

La teoria dell'oggettivazione e la teoria delle situazioni didattiche: Un esempio di confronto tra teorie in didattica della matematica

The theory of objectification and the theory of didactical situations: An example of comparison between theories in mathematics education

Dedicato a Guy Brousseau e a Luis Radford
Dedicated to Guy Brousseau and Luis Radford

Miglena Asenova,^{1,3} Bruno D'Amore,^{1,4} Martha Isabel Fandiño Pinilla,¹
Maura Iori¹ e George Santi^{1,2}

¹Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica, Bologna, Italia

²Libera Università di Bolzano, Bolzano, Italia

³Università di Palermo, Palermo, Italia

⁴Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia

Abstract. *The issue of comparing theories is one of the most relevant and debated research topic in mathematics education, which brings to the fore the epistemological foundations of this discipline. In this study, the authors examine and compare two of the most important theories that have characterized the development of mathematics education: the theory of objectification (TO) and the theory of didactical situations (TDS). The TDS has marked the birth of mathematics education in the modern sense, by focusing its interest on the classroom situations (the triangle of didactics, effects, clauses, didactical contract). The TO has marked the transition from a mentalist to a holistic approach to learning. Against the background of a pragmatic conception of human activity, historically and socially established, the TO takes into account not only the role of the body's sensorimotor activity that broadens the range of semiotic resources by including gestures, material artefacts, bodily movements and postures – namely the so-called semiotic means of objectification – but also the individual's emotional dimension. The authors present a thorough analysis of the foundational elements of the two theories, which are useful for an ontological and epistemological comparison. On the basis of the recent research results on the networking of theories in mathematics education and the distinction, proposed by Agazzi, between referential component and contextual component of the meaning of the terms or predicates that characterize a theory, this study shows that the two theories are partially comparable and partially compatible, and have partially similar explanatory aims; therefore it is shown that there is comparability and not contradiction, despite the different ontological and epistemological assumptions.*

Keywords: theory of objectification, theory of didactical situations, comparison

between theories, comparability, explicative aim, ontology, epistemology.

Sunto. *Il problema del confronto tra teorie è uno dei temi di ricerca più rilevanti e dibattuti in didattica della matematica, che chiama in causa i fondamenti epistemologici della disciplina. In questo studio, gli autori prendono in esame, confrontandole, due delle teorie più importanti che hanno caratterizzato lo sviluppo della didattica della matematica: la teoria dell'oggettivazione (TO) e la teoria delle situazioni didattiche (TSD). La TSD ha segnato la nascita della didattica della matematica in senso moderno, focalizzando il suo interesse sulle situazioni d'aula (triangolo della didattica, effetti, clausole, contratto didattico). La TO ha segnato il passaggio da un approccio mentalista all'apprendimento della matematica a una visione olistica che, sullo sfondo di una concezione pragmatica dell'attività umana storicamente e socialmente costituita, prende in considerazione non solo il ruolo del corpo e i movimenti, nonché i diversi mezzi semiotici di oggettivazione, includendo in essi gesti e artefatti, ma anche l'idea di considerare la dimensione emotiva nei processi di apprendimento. Gli autori presentano un'approfondita analisi degli elementi fondanti delle due teorie, utili a un confronto di tipo ontologico ed epistemologico. Sulla base dei più recenti risultati di ricerca sul networking di teorie in didattica della matematica e sulla distinzione, proposta da Agazzi, tra componente referenziale e componente contestuale del significato dei termini o predicati che caratterizzano una teoria, si mostra che le due teorie sono parzialmente comparabili e parzialmente compatibili e che hanno finalità esplicative parzialmente simili; dunque come ci sia confrontabilità e non contraddizione, nonostante i diversi presupposti ontologici ed epistemologici.*

Parole chiave: teoria dell'oggettivazione, teoria delle situazioni didattiche, confronto tra teorie, comparabilità, finalità esplicativa, ontologia, epistemologia.

Resumen. *El problema de comparar teorías es uno de los temas de investigación de mayor relevancia y uno de los más debatidos en didáctica de la matemática; esta comparación llama en causa los fundamentos epistemológicos de la disciplina. En este estudio, los autores toman en examen, comparándolas, dos de las teorías de mayor importancia que han caracterizado el desarrollo de la didáctica de la matemática: la teoría de la objetivación (TO) y la teoría de las situaciones didácticas (TSD). La TSD designó el nacimiento de la didáctica de la matemática en sentido moderno, focalizando su interés en las situaciones de aula (triángulo de la didáctica, efectos, cláusulas, contrato didáctico). La TO designó la transición de una aproximación mentalista al aprendizaje de la matemática a una visión holística que, tomando como base una concepción pragmática de la actividad humana histórica y socialmente constituida, toma en consideración no sólo el papel del cuerpo y los movimientos, sino también los diversos medios semióticos de objetivación, incluyendo en estos medios los gestos y los artefactos, a estos también agregando la idea de considerar la dimensión emotiva en los procesos de aprendizaje. Los autores presentan un análisis detallado de los elementos fundantes de las dos teorías, útiles para una comparación de tipo ontológico y epistemológico. Tomando como base los más recientes resultados de investigación sobre el networking de teorías en didáctica de la matemática y de la distinción, propuesta por Agazzi, entre componentes*

referenciales y componentes contextuales del significado de los términos y predicados que caracterizan una teoría, se muestra que las dos teorías son parcialmente comparables y parcialmente compatibles y que tienen finalidades explicativas parcialmente similares; por lo tanto, se puede decir que existe comparabilidad y no contradicción, no obstante los diversos presupuestos ontológicos y epistemológicos.

Palabras clave: teoría de la objetivación, teoría de las situaciones didácticas, comparación entre teorías, comparabilidad, finalidad explicativa, ontología, epistemología.

1. Premessa

La problematica del confronto fra teorie è a nostro avviso uno dei temi teorici attuali più affascinanti della didattica della matematica. Lavorare in questo settore richiede non solo conoscenze profonde sulla disciplina, ma vaste conoscenze nel campo epistemologico e anche una certa facilità nel paragonare quegli atteggiamenti, interessi e concetti che il creatore di una teoria mette alla base del proprio costrutto teorico in forma non sempre consapevole.

Molti lavori sono già stati compiuti in questo senso da diversi autori (che citeremo nel corso dell'articolo); ma il vero motivo ispiratore che ci ha spinto a cercare relazioni specifiche (all'inizio per nulla chiare o scontate) tra TS (teoria delle situazioni) e TO (teoria della oggettivazione) è stata una frase scritta da Luis Radford nel 2017:

Un domingo de septiembre de 2004, me encontraba almorzando con Guy Brousseau. Ambos fuimos invitados por Bruno D'Amore a la *Convención de didáctica de la matemática* que Bruno y Gianfranco Arrigo organizaron en la Alta Escuela Pedagógica en Locarno, Suiza. (Una domenica di settembre del 2004, stavo pranzando con Guy Brousseau. Entrambi eravamo stati invitati da Bruno D'Amore al *Convegno di didattica della matematica* che Bruno e Gianfranco Arrigo organizzarono nell'Alta Scuola Pedagogica a Locarno, Svizzera).¹ (D'Amore & Radford, 2017, p. 137)

Uno degli autori del presente articolo era dunque presente al momento del celebre pranzo (quella domenica era il 26 settembre) durante il *II Convegno Internazionale di Didattica della Matematica*, Locarno, Svizzera, 24-25 settembre 2004, in qualità di direttore e di responsabile degli inviti. All'evento parteciparono alcuni fra i maggiori nomi della ricerca internazionale in didattica della matematica dell'epoca e dunque anche Luis Radford, allora all'inizio della sua poderosa creazione che, di lì a poco, avrebbe dovuto

¹ Traduzione nostra.

conquistare il mondo della ricerca.

Inoltre, proprio per differenziare il più possibile le due teorie, Radford aveva lanciato l'idea che non si dovesse prendere troppo sul serio, dal punto di vista scientifico, i cosiddetti *ostacoli epistemologici* che costituiscono, insieme a quelli *ontogenetici* e a quelli *didattici*, la terna che definisce l'idea di ostacolo all'interno della TSD. Questa sfida non venne lanciata direttamente a Guy Brousseau, ma a Bruno D'Amore, considerato seguace di quella modalità teorica di pensare alla didattica della matematica. La si affrontò pensando di scrivere un articolo a quattro mani sul tema; ma, per evidenziare il più possibile le reciproche posizioni, si decise di affidare a una persona di grande cultura epistemologica, per la quale entrambi gli sfidanti avevano totale stima, la redazione di domande intelligenti, significative e sottili. La persona scelta fu Giorgio Bagni, stretto collaboratore di D'Amore. Ne nacque un articolo tradotto poi in varie lingue (D'Amore, Radford, & Bagni, 2006). A distanza di anni, si può affermare che la rottura teorica non avvenne; si trattò solo di evidenziare due forme diverse di descrizione dello stesso fenomeno. Nel 2009, per testimoniare il loro debito nei confronti di Giorgio Bagni, D'Amore e Radford scrissero la prefazione a un suo libro (D'Amore & Radford, 2009; Bagni, 2009), purtroppo postumo.

Ancora insoddisfatti del risultato della tenzone che si trascinava da tempo, i ... duellanti accettarono l'invito della rivista messicana *Relime* di fungere da editor di un numero speciale dedicato a fare il punto della situazione attuale (nel 2006) sui temi della ricerca semiotica e soprattutto delle sue ricadute didattiche nel mondo della matematica (Radford & D'Amore, 2006). Ma nella TSD non era allora contemplata l'analisi semiotica come strumento didattico e dunque non ci fu, perché non poteva esserci, contrasto teorico, ma grande consonanza di idee, anche in relazione agli inviti da compiere.

Sempre nel 2006, poiché fra le ricerche di Radford e collaboratori in Canada era molto attivo un gruppo di studio sulle relazioni fra comunicazione e apprendimento, si decise di pubblicare in italiano, in una collana della casa editrice Pitagora, un libro di Radford e Demers (2006) su questo argomento; e Radford chiese la prefazione a D'Amore (2006). In quello stesso anno, D'Amore invitò Radford a tenere su quel tema una conferenza plenaria nell'ambito del XX Convegno *Incontri con la matematica*, 3-5 novembre 2006, Castel San Pietro Terme (Bologna), dal titolo: *Convegno del Ventennale* (Atti a cura di Bruno D'Amore e Silvia Sbaragli, 2006). Radford tenne la conferenza dal titolo: *Comunicazione e apprendimento, una prospettiva vygotskijana* il cui sunto venne pubblicato sugli Atti (Radford, 2006).

Nel frattempo, anche per dar prova del fatto che un ricercatore nato nell'ambito della TSD non deve per questo ignorare o, peggio, contrastare la TO, vennero pubblicati vari studi specifici come contributo alla riflessione teorica relativa alla TO (D'Amore, 2015, 2017, 2018). Fra i risultati di questi testi, il seguente è degno di nota; che in occasione del *Segundo Coloquio*

Internacional de la Teoría de la Objectivación, Toronto (Canada), 17-20 gennaio 2017, Radford invitò, oltre a vari esponenti della TO, ancora D'Amore, come analista critico della teoria, riconosciuto interprete della TSD; e George Santi, dottorato di D'Amore, come artefice della costruzione teorica della TO dato che nella sua tesi dottorale e in vari articoli l'aveva assunta come base (Santi, 2010, 2011a, 2011b, 2012; D'Amore, Fandiño Pinilla, Santi, & Sbaragli, 2012; D'Amore & Santi, 2018).

Alla fine, si decise di pubblicare un libro a due nomi, nel quale raccogliere articoli precedenti già editi, scelti in modo tale da rafforzare ciascuno le proprie posizioni teoriche (D'Amore & Radford, 2017).

Nonostante questa enorme e assidua possibilità di dialogo pubblico, ad avviso degli autori del presente articolo mancava ancora qualcosa, a mo' di conclusione: una vera e propria analisi, un confronto teorico fra le due teorie, convinti come eravamo e come ancor più siamo che non ci sia quel dissidio che uno dei contendenti dichiarava di vedere, sfruttando i risultati della ricerca contemporanea sull'analisi delle relazioni fra teorie che, in questi ultimi anni, ha fatto passi da gigante.

Tutto ciò spiega il senso di questo lavoro di analisi e di ricerca. È dunque nelle intenzioni degli autori mostrare che TSD e TO sono *parzialmente comparabili* e *parzialmente compatibili* e che hanno *finalità esplicative parzialmente simili*; dunque come ci siano confrontabilità e non contraddizione. Naturalmente sarà nostro compito preciso giustificare, chiarire (o meglio definire) ciascuno di questi termini.

2. La teoria dell'oggettivazione: aspetti teorici e fondazionali

2.1. Discorso ontologico ed epistemologico: Platonismo – Realismo – Empirismo – concezione antropologica

La maggior parte delle teorie che si sono sviluppate in didattica della matematica dagli anni '80 ad oggi sono, talvolta implicitamente, basate su una concezione realista degli oggetti matematici, su una versione platonista del realismo strumentale di Weber, con la differenza, rispetto a una posizione platonista classica, che gli oggetti matematici non sono visti come esterni al mondo sensibile ma come quelli che “lo governano” tramite le leggi naturali (Radford, 2007, p. 1787; Radford, 2008a, p. 221).

La posizione che sta alla base della teoria dell'oggettivazione (TO) (Radford, 2008a) è del tutto diversa, in quanto essa non postula l'esistenza degli oggetti matematici, ma li colloca in una prospettiva antropologica, come “emergenti dall'attività umana”. Riguardo alla posizione epistemologica il realismo compie, prosegue Radford, un salto di qualità nel diffuso atto di fede basato sulla possibilità di giungere agli oggetti a partire da una qualche forma di astrazione. Infatti, secondo Platone, è il discorso sotto forma di

ragionamento svolto in un contesto sociale (una delle tante accezioni del *logos*) a garantire tale possibilità, mentre secondo Descartes essa è garantita dal ragionamento del soggetto con sé stesso, nel dualismo *res cogitans* – *res extensa*. Il realismo pone come base della propria fede in tale possibilità la sperimentazione scientifica. A differenza di tutte le teorie di impostazione realista, la TO spiega dunque come si perviene agli oggetti matematici, cioè come è possibile arrivare a conoscerli, a prenderne coscienza, a entrare in contatto con essi. Tale risposta è insita nella definizione stessa di oggetto matematico, in quanto l'oggetto matematico non è considerato come preesistente in natura o anche solo in una qualche realtà a-umana, ma è esso stesso un prodotto dell'attività umana. La concezione ontologica su cui si basa la TO è inoltre anti-razionalista poiché

It also moves away from Rationalist ontologies and their conception of mathematical objects as products of a mind that works folded in onto itself working in accordance to the laws of logic. The theory of knowledge objectification suggests that mathematical objects are historically generated during the course of the mathematical activity of individuals. More precisely, mathematical objects are fixed patterns of reflexive human activity encrusted in the ever-changing world of social practice mediated by artifacts. (Radford, 2008a, pp. 221–222)

Non vi è dunque, in questa posizione antropologica dell'epistemologia, la necessità di compiere un atto di fede, se non nel fatto che l'essere umano sia in generale capace di riconoscere pattern fissi nati nel seno di attività riflessive proprie e altrui e di organizzarli in sistemi di pattern più complessi. Un atto di fede non è necessario poiché, come afferma Lucio Lombardo Radice nella prefazione all'edizione italiana della *Dialettica della natura* di Engels (1955), l'essere umano coincide con la sua produzione (Lombardo Radice citato in D'Amore, 2015), si esprime tramite essa, costruisce la sua e-ità in e per essa (D'Amore, 2015; Radford, 2017).

2.2. Concezione anti-mentalista del pensiero come attività riflessiva

Nello sviluppo epistemologico che ha portato da una concezione platonista classica dei concetti matematici a una concezione realista e materialista, Radford opera una cesura nella quale il pensiero matematico non è circoscritto all'attività della mente (Radford, 2007, p. 1784). Infatti, per Platone, l'*eidós* era considerata esterna, appartenente al mondo delle idee, mentre Agostino di Ippona ne modifica il significato aprendo la strada a quella visione che sarà poi quella razionalista e mentalista, di Descartes e Leibniz, secondo la quale il pensiero ha luogo esclusivamente nella mente individuale ed è evidente solo come relazione puramente intrapersonale. Radford sostiene che tale punto di vista non tiene conto della necessità di risorse culturali per il reale funzionamento del pensiero (Radford, 2007, pp. 1784–1785); queste non hanno la funzione di coadiuvarlo, ma sono costituenti di esso (Geertz, 1973).

Egli sottolinea inoltre la necessità di considerare il pensiero come una pratica sociale (Wartofsky, 1979), cioè una *praxis cogitans*; il pensiero non è dunque una pura attività mentale, ma ha bisogno di una mediazione per la sua realizzazione e la sua stessa esistenza. Il ruolo di mediatore per il pensiero viene svolto dagli artefatti che orientano e materializzano il pensiero diventandone parte integrante. Radford introduce la nozione di “zona del pensiero artefattuale”, il territorio (immaginario, ideale, condiviso) in cui si sovrappongono la soggettività del piano mentale dello studente e l'oggettività culturale del piano sociale (Radford, 2008a, p. 219), estendendo la mente dell'individuo “oltre la sua pelle”, oltre la sua individualità (Wertsch, 1991).

Il pensiero non è visto come assimilazione (come avviene nel comportamentismo), né come costruzione *ex nihilo* (come avviene nel costruttivismo), ma come ri-flessione, cioè un movimento dialettico tra la realtà socioculturale e l'individuo che la rifrange: da un lato l'essere umano che pensa, crea gli oggetti del pensiero, ma allo stesso tempo riflette la realtà culturale a cui appartiene ed è plasmato da essa, nel senso che quest'ultima determina il suo modo di percepire e di intendere la realtà, cioè le sue *manières de viser* (Merleau-Ponty, 1945). L'attività riflessiva “costituisce” e conforma il pensiero e il suo prodotto, vale a dire la conoscenza. Il significato degli oggetti/concetti matematici si identifica con l'attività riflessiva i cui mediatori appartengono a un sistema semiotico di significazione culturale (Radford, 2003a, 2005). Gli artefatti mediano l'attività riflessiva secondo il significato culturale di cui sono portatori. Per esempio, il compasso media il concetto di circonferenza in quanto incorpora strumentalmente e culturalmente la sua definizione sintetica come luogo geometrico dei punti equidistanti dal centro.

2.3. *Apprendimento*

Nella TO l'idea di apprendimento prende in esame due dimensioni che sono strettamente correlate tra loro: la dimensione relativa all'accesso alla conoscenza concettuale della matematica (per esempio l'apprendere attraverso la risoluzione di problemi) e la dimensione dell'accesso al modo di essere della conoscenza della matematica, inteso come “essere con gli altri”, quel che altri autori chiamano “comunità di pratica” (D'Amore & Godino, 2006; D'Amore, 2017), la relazione con altri da sé che condividono con il singolo individuo un'azione culturale e l'uso di artefatti (concreti o puramente mentali e astratti). Apprendere matematica significa nella TO vedere e percepire il mondo in modo matematico – questa accezione dell'apprendimento apre ad una più esaustiva ed efficace nozione di competenza, come ha già evidenziato Fandiño Pinilla (2005), distinguendo una competenza interna alla matematica e una che si manifesta nel saper vedere il mondo con occhi matematici. L'apprendimento non è quindi identificabile con uno specifico funzionamento

cognitivo finalizzato a certe performance o alla risoluzione di problemi; tali attività sono solo alcuni dei mezzi per realizzare quel tipo di *praxis cogitans* o riflessione matematica che chiamiamo nel suo complesso “pensiero matematico”. La prima di queste due dimensioni riguarda i meccanismi e gli strumenti per l’accesso alla conoscenza matematica, mentre la seconda dimensione riguarda il ruolo della classe come insieme di studenti che condividono prassi, come comunità in cui l’individuo dà significato al sapere culturale anche come scambio di relazioni sociali e realizza sé stesso attraverso l’essere-con-gli-altri. Le due dimensioni sono distinguibili ma non separabili, in quanto l’una non può realizzarsi senza l’altra.

Per la didattica della matematica il problema centrale da chiarire, se ci si colloca all’interno della TO, è come si accede alla conoscenza già depositata, storicizzata, “ufficiale” e costituente una cultura socialmente riconosciuta. In questo senso essa è chiamata a dare una risposta epistemologica, cioè relativa non solo agli oggetti matematici ma anche, e forse soprattutto, alle modalità di accesso a essi.

La risposta fornita della TO è coerente con la sua caratterizzazione ontologica e si distanzia soprattutto da una concezione costruttivista dell’acquisizione della conoscenza. Radford sottolinea infatti la differenza della TO rispetto alle teorie classiche di tipo costruttivista in didattica della matematica, affermando che queste ultime assumono, anche se spesso solo implicitamente, una posizione ontologica di stampo realista (Radford, 2007).

La concezione epistemologica kantiana, sulla quale si basano talvolta implicitamente secondo Radford le teorie classiche in didattica della matematica (Radford, 2007, p. 1788), è legata al cambiamento sociale e culturale determinato dall’introduzione sistematica delle manifatture, cioè dall’espansione e dalla sistematizzazione dell’attività economica e di quella della produzione nel superamento del sistema feudale, e si distingue dalla concezione puramente mentalista dei razionalisti (ancora Descartes, Leibniz, ...), per i quali l’individuo può giungere alle verità matematiche esclusivamente attraverso un’attività mentale introspettiva, nonché da quella degli empiristi (Locke, Hume, ...), per i quali l’individuo riceve passivamente input sensoriali che usa per formulare idee. Infatti, per Kant il pensatore è un essere in azione: “the individual is craftsman of his/her own thinking” (Radford, 2008a, pp. 222–223). Citando Arendt (1958), Radford sintetizza il cambiamento epistemologico che porta da un’epistemologia legata all’“oggetto che si apprende”, tipica dell’uomo medievale, a un’epistemologia legata al processo, cioè al “come si apprende”, tipica dell’uomo moderno. Per dirlo in termini filosofici, dall’uomo a-individuale la cui esistenza e il cui senso sono strettamente e unicamente legati a una società de-personalizzante di appartenenza e sudditanza (religiosa, sociale, ...) a un essere produttore, *faber (Faber est suae quisque fortunae)*, essere cosciente della sua stessa esistenza e della propria produzione. Nonostante consideri il processo di

costruzione e non il suo oggetto, la concezione kantiana non si distacca però da un'impostazione razionalista della conoscenza e della sua costruzione, né individuale né collettiva. La dicotomia processo-oggetto richiama, in seno al razionalismo, la dicotomia soggetto-oggetto, che è stata superata dallo stesso Kant:

Debemos también hacer una segunda esencial distinción entre los racionalistas. Dado que el conocimiento tiene dos polos, el sujeto que conoce y el objeto conocido, debemos distinguir entre quienes consideran el principio activo, o criterio de verdad, en el primero y quienes lo atribuyen al segundo. Tenemos así los idealistas, en el primer caso, Fichte, Schelling, Hegel, y los realistas, Aristóteles, Leibniz, Espinoza. En medio está Kant: las formas a priori están en el sujeto, y constituyen un filtro obligado para el objeto, que no es conocido sino mediante su construcción en forma de "fenómeno" (Kant, 2000). (D'Amore, 2018, p. 106)

Radford sottolinea il fatto che, nonostante la concezione costruttivista sia interessante dal punto di vista storico, essa fa sorgere molte questioni, come per esempio la condanna di un soggettivismo estremo che, se fosse stato reale, avrebbe condannato l'umanità a rimanere ancora nelle caverne, impegnata a cercare di accendere il fuoco (Laborit, 1985, citato in Radford, 2008a, p. 223), dato che il costruttivismo non spiega, non implica, non contempla l'evoluzione culturale della ricerca di idee nuove, ma il semplice raggiungimento di determinati obiettivi. Inoltre, afferma Radford, l'idea della conoscenza come costruzione personale è ancora più problematica nell'ambito dell'insegnamento-apprendimento (Lerman, 1996; Radford, 2008b) e a tale proposito condivide la posizione di Brousseau, secondo il quale un costruttivismo radicale è un'assurdità in didattica della matematica (Brousseau, 2004). Tale assurdità risiede, secondo Radford, nel fatto che non vi è alcuna garanzia che lo studente giunga, nella propria costruzione, alla forma istituzionale della conoscenza, cioè al *savoir savant* auspicato, e che è necessaria sempre un'istituzionalizzazione esterna della conoscenza che emerge dall'attività in aula; altrimenti lo studente rischia di non sapere di sapere (Brousseau citato in Radford, 2008a, p. 216). Oppure, lo studente si crea, complice talvolta il docente e la sua scelta di attività condivise, delle convinzioni mal fondate sul sapere o delle illusioni basate su quelli che Brousseau chiama "effetti" (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, & Sarrazy, 2010). A proposito del costruttivismo, Radford afferma che:

Constructing knowledge by oneself is certainly *one* form of knowing among others. But stating that this is the only possible one fails to capture the diversity of cognitive forms of learning, knowing and being that can be found in the mathematics classroom. (Radford, 2008a, p. 223)

La risposta della TO al problema epistemologico è, come già evidenziato in precedenza, strettamente legato alla sua concezione ontologica: dato che gli

oggetti matematici sono dei pattern fissi emergenti dall'attività matematica di società all'uopo costruite, non è possibile affermare che essi vengono costruiti o ricostruiti; si tratta di un processo di attribuzione di significato agli oggetti concettuali che lo studente trova già presenti nella propria cultura, come emergenti e costituenti da/di essa. Infatti:

According to the theory of objectification, learning does not consist in constructing or reconstructing a piece of knowledge. It is a matter of endowing the conceptual objects that the students find in his/her culture with meaning. The acquisition of knowledge is a process of active elaboration of meanings. (Radford, 2007, pp. 1787–1788)

Torniamo però alla domanda iniziale: come si accede alla conoscenza depositata nella cultura? Cioè: che cosa sostituisce nella TO la fede del realista nella possibilità di accedere agli oggetti matematici per astrazione?

Secondo la TO, le “condizioni al contorno” nell'accesso alla conoscenza depositata nella cultura sono date dalla presenza delle seguenti tre componenti: (1) gli artefatti, (2) l'interazione sociale, (3) l'oggettivazione e la soggettivazione. Il pensiero che consente tale accesso è, come già evidenziato, un'attività riflessiva mediata dagli artefatti e si svolge all'interno della zona del pensiero artefattuale, che è il territorio (immaginario ma socialmente determinato, dunque esistente e reale) in cui si sovrappongono la soggettività del piano mentale dello studente e l'oggettività culturale del piano sociale (Radford, 2008a, p. 219). Essendo gli oggetti matematici degli oggetti concettuali che si prefigurano come dei pattern fissi nell'attività riflessiva, co-costruiti nelle attività sociali più volte dette, acquisire conoscenza matematica nella TO significa rivestire di significato tali oggetti concettuali attraverso un'attività riflessiva condivisa, che Radford chiama *oggettivazione*, mediata dagli artefatti culturali, all'interno di un sistema semiotico di significazione culturale (Radford, 2008a, pp. 229–230).

Data la natura artefattuale ed *embodied* del pensiero (Radford, Edwards, & Arzarello, 2009; Nemirovsky, 2003; Roth, 2001; Seitz, 2000), nella TO è necessario spiegare in che modo viene mediata tale attività riflessiva; per fare ciò Radford fa riferimento ai cosiddetti *mezzi semiotici di oggettivazione* che egli definisce come segue:

These objects, tools, linguistic devices, and signs that individuals intentionally use in social meaning-making processes to achieve a stable form of awareness, to make apparent their intentions, and to carry out their actions to attain the goal of their activities, I call *semiotic means of objectification*. (Radford, 2003b, p. 41)

Vedremo di seguito come si caratterizzano le componenti appena descritte e come esse interagiscono configurando quel fenomeno sociale che chiamiamo “apprendimento”.

2.4. *La conoscenza depositata negli artefatti*

Gli artefatti hanno il ruolo di stabilire il contatto con il mondo, “materializzando” il pensiero e facendolo diventare “thinking-with-and-through-artifacts” (Radford, 2008a, p. 223); ma essi sono anche depositari dell'attività cognitiva e quindi della conoscenza raggiunta, costruita, depositata in un ipotetico forziere culturale sociale, dalle generazioni precedenti. Tuttavia gli artefatti non agiscono autonomamente come mediatori, non possono farlo, non avendo una esistenza, una corporalità, una coscienza di sé; essi necessitano di attività sociali umane che diano loro senso e di un essere umano che li sappia usare e che sia in grado di riconoscere, individuare, sfruttare l'intelligenza in essi depositata e di poter dunque aiutare altri (per esempio gli allievi) a scoprirla da sé, a farla propria nell'ambito di un progetto sociale, opportunamente condiviso (Radford, 2008a).

2.5. *L'interazione sociale*

Nella TO l'aula scolastica non è vista solo come uno spazio materiale in cui negoziare significati e adattare sé stessi all'ambiente; questo sì, ma essa è anche uno spazio simbolico che veicola valori scientifici, etici, estetici e altri storicamente costituiti, impressi nei “linguaggi sociali” (Bakhtin, 1986), e forma le capacità umane: “Rather than performing a merely adaptive function – a catalyzing or facilitating one – interaction is consubstantial to learning” (Radford, 2008a, p. 225).

L'attribuzione di significato che si basa sulla dimensione materiale (tramite gli artefatti) e su quella sociale (tramite l'interazione sociale) “has profound psychological importance inasmuch as it is both a progressive immersion into cultural forms of thinking as well as the process of development of the specific capacities of the individual – cognitive, ethical, subjective, etc.” (Radford, 2008a, p. 225).

2.6. *Oggettivazione e soggettivazione*

Nel contesto della TO, apprendere – che può essere riassunto sotto i termini oggettivazione-soggettivazione e che può essere visto come il processo che coinvolge “la soggettivazione e la trasformazione dovute all'apprendimento e all'oggettivazione” (D'Amore, 2015, p. 155) – non significa solo acquisire qualcosa nel senso di impossessarsene, ma significa anche entrare a far parte attiva della cultura esistente e socialmente/storicamente depositata e costruita, per trovare qualcosa in essa. In questo senso non si tratta, ribadisce ancora una volta Radford, di una costruzione o di una ri-costruzione o di una riproduzione o re-invenzione, ma dell'atto con cui l'individuo, che incontra l'altro (nelle diverse accezioni del termine) e gli oggetti culturali, trova sé stesso (Radford, 2008a, p. 225): “This creative process of finding or noticing something (a dynamic target) is what I have termed elsewhere a process of

objectification (Radford, 2002)” (Radford, 2008a, p. 225).

L’oggettivazione è dunque il processo creativo tramite il quale il soggetto oggettiva la conoscenza culturale e, così facendo, trova-costruisce-riconosce-crea sé stesso, in un atto riflessivo che può essere chiamato *soggettivazione* (Radford, 2008a, p. 225); il “prodotto” di questo processo è in realtà la natura umana stessa, intesa come il processo di creazione dell’uomo storico, che emerge come il valore non solo del proprio lavoro, ma anche delle proprie origini culturali e sociali (D’Amore, 2015, pp. 155–156). “Conoscere”, nel contesto della TO, è dunque nello stesso tempo un processo, un modo d’essere e di divenire, una modalità attiva di appartenenza alla società storica e culturale nella quale si è immersi, finalmente con consapevolezza.

2.7. *L’aula di matematica come spazio ideale di apprendimento. Il ruolo dell’attività di apprendimento*

Secondo la definizione di “attività” data da Leontiev (1969), a cui Radford fa di frequente riferimento, uno degli elementi centrali di tale concetto è il suo obiettivo (*objective*). Nella conoscenza dell’obiettivo vi è necessariamente un’asimmetria tra studente e docente: lo studente non conosce il vero obiettivo dell’attività mentre il docente sì. Tale asimmetria non è però da intendersi come un celare, un tenere nascosto allo studente il vero fine dell’attività, quanto come una condizione insita nel concetto stesso di apprendimento: se lo studente conoscesse già l’obiettivo non avrebbe bisogno di apprenderlo. Ciò che distingue la TO dalle teorie classiche nell’attribuzione del ruolo all’apprendimento è la sua dimensione etica, che va oltre a quella relativa alle competenze matematiche; in essa vi è un’unione tra il sapere concettuale (realizzato tramite la risoluzione di problemi) e l’essere in matematica, essere come individuo inserito in una società etica (fatta di principi, di norme, di idee condivise), culturale, storicamente determinata cui l’individuo appartiene, ma ancora spesso non consapevolmente. Come afferma Radford:

Behind the objective of the lesson, there lies a greater and more important objective – the generally held objective for the teaching and learning of mathematics – namely, the elaboration on the part of the student of a reflection defined as a communal and active relationship with his/her cultural historical reality. Unfortunately, the learning of mathematics has often been reduced to merely obtaining a certain conceptual content. (Radford, 2008a, p. 226)

Il concetto di attività ha una valenza particolare nella TO non solo in riferimento alla definizione del suo obiettivo, ma anche in riferimento alla sua caratterizzazione intrinseca. Tale concetto ha acquisito un significato peculiare nella TO, tanto da richiedere una terminologia propria, specifica, individuata da Radford nel termine *labour* che riteniamo necessario spiegare in dettaglio poiché esso è essenziale per la comprensione del concetto di insegnamento-apprendimento nella TO.

Radford (2014a) analizza i processi di insegnamento-apprendimento che si

sviluppano in aula attraverso la categoria marxista della logica di produzione, l'insieme di convinzioni, visioni del mondo, atteggiamenti, sensibilità e valori che regolano anche l'attività in aula. Essa determina la conoscenza e le soggettività, quelle degli allievi e dell'insegnante, che vengono co-prodotte nell'aula di matematica, uno spazio metaforico, oltre che fisico, in cui gli individui creano un gruppo sociale le cui caratteristiche e i cui scopi possono essere inquadrati con accezioni molto diverse tra di loro, in maniera tale da determinare implicitamente anche il concetto stesso di azione e di valore del suo frutto, cioè del *labour* (D'Amore, 2015, pp. 159–161). La logica di produzione costitutiva delle due principali correnti in educazione matematica dello scorso secolo, il programma trasmissivo e quello progressivo, ha le seguenti caratteristiche:

- la matematica è considerata come un'entità a sé stante, invariabile e avulsa dai processi storici e culturali in cui si è sviluppata; un bene di consumo che lo studente deve in qualche modo arrivare a possedere;
- in questa logica utilitaristica e consumistica della conoscenza, la relazione tra insegnante e allievi è un rapporto di potere (ovviamente caratterizzando questo termine in modo opportuno) che regola i processi attraverso i quali lo studente si appropria di un sapere matematico codificato e determinato per lui [si pensi alla dicotomia: sapere personale/sapere istituzionale (Godino & Batanero, 1994; Chevallard, 1999)].

Anche se determinati dalla stessa logica di produzione, i programmi trasmissivo e progressivo attribuiscono ruoli diversi all'insegnante e all'allievo. Nel programma trasmissivo, l'insegnante gioca un ruolo attivo nel "consegnare" il sapere all'allievo. In quello progressivo, l'allievo gioca un ruolo attivo in quanto l'apprendimento può avvenire solo se egli costruisce autonomamente il proprio sapere e l'insegnante assume il ruolo di un "consulente finanziario" (Radford, 2014a) che facilita i processi di apprendimento che però devono essere amministrati dall'alunno stesso, dato che questi sviluppa un ruolo attivo e mette sé stesso in gioco.

La logica di produzione utilitaristica e consumistica sottostante il programma trasmissivo e quello progressivo porta a una situazione che viene definita alienante (Radford, 2014a, 2016), in quanto l'attività che ne risulta non è una *forma di vita* (Radford, 2008a, 2016), non è la manifestazione dell'esperienza sensibile dell'individuo nella sua espressione materiale, intra e inter-personale e storico culturale, ma è una forma di sudditanza gerarchica e sociale (Marx, 1962, 1968). Nell'attività matematica, l'individuo è alienato nella relazione con gli altri e dalla dimensione storico-culturale che costituisce il significato più profondo del sapere matematico.

Alienation consists instead in the precise fact that the produced object is no longer the individual's expression. What is alienating here is hence the loss of

expressivity of life in the object. To put it succinctly, alienation is the loss of objectivation. The loss of objectivation – i.e., the loss of self-expression in the object – can only be alienating for a species, like ours, for which objectivity is part of its nature. Instead of expression, achievement, and self-realization, we have a product that becomes a thing. (Radford, 2016, p. 261)

La logica di produzione della TO, che deriva dalla dialettica materialista, si basa su presupposti radicalmente diversi da quelli descritti sopra.

La matematica è il risultato di ed è prodotta dal lavoro sociale dell'essere umano, una sintesi culturale dell'agire umano, un sapere dinamico e in continua evoluzione. Il sapere matematico non si configura come un'entità eterna e immutabile, è sempre presente e continuamente costruito, in potenza nelle sue indefinite possibili determinazioni e in atto nell'attività riflessiva mediata. Il sapere matematico non è rappresentabile, acquisibile, qualcosa di cui ci possiamo appropriare, è indeterminato e generale, ma oggettivabile in *modalità di produzione della conoscenza* (Radford, 2014b, 2016). Affinché esso diventi un oggetto del pensiero e della coscienza individuale è necessario metterlo in movimento – produrlo, nel senso etimologico di portarlo davanti – attraverso la mediazione culturale dell'attività riflessiva.

La logica di produzione dialettico-materialista ripositiona il ruolo dell'insegnante e dell'allievo nei processi di insegnamento-apprendimento, concepiti come attività nelle quali insegnanti e allievi producono *insieme* il sapere matematico, secondo *forme di collaborazione umana* (Radford, 2014a, 2016). Insegnanti e allievi, nello scenario storico e culturale cui appartengono entrambi, anche se in forme personali e sociali diverse, conducono l'attività insieme, lavorano insieme per produrre collettivamente la conoscenza matematica attraverso modi di pensare e di agire dinamici e collettivi, che includono modalità di indagine matematica, concezioni della verità, ricerca di evidenze matematiche, argomentazione matematica, uso di simboli e costruzione di significati.

Nell'alveo della dialettica materialista, all'interno del quale si è sviluppata la TO, la conoscenza ha una doppia natura, in *potenza* e in *atto*. La conoscenza è una sintesi culturale delle pratiche umane, dinamiche e in continua evoluzione. Da un lato possiamo considerare tali pratiche come pura possibilità, vale a dire in potenza, indeterminate, generali e non rappresentabili: “This is what school knowledge is when the student crosses for the first time the school door – *pure open possibility*.” (Radford 2014a, p. 7). Dall'altro, è possibile considerarle determinate, in atto, situate in uno specifico contesto sociale come potrebbe essere la vita d'aula. L'oggettivazione è quel processo che, attraverso l'attività riflessiva mediata, permette alla conoscenza nella sua dimensione indeterminata e in potenza di assumere una specifica e concreta determinazione culturale, come conoscenza in atto.

In this context the general/singular (or abstract/concrete) are not two opposed,

disjoint kinds. They are two entangled ontological categories – two moments in the becoming of knowledge. This is why, in its becoming through activity, knowledge and concepts are simultaneously abstract and concrete. (Radford, 2014a, pp. 7–8)

L'insegnamento e l'apprendimento non sono due attività separate, ma la stessa e unica attività nella quale, insegnante e allievi, con compiti diversi, *si impegnano insieme*, intellettualmente ed emozionalmente, nella produzione di una conoscenza – vale a dire l'incarnazione di una delle sue possibilità, attivate dall'agire sociale e culturale di insegnanti e allievi i quali entrano così a far parte della società che tali conoscenze ha elaborato e costruito (Radford, 2016, p. 5). Nella logica di produzione dialettico-materialistica, le forme di collaborazione umana sono ispirate a precisi valori etici: si tratta di *un'etica comunitaria* (Radford, 2014a) che promuove forme di interazione umana suggerite, proposte, create dalla solidarietà, l'impegno, la responsabilità e la cura. Un'etica basata su una concezione non essenzialista dell'individuo che si costituisce nella relazione con l'alterità.

Le modalità di produzione della conoscenza e le forme di collaborazione umana sono intrecciati in quello che Radford (2014a, 2016, 2018) chiama *joint labour*. Il *joint labour* rappresenta il punto di incontro dei processi di oggettivazione e soggettivazione. Da un lato, nel *joint labour* si realizza l'attività che conduce dal sapere come possibilità in potenza a una sua attualizzazione determinata (oggettivazione) e dall'altro, al contempo, insegnanti e allievi co-producono, con le stesse azioni, la propria individualità (soggettivazione). Così come il sapere ci appare come pura possibilità di conoscenza, anche i modi d'essere della soggettività umana si presentano come pura possibilità, possibilità di divenire (Radford, 2014a). Nel *joint labour* si supera la dicotomia insegnante-allievo, prigioniera dei rapporti di potere tipici di una visione consumistica e privatistica dell'apprendimento. L'insegnante e i suoi allievi sono fusi nel loro obiettivo comune di produrre conoscenza e co-produrre loro stessi, trasformando il lavoro in aula da esperienza alienante a esperienza di compiutezza estetica, intellettuale e sociale. Radford (2006) paragona la relazione tra l'insegnante e i suoi allievi a quella che si instaura tra il direttore e la sua orchestra:

She (the teacher) *needs* the students – very much like the conductor of an orchestra, who may know Shostakovich's 10th Symphony from the first note to the last, needs the orchestra: it is only out of joint labour that Shostakovich's 10th can be produced or brought forward and made an object of consciousness and aesthetic experience.

Now, the 'need' to which I am referring here is not merely rational. The 'need' is thoroughly *emotional*. It requires a deep emotional connection between participants. Thus in the best musical performances, the conductor and the musicians work truly collectively, attuning and responding to each other. Maybe

one of the best examples of joint labour is the amazing tuning of Venezuelan conductor Gustavo Dudamel and the Simón Bolívar Youth Orchestra (see <http://www.youtube.com/watch?v=XKXQzs6Y5BY#aid=P9NiWZi3QJQ> particularly from 27:50 to 35:00). This musical example intimates that forms of (musical) knowledge production are deeply entangled with forms of human interaction and cooperation. The same is true of classroom mathematical knowledge. The mathematics teacher and the students *need* to labour together to bring forward various mathematical interpretations and make them the object of an intellectual, reflective, and aesthetic experience. This joint labour is, simultaneously, intellectual and emotional; they cannot be separated. They are two sides of the same coin. We may conclude, then, by noticing that, although there is a division of labour that is induced by the manner in which teachers and students engage in their joint labour – division of labour that has to do with the teacher’s awareness of the didactical intentions, etc. – the teacher and the students need each other to bring knowledge forward.

The communitarian ethic mentioned in the previous section finds its full expression in the theoretical articulation and practical elaboration of this mutual ‘need’ of teachers and students. (Radford, 2014a, pp. 11–12)

Come afferma Radford, l’attività a cui si riferisce il termine *labour* non è quella dell’essere semplicemente occupati con qualcosa (Aktivität in tedesco / aktivnost’ in russo), ma deve essere intesa come Tätigkeit (in tedesco) / deyatel’nost’ (in russo): “una forma sociale di comune tentativo attraverso il quale gli individui producono i loro mezzi di sostentamento mentre producono loro stessi come esseri umani” (Radford, 2018, p. 141).

L’essere umano è soggetto attivo nell’attività creativa, che “comprende nozioni di auto-espressione, sviluppo razionale e piacere estetico” (Donham, 1999, p. 55, citato in Radford, 2018, p. 141). Citando ancora Radford: “Più precisamente, *attività* come Tätigkeit/ deyatel’nost’ è una *forma di vita*” (*ibidem*); una forma di vita che è tale nel vivere-con-gli altri dell’individuo. Per evitare la confusione con altri significati, nella TO l’attività intesa come Tätigkeit/ deyatel’nost’ è, come abbiamo già detto, chiamata *joint labour* (Radford, 2014a, 2016).

Il concetto di *joint labour* è la categoria base della TO; esso la differenzia dalle teorie di stampo razionalista ed empirista (Radford, 2018, p. 141) poiché assume un ruolo centrale basato su una concezione antropologica dialettica materialista. Citando Spinoza, Radford sottolinea come l’essere umano sia un essere naturale che, alla pari di tutti gli esseri naturali, cerca fuori da sé il soddisfacimento dei propri bisogni.

To meet their needs (needs of survival and also artistic, spiritual, and other needs created by/in society), humans engage themselves actively in the world. They produce. What they produce to fulfil their needs occurs in a social process that is, at the same time, the process of the individuals’ inscription in the social world and the production of their own existence. The name of this process is what in the previous section I have termed joint labour. Sensuous, material *joint labour* is

considered the ultimate field of aesthetic experience, subjectivity, and cognition. Joint labour as the central category of the TO asserts the fundamental ontological and epistemological role of matter, body, movement, action, rhythm, passion, and sensation in what it is to be human. (Radford, 2018, p. 141)

Per comprendere meglio perché Radford considera quello di *joint labour* come la categoria concettuale alla base della TO, è sufficiente riflettere sulle implicazioni che essa ha sulla concezione dei ruoli degli attori del processo di insegnamento-apprendimento e sul processo stesso. Nella prospettiva del *joint labour* proposta da Radford, non è possibile distinguere un'attività di insegnamento da una parte e un'attività di apprendimento dall'altra: si tratta di un'unica attività lavorativa che non può essere svolta se non insieme, perseguendo un fine comune. L'individuo, che è un'entità relazionale, prende parte al *joint labour* ed è “profoundly linked to an ensemble of material and immaterial relationships with other parts of nature – including social relationships – and is based on culturally and historically constituted conditions of life” (Radford, 2018, p. 141).

2.8. I livelli di generalità

Come già evidenziato in precedenza, nell'ambito della TO gli oggetti matematici sono dei pattern fissi dell'attività riflessiva incapsulati nella cultura creata dalla società di appartenenza degli attori del *joint labour*. Tali pattern fissi hanno tuttavia diversi livelli di generalità, in base al mezzo semiotico che oggettiva il significato culturale che essi rappresentano. L'attività di insegnamento (cioè la parte del *joint labour* convenzionalmente riferita all'insegnante dal punto di vista sociale e pragmatico) consiste dunque nell'offrire situazioni ricche e significative che consentano allo studente di percepire i diversi livelli di generalità nell'interazione con gli altri, supportati dai significati forniti dagli artefatti e dall'interazione sociale tra studenti o tra insegnante e studenti (Radford, 2008a, p. 226). L'apprendimento in matematica è caratterizzato dalla possibilità di integrare e ripercorrere i diversi livelli di generalità:

For the student, the learning process [cioè la sua parte del *joint labour*] consists in becoming receptive to others and fluidly conversant with the various layers of generality of the object and their enabling forms of action – e.g. techniques and reflections on these techniques (Bosch & Chevallard, 1999), modelling (Lesh et al., 2003), etc. (Radford, 2008a, p. 225)

2.9. Da una concezione trasmissiva dell'insegnamento all'apprendimento come *joint labour*

Possiamo dire che la TO studia in maniera molto approfondita e coerente l'accesso alla conoscenza, un aspetto che non era contemplato dalle teorie precedenti in didattica della matematica, i cui lavori pionieristici erano più

interessati ad affermare la *possibilità* di analisi e studio del fenomeno dell'acquisizione di conoscenza, in un periodo storico in cui la didattica della matematica stava emergendo come una nuova scienza e in cui era necessario mettere in luce la necessità di una emancipazione cognitiva dello studente dal modello autoritario e trasmissivo della conoscenza. Il concetto di *costruzione*, la cui intrinseca intenzionalità mette in luce la necessità di una presa in carico della propria conoscenza (D'Amore, 1999, 2003), acquisisce così una posizione centrale nelle teorie didattiche che sorgono in quel momento storico e verrà poi riconosciuto come fondante delle stesse teorie. La TO evidenzia non solo che un costruttivismo puro è un'assurdità, ma caratterizza l'apprendimento come un processo ricorsivo di oggettivazione e soggettivazione della conoscenza storico-sociale semioticamente codificata, i cui strumenti sono i mezzi semiotici di oggettivazione e gli artefatti. La TO mette allo stesso tempo in luce molti aspetti determinanti per l'accesso alla conoscenza e che sembrano essere in aperta contraddizione con una concezione costruttivista: la dimensione storica e sociale dei concetti matematici, non solo in riferimento a una loro interpretazione storico-epistemologica, ma anche e soprattutto in riferimento al processo di apprendimento; l'impossibilità di considerare l'apprendimento e l'insegnamento come due processi separati e la conseguente necessità di considerare un'azione congiunta, esprimibile tramite il concetto di *joint labour*; la necessità di recuperare la dimensione soggettiva in chiave molto diversa rispetto a quella di un soggetto che apprende adattandosi a un ambiente, cioè considerando come forza propulsiva dell'azione soggettiva la realizzazione di un soggetto, di un Io sociale, di un'azione il cui contesto naturale è il *joint labour*, in assenza del quale si produce alienazione.

3. La teoria delle situazioni: aspetti teorici e fondazionali

3.1. *Nascita della teoria delle situazioni su basi empiriche*

La teoria delle situazioni (TSD) è senza alcun dubbio la prima teoria nata in seno a quella scienza che, dopo varie vicissitudini, si chiamò “Didactique des mathématiques” (DdM); la contemporaneità, a nostro avviso, è dovuta al fatto che la nascita della TSD deve essere identificata con la fondazione della scienza che la tenne a battesimo. Senza alcun dubbio di smentita affermiamo inoltre che entrambe queste costruzioni teoriche hanno come comune artefice Guy Brousseau, non a caso nel 2003 prima medaglia Felix Klein dell'ICMI (International Commission on Mathematical Instruction).

A testimonianza della precedente affermazione citiamo riferimenti bibliografici assai diversi e distanti tra loro nel tempo, fra le molte centinaia che si potrebbero indicare (Artigue, Gras, Laborde, & Tavignot, 1994; Brousseau, 1997, 2015).

In occasione del Convegno Internazionale cui si fa riferimento nell'ultima

citazione (Santa Marta, Colombia, 2015), Guy Brousseau presentò (il giorno dell'inaugurazione) un video realizzato sotto forma di intervista, di estremo interesse dal punto di vista storico, nel quale racconta con dovizia di particolari e in prima persona singolare, le avventure connesse a questa doppia creazione, non priva di difficoltà (Brousseau, 2015).

Brousseau è autore a tutt'oggi (2019) di più di 1000 pubblicazioni, in un certo senso tutte inerenti il tema qui delineato; scegliamo di citare qui di seguito solo quelle che vanno dalle prime origini (1965) al 1986, l'anno che molti di noi considerano la fine delle anticipazioni a-sistematiche e l'inizio ufficiale della scienza DdM e della TSD, quando vide la luce un articolo che possiamo considerare come uno dei più citati dagli studiosi internazionali che si occupano delle origini della DdM (Brousseau, 1986b). Esso corona più di 20 anni di sforzi, di studi, di ricerche, di riflessioni anche concrete in aula,² secondo un paradigma teorico di prim'ordine (Brousseau, 1965, 1972, 1975, 1976, 1980a, b, 1981, 1982, 1984, 1986b; Brousseau & Pères, 1981).³

Va detto che:

- a) pubblicare studi di questo tipo, così all'avanguardia, senza nulla di analogo, così lontani dalle abitudini legate a suggerimenti pratici, senza riferimenti alla matematica accademica, era tutt'altro che facile in quell'epoca, dominata dai giocattoli didattici creati e dagli strumenti spacciati per miracolosi ideati da vari inventori (Zoltan Dienes, George Papy, Georges Cuisenaire, ...) (D'Amore, 1999, pp. 32–51);
- b) ancora per quasi un decennio dopo la pubblicazione di Brousseau (1986b), le problematiche dell'insegnamento-apprendimento della matematica si identificavano con la divulgazione matematica e con l'uso in aula di giocattoli o strumenti; ciò ha portato a distinguere due fasi nella storia della DdM, una prima fase A (*ars docendi*) tutta dedicata alle problematiche relative all'insegnamento, una seconda fase B nella quale l'attenzione si sposta decisamente sull'apprendimento (dopo la metà degli anni '80) (D'Amore, 1999; D'Amore, 2003).

È allora doveroso ricordare immediatamente che, pur facendo dell'apprendimento della matematica il fulcro dell'azione di ricerca e il

² Fin dal 1962 Guy Brousseau e i suoi collaboratori, hanno effettuato esperienze dirette in aula, all'inizio a Talence, vicino a Bordeaux, presso la scuola J. Michelet e poi in molte altre. Fra le insegnanti che diedero un forte impulso teorico ci piace ricordare Nadine Labesque (poi Brousseau). Sugli aspetti pragmatici e concreti della base empirica della TSD torneremo più volte.

³ Tra il 1970 ed il 1973 Guy Brousseau pubblicò diversi articoli nei quaderni dell'IREM di Bordeaux I dal titolo: "Compte-rendu du séminaire de recherches 1971-72 et projets pour 1972-73"; ma poi queste pubblicazioni continuarono fino al 1978. Impossibile citare formalmente queste pubblicazioni perché spesso si tratta solo di fogli dattiloscritti e ciclostilati o fotocopiati, di impossibile reperimento.

massimo interesse nella nuova DdM, essa non si pone come obiettivo quello di stabilire *come* avviene il fenomeno dell'apprendimento, anche se riusciremo comunque ad evincere alcune ipotesi traendole dai testi. In quell'epoca dominavano le tesi a questo proposito di Jean Piaget che possiamo così sintetizzare: ogni conoscenza si costruisce attraverso un'interazione costante tra il soggetto apprendente e l'ambiente, grazie all'oggetto il cui apprendimento è in gioco, secondo fasi strettamente determinate. I contenuti di tale apprendimento sono la base a partire dalla quale si sviluppa la gerarchia delle strutture mentali dell'apprendente.

Nel delinearne l'adattamento dell'apprendente all'ambiente si usa spesso la dicotomia “assimilazione e accomodamento”:

Per “assimilazione” va inteso quel processo per cui ogni nuovo dato di esperienza viene incorporato in “schemi mentali” che già esistono nel bambino (schemi di azione, ovvero percettivo-motori e schemi di spiegazione o previsione) senza tuttavia che, in seguito a tale incorporazione, abbia luogo alcuna modificazione di tali schemi. (...).

Il termine “accomodamento” indica un processo complementare al primo. I nuovi dati di esperienza che vengono incorporati in schemi già posseduti, modificano questi ultimi, adattandoli ai nuovi ed inattesi aspetti che la realtà dimostra di possedere. (Petter, 1961, pp. 23–24)

Non sembra così rilevante l'interazione allievo-docente, che invece assumerà importanza decisiva nella TSD, come vedremo, ribaltando le ipotesi piagetiane.⁴

In più occasioni l'opposizione di Brousseau alle tesi di Piaget è forte e ne critica le fondamenta; si veda per esempio Brousseau (1986b, p. 49); l'unica concessione che viene fatta a Piaget, relativamente all'apprendimento, è relativa alla idea di *assimilazione* e *accomodamento*, sulla quale torneremo in seguito.

Ben diversa è la posizione di Vygotskij sull'apprendimento, dato che questi riconosce l'importanza principale dell'apprendimento connessa all'interazione sociale fra i soggetti coinvolti, adulti-insegnanti e bambini: l'apprendimento è il prodotto di questa interazione (Vygotskij, 1966). Mediatore fra individuo e cultura è il linguaggio: la formazione di un concetto avviene con un'operazione intellettuale che è “guidata dall'uso delle parole che servono per concentrare attivamente l'attenzione, astrarre certi concetti,

⁴ Vale la pena qui fare riferimento a un altro grande paladino degli esordi della DdM, Gérard Vergnaud. La sua notevole statura scientifica è testimoniata dal fatto che il sottotitolo del testo (già citato) (Artigue, Gras, Laborde, & Tavignot, 1994) cita: “Hommage à Guy Brousseau et à Gérard Vergnaud”, insieme. Vergnaud è stato allievo dottorale di Jean Piaget ma i suoi studi di ricerca se ne sono distanziati assai presto, avvicinandolo molto alle posizioni della DdM dei primordi. Si veda Vergnaud (1981), D'Amore (1999, specie le pagine 206–209) e D'Amore (2002a). Dunque, perfino un allievo diretto di Jean Piaget, affrontando veri problemi connessi con l'apprendimento della matematica, prende strade alternative.

sintetizzarli e simbolizzarli per mezzo di un segno” (Vygotskij, 1966, p. 106).

L'organizzazione cognitiva del bambino riceve dunque, grazie al linguaggio, una dimensione che gli è propria, connaturata fin dal suo esordio: la dimensione sociale. Se è vero che il bambino impara a categorizzare nel rapporto linguistico con l'adulto, è però anche vero che forme embrionali di categorizzazione devono già essere presenti prima della sistemazione definitiva adulta di esse; Vygotskij stabilisce allora un confronto tra concetti spontanei o quotidiani e concetti “scientifici”: i primi hanno la caratteristica di essere relativi all'esperienza personale, i secondi fanno già parte di un sistema di concetti. La scuola ha, come effetto sulle competenze del bambino, di dare una sistematicità ai concetti che egli già possiede e che man mano acquisisce. Una posizione davvero rivoluzionaria, quella sulla quale si fonda gran parte della didattica odierna. (D'Amore, 1999, p. 70)

Vediamo come Gardner (1993) illustra la posizione di Vygotskij a proposito dell'apprendimento dei concetti scientifici:

Lo psicologo sovietico Lev Vygotskij ha contribuito a mettere a fuoco le speciali caratteristiche della scuola in sede di discussione delle differenze tra concetti “spontanei” da un lato e concetti “scientifici”, “non spontanei” o “appresi in modo sistematico” dall'altro. I concetti spontanei (come fratello o animale) sono tratti dalla vita quotidiana, mentre i concetti scientifici (come gravità o mammifero) vengono appresi soprattutto in un ambiente scolastico. Le definizioni dei concetti scientifici, che pure sono spesso alquanto tecniche, si imparano più prontamente che non quelle dei concetti spontanei, e ciò per diverse ragioni. I concetti scientifici rappresentano lo specifico campo di azione della scuola; vengono insegnati verbalmente dai docenti; le loro definizioni hanno una nettezza che non è facile introdurre nei concetti spontanei; appartengono, infine, a un sistema di concetti di cui si possono esplorare le interrelazioni. Così, anche se le intuizioni del bambino al riguardo della famiglia sono piuttosto evolute, egli avrà vita più facile quando gli si chiede di definire il principio di Archimede che quando si troverà a spiegare che cos'è una famiglia. Senza dubbio Vygotskij ha ragione quando afferma che i bambini *sembrano* padroneggiare i concetti scientifici con maggiore sicurezza di quelli spontanei; eppure (...) la conoscenza scientifica spesso è alquanto fragile e viene facilmente sovrastata dai concetti spontanei in quanto più profondamente radicati nella mente. (Gardner, 1993, p. 145)

C'è da dire che, mentre negli anni '60-'80 gli studi di Piaget circolavano dovunque, dettando legge in tutta Europa, quelli di Vygotskij cominciarono pian piano ad apparire in lingue diverse dal russo, assai poco frequentato dagli studiosi dell'Europa occidentale e dagli statunitensi. Se questo materiale fosse stato disponibile al tempo della fondazione della TSD, forse alcuni punti salienti e basilari della TSD avrebbero potuto mutare, ma così non fu. I lavori originali di Vygotskij sono degli anni dal '30 al '60, ma apparvero in Europa solo ben oltre il 1960 (Vygotskij, 1966, 1974, 1978; Vygotskij & Lurija,

1987); uno studio formidabile in francese sullo psicologo russo è del 1985 (Bronckart & Schneuwly, 1985). Va anche ricordato che le traduzioni delle opere di Vygotskij in Europa Occidentale sono state oggetto di molte critiche.

L'articolo citato per ultimo nell'elenco degli scritti di Brousseau (1986b) e tradotto in almeno 4 lingue, per quanto ne sappiamo, è dunque decisamente il punto di partenza ufficiale della DdM e della TSD. Ma l'articolo (Brousseau & Pères, 1981) ebbe una rilevanza internazionale che desideriamo porre in evidenza. In esso si studia una reale situazione d'aula (interazioni multiple diacroniche fra docente-allievo-Sapere, come diremo meglio fra poco) sulla base dell'apprendimento (o, meglio, del mancato apprendimento) e si analizzano le cause dell'insuccesso sulla base di motivazioni strettamente inerenti a una teoria didattica, la TSD, o meglio, di alcune sue componenti che appena cominciavano a vedere la luce.

Dunque, le origini delle componenti teoriche della TSD sono il risultato di analisi di fatti reali studiati empiricamente in aula. Fin da allora, lo scopo di questa teoria era quello di evitare il mancato apprendimento, l'insuccesso apprenditivo, studiarne le cause e proporre attività concrete per rendere possibile, anzi più efficace, l'apprendimento. Ci sembra di poter sostenere che la base di questi studi è uno stretto empirismo e la costante analisi delle situazioni d'aula reali.

Soddisfatte le necessità cronologico-storiche, diciamo in sintesi quali sono le componenti della TSD sulle quali vogliamo porre l'attenzione principalmente:

- triangolo della didattica e trasposizione didattica, ingegneria didattica;
- contratto didattico, clausole, effetti;
- milieu;
- teoria degli ostacoli.

Si tratta di temi talmente noti, che li presenteremo ciascuno in poche parole, per evidenziare soprattutto quel che a noi preme di più, nel contesto di questo lavoro, e cioè di che cosa la TSD NON si occupa.

3.2. Componenti della TSD

1. Triangolo della didattica e trasposizione didattica, ingegneria didattica

Si chiama usualmente *triangolo della didattica* uno schema che presenta quelli che sono considerati i tre poli della situazione d'aula: Sapere, docente, allievo. Tale schema è talmente noto che ci limitiamo a suggerirne una presentazione superficiale (D'Amore, 1999, pp. 219–222) e un'analisi metodica assai più approfondita che tiene conto di tutti gli sviluppi teorici che si sono presentati a questo proposito fin dalla nascita di questa idea negli anni '80 (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2002).

Per *trasposizione didattica* si intende il necessario passaggio professionale che il docente deve effettuare per trasformare il suo Sapere (colto, adulto,

basato sulla disciplina intesa in senso universitario) e quel sapere che dovrà insegnare (sapere da insegnare) in aula, tenendo conto delle conoscenze e delle maturità dei propri allievi.

Alla coppia (Sapere, sapere da insegnare) fa logicamente seguito la coppia (sapere da insegnare, sapere insegnato) che tiene conto delle modalità scelte per l'insegnamento e dunque metodologie, strumenti eccetera; ciò porta di conseguenza l'idea di *ingegneria didattica* che, proposta inizialmente come uno studio empirico-teorico delle metodologie di insegnamento in vista però dell'apprendimento, ha finito con l'evolversi costituendo di per sé una teoria all'interno della TSD (si vedano: Artigue, 1988, 1992; Farfan Marques, 1997; Brousseau, 2008).

2. *Contratto didattico, clausole, effetti*

I temi che appaiono nel titolo sono di certo gli aspetti più noti di tutta la TSD, forse quelli così evidenti e convincenti che ne hanno decretato il trionfo su scala planetaria. Sono talmente noti che ci limitiamo solo a confermare molta bibliografia precedentemente fornita aggiungendo D'Amore, Fandino Pinilla, Marazzani e Sarrazy (2010).⁵

Facciamo solo notare che in nessuno di questi studi si propone un modello di *come* lo studente apprende ma uno studio teorico, basato su evidenze empiriche, di come l'insegnante può condurre la fase di insegnamento per evitare criticità che divengono poi insuperabili, come quelle descritte per primo da Brousseau e in seguito da tanti suoi seguaci.

Ci limitiamo a evidenziare un significativo studio di Sarrazy (1995, pp. 138–139 della trad. it.). A conferma dell'origine empirica di questo genere di ricerca, l'autore cita un esempio di risposta da parte di un allievo non sul contenuto della domanda da parte dell'insegnante, ma esplicitamente su quel che ritiene l'insegnante si aspetti da lui. La maestra propone a bambini (di 6–7 anni, prima primaria) di mettere in ordine crescente i numerali 38, 24, 49, 46, 51. Dopo che la soluzione corretta è stata scritta alla lavagna, la maestra chiede: «Perché è stato messo 46 e 49?» (lei intende dire: perché “prima” 46 e “poi” 49? È chiaro che intende stimolare l'attenzione sul fatto che, a parità di cifra delle decine, il numero delle unità 6 precede il 9). Ma l'allievo A risponde: «Perché altrimenti sarebbe troppo facile se ci fossero stati solo gli

⁵ La data di questa ultima citazione serve a smorzare quelle banali critiche superficiali che affermano essere questi studi del passato, non più in grado di generare ricerca. Al contrario, sono attualmente vivi e vitali studi del tutto nuovi per quanto ancorati alle origini di questi temi, per esempio ricerche compiute in dottorati (come il DIE dell'Universidad Distrital Francisco José de Caldas de Bogotá) nell'ambito del quale interessanti ricerche hanno portato a più pubblicazioni, fra le quali segnaliamo Narváez Ortis (2017), solo per fare un esempio. Un'analisi delle posizioni di chi afferma essere la TSD una teoria antiquata e superata, mostra la scarsa consapevolezza riguardo alla vera portata di tali teorie di base e diventa dunque indice di importanti lacune culturali; si veda D'Amore e Fandiño Pinilla (2013).

altri». A non risponde a tono, nel tono auspicato dalla maestra, ma cerca di interpretare la consegna iniziale, mettendosi nei panni della maestra: perché ha inventato quella situazione? La maestra replica: «Non è questo che ti chiedo ... [E, rivolgendosi a tutta la classe] Allora?». Risponde B: «Perché 46 è più piccolo di 49», al che la maestra risponde: «Bene!».

Situazioni di questo tipo sono molto presenti in letteratura e nella pratica scolastica: lo studente supera la domanda diretta, la cui risposta considera troppo ovvia, e dà la scalata alle intenzioni didattiche dell'insegnante.

3. *Milieu*

Si tratta di uno dei termini più controversi e dibattuti dell'intera TSD, tanto che difficilmente, pur nelle molteplici traduzioni, i traduttori osano sostituire questo termine francese con un altro della loro lingua ...

Per Brousseau il *milieu* è lo strumento attraverso il quale il docente comunica (in senso complesso, attraverso molteplici codici e registri, non solo oralmente) con lo studente ed è costituito da oggetti fisici, culturali, sociali, umani, con i quali il soggetto interagisce in una situazione; esso ha due aspetti: quello sincronico della relazione tra apprendimento-insegnamento e quello diacronico legato per esempio allo svolgersi delle successioni delle azioni da parte dei componenti umani del triangolo della didattica nell'ambiente aula.

Accomodare l'ambiente per far sì che l'apprendimento, qualsiasi cosa esso sia, avvenga è la funzione della relazione tra Sapere, docente e allievo. Si noti che molti degli elementi fisici, reali o culturali, sociali, sono quelli che altri chiamano "artefatti" (Radford, 2008).

4. *Teoria degli ostacoli (TOst)*

All'interno della TSD si pongono dunque spesso, come abbiamo visto, le seguenti domande: Perché lo studente non costruisce conoscenza, perché non apprende? Che tipologie di ostacoli si frappongono al raggiungimento dell'apprendimento? È ben noto che fin dagli anni '80 Brousseau dedicò parte dei suoi sforzi a questo studio analitico-classificatorio (che altro non volle essere e non è) basato sulla evidenza empirica e in gran parte su questioni di carattere assai più generale. (Una fondazione teorica è, per esempio, Bachelard, 1938; una presentazione piuttosto riassunta di questo tema si trova in D'Amore, 1999, pp. 209–218; D'Amore & Sbaragli, 2011, pp. 72–76; D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, & Sbaragli, 2008, pp. 41–56).

Dalla natura dell'evidenza empirica, allo studio che teorizza: questo è l'ambiente nel quale si sviluppa questo aspetto specifico della TOst all'interno della TSD. Dunque, un contrasto evidentemente esistente fra le interpretazioni del termine "ostacolo" nelle diverse teorie oggi esistenti in DdM non può darsi, a meno che non si attribuisca alla TOst di Brousseau una componente sociale o storico-sociale che essa non ha. Su questo dibattito, si veda l'articolo di D'Amore, Radford e Bagni (2006), nel quale si affronta un dibattito teorico su due possibili interpretazioni della TOst nel caso degli ostacoli

epistemologici, una strettamente inerente-interna alla TSD e l'altra di natura sociale-storica interna alla TO.

Ora, per spiegare esattamente l'attività concreta, ma in chiave interpretativo-metaforica di quel che accade in aula, il che sarà assai utile fra breve, cominciamo da queste frasi emblematiche di Brousseau (Brousseau, 1995):

Si tratta sempre di sapere a che gioco deve giocare l'allievo affinché le strategie più efficaci implicino l'uso del sapere che gli si vuol insegnare. Il gioco gli deve anche poter essere spiegato e, perché capisca, occorre, in generale, che egli possa immediatamente mettere in atto una strategia "di base" che, anche se non fa vincere, permette di giocare e di sperare di vincere. (Brousseau, 1995, p. 23)

Da essa si evince che l'allievo è un soggetto attivo nella sua azione di apprendere e costruire conoscenza, non passivo ...

E ci piace notare quale frase scelga l'autore per dare un'idea di quel che succede in aula:

Non vi spiego tutto, per non privarvi del piacere di apprenderlo da soli.

René Descartes

3.3. Il senso della TSD: le "situazioni"

Entriamo ora in modo più approfondito nel nostro tema, cercando di delineare il senso della TSD, traendolo da Brousseau (1986b):

L'allievo apprende adattandosi ad un ambiente che è fattore di contraddizioni, di difficoltà, di disequilibri, un po' come la società umana. Questo sapere, frutto dell'adattamento dell'allievo, si manifesta con delle nuove risposte che sono la prova dell'apprendimento (...). [L'allievo sa che] (...) il problema è stato scelto per fargli acquisire una nuova conoscenza ma deve sapere anche che questa conoscenza è interamente giustificata dalla logica interna della situazione e che può costruirla senza far appello a delle ragioni didattiche. (Brousseau, 1986b, pp. 48-49)

Una tale situazione è definita *a-didattica*: sono in ballo gli studenti e l'oggetto della conoscenza, ma non direttamente l'insegnante (in questa particolare occasione). La situazione suggerisce delle esigenze, delle necessità, delle alternative e gli allievi danno risposte a queste. Non ci sono obblighi didattici espliciti o resi palesi, e dunque quel che si fa non è legato a spinte da parte dell'insegnante. L'allievo fa (da solo o in gruppo) dei tentativi, verifica che i tentativi falliscono o sono inefficaci; si deve rifare più volte la prova; interagendo con gli elementi dell'ambiente, l'allievo modifica il suo sistema di conoscenze a causa degli adattamenti che deve fare nell'utilizzare varie strategie. Sono i casi in cui, per esempio, al termine di un'attività ludica, si deve effettuare qualche cosa di pertinente alla matematica allo scopo di concludere l'attività (per esempio, nel caso di bambini piccoli, conteggi per

stabilire il vincitore, paragone di valori, paragone di misure, o altro). La richiesta di effettuare quell'attività matematica non è stata proposta dall'insegnante, non sarebbe necessaria dal punto di vista scolastico (non c'è interazione con il sapere da insegnare). È invece un bisogno motivato dall'attività stessa, dalla sua specificità. Se tale attività pertinente alla matematica non riesce al primo colpo e provoca nello studente o tra gli studenti una discussione per accordarsi su modalità, allora si ha produzione di conoscenza, ma non richiesta dall'insegnante, non istituzionalizzata. È un adattamento all'ambiente, alle attese compartite, l'acquisizione di una modalità speciale di condivisione.

Questa situazione è proposta nella TSD come la più consona alla costruzione di conoscenza, anche se mai si tenta una spiegazione o un'ipotesi su come avvenga l'apprendimento, non è questo il suo scopo.

Non-didattica, invece, è una situazione non specifica di un sapere: insegnante e allievo non hanno in quel frangente specifico un rapporto significativo e tipico con il sapere in gioco. Per esempio, i bambini in aula, alla presenza dell'insegnante, giocano con i pezzi di un gioco matematico (per esempio fanno delle costruzioni utilizzando come pezzi i blocchi logici di Dienes). Le strategie realizzate, pur se con strumenti "matematici", non sono specifiche per obiettivi cognitivi scolastici.

Non è detto tuttavia che lo studente non impari qualcosa: è solo che l'insegnante non ha costruito un "ambiente didattico" finalizzato all'apprendimento di qualche nozione specifica del sapere da insegnare. Non c'è un tentativo di adattamento ad un ambiente appositamente costruito.

Resta da definire che cosa sia allora una situazione *didattica*; Brousseau (1986b) propone come modello quello del gioco nel quale l'insegnante cerca di

far devolvere all'allievo una situazione a-didattica che renda l'interazione [tra allievo e problema scelto dall'insegnante] la più indipendente [dall'insegnante] e la più feconda possibile. Per questo comunica o si astiene dal comunicare, secondo il caso, informazioni, domande, metodi di apprendimento, euristiche ecc. L'insegnante è dunque implicato in un gioco con il sistema di interazioni dell'allievo con i problemi che egli pone. (Brousseau, 1986b, p. 50)

È l'insegnante che ha strutturato l'ambiente in modo opportuno, con strumenti opportuni, al fine di giungere alla fine dell'attività a una conoscenza specifica. Tutto avviene, per così dire, alla luce del sole, in un ambiente dichiarato:

- l'allievo sa che sta imparando, che l'insegnante sta insegnando;
- l'insegnante è consapevole del suo ruolo e di come la situazione si sta sviluppando.

C'è *intenzione esplicita di insegnare*. Sono situazioni di stimolo concreto a fare svolgere attività, a risolvere problemi, a eseguire consegne. La situazione è tutta esplicita: l'allievo sa che in quel momento si stanno delineando ed

evolvendo nozioni che fanno parte del sapere atteso dalla società, deciso dall'ambiente scolastico.

Siamo, ovviamente, in pieno contratto didattico: è tutto così esplicito che spesso l'allievo, giunto al momento di dover dare risposte, non si pone domande sul contenuto, ma su che cosa l'insegnante si aspetta che egli faccia o risponda ... (come abbiamo già visto in Sarrazy, 1995). E poi, non solo ai bassi livelli di scolarità, ogni gesto, ogni cenno, ogni ammiccamento, ogni minimo passo è accompagnato dalla ricerca del consenso. Il contratto didattico a volte è regola, a volte è strategia ... e dunque ben si adatta alla "metafora del gioco", continuamente richiamata da tutti gli autori.

È qui che, a nostro avviso, si inserisce il tema dello "scivolamento metadidattico":

I docenti spiegano, poi spiegano le spiegazioni, le illustrano e poi spiegano le illustrazioni ... Ogni volta i tentativi per correggere gli insuccessi iniziali si rivelano inadeguati. Il fenomeno si amplifica, inoltre, quando lo si sottomette al giudizio del pubblico, ancora più ignorante in didattica. Il fenomeno si radicalizza e rapidamente diventa incontrollabile. È che così, come nelle grandi pandemie del Medioevo, alcuni ne approfittano per accusare ogni tipo di pratiche scolastiche che pretendono di rinnovare, mutilandole, per gettare al fuoco qualche "teoria" e per dimenticare i risultati delle esperienze considerate negative. [Traduzione nostra] (Brousseau & D'Amore, 2018, p. 45)

Ricordiamo per esempio il tentativo di introdurre la teoria ingenua degli insiemi (denominata insiemistica) sotto il nome di "matematica moderna" negli anni '70-'80; si spiega la logica di questi costrutti, poi si fanno grafici, poi si studiano i grafici, poi si studiano le modalità per eseguire i grafici ... passando dalla teoria ingenua degli insiemi alla tecnica per realizzare grafici, spesso facendo esempi strampalati fuorvianti lontanissimi da ogni senso matematico. Oppure: si vogliono studiare le proporzioni nelle quali appare un termine incognito $a:x=c:d$, dove a , c , d sono valori dati (4 operai fanno un certo lavoro in 6 giorni; quanti operai sono necessari per farlo in 2?). Si propone uno schema risolutivo con frecce che vanno e vengono; poi si studia lo schema; poi si studia il modo di disporre le frecce ... Resta ben poco del problema iniziale e della sua logica, e ci si riduce a meccanismi che nessuno capisce più.

La TSD studia dunque l'evoluzione delle situazioni in aula e cerca di trovarne spiegazioni il più possibile legate a relazioni umane o sociali (D'Amore, 2005, 2008; Bagni & D'Amore, 2005).

L'ambito che più interessa è la situazione scolastica, ma quella concreta che si svolge dentro l'aula. È allora ovvia l'estrema importanza che è assunta dalla situazione concreta e in particolare dalle modalità con le quali l'insegnante è in grado di organizzare e gestire tale situazione. Negli ultimi anni, i ricercatori in DdM hanno riconosciuto grande importanza agli studi di

psicologia dell'educazione su temi come: situazioni, gestione delle situazioni, contesto, cultura, comportamenti cognitivi degli allievi (Balacheff, 1990). Si tratta di una, diciamo così, dimensione sociale che fa da sfondo a qualsiasi studio sui processi di insegnamento. Si tratta di studi anche contemporanei che sono coltivati da diversi punti di vista anche in modo attuale (Bohórquez & D'Amore, 2018).

Tenuto conto di tutto ciò, la TSD è vista da taluni autori anche come un'iniziativa che va verso una direzione sociale (Godino, 1991):

Una situazione didattica è un insieme di relazioni esplicitamente e/o implicitamente stabilite tra un allievo o un gruppo di allievi, qualche elemento del contorno (inclusi strumenti o materiali) e l'insegnante al fine di permettere agli allievi di apprendere – cioè: ricostruire – qualche conoscenza. Le situazioni sono specifiche di tali conoscenze. (Godino, 1991, p. 266 della trad. it.)

Ricordiamo che Brousseau asserisce che l'allievo costruisce la conoscenza solo se si interessa *personalmente* del problema della risoluzione di quanto gli è stato proposto attraverso la situazione didattica: in tal caso si usa dire che si è raggiunta la *devoluzione* da parte dell'allievo. (Su questi termini torneremo tra poco).

È qui che scatta, a nostro avviso, l'interessante metafora del gioco di strategia; esistono varie strategie, ma così come nel gioco solo alcune di esse portano alla vittoria, solo alcune portano alla scoperta della risoluzione del problema e dunque alla costruzione della conoscenza, da parte dell'allievo. Così come nel gioco c'è una posta da vincere, nella situazione c'è come posta la *conoscenza*.

L'apprendimento si produce attraverso la soluzione di problemi; è per ciò che si dice spesso che la TSD è di stampo costruttivista. Ma sappiamo già che così non è, si tratta di un fraintendimento, tanto è vero che lo stesso Brousseau più volte ha criticato il costruttivismo dicendo che esso è formalmente impossibile. In Brousseau (1997) si legge:

Inizialmente, pensavamo implicitamente che le situazioni di apprendimento fossero quasi l'unico mezzo attraverso il quale la conoscenza viene trasmessa agli studenti. Questa idea nasce da una concezione epistemologica piuttosto sospetta, come idea empirista della costruzione della conoscenza: lo studente, posto in una situazione ben scelta, dovrebbe, a contatto con un certo tipo di realtà, costruire per sé una conoscenza identica alla conoscenza umana del suo tempo (!). Questa realtà può essere una realtà materiale in una situazione di azione o una realtà sociale in una situazione di comunicazione o di prova. Sappiamo molto bene che è l'insegnante a scegliere le situazioni perché mira a un determinato segmento di conoscenza, ma può esso coincidere con il significato "comune"? Lo studente ha "costruito un significato", ma è istituzionalizzabile? Si potrebbe procedere a un'istituzionalizzazione delle conoscenze, ma non a quella del significato. (...) C'è l'idea che la conoscenza possa essere insegnata ma che la comprensione è nelle mani dello studente. Si può insegnare l'algoritmo e "bravi insegnanti" possono allora cercare di dargli un significato. Questa differenza tra forma e

significato si traduce in difficoltà non solo nel concepire una tecnica per insegnare il significato, ma anche nel concepire un *contratto didattico* per questo scopo. In altre parole, non è possibile chiedere agli insegnanti di utilizzare una situazione di azione, di formulazione, di prova, se non si riesce a trovare un modo per consentire loro di negoziare il contratto didattico connesso a questa attività; vale a dire, se non si può negoziare questa attività di insegnamento in termini utilizzabili. (Brousseau, 1997, p. 237)

Come si vede, una posizione assai distante da quella del generico costruttivismo e ancor più da quello cosiddetto “radicale”.

Inoltre, cruciale è ovviamente il ruolo del risolutore-giocatore specie nel suo ruolo di attore in una situazione sociale, come abbiamo visto.

TSD ha la matematica e solo la matematica come riferimento e dunque, quando si parla di conoscenza, è sempre sottinteso che si sta parlando di conoscenza matematica; ora, come sua caratteristica, la conoscenza matematica include sì concetti ma anche sistemi di rappresentazione simbolica, processi di sviluppo e validazione di nuove idee (a mo' di esempio, un'apertura di interessi della TSD nel solco tracciato da Raymond Duval nelle relazioni fra *noesis* e *semiosis* si trova in D'Amore, 2003, pp. 44–61) (Duval, 1993, 1995, 1996).

Ecco perché in TSD si fa riferimento non a una situazione generica, ma a vari tipi di esse.

Poiché la conoscenza matematica, nella sua peculiarità, include non solo concetti ma anche sistemi di rappresentazione simbolica, non solo processi di sviluppo ma anche validazioni di nuove idee matematiche, dobbiamo contemplare vari *tipi* di situazioni:

- *situazioni di azione*: agiscono sull'ambiente e favoriscono il sorgere di teorie implicite che funzioneranno nella classe come modelli protomatematici;
- *situazioni di formulazione*: favoriscono l'acquisizione di modelli e linguaggi espliciti; se esse hanno dimensione sociale esplicita, si parla allora di situazioni di comunicazione;
- *situazioni di validazione*: agli allievi sono richieste prove e dunque spiegazioni sulle teorie utilizzate ed anche esplicitazione dei mezzi che soggiacciono nei processi dimostrativi;
- *situazioni di istituzionalizzazione*: hanno lo scopo (come abbiamo visto) di stabilire e dare uno status ufficiale a conoscenze apparse durante l'attività in aula. Normalmente hanno relazione con conoscenze, simboli eccetera, che si devono ritenere in vista della loro utilizzazione in un lavoro successivo.

Ma apprendere per adattamento all'ambiente comporta rotture cognitive, accomodamento, modifica di modelli impliciti, linguaggi, sistemi cognitivi. È anche per questo che si è rivelato controproducente obbligare l'allievo ad una progressione cognitiva passo dopo passo; il principio di adattamento può contrastare il processo di rifiuto di una conoscenza inadeguata che è invece necessario all'apprendimento. Idee che sappiamo essere transitorie, in attesa di

una loro sistemazione, resistono per così dire agli “attacchi” e dunque persistono anche quando dovrebbero essere superate. Queste rotture sono così necessarie da dover essere addirittura previste dallo studio delle situazioni e indirettamente dai comportamenti degli allievi. (D’Amore, 1999, pp. 81–82)

Ma, nella fase di devoluzione, nel rapporto di insegnamento, in quel momento cioè in cui l’insegnante affida allo studente, in situazione a-didattica il compito di apprendere agendo concretamente per risolvere un problema dato, si viene a creare un *paradosso* che rientra tra gli aspetti relativi al contratto didattico:

Se l’insegnante dice ciò che vuole, non può ottenerlo; (...) se [l’allievo] accetta che, secondo il contratto, l’insegnante gli insegni i risultati, non li stabilisce lui stesso e dunque non apprende la matematica, non se ne appropria. Se, al contrario, rifiuta ogni informazione da parte dell’insegnante, allora la relazione didattica è rotta. Apprendere, implica, per lui, che egli accetti la relazione didattica ma che la consideri come provvisoria e si sforzi di rigettarla. (Brousseau, 1986a, p. 316)

Oppure: “Più il professore (...) svela ciò che desidera, più dice all’allievo precisamente ciò che deve fare e più rischia di perdere le possibilità di ottenere e di constatare oggettivamente l’apprendimento al quale, in realtà, deve mirare” (Brousseau, 1986a, p. 316).

Questo “paradosso” *della devoluzione* fa il paio con il “paradosso” *della credenza*: “Credetemi, ma non credete, imparate a sapere che cos’è sapere (...) abbiate fiducia in me per non dover più avere fiducia in me, ma nella vostra ragione”. (Clanché, 1994, p. 224)

Scrivi Sarrazy (1995):

Questo sistema di paradossi sembra funzionare come una trappola nella quale cadrebbero alcuni allievi – quelli che, come ad esempio Gaël (vedi *supra*), dubitano della pertinenza di far uso *hic et nunc* del loro proprio intendimento. Così pure, per imparare, l’allievo deve sublimare il disagio delle incertezze legate all’incompletezza del suo sapere, accettando di rischiare nella ricerca dei mezzi utili per questa padronanza. Questo rischio è al tempo stesso il fondamento e la condizione del funzionamento del processo di insegnamento-apprendimento. (Sarrazy, 1995, p. 146 della trad. it.)

Questa idea dell’apprendimento come rischio personale, come impegno, come implicazione diretta dell’allievo nell’apprendimento, come risultato vincente di un gioco, è un po’ il cardine attorno al quale ruota tutta l’impostazione che stiamo cercando di descrivere, e che si manifesta con la rottura (voluta) del contratto.

La necessità di questa rottura potrebbe essere riassunta dal seguente aforisma: *Credimi*, dice il maestro all’allievo, *osa utilizzare il tuo proprio sapere e imparerai* (Sarrazy, 1995, p. 147 della trad. it.).

Queste idee che nascono dalla TSD e specialmente dalla devoluzione costituiscono motivo di grande interesse, come dicevamo, non solo in Francia

(Bessot, 1994), ma un po' in tutto il mondo.

Per approfondire ulteriormente, suggeriamo la lettura di Brun e Conne (1990), specie alle pagine 262–269 (interessanti gli esempi concreti); di Grenier (1996), specie la III parte, dove si fa un'analisi concreta di una specifica situazione didattica; di Perrin-Glorian (1994), specie a causa del fatto che vi si traccia una vera e propria storia della teoria, la sua nascita, il suo sviluppo, le sue prospettive.

Insistiamo ancora una volta sul fatto che la base di ogni affermazione della TSD è fondata su prove empiriche; ricordiamo che nel 1965 Brousseau crea a Bordeaux un centro di ricerca sull'insegnamento delle Matematiche (CREM) e, nella stessa città, prende parte attivamente alla preparazione e alla realizzazione dell'IREM nel 1969. Nel 1972 crea il COREM ossia il Centro per l'osservazione e la ricerca sull'insegnamento della Matematica costituito da una scuola dell'infanzia e una scuola elementare. Insomma, l'attività empirica in aula è notevole.

Insistiamo nel dire che l'idea di *situazione* è complessa dal punto di vista teorico e non si riduce a quelle poche banalità che a volte si leggono, scritte in modo superficiale.

Rispondendo alla domanda su che cosa sia a suo avviso la DdM, Brousseau (1986b, p. 35) afferma che essa studia i “fenomeni legati all'attività di insegnamento, concernenti specificatamente il sapere insegnato” (naturalmente si riferisce all'azione dell'insegnante allo scopo di ottenere apprendimento, non all'azione dell'insegnare in sé); lo stesso Brousseau mette in evidenza il ruolo formidabile e determinante delle *situazioni* nell'apprendimento della matematica e pone così davvero le basi teoriche della TSD, specifica per la Matematica. In più occasioni, Brousseau sostiene che oltre agli attori principali di un'azione didattica, l'insegnante e l'alunno, bisogna tener presente un terzo fattore, ossia “l'attore silenzioso”, la situazione nella quale evolvono le azioni dell'insegnante e degli alunni, l'ambiente sociale (Brousseau, 1986b, p. 49): “Una situazione è caratterizzata in una istituzione da un insieme di relazioni e di ruoli reciproci di uno o più soggetti (allievo, docente ecc.) con un milieu, che guardano la trasformazione di questo milieu secondo un progetto”. [Traduzione nostra].

Nella TSD Brousseau individua a questo punto le tre situazioni che abbiamo chiamato *a-didattica*, *non-didattica*, *didattica*, che abbiamo già esaminato e che danno luogo e senso all'idea di *contratto didattico* per spiegare come in una situazione didattica l'accesso a un compito da parte dell'alunno avvenga mediante “un'interpretazione delle domande poste, delle informazioni fornite, degli obblighi imposti”; il *contratto didattico* è costituito quindi dalle “abitudini specifiche del maestro attese dall'allievo” e dai “comportamenti dell'allievo attesi dal docente” e proprio la scelta del comportamento da tenere, da parte dell'alunno, diventa problematica poiché

porta il soggetto ad interrogarsi su “cosa l’insegnante si aspetti che faccia” (Brousseau, 1986b, p. 66).

Il contratto didattico influenza l’idea che gli alunni possiedono riguardo la scuola e la matematica: la prima viene vista come un’istituzione direttiva e valutativa che non rende liberi gli alunni di esprimere le loro opinioni, la seconda è percepita come una disciplina nella quale si devono svolgere sempre dei calcoli; i problemi che vengono forniti dall’insegnante devono poter venire sempre risolti (*Età del capitano*; IREM Grenoble, 1980), cioè non sono impossibili; i dati numerici presenti nel testo del problema devono venire utilizzati, una e una sola volta.

Si capisce bene che il fulcro di tutta la TSD consiste nell’idea del tutto nuova di *situazione a-didattica*: in essa sono in ballo gli studenti e l’oggetto della conoscenza, ma non l’insegnante. La situazione suggerisce delle esigenze e gli allievi danno risposte a queste. Non ci sono obblighi didattici, dunque quel che si fa non è legato a spinte da parte dell’insegnante che in questo caso non interviene ma “gioca” solo un ruolo da “regista”. Detto in altro modo, gli allievi partecipano a qualcosa che non è esplicitamente cognitivo; solo l’insegnante è consapevole, ma non dichiara lo scopo dell’attività. Si tratta quindi di un modello teorico che si realizza quando in un ambiente organizzato per l’apprendimento di un certo argomento viene a cadere l’intenzione didattica esplicita e condivisa.

L’allievo fa (da solo o in gruppo) dei tentativi, verifica che tali tentativi falliscono o sono inefficaci; se deve rifare più volte la prova, interagendo con gli elementi dell’ambiente, l’allievo modifica il suo sistema di conoscenze a causa degli adattamenti che assume nell’utilizzare varie strategie. Ossia, la richiesta di effettuare quell’attività matematica non è stata proposta dall’insegnante, non sarebbe necessaria dal punto di vista scolastico (non c’è interazione con il sapere da insegnare). È invece un bisogno motivato dall’attività.

Questa situazione sembra essere la più consona alla costruzione di conoscenza. Brousseau (1986b) in effetti sostiene che l’allievo *costruisce* la conoscenza solo interagendo dialetticamente con un problema o *milieu a-didattico*, cioè privato di specifiche intenzioni o presupposizioni didattiche, e adattandosi a tale situazione nella risoluzione di quanto gli è stato proposto:

La situazione a-didattica finale di riferimento, quella che caratterizza il sapere, può essere studiata in modo teorico, ma nella situazione didattica, per il maestro come per l’allievo, vi è come una sorta di ideale verso il quale si cerca di convergere: l’insegnante deve sempre aiutare l’allievo a spogliare il più possibile la situazione di tutti i suoi artifici didattici, per lasciargli una conoscenza personale ed obiettiva. (Brousseau, 1986b, p. 50)

Nelle *situazioni a-didattiche* si possono pertanto delineare sei importanti fasi attraverso le quali insegnante e allievi permettono che si snodi e prenda forma l’azione didattica e si giunga ad una nuova conoscenza.

1. *Devoluzione*: è un atto che compie l'insegnante nei confronti degli allievi: egli consegna l'obiettivo cognitivo agli studenti. È il processo o l'attività di responsabilizzazione attraverso il quale l'insegnante ottiene che lo studente impegni la sua personale responsabilità nella risoluzione di un problema, o in generale di un'attività cognitiva, che diventa allora problema dell'allievo, accettando le conseguenze di questo trasferimento momentaneo di responsabilità, in particolare per quanto concerne l'incertezza che questa assunzione genera nella situazione.

In origine Brousseau (1986b, p. 55) definisce la devoluzione come "l'atto attraverso il quale l'insegnante fa accettare all'allievo la responsabilità di una situazione di apprendimento (a-didattica) o di un problema ed accetta lui stesso le conseguenze di questo transfer".

La devoluzione è dunque una componente della situazione a-didattica nell'ambito della quale l'allievo "funziona" in modo scientifico, e non solo in risposta a spinte esterne alla situazione, per esempio di tipo didattico.

Vi sono vari ostacoli alla realizzazione della devoluzione, ostacoli che Perrin-Glorian (1997) sintetizza in questi termini:

- mancanza di stabilità delle conoscenze previe, sia per quanto concerne la loro utilizzazione sia per la capacità di un'eventuale loro messa in discussione;
- mancanza di affidabilità delle tecniche operatorie, il che comporta un distoglimento dell'attenzione dall'obiettivo principale e un alto costo per le procedure complesse;
- mancanza della capacità della lettura globale della richiesta del problema; la si sostituisce spesso con una lettura selettiva, locale, allo scopo di dare risposte pronte.

Anche D'Amore ha dato delle spiegazioni (diverse) al fallimento della devoluzione, sulla base delle sue esperienze di ricerca (D'Amore, 2002b).

2. *Implicazione*: è la fase nella quale lo studente accetta l'"offerta" dell'insegnante e si implica nell'attività proposta, cioè accetta la responsabilità di occuparsi personalmente del problema/dell'attività proposto/a, senza la guida continua dell'insegnante.

3. *Costruzione di conoscenza personale*: fase in cui ciascuno studente crea una propria conoscenza interna singolare, la quale dovrà poi essere tradotta e riorganizzata nel momento in cui diventa modello esterno, cioè comunicata ad altri.

4. *Validazione*: processo di grande rilevanza che si adotta e si segue per raggiungere la convinzione che un certo risultato ottenuto (o un'idea costruita da singoli allievi) risponda davvero ai requisiti esplicitamente messi in campo. La validazione si ha quando un allievo, dopo aver proposto una propria costruzione concettuale agli altri, o una propria risposta al problema che si sta

risolvendo, accetta l'invito dell'insegnante-regista a difendere la propria personale costruzione di conoscenza, mettendosi in situazione esplicitamente comunicativa allo scopo di spiegare ai compagni la propria idea; più o meno consapevolmente, egli dirige così la sua attenzione alla trasformazione di un sapere personale in un prodotto di comunicazione, validando appunto la propria costruzione. In didattica della matematica questa fase è di straordinaria importanza: senza di essa l'apprendimento matematico non funziona.

5. *Socializzazione*: il sapere personale costruito e validato da un singolo studente viene presentato, discusso, “patteggiato” con gli altri, entra cioè a far parte del patrimonio comune, acquisito e condiviso dall'intera classe. Avviene dunque uno scambio sociale tra gli allievi, cosicché singole conoscenze personali diventano conoscenza sociale condivisa dalla classe. Quando si è raggiunta la consapevolezza che la classe ha risolto il problema iniziale, o effettuato l'attività, o costruito nuova conoscenza, manca ancora un momento fondamentale; tutti gli allievi volgono l'attenzione all'insegnante che, fino a quel momento, a mo' di regista, ha diretto la scena, ma che deve riprendere il suo ruolo per accettare o smentire il traguardo raggiunto.

Vogliamo qui far notare come la socializzazione sia una fase di grande valenza culturale, uno scambio fra pari di valori culturali personali, di credenze personali, di diversi modi di accedere e di aver accesso alla cultura sociale di riferimento. Si tratta di patteggiare opinioni personali costruite in un ambiente sociale condiviso.

È così giunto il momento della:

6. *Istituzionalizzazione delle conoscenze*: atto esplicito che compie l'insegnante al fine di permettere ad una conoscenza costruita dagli allievi, e socialmente condivisa, di essere ufficialmente riconosciuta. Rappresenta quindi quel processo attraverso il quale gli studenti devono cambiare statuto alle loro conoscenze non ancora ufficiali, non ancora patrimonio definitivo, quello utilizzabile ufficialmente per esempio per la risoluzione di problemi o preteso dall'insegnante come sapere posseduto in modo ufficiale. È un momento importante nell'apprendimento e quindi deve essere un atto forte. Lo studente tende a non accettare le costruzioni cognitive proprie o della classe, mentre tende ad accettare quelle dell'insegnante. L'insegnante cessa di essere regista e torna ad assumere il ruolo istituzionale che lo studente gli riconosce; questo processo risulta essere quindi complementare alla devoluzione.

3.4. *La prospettiva sociale della TSD*

La TSD ha al suo attivo quasi mezzo secolo di studi teorici dal momento della sua chiara formulazione in termini scientifici. Per gli scopi di questo lavoro, ci siamo limitati a una presentazione sommaria, ma gli studi al riguardo sono molteplici e alcuni notevolmente profondi (Margolinas, 1993, 1998; Laborde 1989; Schubauer-Leoni, 1986, 1988a, 1988b; solo per fare alcuni esempi).

Per gli scopi futuri di questo lavoro, segnaliamo gli aspetti sociali, di

lavoro comune, di scambio di interpretazioni del valore sociale, di intenso lavoro condiviso fra i diversi attori della minisocietà nella quale si chiama in causa la costruzione di apprendimento. Sono tutti temi sui quali dovremo puntare la nostra attenzione.

4. Il problema del confronto fra teorie in didattica della matematica: Cosa vuol dire che due teorie non sono incompatibili?

Le teorie in didattica della matematica sono numerose e la loro diversità è una questione fortemente dibattuta a livello internazionale (si veda per esempio: Teppo, 1998; Lerman, 2006; Prediger, Bikner-Ahsbabs, & Arzarello, 2008; Sriraman & English, 2010; Prediger, Bosch, Kidron, Monaghan, & Sensevy, 2010; Bikner-Ahsbabs & Prediger, 2014).

In Bikner-Ahsbabs et al. (2014), per esempio, l'esistenza di numerose teorie o approcci teorici in didattica della matematica è associata a diversi fattori, in particolare:

- al fatto che le teorie si siano evolute indipendentemente in diverse regioni del mondo e in circostanze culturali differenti (Sriraman & English, 2005);
- alla complessità del fenomeno di insegnamento-apprendimento della matematica, che non può essere descritto, compreso o spiegato da un'unica teoria (Bikner-Ahsbabs & Prediger, 2010);
- ai “diversi modi di conoscere” (Teppo, 1998) che caratterizzano i vari paradigmi di ricerca in didattica della matematica;
- al carattere dinamico delle teorie.

In ogni caso, per Radford (2017b): “La comprensione dei fenomeni oggetto di indagine può essere raggiunta solo sullo sfondo di principi generali; tali principi possono essere astratti in senso aristotelico o principi induttivi in senso baconiano, ma possono essere anche qualcos'altro” (p. 220). Una teoria, dunque, include necessariamente dei principi, o meglio, un sistema di principi (P) concettualmente organizzati, ma non solo. Essa include anche, come afferma Radford (2008c), modelli di domande di ricerca (D) e una metodologia (M). Il sistema di principi P include i costrutti chiave sui quali i principi si fondano. La metodologia M include le tecniche di raccolta, analisi e interpretazione dei dati, fatti o evidenze empiriche che supportano le risposte alle domande di ricerca D. Le tre componenti (P, D, M) di una teoria T sono tra loro in relazione dialettica, si modificano o cambiano in relazione ai risultati che la teoria produce; in altre parole, ogni teoria evolve nel tempo.

In particolare, i principi generali della teoria delle situazioni didattiche (Brousseau, 1986b, 1997) e quelli della teoria dell'oggettivazione (Radford, 2002, 2006, 2013, 2014b) permettono di evidenziare le somiglianze e le

differenze fra i due approcci teorici sui quali si focalizza il presente lavoro. Sulla base di quanto riportato in Brousseau (1997), Radford (2008d, 2011), Bikner-Ahsbals e Prediger (2014), D'Amore e Radford (2017b), tra i principi di tali teorie si possono identificare i seguenti.

Principi della teoria delle situazioni didattiche (di natura cognitiva)

- P1. Una *situazione*, ovvero “l’insieme delle circostanze in cui si trova lo studente, le relazioni che lo uniscono al suo *milieu*, l’insieme dei ‘dati’ che caratterizzano un’azione o un’evoluzione” (Brousseau, 1997, p. 214), costituisce una *situazione problematica* quando necessita di un adattamento, una risposta, da parte dello studente. In particolare, una *situazione didattica* è “una situazione nella quale c’è una manifestazione diretta o indiretta della volontà di insegnare – un insegnante. In generale, in una *situazione didattica* si può identificare almeno una situazione problematica e un contratto didattico” (p. 214). Una situazione *a-didattica* (*liberata* dalla esplicitazione della sua intenzionalità *didattica*) è invece una situazione nella quale l’insegnante “ha nascosto con successo la sua volontà e il suo intervento in quanto fattori determinanti di ciò che lo studente deve fare” (p. 236); in altre parole, si tratta di una situazione nella quale l’insegnante si astiene dal suggerire ciò che vuole ottenere dallo studente, la conoscenza matematica che intende far emergere dalla situazione problematica in questione, per rendere possibile l’adattamento dello studente a tale situazione.
- P2. Più l’insegnante esplicita chiaramente ciò che vuole, più dice all’allievo esattamente ciò che deve dire o fare, e più impedisce all’allievo di arrivare a un’effettiva comprensione e quindi a un apprendimento significativo. Si tratta del paradosso della *devoluzione* (Brousseau, 1986b). La *devoluzione* è “l’atto con cui l’insegnante fa accettare all’allievo la responsabilità di una situazione (a-didattica) di apprendimento o di un problema, e accetta le conseguenze del trasferimento di questa responsabilità” (Brousseau, 1997, p. 230). Accanto alla *situazione di devoluzione*, nella quale l’insegnante ottiene che l’allievo accetti la sfida di impegnarsi personalmente in una situazione problematica, assumendosi la responsabilità della sua risoluzione, vi è la *situazione di istituzionalizzazione*, nella quale l’insegnante identifica, riconosce e organizza le conoscenze che emergono dalla situazione problematica proposta, collegandole alle conoscenze matematiche condivise o accettate a livello istituzionale.
- P3. La conoscenza è la risposta “ottimale” a una data situazione problematica. Per ottenerla, “L’insegnante deve sempre aiutare lo studente a spogliare la situazione di tutti i suoi artifici didattici il più rapidamente possibile in modo da lasciarlo con una conoscenza personale e obiettiva” (Brousseau, 1997, p. 31).

P4. L'apprendimento è una forma di adattamento cognitivo a una situazione problematica. La costruzione di significato “implica un'interazione costante tra lo studente e le situazioni problematiche, un'interazione dialettica (...) nella quale [lo studente] coinvolge le sue conoscenze precedenti, le sottopone a revisione, le modifica, le completa o le rifiuta per formare nuove concezioni” (Brousseau, 1997, pp. 82–83).

Principi della teoria dell'oggettivazione (di natura socioculturale)

P1. La conoscenza è l'attualizzazione o la materializzazione del *sapere* (inteso come pura *possibilità*, o come sequenza di azioni codificate storicamente e culturalmente) che si realizza attraverso l'*attività* (da intendere come *lavoro congiunto*) di studenti e insegnanti che pensano, sentono, interagiscono e agiscono insieme nel processo di attualizzazione o materializzazione del sapere.

P2. L'apprendimento è concepito sia in termini di processi di *oggettivazione* – processi che riguardano la conoscenza, nei quali si diventa progressivamente e criticamente consapevoli di sistemi di idee, significati culturali, forme di pensiero e di azione attraverso l'uso di differenti mezzi semiotici – sia in termini di processi di *soggettivazione* – processi che riguardano il soggetto, la sua relazione con un mondo che gli è esterno, ovvero “processi di creazione di un sé particolare (e unico)” (D'Amore & Radford, 2017, p. 122).

P3. Nei processi di oggettivazione e soggettivazione, studenti e insegnanti usano vari tipi di *mezzi semiotici di oggettivazione* (parole, gesti, artefatti, simboli matematici, grafici, ...), i quali incorporano forme codificate di riflessione e di azione, storicamente e culturalmente costituite, permettono l'acquisizione progressiva da parte degli studenti di forme di azione e di riflessione codificate culturalmente (Radford, 2008a).

P4. L'apprendimento non è un processo di adattamento cognitivo individuale dello studente in totale autonomia, ma un “adattamento attraverso meccanismi sociali a un mondo di pratiche culturali” (D'Amore & Radford, 2017b, p. 116) che si manifesta nei processi di oggettivazione e soggettivazione.

Radford (2017b) dichiara che una teoria T_1 può sembrare “in risonanza” con un'altra teoria T_2 . Questa risonanza è parte di un fenomeno generale che egli chiama *affinità* (Radford, 2017b). L'affinità può manifestarsi a livello di metodologia, principi teorici e/o domande di ricerca. Tuttavia, in generale, il significato di un oggetto O affine è differente nelle due teorie, in quanto l'oggetto O si trova di solito in “posti” diversi in T_1 e in T_2 , ovvero il modo in cui O è concepito in T_1 può non coincidere con quello in cui O è concepito in T_2 .

In particolare, non è possibile importare direttamente un oggetto affine che fa

parte di una teoria nell'altra teoria. Il motivo è che una teoria è un *sistema*. Le domande di ricerca sono formulate in modo tale da avere un senso all'interno dei concetti e del vocabolario dei principi teorici; analogamente, la metodologia è profondamente legata ai principi teorici, che non costituiscono un agglomerato di affermazioni teoriche. La natura sistemica di una teoria esclude un omomorfismo ad ampio raggio che preservi in generale il significato. (Radford, 2017b, p. 224)

Il modello di teoria al quale Radford fa riferimento sembra legato al cosiddetto “modello deduttivo” del confronto fra teorie, basato sul *significato* piuttosto che sul *riferimento* (Agazzi, 2014). In base al modello deduttivo – del quale ci esimiamo dal descriverne le caratteristiche, rimandando il lettore interessato al volume di Agazzi (2014) – nessun concetto è dotato di un significato indipendente dalla teoria in cui ricorre, ovvero il significato di un concetto è sempre dipendente dal contesto o “carico di teoria” (*theory laden*). In base a tale modello non è dunque possibile supporre che due teorie, T_1 e T_2 , siano in grado di spiegare da due differenti punti di vista un medesimo fatto se questo significa due cose diverse quando viene considerato come un enunciato di T_1 e quando viene considerato come un enunciato di T_2 (Agazzi, 2014). Di conseguenza, in base al modello deduttivo, due differenti teorie, come T_1 e T_2 , non possono essere confrontate, ovvero sono *incommensurabili*. Questa è appunto la posizione di Radford (2017b) in relazione alla TSD e alla TO.

D'altra parte, come sostiene Agazzi (2014), seppure il contesto assiomatico, o il sistema di principi, contribuisca alla formazione del *significato* dei concetti che si presentano in una teoria, tale contesto o sistema di principi non può produrre o assicurare un *referente*, ovvero l'oggetto extralinguistico al quale si fa riferimento (per esempio mediante il termine “apprendimento”), per il quale deve essere fornita una fonte extralinguistica, indipendente dalle caratteristiche linguistiche o semantiche di qualsiasi particolare teoria: “questa fonte consiste nelle *operazioni* che non sono riducibili alle *osservazioni* che l'empirismo radicale richiede, in quanto esse sono essenzialmente legate alla *praxis* e possono essere connesse al significato grazie alla sua natura *intensionale*” (p. X).

Come precisa Agazzi (2014), il *significato* di un concetto ha sia una componente *referenziale* (un *riferimento* di natura pragmatica e operativa), sia una componente *contestuale* (un *senso* che dipende dal contesto teorico all'interno del quale il concetto è usato):

- La componente referenziale, il *riferimento*, costituisce il “nucleo stabile” del significato, indipendente dalla teoria, nel suo riferirsi ad aspetti della realtà mediante determinate *operazioni* (strumenti o procedure scientifiche concrete) che rientrano nella definizione del concetto, in quanto connettono il concetto a un referente, ovvero a un insieme strutturato di attributi che lo identificano e che non muta al variare del punto di vista (un *invariante*), riconosciuto e condiviso dalla comunità scientifica.
- La componente contestuale, il *senso*, “è necessaria per *riconoscere* il

referente, ma non ci *fornisce* il referente” (p. 191); essa dipende dal contesto teorico considerato, a sua volta strettamente legato al contesto storico e socioculturale; in particolare, dipende dalle relazioni di natura logica tra gli enunciati, ovvero dalla rete logica che esprime la struttura della teoria, come pure (aggiungiamo noi) dalle assunzioni ontologiche, epistemologiche e metodologiche che caratterizzano la ricerca scientifica (Guba, 1990).

In altre parole, il *significato* di un concetto è concepito *intensionalmente* (come insieme di attributi, qualità, proprietà e relazioni) con una “intensione di fondo” indipendente dalla teoria, in quanto esprime una relazione del concetto con qualcosa di *esterno* alla teoria, e con una “intensione mutevole”, in quanto legata alla teoria in questione. Non coincide dunque né con il “referente” né con il “senso”, ma li comprende entrambi. Ciascuna delle due componenti, da sola, non sarebbe infatti in grado di fornire informazioni sufficienti per riconoscere i molteplici usi di un medesimo concetto, termine o predicato in situazioni o contesti differenti.

Si pensi per esempio, in didattica della matematica, ai termini “oggetto matematico”, “rappresentazione semiotica”, “mezzo semiotico di oggettivazione”, “attività matematica”. I significati dei concetti espressi da tali termini contengono, da una parte, un nucleo stabile di significato, legato a specifiche pratiche di carattere matematico, determinate storicamente e culturalmente, indipendenti dalla teoria considerata in didattica della matematica; dall'altra, una componente mutevole, dipendente dal contesto della teoria in esame che specifica i loro usi in relazione ad altri termini, principi o predicati della teoria; usi di natura cognitiva (nel caso della TSD) o socioculturale (nel caso della TO).

Il confronto fra teorie, in tal modo, non presuppone l'invarianza di tutte le componenti intensionali dei termini o predicati condivisi dalle teorie, ma solo una stabilità inter-teorica del significato, determinata dalle componenti *referenziali* dell'intensione di certi predicati (termini che esprimono proprietà, relazioni o funzioni) “che possono essere riconosciuti come empirici (vale a dire, *predicati operativi*)” (Agazzi, 2014, p. 135). In altre parole, il confronto fra teorie non presuppone che i medesimi termini usati nelle differenti teorie di una data disciplina abbiano il medesimo “significato”; altrimenti il confronto sarebbe impossibile e non si potrebbe neppure parlare di progresso scientifico. Dunque, l'esistenza di una certa relatività semantica o variazione di significato dei concetti quando si passa da una teoria all'altra non implica né l'incomparabilità né l'incommensurabilità delle teorie.

Nel caso della TSD, fra gli oggetti, concetti o costrutti specifici vi sono, come è noto, i seguenti: situazione didattica, situazione a-didattica, milieu, contratto didattico, clausole, effetti, devoluzione, ostacolo (epistemologico, didattico, ontogenetico), istituzionalizzazione, ingegneria didattica.

Fra gli oggetti, concetti o costrutti specifici della TO vi sono invece, come è noto, i seguenti: attività, lavoro congiunto, oggettivazione, mezzi semiotici di oggettivazione, soggettivazione, alienazione.

Comuni a entrambe le teorie sono i termini che fanno riferimento al sapere, alla conoscenza e all'apprendimento, con intensioni diverse (di natura cognitiva o socioculturale) in base alla struttura o rete logica nella quale sono immersi.

Nello specifico, nel caso della TSD e della TO, si può parlare di stabilità inter-teorica del significato?

Per Radford (2017b):

All'interno del costruttivismo nordamericano, come Simon (2012) ci ricorda, non è possibile eseguire un'analisi sociale e individuale *allo stesso tempo*. Non è possibile focalizzarsi e studiare contemporaneamente l'individuo e il sociale. Per il costruttivismo nordamericano, il sociale e l'individuo sono come le entità quantistiche che non si possono vedere contemporaneamente. (Radford, 2017b, p. 222)

E aggiunge: “Questo interessante problema non è specifico del costruttivismo. Appare anche nella teoria delle situazioni didattiche (Brousseau, 1997). I costrutti di devoluzione, situazione didattica e *milieu* sono in realtà dei tentativi di affrontare [contemporaneamente] la questione del sociale e dell'individuo” (Radford, 2017b, p. 223).

Chiariamo anzitutto che la difficoltà o impossibilità di visualizzare determinate entità o processi fisici si fonda, come rileva Agazzi (2014), sulla tendenza a considerare gli oggetti fisici come “cose” dell'esperienza quotidiana o, meglio, nell'accezione espressa da Aristotele nella *Metafisica*, come entità tridimensionali, accessibili a più sensi contemporaneamente e separabili materialmente da altre “cose”. Invece, un oggetto fisico è qualcosa di diverso da una “cosa”. In particolare, vi possono essere delle proprietà dell'oggetto fisico che nell'esperienza quotidiana non appaiono fra loro associate, ma che possono essere unificate in uno specifico oggetto di una determinata teoria, come nella meccanica quantistica la natura sia corpuscolare sia ondulatoria della radiazione e della materia. Pur condividendo termini come “particella”, “onda”, “radiazione elettromagnetica” che esprimono concetti con componenti intensionali che si mantengono in parte invariate nell'identificare la natura corpuscolare e ondulatoria della radiazione elettromagnetica, la meccanica classica e la meccanica quantistica hanno oggetti differenti, non solo perché le operazioni di misurazione che li identificano sono diverse (ovvero i referenti sono differenti), ma anche perché nelle due teorie i medesimi termini sono connessi tra loro e con altri termini (come, per esempio, “posizione”, “velocità”, “traiettoria”) in modo diverso, ovvero hanno sensi differenti. Le due teorie non sono pertanto comparabili per quanto riguarda la loro superiorità relativa. In altre parole, non si può accettare l'una (la meccanica quantistica) come un superamento dell'altra (la meccanica

classica), bensì l'una accanto all'altra. D'altra parte, i loro domini non sono totalmente scollegati, anzi ammettono una certa sovrapposizione e ci sono alcuni problemi di confine (come la natura della luce) che possono essere indagati con gli strumenti di entrambe le teorie. Si può dunque affermare che la meccanica classica e la meccanica quantistica sono parzialmente comparabili e parzialmente compatibili.

Un discorso analogo si può fare per la TSD e la TO. Le due teorie hanno in comune alcuni concetti con lo stesso significato referenziale, indipendente dal contesto delle rispettive teorie, ovvero concetti con un "nucleo stabile" di significato (legati alle attività che si svolgono in aula su dati contenuti matematici, in particolare al problem solving); altri concetti (anche se hanno lo stesso nome) hanno invece diverse componenti referenziali ("apprendimento", "conoscenza", "sapere", per esempio).

In altre parole, le due teorie, pur essendo incommensurabili in senso molto stretto, condividono alcuni predicati operativi che permettono il confronto di alcuni dei loro enunciati.

La TSD e la TO sono dunque *parzialmente comparabili*.

Inoltre, poiché almeno un principio (o enunciato che risulta conseguenza logica dei principi) della prima teoria è respinto dalla seconda (in particolare quello relativo all'autonomia dello studente).

La TSD e la TO sono dunque *parzialmente compatibili*.

Entrambe, in ogni caso, permettono di incrementare la conoscenza su alcuni loro referenti, sia *teorici* (ancorati ai rispettivi principi-base), sia *empirici* (ancorati all'esperienza in quanto operativamente o empiricamente accessibili), evidenziandone diversi aspetti e gettando una nuova luce sugli oggetti di conoscenza, anche attraverso la messa in comunicazione delle loro diverse dimensioni esplicative, essendo una di carattere descrittivo-esplicativo (la TS), l'altra di carattere normativo-esplicativo (la TO)⁶ (Asenova, D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, & Santi, in corso di stampa).

La TSD e la TO hanno dunque *finalità esplicative parzialmente simili*.

Come evidenzia Simon (2009, 2012), nella ricerca in didattica della matematica è possibile coordinare gli approcci di natura cognitiva con quelli di natura sociale estendendo i loro specifici oggetti di analisi, sulla base della "distinzione tra ciò con cui si guarda e ciò che si guarda" (Simon, 2012, p. 46). In particolare, è possibile analizzare l'attività di un individuo da un punto di vista sociale, ovvero con strumenti o costrutti specifici dell'approccio teorico

⁶ I termini "descrittivo-esplicativo" e "normativo-esplicativo" non sono intesi in senso assoluto, dato che ogni teoria presenta aspetti di entrambe le caratterizzazioni, ma nel senso che gli aspetti relativi a una prevalgono su quelli dell'altra.

di natura sociale; analogamente è possibile analizzare l'attività di un gruppo di individui da un punto di vista cognitivo, ovvero con strumenti o costrutti specifici dell'approccio teorico di natura cognitiva. Nel primo caso si ottiene un'analisi sociale dell'individuo, nel secondo caso un'analisi cognitiva di un gruppo di individui.

I tentativi di espandere l'uso di una teoria sopra descritti mirano a utilizzare quanto più possibile le nostre conoscenze nell'analisi delle situazioni di apprendimento della matematica. Sia nelle situazioni individuali che in quelle di gruppo, i costrutti cognitivi e sociali possono fornire strumenti per l'analisi della ricerca. (Simon, 2012, p. 48)

Una domanda di ricerca non sempre è generata da o specifica di una prospettiva teorica. Ci sono problemi, di cui si occupa la didattica della matematica, che non derivano da una particolare prospettiva teorica, ovvero che richiedono differenti tipi di analisi o ricerche condotte da differenti prospettive teoriche (Simon, 2009). Da qui la necessità di individuare gli approcci teorici più utili per affrontare tali problemi in tutta la loro complessità, le strategie e i metodi di ricerca più efficaci per rispondere alle domande di ricerca, ovvero la necessità di un uso pragmatico, consapevole e inclusivo, di differenti approcci teorici in DdM. Per individuarli occorre, anzitutto, *comprendere*, poi *comparare* o *contrastare*, *coordinare* o *combinare*, ed eventualmente *sintetizzare* o *integrare* opportuni approcci teorici rispettando le loro identità (Prediger, Bikner-Ahsbahs, & Arzarello, 2008) – sia per gestire le diverse problematiche che possono sorgere nel corso di una ricerca, sia per rispondere alle domande di ricerca che richiedono analisi più profonde e articolate da differenti punti di vista, sia per migliorare la credibilità, l'affidabilità e la trasferibilità dei risultati di ricerca.

Come afferma Confrey (1995), l'approccio costruttivista e quello socioculturale si sono evoluti per rispondere a diverse domande: “Dunque, la questione non è quale relazione ci sia tra le due teorie, ma quale relazione si vuole costruire tra le due prospettive teoriche, dati i problemi che si vogliono studiare” (p. 202).

Tra l'approccio costruttivista e quello socioculturale, Cobb e Yackel (1996) inseriscono l'approccio *emergente*, considerato come quello “nel quale le analisi costruttiviste psicologiche dell'attività dell'individuo sono coordinate con le analisi interazioniste del discorso e delle interazioni in aula” (p. 175). L'approccio emergente, secondo Cobb e Yackel (1996), è quello che coordina esplicitamente l'approccio costruttivista e quello socioculturale nell'analisi delle attività della classe intesa come società, in quanto “si focalizza sull'influenza della partecipazione degli individui a pratiche organizzate culturalmente” (p. 175). Una tale coordinazione emerge anche dallo studio di D'Amore (2005), che conduce sia un'analisi sociale dell'individuo, con strumenti e costrutti specifici dell'approccio di natura cognitiva, sia un'analisi cognitiva della classe intesa come società. In

particolare, in tale studio la classe è intesa come una comunità di pratiche sia esplicite, individuali e collettive, stabilite a priori per tale società, aventi come scopo la costruzione di conoscenza matematica (pratiche concettuali, algoritmiche o esecutive, strategiche o risolutive, comunicative e trasversali), sia implicite, che riguardano l'adattamento dell'individuo alla società-classe con scopi non prettamente costitutivi della società-classe (scopi competitivi, legati al contratto didattico, tesi a influenzare il giudizio o a soddisfare le attese dell'insegnante, ...), ovvero pratiche con scopi per lo più non apprenditivi, da considerare come "metapratiche".

Come afferma Simon (2009), che cita Lerman (2006): "Mentre la teoria socioculturale ha offerto nuove possibilità di ricerca e nuove interpretazioni, il costruttivismo continua a generare ricerche utili che non possono essere condotte da una prospettiva socioculturale" (p. 480).

Si tratta di un'ulteriore conferma che la TO non può essere accettata come un *superamento* della TSD, bensì *accanto* alla TSD, in quanto la TO e la TSD, come si è mostrato sopra, sono parzialmente comparabili, sono parzialmente compatibili e hanno *finalità esplicative parzialmente simili*.

In sintesi, si può affermare che la TO e la TSD condividono termini e asserzioni che esprimono concetti con alcune componenti intensionali che si mantengono invariate nel passaggio dall'una all'altra, indipendentemente dal tipo di analisi ("sociale" oppure "individuale", nelle parole di Radford sopra riportate) su cui esse si focalizzano, in particolare quelli relativi al sapere, alla conoscenza e all'apprendimento della matematica, in relazione alla situazione o al contesto di apprendimento. Tuttavia, i diversi ruoli giocati nelle due teorie dall'insegnante, dallo studente e dal sapere generano componenti intensionali mutevoli nei concetti che costituiscono le reti logiche che strutturano le due teorie, differenti strumenti e procedure di analisi. Dunque la TO e la TSD, occupandosi di oggetti differenti, non sono comparabili per quanto riguarda la loro superiorità relativa. D'altra parte, condividendo termini che esprimono concetti con componenti intensionali che mantengono una certa stabilità nel passaggio dall'una all'altra, i domini delle due teorie non sono affatto scollegati. Nella TSD gli aspetti culturali, sociali e istituzionali non sono trascurati, anzi hanno un ruolo rilevante, anche se i termini e le asserzioni che si riferiscono a tali aspetti (per esempio: "milieu", "situazione", "istituzionalizzazione") hanno significati differenti, in relazione alla struttura teorica in cui sono inseriti. In altre parole, la TO e la TSD sono parzialmente comparabili e parzialmente compatibili in quanto si basano sia su principi, termini e asserzioni con significati differenti ma con una certa stabilità inter-teorica, sia su strumenti, procedure, tecniche, metodi di analisi differenti, ma con un fine comune: incrementare la capacità di gestione, analisi e controllo delle situazioni o dei processi di insegnamento-apprendimento della matematica e, più in generale, la quantità globale di conoscenza scientifica in

didattica della matematica.

5. Conclusioni

Quando nacque la didattica della matematica in senso moderno, una sola teoria apparve alle luci della ribalta, la TSD, abbozzata rapidamente nel giro di una mezza dozzina d'anni di studi, analisi, sperimentazioni e riflessioni intensi; quando la nuova disciplina ebbe il consenso di un folto gruppo di matematici appassionati, cominciarono a farsi luce tante altre proposte teoriche, come APOS (Dubinsky, 1991, 2002), TAD (Chevallard, 1985, 1992, 1999), EOS (Godino & Batanero, 1994), teoria socioepistemologica (Cantoral & Ferrari, 2004) e altre. Fino a giungere alla TO.

Qualcuna di esse non era altro che una rielaborazione di teorie su basi psicologico-strutturaliste nel senso di Piaget, altre erano vere e proprie novità. Alcune erano autonome, altre potevano essere fatte rientrare da un punto di vista fondazionale le une nelle altre (D'Amore & Godino, 2006).

Accadeva allora quel che sempre succede al momento della formazione di una nuova comunità scientifica: una prima fase di disorganizzazione, priva di accordi specifici, e con una costante richiesta di dibattito sui fondamenti della disciplina stessa. Si può dire che, in questa fase, vi sono tante teorie quanti ricercatori e una continua richiesta ed esigenza di chiarire tramite il confronto diretto i punti di vista propri e altrui; i lavori scritti di ricerca nel campo sono spesso accompagnati da spiegazioni sui caratteri generali della ricerca stessa (D'Amore, 2007).

L'analisi degli scopi di ciascuna di tali teorie neonate viene spontaneo: a che cosa serve, che aspetti indaga davvero, con quali modalità, quali sono i suoi punti di forza, quali le sue basi scientifiche?

All'inizio gli studi critici di tali teorie furono per così dire puramente intrinseci, fino a quando non iniziarono studi comparativi, nei quali cioè si affrontava il problema di paragonare fra loro teorie, come abbiamo cercato di fare in questo articolo.

Non è un caso che, all'inizio, gli studi critici delle singole teorie citavano i classici Popper, Kuhn, Lakatos, Feyerabend, Bunge, cioè i più conosciuti filosofi della scienza che sono stati alla base delle rivoluzioni critiche epistemologiche dell'ultimo secolo. E poi, pian piano, sempre più interessante e specifico si fece il confronto critico-analitico fra coppie di teorie; alcune lentamente passarono in secondo piano, come l'APOS; alcune vennero almeno in parte assorbite da altre (come la TAD nell'EOS) (D'Amore & Godino, 2006). Altre ancora si paragonarono fra loro per decretarne la profonda differenza o, come invece abbiamo cercato di fare noi, almeno per riconoscere una parziale confrontabilità; non per dichiararle simili o assimilabili, ma per dimostrare che non ci sono le contraddizioni che, a volte, sembrano voler essere messe in evidenza.

Così, nel nostro caso, la cosa che ci apparve subito evidente, quando decidemmo di confrontare senza preconcetti i fondamenti teorici di TSD e TO, è che ci sono temi affrontati dalla TSD che non lo sono nella TO; e temi della TO che non lo sono nella TS. Avendo interessi diversi, le due teorie non possono essere in opposizione o in contraddizione fra loro; lo sarebbero se, fissato un tema T, le analisi che vengono fatte fossero contraddittorie rispetto a T; ma se T interessa all'una e non all'altra, allora contraddizione teorica non c'è.

Abbiamo mostrato come TSD e TO sono *parzialmente comparabili e parzialmente compatibili* e come hanno *finalità esplicative parzialmente simili*; dunque come ci siano confrontabilità e non contraddizione.

Sono due teorie di enorme portata culturale, anche critica e concreta, di diversi periodi storici, entrambe vive e diffuse oggi, per le quali la ricerca è continua e viva (per la TSD: D'Amore & Fandiño Pinilla, 2019; per la TO: Asenova, D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, & Santi, in corso di stampa).

Le modalità di studio sono diverse, le analisi di strumenti critici oggettivi sono diverse; rispetto ad alcuni temi una teoria è specifica e l'altra no, e viceversa. Si noti per esempio l'importanza strategica e teorica che ha la semiotica in TO e l'assenza di analisi semiotiche in TSD; l'importanza che ha il concetto di apprendimento in TO e la sua analisi euristica in TSD; si noti l'interesse estremo per le situazioni d'aula (triangolo della didattica, effetti, clausole, contratto didattico) in TSD e il diverso posizionamento degli aspetti legati alle situazioni d'aula in TO.

La netta separazione che viene talvolta suggerita ed evocata fra le due teorie non è tale da creare fratture insanabili o contraddizioni devastanti perché, come abbiamo mostrato in questo articolo, non ci sono realmente le cause o le circostanze per farlo. Cosicché abbiamo dedicato molte discussioni interne, analisi di articoli specifici di ricerca dei due principali autori e loro collaboratori per mostrare quel che ora è, a nostro avviso, il risultato interessante: contraddizione non c'è, anzi ci sono legami parziali ma effettivi fra le due teorie.

Riferimenti bibliografici

- Agazzi, E. (2014). *Scientific objectivity and its contexts*. Cham: Springer International Publishing.
- Arendt, H. (1958). *The human condition*. Chicago: The University of Chicago Press.
- Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 281–308.
- Artigue, M. (1992). Didactic engineering. In R. Douady & A. Mercier (Eds.), *Research in Didactic of Mathematics: Selected papers* (pp. 41–66). Grenoble: La Pensée Sauvage.

- Artigue, M., Gras, R., Laborde, C., & Tavnignot, P. (1994). *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Asenova, M., D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Santi, G. (in corso di stampa). Analysis of some aspects regarding the theory of objectification. Análisis de algunos aspectos de la teoría de la objetivación. *Revista Colombiana de Matemática Educativa (RECME)*.
- Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris: Vrin.
- Bagni, G. T. (2009). *Interpretazione e didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.
- Bagni, G. T., & D'Amore, B. (2005). Epistemologia, sociologia, semiotica: La prospettiva socio-culturale. *La matematica e la sua didattica*, 19(1), 73–89.
- Bakhtin, M. (1986). *Speech genres and other late essays*. Austin, TX: University of Texas Press.
- Balacheff, N. (1990a). Future perspectives for research in the psychology of mathematics education. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition* (pp. 135–148). Cambridge: Cambridge Univ. Press.
- Bessot, A. (1994). Panorama del quadro teorico della didattica della matematica in Francia. *L'educazione matematica*, 9(1), 37–73.
- Bikner-Ahsbahs, A., & Prediger, S. (2010). Networking of theories: An approach for exploiting the diversity of theoretical approaches. In B. Sriraman & L. English (Eds.), *Theories of Mathematics Education: Seeking new frontiers* (pp. 483–506). Berlin: Springer.
- Bikner-Ahsbahs, A., & Prediger, S. (Eds.). (2014). *Networking of theories as a research practice in mathematics education*. Cham: Springer International Publishing.
- Bikner-Ahsbahs, A., Prediger, S., Artigue, M., Arzarello, F., Bosch, M., Dreyfus, T., Gascón, J., Halverscheid, S., Haspekian, M., Kidron, I., Corblin-Lenfant, A., Meyer, A., Sabena, C., & Schäfer, I. (2014). Starting points for dealing with the diversity of theories. In Bikner-Ahsbahs A. & Prediger S. (Eds.), *Networking of theories as a research practice in mathematics education* (pp. 3–12). Cham: Springer International Publishing.
- Bohórquez, A., & D'Amore, B. (2018). Factores que apoyan o limitan los cambios de concepciones de los estudiantes para profesor de matemática sobre la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje. *AIEM–Avances de Investigación en Educación Matemática*, 7(13), 85–103.
- Bosch, M., & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(1), 77–124.
- Bronckart, J. P., & Schneuwly, B. (Eds.). (1985). *Vygotsky aujourd'hui*. Neuchâtel-Paris, Delachaux et Niestlé.
- Brousseau, G. (1965). *Les mathématiques du cours préparatoire*. Paris: Dunod.
- Brousseau, G. (1972). Processus de mathématisation. In APMEP (Ed.), *La mathématique à l'école élémentaire* (pp. 428–457). Parigi: APMEP.
- Brousseau, G. (1975). L'analyse de la didactique des mathématiques. *Actes du Colloque*, 13–15 marzo 1975. Bordeaux: IREM de Bordeaux.
- Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. In W. Vanhamme & J. Vanhamme (Eds.), *La problématique et l'enseignement de la mathématique: Comptes rendus de la XXVIII^e rencontre organisée par la Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de*

- l'Enseignement des Mathématiques* (pp. 101–117). Louvain la Neuve: Presses Universitaires. [Ripubblicato su: *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 1983, 165–198].
- Brousseau, G. (1980a). Les échecs électifs en mathématiques dans l'enseignement élémentaire. *Revue de Laryngologie, Otologie, Rhinologie*, 101(3–4), 107–131.
- Brousseau, G. (1980b). L'échec et le contrat. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 41, 177–182.
- Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(1), 37–127.
- Brousseau, G. (1982). *À propos d'ingénierie didactique*. Bordeaux: IREM, Université de Bordeaux I.
- Brousseau, G. (1984). The crucial role of the didactical contract in the analysis and construction of situations in teaching and learning mathematics. In H.-G. Steiner (Ed.), *Theory of Mathematics Education* (pp. 110–119). Bielefeld, Germania: Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld.
- Brousseau, G. (1986a). *Théorisation des phénomènes d'enseignements des mathématiques* (Thèse d'État). Université Sciences et Technologies, Bordeaux I.
- Brousseau, G. (1986b). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33–115.
- Brousseau, G. (1995). L'insegnamento di un modello dello spazio. In E. Gallo, M. Ferrari, & F. Speranza (Eds.), *La ricerca in didattica della matematica; finalità, contenuti, esempi* (Quaderni CNR, n. 15, pp. 19–44). Pavia: CNR.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970–1990*. (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield, Eds.). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Brousseau, G. (2004). *Une modélisation de l'enseignement des mathématiques*. Conférence plénière, Convegno di didattica della matematica, 24-25 settembre 2004, Locarno, Svizzera.
- Brousseau, G. (2008). *Ingegneria didattica ed epistemologia della matematica*. Bologna: Pitagora.
- Brousseau, G. (2015). Peregrinaciones en la didáctica de las matemáticas. In B. D'Amore & M. I. Fandiño Pinilla (Eds.), *Didáctica de la matemática: Una mirada internacional, empírica y teórica*. Actas del Congreso Internacional homónimo (pp. 13–28). Santa Marta (Colombia), 9-11 settembre 2015, Universidad de La Sabana. Chía (Colombia): Ediciones Universidad De La Sabana. Video disponibile da: <https://www.youtube.com/watch?v=iSbkkKWezt0>
- Brousseau, G., & D'Amore, B. (2018). Los intentos de transformar análisis de carácter metacognitivo en actividad didáctica: De lo empírico a lo didáctico. *Educación Matemática*, 30(3), 41–54. doi: 10.24844/EM3003.02
- Brousseau, G., & Pères, J. (1981). *Étude du 'un enfant en difficulté en mathématiques: "Le cas de Gaël"*. Bordeaux: IREM de Bordeaux.
- Brun, J., & Conne, F. (1990). Analyses didactiques de protocoles d'observation du déroulement de situations. *Éducation et recherche*, 18(3), 261–286.
- Cantoral, R., & Ferrari, M. (2004). Uno studio socioepistemologico sulla predizione. *La matematica e la sua didattica*, 18(2), 33–70.
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique: Du savoir savant au savoir*

- enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12(1), 73–112.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221–266.
- Clanché, P. (1994). L'enfant et le contrat didactique dans les derniers textes de Wittgenstein. In H. Hannoun & A.-M. Drouin-Hans (Eds.), *Pour une philosophie de l'éducation* (pp. 223–232). Bourgogne: CRDP.
- Cobb, P., & Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational Psychologist*, 31(3–4), 175–190.
- Confrey, J. (1995). How compatible are radical constructivism, sociocultural approaches, and social constructivism? In L. P. Steffe & J. E. Gale (Eds.), *Constructivism in education* (pp. 185–225). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- D'Amore, B. (1999a). Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: Effetti sull'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 22A(3), 247–276. [Traduzione completa in lingua spagnola: La escolarización del saber y de las relaciones: Los efectos sobre el aprendizaje de las matemáticas. *Relime*, 3(3), 2000, 321–338].
- D'Amore, B. (1999b). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora. [Edizione in lingua spagnola: D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la Matemática*. Bogotá: Editorial Magisterio]. [Edizione in lingua portoghese: D'Amore, B. (2007). *Elementos de Didática da Matemática*. São Paulo: Livraria da Física].
- D'Amore, B. (2002a). Gérard Vergnaud. In M. Laeng (Ed.), *Enciclopedia Pedagogica* (Appendice A-Z, pp. 1508–1509). Brescia: La Scuola.
- D'Amore, B. (2002b). La complejidad de la noética en matemáticas como causa de la falta de devolución. *TED*, 11, 63–71.
- D'Amore, B. (2003a). La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manquée. *For the learning of mathematics*, 23(1), 47–51.
- D'Amore, B. (2003b). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora. [Edizione in lingua spagnola: D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. México DF: Reverté-Relime]. [Edizione in lingua portoghese: D'Amore, B. (2005). *As bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas e conceituais da didáctica da matemática*. São Paulo: Escrituras].
- D'Amore, B. (2005). Pratiche e metapratiche nell'attività matematica della classe intesa come società: Alcuni elementi rilevanti della didattica della matematica interpretati in chiave sociologica. *La matematica e la sua didattica*, 19(3), 325–336.
- D'Amore, B. (2006). Presentazione dell'edizione italiana di L. Radford & S. Demers (2006). *Comunicazione e apprendimento* (pp. 1–2). Bologna: Pitagora.
- D'Amore, B. (2007). Scienza. In F. Frabboni, G. Wallnöfer, N. Belardi, & W. Wiater (Eds.), *Le parole della pedagogia: Teorie italiane e tedesche a confronto*

- (pp. 335–337). Torino: Bollati Boringhieri.
- D'Amore, B. (2008). Epistemology, didactics of mathematics and teaching practices. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 7(1), 1–22.
- D'Amore, B. (2015). Saber, conocer, labor en didáctica de la matemática: Una contribución a la teoría de la objetivación. In L. Branchetti (Ed.), *Teaching and learning mathematics: Some past and current approaches to mathematics education* [Numero speciale] (pp. 151–171). *Isonomia-Epistemologica: Online philosophical journal of the University of Urbino "Carlo Bo"*. Disponibile da <http://isonomia.uniurb.it/epistemologica>
- D'Amore, B. (2017a). Sapere, conoscere, lavoro in didattica della matematica: Un contributo alla teoria dell'oggettivazione. *Didattica della matematica: Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, 1(1), 4–20. www.rivistadadm.ch
- D'Amore, B. (2017b). Algunos elementos relevantes de la didáctica de la matemática interpretado en clave sociológica. In B. D'Amore & L. Radford (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos* (pp. 29–41). Bogotá: DIE Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Disponibile da http://die.udistrital.edu.co/sites/default/files/doctorado_ud/publicaciones/ensenanza_y_aprendizaje_de_las_matematicas_problemas_semioticos_epistemologicos_y_practicos.pdf
- D'Amore, B. (2018). Puntualizaciones y reflexiones sobre algunos conceptos específicos y centrales en la teoría semiótico cultural de la objetivación. *PNA*, 12(2), 97–127.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2002). Un acercamiento analítico al “triángulo de la didáctica”. *Educación Matemática*, 14(1), 48–61.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2013). Il passo più lungo. Sulla necessità di non buttare a mare (in nome di un vacuo modernismo) teorie di didattica della matematica che spiegano, in maniera perfetta, situazioni d'aula reali. *Bollettino dei docenti di matematica*, 66, 43–52.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2019). Un effetto del contratto didattico: immaginare obblighi impliciti (anche in problemi che chiamano in causa situazioni reali concrete). *La matematica e la sua didattica*, 27(2), 161–196.
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., Santi, G., & Sbaragli, S. (2008). Le rôle de l'épistémologie de l'enseignant dans les pratiques d'enseignement. Atti su DVD del Colloque Internationale: “Les didactiques et leurs rapports à l'enseignement et à la formation. Quel statut épistémologique de leurs modèles et de leurs résultats?”. 18–20 settembre 2008. Bordeaux: Université de Bordeaux 4.
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sarrazy, B. (2010). *Didattica della matematica: Alcuni effetti del “contratto”*. Prefazione e postfazione di Guy Brousseau. Bologna: Archetipolibri. [Edizione in lingua spagnola: D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani I., & Sarrazy, B. (2018). *El contrato didáctico en Educación Matemática*. Bogotá: Magisterio].
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sbaragli, S. (2008). *La didattica e le difficoltà in matematica*. Trento: Erickson.
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Santi, G., & Sbaragli, S. (2012). Some relations between semiotics and didactics of mathematics. *Mediterranean Journal for*

- Research in Mathematics Education*, 11(1–2), 35–57.
- D'Amore, B., & Godino, J. D. (2006). Punto di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica*, 20(1), 9–38.
- D'Amore, B., & Radford, L. (2009). Prefazione a Bagni, G. T. (2009). *Interpretazione e didattica della matematica* (pp. 7–8). Bologna: Pitagora.
- D'Amore, B., & Radford, L. (2017). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Prefazioni di Michèle Artigue e Ferdinando Arzarello. Bogotá: DIE Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- D'Amore, B., Radford, L., & Bagni, G. T. (2006). Ostacoli epistemologici e prospettive socioculturali. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 29B(1), 11–40. [Versione in lingua spagnola: D'Amore, B., Radford, L., & Bagni, G. T. (2007). *Obstáculos epistemológicos y perspectiva socio-cultural de la matemática*. Colección “Cuadernos del Seminario en educación”. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia].
- D'Amore, B., & Santi, G. (2018). Natural language and “mathematics languages”: Intuitive models and stereotypes in the mathematics classroom. *La matematica e la sua didattica*, 26(1), 57–82.
- D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2011). *Principi di base della didattica della matematica*. Progetto: *Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere* (Vol. 2). Bologna: Pitagora.
- Donham, D. L. (1999). *History, power, ideology: Central issues in Marxism and anthropology*. Berkeley: University of California Press.
- Dubinsky, E. (1991). The constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics. In L. P. Steffe (Ed.), *Epistemological Foundations of Mathematical Experiences*, (pp. 160–202). New York: Springer-Verlag.
- Dubinsky, E. (2002). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95–126). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5(1), 37–65.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.
- Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 16(3), 349–382. [Versione in lingua italiana: Quale cognitivo per la didattica della matematica? *La Matematica e la sua didattica*, 10(3), 1996, 250–269].
- Engels, F. (1955). *Dialettica della Natura*. Roma: Edizioni Rinascita.
- Fandiño Pinilla, M. I. (2005). “Diventare competente”, una sfida con radici antropologiche. In R. L. Ancona, E. Faggiano, A. Montone, & R. Pupillo (Eds.), *Insegnare la matematica nella scuola di tutti e di ciascuno. Atti del Convegno omonimo, Università di Bari, 19-21 febbraio 2004* (pp. 65–88). Milano: Ghisetti & Corvi.
- Farfán Márquez, R. M. (1997). *Ingeniería didáctica: un estudio de la variación y el cambio*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.
- Gardner, H. (1993). *Educare al comprendere: Stereotipi infantili e apprendimento scolastico*. Milano: Feltrinelli.

- Geertz, C. (1973). *The interpretation of cultures*. New York: Basic Books.
- Godino, J. D. (1991). Hacia una teoría de la didáctica de las matemáticas. In A. Gutierrez (Ed.), *Area de conocimiento: Didáctica de la Matemática* (pp. 105–148). Madrid: Síntesis. [Versione in lingua italiana: Verso una teoria della didattica della matematica, *La matematica e la sua didattica*, 7(3), 1993, 261–288].
- Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325–355.
- Grenier, D. (1996). Milieu et contrat dans l'étude de l'enseignant et des interactions didactiques. *Actes de la 2èmes Journées de La Fouly "Méthodes d'étude du travail du professeur"*, avril 1996. [Dattiloscritto].
- Guba, E. G. (1990). The alternative paradigm dialog. In E. G. Guba (Ed.), *The paradigm dialog* (pp. 17–27). Newbury Park, CA: Sage. Disponibile da http://www.revista-educacion-atematica.org.mx/descargas/vol30/3/02_REM_30-3.pdf
- IREM Grenoble (1980). Quel est l'âge du capitaine? *Bulletin de l'APMEP*, 323, 235–243.
- Kant, I. (2000). *Critica della ragion pura*. Roma-Bari: Laterza. (Lavoro originale pubblicato nel 1781).
- Laborde, C. (1989). Hardiesse et raisons des recherches françaises en didactique des mathématiques. In G. Vergnaud, J. Rogalski & M. Artigue (Eds.), *Actes de la 13° conférence internationale PME Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 46–61). Paris: PME.
- Laborit, H. (1985). *Éloge de la fuite*. Paris: Gallimard.
- Leontiev, A. N. (1969). *El hombre y la cultura: problemas teóricos sobre educación*. México, DF: Grijalbo.
- Lerman, S. (1996). Intersubjectivity in mathematics learning: A challenge to the radical constructivist paradigm? *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2), 133–150.
- Lerman, S. (2006). Theories of mathematics education: Is plurality a problem? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(1), 8–13.
- Lesh, R., Doerr, H., Carmona, G., & Hjalmanson, M. (2003). Beyond constructivism. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(2–3), 211–233.
- Margolinas, C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Margolinas, C. (1998). Le milieu et le contrat, concepts pour la construction et l'analyse de situations d'enseignement. In R. Noirfalise (Ed.), *Analyse des pratiques enseignantes et didactique. Actes de l'Université d'Été, La Rochelle, Juillet 1998* (pp. 3–16). Clermont Ferrand: IREM de Clermont-Ferrand.
- Marx, K. (1962). *Das Kapital: Kritik der politischen Ökonomie*. Erster Band (Vol. 1). Berlin, DDR: Dietz. (Lavoro originale pubblicato nel 1867). Testo disponibile da http://www.mlwerke.de/me/me23/me23_000.htm
- Marx, K. (1968). *Ökonomisch-philosophische Manuskripte: Geschrieben von April bis August 1844 nach der Handschrift*. Leipzig, DDR: Reclam. (Lavoro originale pubblicato nel 1932). Disponibile da

- http://www.mlwerke.de/me/me40/me40_465.htm
- Merleau-Ponty, M. (1945). *Phénoménologie de la perception*. Paris: Gallimard.
- Narváez Ortiz, D. (2017). Elementos para un estudio actual sobre el contrato didáctico, sus efectos y cláusulas. *La matematica e la sua didattica*, 25(2), 181–189.
- Nemirovsky, R. (2003). Perceptuo-motor activity and imagination in mathematics learning. In N. Pateman, B. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 103–135). Honolulu, Hawaii: University of Hawaii.
- Perrin-Glorian, M. J. (1994). Théorie des situations didactiques: naissance, développement, perspectives. In M. Artigue, R. Gras, C. Laborde, & P. Tavinot (Eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (pp. 97–147). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Petter, G. (1961). *Lo sviluppo mentale nelle ricerche di Jean Piaget*. Firenze: Giunti.
- Prediger, S., Bikner-Ahsbahr, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: First steps towards a conceptual framework. *ZDM Mathematics Education*, 40(2), 165–178.
- Prediger, S., Bosch, M., Kidron, I., Monaghan, J., & Sensevy, G. (2010). Different theoretical perspectives and approaches in mathematics education research: Strategies and difficulties when connecting theories. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1529–1534). Lyon: Institut National de Recherche Pédagogique.
- Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written: A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*, 22(2), 14–23.
- Radford, L. (2003a). On culture and mind: A post-Vygotskian semiotic perspective, with an example from Greek mathematical thought. In M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger, & V. Cifarelli (Eds.), *Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing* (pp. 49–79). Ottawa: Legas Publishing.
- Radford, L. (2003b). Gestures, speech and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37–70.
- Radford, L. (2005). La generalizzazione matematica come processo semiotico. *La matematica e la sua didattica*, 19(2), 191–213.
- Radford, L. (2006a). Comunicazione, apprendimento e formazione dell'io comunitario. In B. D'Amore & S. Sbaragli (Eds.), *Il convegno del ventennale. Atti del Convegno Nazionale "Incontri con la Matematica" n. 20. Castel San Pietro Terme, 3-4-5 novembre 2006* (pp. 65–72). Bologna: Pitagora.
- Radford, L. (2006b). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. In L. Radford & B. D'Amore (Eds.), *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking* [Special Issue]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(1), 103–129.
- Radford, L. (2007). Towards a cultural theory of learning. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME-5)*. Larnaca, Cyprus, February 22–

- 26, 2007. CD-ROM.
- Radford, L. (2008a). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. In L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture* (pp. 215–234). Rotterdam: Sense Publishers.
- Radford, L. (2008b). Di sé e degli altri: Riflessioni su un problema fondamentale dell'educazione. *La Matematica e la sua didattica*, 22(2), 185–205.
- Radford, L. (2008c). Connecting theories in mathematics education: Challenges and possibilities. *ZDM Mathematics Education*, 40(2), 317–327.
- Radford, L. (2008d). Theories in mathematics education: A brief inquiry into their conceptual differences. *Working paper, ICMI 11 Survey Team 7: The notion and role of theory in mathematics education research* (pp. 1–17).
- Radford, L. (2011). La evolución de paradigmas y perspectivas en la investigación: El caso de la didáctica de las matemáticas [The evolution of paradigms and perspectives in research: The case of mathematics education]. In J. Vallès, D. Álvarez, & R. Rickenmann (Eds.), *L'activitat docent intervenció, innovació, investigació [Teacher's activity: Intervention, innovation, research]* (pp. 33–49). Girona (Spain): Documenta Universitaria.
- Radford, L. (2013). Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(1), 7–44.
- Radford, L. (2014a). *On teachers and students: An ethical cultural-historical perspective*. In Liljedahl, P., Nicol, C., Oesterle, S., & Allan, D. (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 1, pp. 1–20). Vancouver, Canada: PME.
- Radford, L. (2014b). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2), 132–150.
- Radford, L. (2016). Mathematics education as a matter of labor. In M. A. Peters (Ed.), *Encyclopedia of Educational Philosophy and Theory. Section: Mathematics education philosophy and theory*. Singapore: Springer.
- Radford, L. (2017a). Ser, subjetividad y alienación. In B. D'Amore & L. Radford (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos* (pp. 137–165). Bogotá: DIE Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Disponible da http://die.udistrital.edu.co/sites/default/files/doctorado_ud/publicaciones/ensenanza_y_aprendizaje_de_las_matematicas_problemas_semioticos_epistemologicos_y_practicos.pdf
- Radford, L. (2017b). Mathematics education theories: The question of their growth, connectivity, and affinity. *La matematica e la sua didattica*, 25(2), 217–228.
- Radford, L. (2018). A cultural-historical approach to teaching and learning: The theory of objectification. In F.-J. Hsieh (Ed.), *Proceedings of the 8th ICMI-East Asia Regional Conference on Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 137–147). Taipei, Taiwan: EARCOME.
- Radford, L., & D'Amore, B. (Eds.). (2006). Semiotics, culture and mathematical thinking [Numero speciale]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. México: Cinvestav. Disponible da

- http://www.luisradford.ca/pub/56_Relime_semiotics_06PP157313.pdf
- Radford, L., & Demers, S. (2006). *Comunicazione e apprendimento: Riferimenti concettuali e pratici per le ore di matematica*. Bologna: Pitagora.
- Radford, L., Edwards, L., & Arzarello, F. (2009). Introduction: Beyond words. *Educational Studies in Mathematics*, 70(2), 91–95.
- Roth, M.-W. (2001). Gestures: Their role in teaching and learning. *Review of Educational Research*, 71(3), 365–392.
- Santi, G. (2010). *Changes in meaning of mathematical objects due to semiotic transformations: A comparison between semiotic perspectives* (Tesi di dottorato di ricerca). Università di Palermo. Disponibile da <https://rsddm.dm.unibo.it/wp-publications/2010-santi-1/>
- Santi, G. (2011a). Objectification and semiotic function. *Educational Studies in Mathematics*, 77, 285–311.
- Santi, G. (2011b). Meaning of mathematical objects: A comparison between semiotic perspectives. In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME-7)* (pp. 2503–2512). Poland: University of Rzeszów.
- Santi, G. (2012). Oggetti matematici, rappresentazioni semiotiche e significato: Il problema dei cambi di senso. *L’Insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 35A-B(3), 328–348.
- Sarrazy, B. (1995). Le contrat didactique. *Revue française de pédagogie*, 112, 85–118. [Versione in lingua italiana: Il contratto didattico, *La matematica e la sua didattica*, 1998, 12(2), 132–175].
- Schubauer-Leoni, M.-L. (1986). Le contrat didactique: Un cadre interprétatif pour comprendre les savoirs manifestés par les élèves en mathématiques. *European Journal of Psychology of Education*, 1(2), 139–153.
- Schubauer-Leoni, M.-L. (1988a). Le contrat didactique dans une approche psychosociale des situations d’enseignement. *Interactions didactiques*, 8, 63–75.
- Schubauer-Leoni, M.-L. (1988b). Le contrat didactique: Une construction théorique et une connaissance pratique. *Interactions didactiques*, 9, 67–81.
- Seitz, J. A. (2000). The bodily basis of thought. *New Ideas in Psychology*, 18(1), 23–40.
- Simon, M. A. (2009). Amidst multiple theories of learning in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(5), 477–490.
- Simon, M. A. (2012). Extending the coordination of cognitive and social perspectives. *PNA*, 6(2), 43–49.
- Sriraman, B., & English, L. D. (2005). Theories of mathematics education: A global survey of theoretical frameworks/trends in mathematics education research. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, 37(6), 450–456.
- Sriraman, B., & English, L. (Eds.). (2010). *Theories of mathematics education: Seeking new frontiers* (Advances in mathematics education series). New York: Springer.
- Teppo, A. R. (Ed.). (1998). *Qualitative research methods in mathematics education*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Vergnaud, G. (1981). L’enfant, la mathématique et la réalité: Problèmes de l’enseignement des mathématiques à l’école élémentaire. Berne: P. Lang. [Edizione in lingua italiana: Vergnaud, G. (1994). *Il bambino, la matematica, la*

realità. Roma: Armando].

- Vygotskij, L. S. (1966). *Pensiero e linguaggio*. Firenze: Giunti e Barbèra. [La I ed., Cambridge: MIT Press, 1962, è un riassunto tratto dalla ed. originale in lingua russa, raccolta di articoli pubblicati a Mosca nel 1956. L'ed. it. è condotta su quella in lingua inglese, tranne il cap. 7 che è traduzione integrale dall'originale].
- Vygotskij, L. S. (1974). *Storia dello sviluppo delle funzioni psichiche superiori*. Firenze: Giunti-Barbèra. [La I edizione russa originale è del 1960].
- Vygotskij, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge: Harvard University Press. [Trad. it.: *Il processo cognitivo*. Torino: Boringhieri, 1980. L'ed. in lingua inglese è tratta da articoli che Vygotskij scrisse in russo nel 1931].
- Vygotskij, L. S., & Lurija, A. R. (1987). *La scimmia, l'uomo primitivo, il bambino: Studi sulla storia del comportamento*. Firenze: Giunti. [La I edizione russa originale è del 1930].
- Wartofsky, M. W. (1979). *Models: Representation and the scientific understanding*. Dordrecht: Reidel.
- Wertsch, J. V. (1991). *Voices of the mind*. Cambridge, MA: Harvard University Press.