differenza manifestata a livello intuitivo, al primo contatto con i problemi, rispetto al cambio (a volte forte) tra la prima risposta intuitiva e la convinzione acquisita alla fine delle prove, sia sui concetti geometrici che sul riconoscimento dell'analogia. Il cambio di convinzione è palese, a volte forte, ed in parecchi casi ha richiesto prove e riflessioni successive non banali. Perché avvenisse tale cambio, la maggior parte degli intervistati ha avuto bisogno di ricorrere agli esempi forniti dall'intervistatore. Quel che si evince, però, è che, dopo aver visto gli esempi, o creati dall'intervistato stesso o proposti dall'intervistatore, sono (quasi) del tutto scomparse le misconcezioni legate all'intuizione per quanto riguarda i concetti geometrici e si è percepita l'utilità dell'analogia come strategia fondamentale per risolvere velocemente la situazione proposta.
Gli insegnanti dichiarano di capire il senso delle proposte e ammettono di aver subito un cambio di convinzione che li ha sorpresi, come se esso scardinasse una consapevolezza acritica, data per acquisita. Il cambio di convinzione è quindi avvenuto nella maggior parte dei casi con sincera meraviglia.

Molti insegnanti sostengono che il malinteso di pensare che l'aumento dell'area comporta necessariamente l'aumento del volume derivi da una

cattiva didattica e si ripromettono di includerlo nella propria azione didattica di insegnamento/apprendimento.
Risulta quindi del tutto evidente che l'ostacolo che si oppone alla costruzione di una conoscenza soddisfacente alle relazioni tra "area e volume" non è solo di natura epistemologica bensì soprattutto di natura didattica. In effetti, se sono servite interviste opportune, piuttosto profonde, per cambiare le convinzioni degli stessi insegnanti, è spontaneo pensare che le scelte didattiche che questi utilizzano in aula con i propri allievi influenzano la formazione di misconcezioni relativamente a questo tema; di questo sono testimonianza le ammissioni esplicite degli stessi insegnanti.

Inoltre, l'analogia è una strategia né conosciuta né valorizzata dal punto di vista didattico da parte degli insegnanti, anche se, come sostengono concordemente i diversi Autori citati nel quadro teorico, uno degli scopi primari dell'insegnamento matematico, e più in generale scientifico, dovrebbe essere proprio quello di incoraggiare gli studenti a trasferire la conoscenza da un caso specifico ad altri.
Dalle affermazioni degli insegnanti emerge inoltre che difficilmente questo tema viene preso in esame didatticamente in modo esplicito, anche per una supposta difficoltà personale del docente stesso.
Queste manchevolezze da parte degli insegnanti possono essere le cause delle carenze degli studenti evidenziate nel quadro teorico (Noss e Hoyles, 1996), basate sull'incapacità di riuscire a fare tali auspicati collegamenti.
Eppure tutti gli insegnanti intervistati hanno riconosciuto le diverse notevoli potenzialità dell'analogia, considerandola come una strategia fondamentale per facilitare gli allievi nella costruzione del sapere, che dovrebbe entrare esplicitamente nella didattica.
Occorre quindi didatticamente sollecitare l'importanza di tale strategia perché avvenga ciò che auspicava Speranza (1988): «A mio avviso il ritrovare analogie è uno dei momenti essenziali del pensiero critico: ritengo che sia utile lasciare che gli allievi si sbizzarriscono a inventare qualche analogia, anche se poi una più attenta critica potrà farne dimenticare molte fra quelle inventate».

Bibliografia

Arrigo G., Sbaragli S. (2004). *I solidi. Riscopriamo la geometria.* Roma:

Carocci.
Bartolini Bussi M. (1989). La discussione collettiva nell'apprendimento della matematica. Parte II: Analisi di due casi. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.* 12, 5. 615-654.
Bazzini L. (1995). Il pensiero analogico nell'apprendimento della matematica: considerazioni teoriche e didattiche. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.* 2, 107-129.
Brousseau G. (2004). Una modellizzazione dell'insegnamento della matematica. *Bollettino dei docenti di matematica.* Canton Ticino. 49, 11-32.
Brown D.E., Clement J. (1989). Overcoming misconceptions via analogical reasoning: abstract transfer versus explanatory model construction. *Instructional Science*. 18, 237-261.
Campolucci L., Fandiño Pinilla M.I., Maori D., Sbaragli S. (2006). Cambi di convinzione sulla pratica didattica concernente le frazioni. *La matematica e la sua didattica.* In corso di stampa.
Chamorro M.C. (1997). *Estudio de las situaciones de enseñanza de la medida en la escuela elemental*. Tesi di dottorato. UNED.
Chamorro M.C. (2001-02). Le difficoltà nell'insegnamento–apprendimento delle grandezze nella scuola di base. *La matematica e la sua didattica*. I parte: 4, 2001, 332-351. II parte: 1, 2002, 58-77.
Clement J. (1993). Using bridging analogies and anchoring intuitions to deal with students' preconceptions in physics. *Journal of Research in Science Teaching.* 30, 1241-1257.
Cottino L., Sbaragli S. (2005). *Le diverse "facce" del cubo.* Roma: Carocci.
D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2004). Cambi di convinzione in insegnanti di matematica di scuola secondaria superiore in formazione iniziale. *La matematica e la sua didattica*. 3, 27-50.
D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2005). Relazioni tra area e perimetro: convinzioni di insegnanti e studenti. *La matematica e la sua didattica.* 2, 165-190.
D'Amore B., Sbaragli S. (2005). Analisi semantica e didattica dell'idea di "misconcezione". *La matematica e la sua didattica*. 2. 139-163.
Fischbein E. (1985a). Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari. In: Chini Artusi L. (ed.). *Numeri e operazioni nella scuola di base.* Bologna: Zanichelli-UMI. 122-132
Fischbein E. (1985b). Intuizione e pensiero analitico nell'educazione

matematica. In: Chini Artusi L. (ed.). *Numeri e operazioni nella scuola di base.* Bologna: Zanichelli-UMI. 8-19.

Fischbein E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics.* D. Reidel Publ. Company, Dordrecht.

Fischbein E. (1989). Tacit Models and Mathematical Reasoning. *For the Learning or Mathematics.* 2, 9-14.

Galilei G. (Leida, 1638). *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze.* In: A. Carugo, L. Geymonat (a cura di) (1958). Torino: Paolo Boringhieri.

Gentner D., Gentner D.R. (1983). Flowing Water or Teaching Crowds: Mental Models of Electricity. In: Gentner D., Stevens A. (Eds.). *Mental Models.* Erlbaum, Hillsdale.

Iacomella A., Marchini C. (1990). Riflessioni sul problema della misura. *Periodico di matematiche*. 66, VI, 4, 28-52.

Livne T. (1996). *Examination of high school students' difficulties in understanding the change in surface area, volume and surface area/volume ratio with the change in size and/or shape of a body.* Tesi di Master non pubblicata. Tel Aviv: Tel Aviv University.

Lucangeli D., Passolunghi M.C. (1995). *Psicologia dell'apprendimento matematico.* Torino: UTET.

Mason L.. (1992). *Reti di somiglianze.* Milano: Franco Angeli.

Noss R., Hoyles C. (1996). *Windows on mathematical meanings: Learning cultures and computers.* Dordrecht, Kluwer.

Pesci A. (2002). *Lo sviluppo del pensiero proporzionale nella discussione di classe.* Bologna: Pitagora.

Piaget J. (1976). *La genesi del numero nel bambino.* Firenze: La Nuova Italia.

Piaget J., Inhelder B. (1975). *Lo sviluppo delle quantità fisiche nel bambino.* Firenze: La Nuova Italia.

Piaget J., Inhelder B., Szeminska A. (1960). *The child's conception of geometry.* London: Routledge & Kegan Paul.

Reeves L.M., Weisberg R.T. (1993). On the concrete nature of human thinking: content and context in analogical transfer. *Educational psychology.* 13, 245-258.

Reeves L.M., Weisberg R.T. (1994). The role of content and abstract information in analogical transfer. *Psychological Bulletin.* 115, 381-400.

Resnick L.B., Ford W.W. (1981). *Psicologia della matematica e* *apprendimento scolastico*. Torino: Sei. [Ed. originale in lingua inglese: 1981, Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates].

Ricco G., Vergnaud G., Rouchier A. (1983). Représentation du volume et arithmetisation. Entretiens individuels avec des élèves de 11 a 15 ans. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 4, 1, 27 - 69.

Rogalski J. (1979). Quantités physiques et structures numériques. Mesures et quantifcation: les cardinaux finis, les longeurs, surfaces et volumes. *Bulletin de l'APMEP*. 320, 563-586.

Ross B. H. (1987). This is like that: the use of earlier problems and the separation of similarity effects. *Journal of Experimental psychology: learning, memory and cognition*. 13, 4, 629-639.

Rouche N. (1992). *Le sense de la mesure*. Bruxelles: Didier Hatier.

Sáiz Roldán M. (2003). Some mental objects related to elementary teancher' concept of volume. http://www.comie.org.mx/revista/PdfsEnglish/Carpeta18/18invest1Engl.pdf

Sbaragli S. (2005). Misconcezioni "inevitabili" e misconcezioni "evitabili". *La matematica e la sua didattica.* 1. 57-71.

Speranza F. (1988). Salviamo la geometria! *La matematica e la sua didattica.* 2, 3, 6-13.

Stavy R., Tirosh D. (2001). *Perché gli studenti fraintendono matematica e scienze?* Trento: Erickson.

Tirosh D., Graeber A. (2003). Challenging and changing mathematics teaching classroom practice. In: Bishop A.J., Clements M.A., Keitel C., Kilpatrick J., Leung F.K.S. (Eds.). *Second International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 643-687.

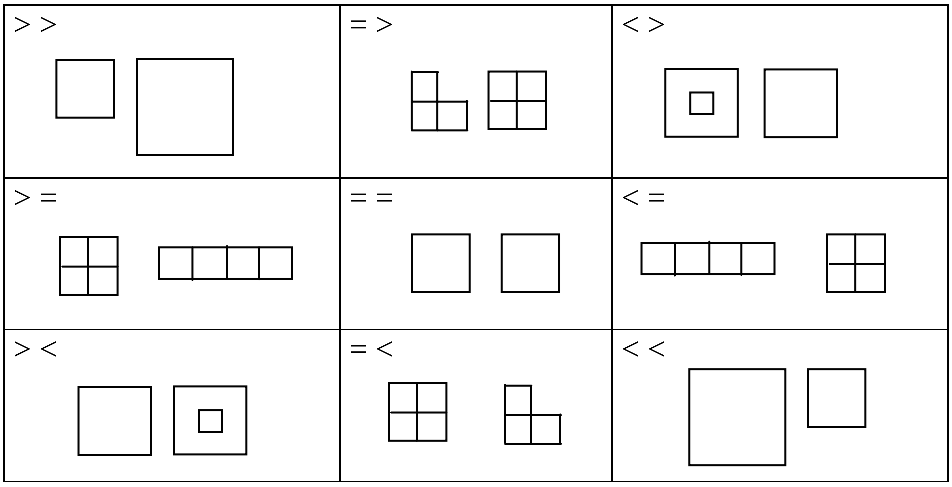
Tsamir P. (1997). *Predicting students' responses when comparing vertical angles.* Manoscritto non pubblicato. Tel Aviv: Tel Aviv University.

Vergnaud G. (1983). Didactique du concept de volume. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 4, 1, 9-25.

Vergnaud G. *et al.* (1983). Une experience didactique sur le concept de volume en classe de cinquième (12-13 ans). *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 4, 1, 71-120.

Zan R. (1998). *Problemi e convinzioni.* Bologna: Pitagora.

Allegato 1



Allegato 2