

947. D'Amore, B. & Fandiño Pinilla, M. I. (2018). Relectura de un artículo publicado en 2000 con la visión crítica del 2018: ¿qué queda?, ¿qué perspectivas se alcanzaron?, ¿qué metas son aún lejanas? In: A. Avila (Editor) (2018), *Rutas de la Educación Matemática. 30 años de investigación en la revista Educación Matemática*. México: Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática – A. C. Somided. 63-82.

Relectura de un artículo publicado en 2000 con la visión crítica del 2018: ¿qué queda?, ¿qué perspectivas se alcanzaron?, ¿qué metas son aún lejanas?

Rereading an article published in 2000 with the critical vision of 2018: what is left?, what perspectives were reached?, what goals are still far?

Bruno D'Amore^{1,2} y Martha Isabel Fandiño Pinilla²

¹Professor titular experto, Doctorado Interinstitucional, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia

²NRD, Núcleo de Investigación en Didáctica de la Matemática, Departamento de Matemática, Universidad de Bologna, Italia.

Abstract. *Based on the request of the director of the important Mexican magazine Educación Matemática, we analyze one of our articles published in this magazine in 2000; in that we proposed hypotheses on the future development of research in mathematics education. Relying on current research, we discuss the relevance and significance of those hypotheses, formulated 18 years ago. The aim is to show how current research has evolved over the last twenty years.*

Key words. *Research in mathematics education, general didactic and disciplinary didactic, semiotic, devolution, personal relation with mathematical knowledge, teacher training.*

Resumen. *Atendiendo la solicitud hecha por la directora de la importante revista mexicana Educación Matemática, analizamos un artículo nuestro publicado en dicha revista en el año 2000; en dicho trabajo se hacían hipótesis acerca de los desarrollos futuros de la investigación en didáctica de la matemática. Haciendo referencia a los resultados de la actual investigación, se discute sobre la pertinencia y la significatividad de estas hipótesis, formuladas hace ya 18 años. El objetivo es el de mostrar cómo ha evolucionado la investigación en nuestro campo durante estos últimos veinte años.*

Palabras clave. *Investigación en didáctica de la matemática, didáctica general y didáctica disciplinar, semiótica, devolución, relación personal con el saber matemático, formación docente.*

0. Premisa.

La revista *Educación Matemática* nació en 1989, bajo la dirección de la *Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática A. C.* (SOMIDEM), se publican tres números al año y es la revista en idioma español más antigua en nuestro campo. Tiene un gran reconocimiento a nivel mundial. En este 2018 cumple 30 años; su historia se divide, según el parecer de la actual dirección, en dos períodos: de 1989 a 2003 y después del 2004 a la fecha. [Solo para tener un punto de referencia, la revista italiana *La matematica e la sua didattica* nació en 1987, se publicó ininterrumpidamente por 23 años; dejó de publicarse por 6 años y volvió a salir en 2016, año 24; en este 2018 estamos entonces en el año 26].

En 1989 la didáctica de la matemática hace muy poco había nacido, era un neonato impaciente e impetuoso que tenía deseos de sustituir banalidades difusas en el mundo de la escuela que carecían de científicidad y que dañaban el aprendizaje de la matemática en vez que favorecerlo (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2014; 2015b), por una verdadera revolución científica, proponiendo la *teoría de las*

situaciones, la primera teoría que se puede pensar como un estudio científico del aprendizaje de la matemática. La historia nos muestra cómo, a esta primera teoría, siguieron tantas otras.

En 1989 muchos de los célebres artículos que llevaron al querido amigo y maestro Guy Brousseau a la primera medalla Klein en 2003, como debido reconocimiento planetario a su trabajo, ya habían sido publicados; los matemáticos estábamos fascinados por el nuevo mundo que Brousseau estaba creando para nosotros (citamos sólo sus trabajos de mayor relevancia entre 1972 y 1989: Brousseau 1972; 1980a, b; 1982; 1984; 1986a, b, c; 1988a, b, c, d; 1989a, b; Brousseau & Brousseau, 1987; Brousseau & Pérez, 1981).

Una historia contada en primera persona de los albores de lo que después se llamará Didáctica de la matemática fue registrada por Guy Brousseau como respuesta a una solicitud de la dirección del Congreso Internacional *Didáctica de la Matemática. Una mirada epistemológica y empírica*, que se llevó a cabo en Santa Marta (Colombia) del 9 al 11 de septiembre de 2015.¹

Un hecho que nos asombra, en relación con esta historia, es la culpable superficialidad y la evidente ignorancia de quienes se consideran con derecho de crear nuevas teorías, sin tener en cuenta las teorías precedentes, acusando con arrogancia las teorías iniciales, en particular la teoría de situaciones, de ser “una teoría superada, del pasado”; sería como si René Descartes hubiera, en la creación de la geometría analítica, desdeñado y ridiculizado la geometría de los *Elementos* de Euclides. Que este hecho sea generalizado, mucho más de lo que se piensa, y el tipo de crítica feroz que se merece esta actitud está testimoniado en D’Amore y Fandiño Pinilla (2013a).

La revista *Educación Matemática* nace en 1989, poco después del nacimiento oficial de la didáctica de la matemática que muchos reconocemos en 1986 como consecuencia de uno de los trabajos de mayor significación de Guy Brousseau (1986c). Ya 10-11 años después las cosas eran muy diferentes; se dictaban cursos universitarios con este nombre, mientras que convenios y congresos, cátedras universitarias, doctorados de investigación, revistas surgían siempre más en nuestro mundo. Así, en el 2000 parecía que hubiese llegado el momento de hacer un balance, cómplice también el cambio del milenio. Y, como si hubiéramos hecho las cosas intencionalmente, precisamente en ese año publicamos en *Educación Matemática* un artículo cuyo título es emblemático: *La didáctica de la matemática a la vuelta del milenio: raíces, vínculos e intereses* (D’Amore, 2000). Por lo tanto, ya en el lejano 2000, parecía necesario hacer el punto de la investigación y profetizar la evolución futura de estos estudios y de estas investigaciones.

No fue este nuestro único artículo publicado en el “primer período” de la revista; por ejemplo, en 2002 pensamos que se debería volver a hablar con fuerza y exactitud científica de las geniales ideas de Brousseau porque ya se evidenciaban movimientos de detractores ingenuos que, sin un estudio profundo y serio de sus ideas, las redefinían en términos banales y para nada científicos (D’Amore y Fandiño Pinilla, 2002). Tal era la situación, que Bernard Sarrazy (1995) había ya hecho presente las distorsiones de quien accede al mundo de la didáctica de la matemática sin el estudio de los términos específicos definidos con paciencia y erudición, reintroduciéndolos con ligereza y banalidad, tomando como base una interpretación centrada sólo lo que el sentido común les sugiere. Sería como tener un curso universitario sobre los fundamentos de la geometría reinventando las definiciones euclidianas basándolas sobre el sentido común o sobre el sonido de las palabras. Por ejemplo, en dicho trabajo, Sarrazy presenta al menos 50 acepciones distorsionadas de la primera idea fundacional de la teoría de situaciones, la idea de contrato didáctico sobre la cual se están centrando desde hace algunos años nuevos estudios analíticos con renovado interés (D’Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani & Sarrazy, 2010; Narváez Ortiz, 2017).

Fuimos invitados por la dirección de *Educación Matemática* a examinar uno de los diversos artículos publicados por nosotros entre 1989 y 2003; elegimos precisamente el de 2000 en el cual, inspirados, como ya lo dijimos, por el cambio del milenio, hecho memorable al menos desde un

¹ Congreso Internacional *Didáctica de la matemática. Una mirada epistemológica y empírica*, Santa Marta (Colombia), 9-11 septiembre 2015, organizado por la Universidad de la Sabana, Chía, Colombia, con la dirección científica de Bruno D’Amore y Martha Isabel Fandiño Pinilla. Actas on line: <http://congresodidacticamatematica.unisabana.edu.co> [D’Amore & Fandiño Pinilla (Compiladores), 2015a].

punto de vista numérico, parecía que tenía sentido hacer previsiones sobre el futuro. No se trata de un trabajo de investigación (todos los otros trabajos publicados por nosotros en esta revista lo han sido), pero considerábamos que esta elección estaba perfectamente en línea con las nuevas perspectivas que se veían surgir en esos años. Por tanto, nos parece que el tema tratado en el 2000 es el adecuado para esta recurrencia, los primeros 30 años de vida de la revista.

1. Contexto académico, conceptual, social en el que se desarrolló el contenido que se describe en el artículo.

El contexto del artículo se describe brevemente en su resumen:

Resumen. *El presente artículo está dividido en dos partes. En la primera se intenta realizar una estructuración teórica de lo que es la Didáctica de la Matemática en un marco mucho más vasto (raíces) que va desde las otras Didácticas disciplinares a la Didáctica general, a la Pedagogía (vínculos). En la segunda se postulan posibles vertientes futuras de investigación (intereses).*

Entonces dividiremos la presentación de los contenidos del presente artículo en dos partes, así como se anunció en el resumen.

Primera parte.

Uno de los debates de la época estaba centrado en las relaciones, todas por definir, entre las didácticas disciplinares y la didáctica general, un argumento que interesaba mucho más a la pedagogía que a la matemática. Entre las didácticas disciplinares, en aquella época, eran sobre todo activos los estudios y la investigación en didáctica de la matemática; otras disciplinas daban sus primeros pasos, otras debían aún nacer (algunas nunca nacieron, continuando a girar alrededor del sentido común, o a la divulgación de la disciplina o a aspectos pedagógicos). Pero la didáctica general era ya activa durante años atrás, como disciplina autónoma, liberándose de aquello que algunos pedagogos, que después acogieron la didáctica, llamaban “el juego de la pedagogía”. Algunos estudios teóricos sobre estas relaciones ya se habían realizado (D’Amore & Frabboni, 1996), otros siguieron a partir de ese momento histórico (D’Amore & Frabboni, 2005; D’Amore & Fandiño Pinilla, 2007).

En esta primera parte, por tanto, se proponía una historia del proceso de creación de la didáctica disciplinaria: de la filosofía a la pedagogía, de la pedagogía a la didáctica general, citando filósofos, pedagogos, sociólogos y estudiosos de la didáctica general, discutiendo sobre los aspectos descriptivos y normativos (por ejemplo, el principio general de la educación: métodos y finalidades) que acompañan, al interior de la pedagogía, el proceso de creación de la didáctica general. Y evidenciando las diferencias entre pedagogía, ciencias de la educación, ciencias de la formación, didáctica general. Entre los autores modernos citados: Gastón Mialaret (1982), Émile Durkheim (1922/68), Jean Brun (1981, 1996), María Luisa Schubauer Leoni (1996), François Conne (1996); debemos notar que los primeros son pedagogos o psicólogos, mientras estos últimos son ya estudiosos militantes en el campo de la didáctica de la matemática, aunque obligados a tener presente los resultados de la didáctica general, las ciencias de la educación, las didácticas disciplinares, la epistemología genética. El continuo debate estaba centrado en el saber y en su naturaleza.

A este punto consideramos necesario hacer la siguiente aclaración. Fueron, aquellos entre 1970 y 1990, años en los cuales se comenzó a hablar de la ciencia del o la ciencia de la, a propósito de temáticas que, pocos años antes, nunca habrían aspirado a dicha denominación. Digamos que, después de considerar sólo las ciencias “duras”, pasados algunos años de debate, se empezaba a aceptar la idea de ciencias más “débiles” (Kuhn, 1957; Lakatos & Musgrave, 1960; Bunge, 1985; Romberg, 1988; D’Amore, 2001; 2007).

Sigue un análisis histórico y epistemológico que no reportamos aquí, pero que permite alcanzar a otra propuesta análoga, pero más detallada, entre contenidos:

los contenidos de la disciplina d , establecidos por ella misma, a partir de su historia;

los contenidos de la didáctica de aquella disciplina: D_d , que tiene como objeto de estudio la sistematización (en la óptica de: enseñanza / aprendizaje eficaz) de los elementos de la disciplina d , donde los contenidos específicos de D_d ya no son solamente los contenidos de la disciplina d , son nuevos respecto de d ;

los contenidos de otra teoría, más general, que podría identificarse como aquella que se pone el problema general de cómo pasar del caso específico, de los contenidos de d a los contenidos de D_d , sea cual fuere la disciplina d ; esta sería la didáctica general.

En aquel punto, en el artículo se examinaban algunas características de la historia de la enseñanza de la matemática, desde la antigüedad hasta los años '70, momento en el cual nace el problema mucho más serio y significativo del aprendizaje de la matemática, dando inicio a la moderna didáctica de la matemática. Se hablaba, por tanto, de la teoría de las situaciones, dando espacio a los estudios específicos relativos a la transposición didáctica, a la ingeniería didáctica, al contrato didáctico, a la idea de concepto, a la teoría de los obstáculos, citando Lev Vygotsky (1977, cap. IV).

En el intento de dar voz a varias componentes en este debate histórico, decidimos hacer referencia a unas ilustres posiciones, aquellas que tuvieron una mejor acogida al inicio de la historia de la didáctica general (Vergnaud, Holbwachs & Rouchier, 1977; Brun, 1981; Lacombe, 1985; Audigier; 1990) y de la didáctica específica de la matemática (Douady; 1984; Vergnaud, 1985).

Hay que decir que en 1999 fue publicado un extenso texto nuestro en el cual la didáctica de la matemática era estudiada en todos sus detalles, incluso en relación con los temas que estamos aquí delineando (D'Amore, 1999).

Para conocer la historia de la idea de didáctica, tal como se la concibe hoy en día, se recomienda a Artigue y Douady (1986) quienes, aunque con ciertas diferencias, ponen de relieve su nacimiento en Francia, en 1974.

En cuanto al debate feroz sobre la formación de los profesores de matemática, hacemos hoy referencia a (Fandiño Pinilla, 2003a); en nuestro artículo del 2000 se concluía: «En el milenio anterior hemos intentado desbancar la idea, aún viva, que: “para enseñar Matemática es suficiente saber la Matemática”. No puede ser así y nunca lo ha sido: ya en el siglo XVIII se había comprendido que esto ¡no era posible!», sugiriendo las siguientes lecturas: Godino (1996) y D'Amore y Martini (2000) para una profundización en el tema. Aquí nos limitamos a señalar que ya Félix Klein a finales del siglo XIX lamentaba la falta de preparación universitaria de la profesión de docente de matemática (Loria, 1933). Según Klein, el período de los estudios universitarios constituye simplemente un paréntesis, lo que él denominó como *paréntesis universitario*. Antes, el futuro docente es estudiante de secundaria, después vive este paréntesis y, finalmente, entra como docente de secundaria; y, dado que no ha tenido ninguna preparación en esta profesión, sólo puede recurrir al modelo pre-universitario que conocía y que había vivido.

Segunda parte.

Iniciaba con dos preguntas que constituyen un verdadero desafío para los expertos: ¿qué se espera de los futuros desarrollos?, ¿qué tipo de investigaciones podrían asumir un interés relevante?

Por diversos motivos que a continuación se exponen brevemente, la apuesta se centraba en los siguientes temas:

1. registros, semiótica y noética;
2. el problema de la fallida devolución;
3. el problema de la relación personal con el saber;
4. la influencia de la investigación empírica sobre el trabajo concreto y sobre la gestión curricular por parte del docente.

¿Cuál era la relevancia en los años del debate (2000), en los contextos académico, conceptual y social? Distinguiremos los cuatro puntos para hacer un análisis mucho más puntual, aunque breve.

1. Registros, semiótica y noética.

Contexto académico. En el mundo académico estos temas habían entrado inmediatamente, dada su fuerza no sólo conceptual, sino también concreta. Se trataba de un nuevo camino para el análisis de los contextos de aula; si, como lo hemos siempre afirmado, uno de los objetivos principales de la investigación en didáctica de la matemática es el estudio analítico de las situaciones de aula cuando se está hablando de matemática, esta nueva dirección ofrecía un potente instrumento de análisis. Por tanto, en el contexto académico, el tema semiótico era absolutamente actual.

Contexto conceptual. No hay duda, y lo ratificaremos más adelante, que en el plano conceptual el impacto de estos estudios ha sido importante en contexto internacional. Quisiéramos sólo recordar la sorprendente idea de “paradoja cognitiva” hoy llamada “de Duval”,² sobre la cual se realizaron inmediatamente numerosos estudios con los resultados publicados como artículos, incluso bajo la forma de tesis doctorales. Creemos que tenemos los argumentos suficientes para afirmar que este ha sido el tema de mayor relevancia en el campo de la didáctica de la matemática de aquel período, en los primeros años ‘90 y, tal vez, aún hoy.

Contexto social. El mundo de la escuela se apropió inmediatamente, en todo el mundo, de estos temas concretos, temas que afrontan la problemática de la didáctica de forma cercana a la praxis escolar, en todos los niveles de escolaridad.

2. El problema de la fallida devolución.

Recordemos que por “devolución” se entiende la primera fase que, en la teoría de situaciones, se propone para definir la denominada situación adidáctica.

Contexto académico. Si consideramos, como de siempre estamos proponiendo, que la didáctica de la matemática pueda ser pensada como una matemática aplicada (applied mathematics),³ el problema del fracaso en la fase de devolución tiene aspectos importantes ya que sirve para determinar qué es lo que produce un efecto positivo y qué no, en un proceso de tipo causal. Lo cual es precisamente la base del estudio de la matemática aplicada.

Contexto conceptual. Entender las posibles causas del fracaso en cada una de las fases que constituyen la definición (mejor la descripción) de una situación adidáctica nos parecía, conceptualmente hablando, un elemento de grande relevancia no sólo teórica sino también aplicada.

Contexto social. El abismo entre la investigación y la praxis es un problema real y grave en cualquier contexto: medicina, biología, química, ... Lo es también en didáctica de la matemática. El

² «[...] de una parte, el aprendizaje de los objetos matemáticos no puede ser sino un aprendizaje conceptual y, de otra, es únicamente por medio de representaciones semióticas que es posible una actividad sobre los objetos matemáticos. Tal paradoja podría constituir un verdadero círculo vicioso para el aprendizaje. ¿Cómo podrían los aprendices no confundir los objetos matemáticos con su representación semiótica si éstos sólo pueden relacionarse a través de sus representaciones semióticas?. La imposibilidad de acceder directamente a los objetos matemáticos, más allá de su representación semiótica, vuelve casi inevitable la confusión. Y, por el contrario, ¿cómo podrían los aprendices adquirir el dominio de los tratamientos matemáticos, necesariamente ligados a la representación semiótica, si carecen aún de la comprensión conceptual de los objetos representados?. La paradoja se hace aún más fuerte si se identifica la actividad matemática con la actividad conceptual, y si se considera la representación semiótica como algo secundario o extrínseco” (Duval, 1993).

³ Hoy se entiende con la acepción “matemática aplicada” el conjunto de varios aspectos y de diferentes ramas de la matemática cuyos cultores se ocupan del estudio de diversas temáticas matemáticas que se desarrollan en la aplicación de los conocimientos matemáticos en otros campos (no sólo científicos o técnicos). Nos inspiramos a Stoltz (2002). En el curso del 2007 se llevó a cabo en Turín, en el Departamento de Matemática de la Universidad, el Joint Meeting of UMI-SIMAI/SMI-SMF: *Mathematics and its Applications*. Una de las diversas disciplinas de la matemática aplicada era, precisamente, la Mathematics Education; las Actas de este sector fueron publicadas en un fascículo de la revista de didáctica de la matemática: *La matematica e la sua didattica*, 21(1), Actas del: Joint Meeting of UMI-SIMAI/SMI-SMF: *Mathematics and its Applications*. Panel on Mathematics Education. Departamento de Matemática, Universidad de Turín. 6 julio 2006.

origen de los problemas estudiados por la investigación científica en didáctica de la matemática tiene como base la realidad empírica de los contextos educativos (escuelas y universidades). Sin embargo, los resultados de la investigación no logran (o por lo menos retardan) en llegar a las aulas, a los docentes que podrían traer ventaja de estos resultados para su trabajo cotidiano. Tratar de entender, a través de la investigación, las modalidades y las causas del fracaso en una praxis educativa, aparece como un verdadero problema de fuerte interés social. En el 2000 este era un problema social muy sentido.

3. El problema de la relación personal con el saber.

En más de una ocasión y en mil modalidades diversas se pudo constatar que, la única forma para que el estudiante acceda al saber, es haciéndose cargo personalmente de su propio aprendizaje (Brousseau, 1986). A este punto el saber ya no es visto por el estudiante como un cuerpo extraño y abstracto, un redundante y vacío conjunto de conocimientos que la sociedad, la institución y el docente eligieron para él, sino que comienza a verlo como un hecho personal con la intención, en un primer momento, de tener acceso a este y, en un segundo momento, dominarlo, con un objetivo preciso: usarlo. Pero, mientras que en palabras todo esto parece obvio y fácil, de hecho no lo es. Todos sabemos que el contrato didáctico juega un papel determinante en este proceso: el estudiante está propenso a buscar qué y cómo responder a la solicitud del docente, en lugar de tener un acceso directo al saber.

En aquellos años, el debate sobre estos temas estaba muy presente y los resultados eran muy apreciados.

Contexto académico. El tema de investigación conexo con este problema era debatido en los centros de investigación universitaria, por tanto, a nivel académico. Creemos tener los elementos para afirmar que este era uno de los temas de estudios, o mejor, de investigación, de mayor presencia en los debates internacionales.

Contexto conceptual. Desde siempre el ser humano se ha preguntado qué es el saber, y cuál es su significado, qué se entiende cuando se dice “ser competente”, ... A finales del siglo XX, estos argumentos estuvieron en el centro de grandes discusiones, tanto que en ocasiones asumieron las vestes de discusiones legislativas y curriculares en muchos países.

Contexto social. Como lo hemos dicho, la importancia de este debate en el campo conceptual se mezcla con sus aspectos sociales. Basta decir que en algunos países se inició la discusión sobre el significado de “alcanzar las competencias escolares”, primero en América Latina y después en Europa. Numerosos programas escolásticos nacionales e indicaciones ministeriales quisieron tener en cuenta esta temática, dando definiciones no siempre idóneas e imponiendo nuevas metas que deberían alcanzar tanto los docentes como los estudiantes.

4. La influencia de la investigación empírica sobre el trabajo concreto y sobre la gestión curricular por parte del docente.

Sobre esta temática ya habíamos hecho referencia, denunciando la distancia entre investigación científica empírica (investigación realizada por los núcleos de expertos investigadores en las aulas, con técnicas de investigación diversas y cada vez mucho más precisas y significativas) y la praxis.

De muchos fenómenos de fracaso en el aprendizaje de la matemática hoy se conocen las razones, la investigación ha revelado cuales son los puntos críticos que llevan a este en diversas situaciones (inició Brousseau en los años '80, estudiando y denunciando los famosos “efectos”). Pero cuando el docente desarrolla su currículo en aula, puede crear las mismas situaciones negativas de aprendizaje denunciadas por Brousseau y por otros estudiosos, dado que no conoce estos resultados. Nos pedíamos, en ese entonces: ¿Cómo colmar este hiato? ¿Cómo saldar este vacío?

Contexto académico. Vale todo lo expresado en precedencia: si la investigación universitaria se hace cargo no sólo de realizar la investigación misma sino también de encontrar una modalidad que lleve al docente a conocer los resultados y de consecuencia evite los errores que hacen imposible el aprendizaje de sus estudiantes, entonces esta investigación se transforma en algo importante desde

el punto de vista académico, dando una dignidad diversa y más significativa a dicha actividad investigativa.

Contexto conceptual. Pero dicho hiato no es sólo un hecho que sucede sin motivos, existen causas que van estudiadas conceptualmente. Podemos pensar en una sucesión que parece fácil de recorrer: evidenciar un problema que impide el aprendizaje de un determinado tema T – estudio conceptual de este fenómeno por parte de los investigadores universitarios – elaboración de un plan de investigación – realización de la investigación – individuación de las causas que generan la falta de aprendizaje del tema T en cuestión – comunicación a los docentes de los resultados de dicha investigación – eliminación o atenuación de los factores que llevan a la falta de aprendizaje del tema T. Esta secuencia que parece tan lineal, lógica, simple, en realidad no lo es... Este hecho determina un interés conceptual del fenómeno de la no transmisión de los resultados de la investigación a aquellos que deberían ser los naturales destinatarios de dichos resultados, los docentes. No es sólo un hecho empírico, sino también conceptual: ¿Qué es lo que lo determina?

Contexto social. Consideramos que el interés de tipo social es obvio, tomando como base lo que dijimos líneas arriba. Los cursos de formación para docentes en servicio y para futuros docentes eran (y lo son en la actualidad) innumerables; muchos tenían el objetivo de dar a conocer a los docentes los resultados de la investigación en didáctica de la matemática.

3. Evolución y desarrollo de nuestra perspectiva sobre el tema. Relación del contenido del escrito con nuestro trabajo actual.

Afrontamos ahora un análisis actual de la evolución y del desarrollo, después de una notable distancia temporal, de las perspectivas que, en aquel año 2000, se presentaron como hipótesis respecto a los temas propuestos:

1. registros, semiótica y noética;
2. el problema de la fallida devolución;
3. el problema de la relación personal con el saber;
4. la influencia de la investigación empírica sobre el trabajo concreto y sobre la gestión curricular por parte del docente.

1. Registros, semiótica y noética.

Hoy en día todos aceptamos el hecho de que ningún objeto matemático tiene una realidad objetiva; todos hoy aceptamos que tenemos que tener presente la “paradoja cognitiva” enunciada por Raymond Duval. La fácil previsión se manifestó exacta. Dado un objeto matemático, es decir dada una o más de una representación de dicho objeto, el estudiante debe hacerlo propio, construirlo cognitivamente a través de las siguientes acciones:

representarlo en un registro dado;

tratar sus representaciones dentro de un mismo registro;

convertir dichas representaciones de un registro a otro.

Todas estas “operaciones” meta-semióticas son de gran relevancia e incluso esenciales para el aprendizaje. No se trata de estudios abstractos o inútilmente complicados, como podría pensar quien lee superficialmente, sino, por el contrario, de una sentida necesidad. Pero se necesitaron muchos años para entenderlo.

Los estudios teóricos sobre las tesis de Duval llevaron a resultados formidables, algunos sorprendentes. Nos limitaremos a citar sólo algunos entre los más cercanos a nosotros (Santi, 2011a, b; Sbaragli & Santi, 2011; Iori, 2017; 2018).

Otros estudios, hechos como experiencias significativas en el aula, han mostrado cómo las palabras de Duval fuesen proféticas en relación con el aprendizaje, lo cual confirma las hipótesis formuladas en el 2000; véase un ejemplo en geometría en la primaria (Asenova, 2018).

Varios autores, nosotros mismos, motivados por los estudios sobre la semiótica y realizadas un gran número de experiencias en aula, llegamos a concebir un volumen que resumiese teorías y praxis que se reveló de gran interés y utilidad para la reflexión y la formación de los docentes (D'Amore, Fandiño Pinilla & Iori, 2013; el libro salió en italiano, español y portugués).

En cuanto a la paradoja cognitiva de Duval, esta parecía ser en primera instancia una novedad absoluta en el campo de la semiótica como teoría, relativa al aprendizaje de la matemática y tal vez también en el plano filosófico; pero estudios sucesivos han llevado a demostrar que esta “novedad” no era tal, que la posición de Duval se puede inserir en una tradición muy antigua que los estudiosos de didáctica de la matemática no habían explorado (D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori & Matteuzzi, 2015).

Queremos también hacer notar cómo, a partir de las primeras incursiones de Raymond Duval en el mundo de la semiótica (Duval, 1988a, b; 1993; en particular: 1995), nacieron nuevas teorías que, aún siendo del todo diversas, se relacionan con la semiótica como base teórica y empírica.

Hacemos referencia, como un primer ejemplo, al EOS (Enfoque Onto Semiótico) que ha tenido éxito internacional (Godino, Batanero, 1994; D'Amore & Godino, 2006; 2007; Font, Godino & D'Amore, 2007; D'Amore & Fandiño Pinilla, 2017a; sólo para hacer algunos ejemplos).

Como segunda referencia citamos la TO (Teoría de la Objetivación), una teoría actualmente entre las más apreciadas en contexto internacional (Radford, 1997; 2002; 2003; 2004; 2005; 2006; 2013a, b; 2014; D'Amore, Radford & Bagni, 2006; D'Amore, 2015; D'Amore & Radford, 2017). Consideramos de particular importancia el trabajo Radford (2017) en el cual el creador de la TO desvela las bases personales sobre las cuales ideó y construyó dicha teoría.

La proliferación de los estudios de didáctica de la matemática sobre temas relacionados con la semiótica fue tal, que en 2006 se decidió publicar una reseña internacional sobre estas investigaciones; con este propósito se invitaron a los protagonistas de los estudios de este argumento a delinear las peculiaridades de su personal línea de investigación en un número especial de la revista *Relime* (Radford & D'Amore, 2006).

En estos últimos años, universidades y editoriales están siempre buscando producir trabajos de síntesis sobre investigaciones en semiótica, destinados a docentes en formación y a estudiantes de maestrías o doctorados de investigación, incluso, precisamente, como material idóneo de avío a la investigación (Duval & Saenz Ludlow, 2016; Duval, 2017).

2. El problema de la fallida devolución.

Sobre este tema no se han hecho estudios específicos, como por el contrario planteábamos en nuestras previsiones. Lo que suponíamos era que no se trataba sólo de un problema afectivo o meta - cognitivo o relativo a la institucionalización. El nudo del problema podría radicar en la incapacidad de trabajar dichas operaciones semióticas y meta - semióticas necesarias, con la consiguiente renuncia. O podría centrarse en la incapacidad de captar o de aceptar el paso a la institucionalización de la relación personal con el saber. Es decir, se puede ver la noética y las dificultades ligadas a su acceso como una ulterior causa del fracaso de la fase de devolución (véase: D'Amore, 2003; Becerra Galindo, 2017; Ramírez Bernal; 2017).

3. El problema de la relación personal con el saber.

En el trabajo del 2000, examinado en este artículo, se buscaba iniciar una discusión crítica sobre la idea de “concepto”, vista la compleja red de interpretaciones que se proponían en aquel período; creemos poder afirmar que en ese entonces era relevante la posición denominada antropológica que evidencia la importancia de las relaciones entre $R_I(X, O)$ [relación institucional con el objeto del saber] y $R(X, O)$ [relación personal con el objeto del saber] (símbolos y terminología de Chevallard, 1992). Obviamente, aquí, por “objeto del saber” se entiende “objeto *matemático* del saber”, lo que Chevallard (1991, p. 8) define como: «un emergente de un sistema de praxis donde se manipulan objetos materiales que se descomponen en diversos registros semióticos: registro oral; de las

palabras o de las expresiones pronunciadas; registro gesticular; dominio de la inscripción o bien de lo que se escribe o dibuja (gráficas, fórmulas, cálculos, ...), vale decir registro de la escritura».

Sobre este tema, en nuestra opinión, se han hecho importantes estudios que permitieron aclarar y sobre todo delimitar el problema; la idea de que en la “construcción de un concepto” participarían tanto la parte institucional (el saber) como la parte personal (de quien haya abordado dicho saber, no sólo el experto) fue sugerida por varios autores, por ejemplo Godino y Batanero (1994), para quienes se trata precisamente de las relaciones entre significados institucionales y personales de los objetos matemáticos. ¡Pero el 1994 está antes del 2000! Damos esta referencia sólo para colocar históricamente la cuestión. Algunos de nuestros trabajos realizados sucesivamente al año 2000 afrontaron este tema, por ejemplo, D’Amore (2001; 2002; 2003a, b; 2004).

Una nueva modalidad de estudiar, después del año 2000, la relación personal con el saber es la de tipo sociológico, modalidad que supera y comprende, según nuestra opinión, la visión antropológica. Entre todos los trabajos producidos en este campo, sugerimos sólo algunos entre aquellos más cercanos a nosotros (Bagni & D’Amore, 2005; D’Amore, 2005; D’Amore & Godino, 2006; 2007; D’Amore, Font & Godino, 2007; 2008).

Como habíamos mostrado en precedencia, este tema se relaciona directamente con otro muy complejo y controvertido que es el de la adquisición de competencias; el estudiante es considerado ya no sólo como quien adquiere conocimiento, gracias a una relación personal con el saber, sino también como un individuo competente. Y aquí hay que decir que esta forma de ver las cosas formativas – escolares tuvo un notable impacto internacional. Nosotros propusimos a la colectividad, a partir precisamente de finales del siglo XX, varios estudios al respecto (por ejemplo, entre los primeros: Fandiño Pinilla & Pedraza Daza, 1999; Fandiño Pinilla, 1999), en los cuales se configuraba una idea concreta de competencia, y una distinción entre competencia en matemática y competencia matemática, la primera endógena, interna, intrínseca a la matemática, la segunda, mucho más interesante, que permite ver e interpretar el mundo y los fenómenos que en él suceden con ojos matemáticos, es decir una competencia que hace posible interpretar hechos, sucesos, fenómenos, eventos, objetos, artefactos con la competencia adquirida en matemática, precisamente gracias a una intensa relación personal entre estudiante y saber (Fandiño Pinilla, 2003b; 2004; 2005a, b; 2006; D’Amore & Fandiño Pinilla, 2003; 2006). Hasta llegar a la redacción del texto ya citado, que recoge todos los estudios precedentes hechos por Juan Diaz Godino y por nosotros sobre este argumento, intentando dar respuestas complejas y en ocasiones problemáticas a los interrogantes de investigación que nos habíamos planteado en los años anteriores (D’Amore, Godino & Fandiño Pinilla, 2008).

4. La influencia de la investigación empírica sobre el trabajo concreto y sobre la gestión curricular por parte del docente.

Nos limitamos a hacer notar que para nosotros es necesario iniciar un estudio sobre el nuevo problema de la “didáctica de la didáctica de la matemática” dado que, en muchas universidades, la disciplina didáctica de la matemática está a cargo de colegas con muy buena voluntad pero improvisados y generalmente ingenuos que no conocen la disciplina y la confunden con la matemática misma, o con la historia de la matemática, o con la epistemología de la matemática, o con la matemática divulgativa, o con las matemáticas elementales desde un punto de vista superior (en memoria de Félix Klein), o con juegos y juguetos pertenecientes a la matemática recreativa, o con el sentido común, o con la experiencia. Sobre este punto hemos propuesto varios estudios, entre los cuales citamos sólo D’Amore y Fandiño Pinilla (2013b).

Queremos evidenciar un hecho que nos parece interesante; existe una versión en idioma español del trabajo citado en precedencia (D’Amore & Fandiño Pinilla, 2017b), que fue publicado en el libro ya recordado (D’Amore & Radford, 2017), libro que cuenta con las prefaciones los prefacios de Michèle Artigue y de Ferdinando Arzarello. Pues bien, en el prefacio de Michèle Artigue se afirma (pagg. 15-16). «El (...) texto, coescrito con Martha Isabel Fandiño Pinilla, es una reflexión sobre la espinosa cuestión de la enseñanza de la didáctica misma. En dicha reflexión el autor nos invita,

basándose en su rica experiencia en este dominio, a comprender cómo el pasaje de la enseñanza de la matemática a la enseñanza de su didáctica modifica los diferentes elementos del clásico triángulo de la didáctica. Bien se perciben las consecuencias de la ausencia de acuerdos sobre los tipos y los contenidos de saberes que hay que transmitir, aun si dicha ausencia no es suficiente para explicar las razones por las cuales los resultados de la investigación didáctica tienen tanta dificultad en alimentar eficazmente la formación del profesorado. No pude evitar reconocer una relación entre esta reflexión y los debates y trabajos que han sido llevados a cabo en mi propia comunidad acerca de la formación tanto de los docentes como la de los formadores de docentes sobre los equilibrios idóneos entre una didáctica objeto y una didáctica instrumento, así como sobre las técnicas y métodos a desarrollar para anclar la formación en realidades de prácticas y responder de la mejor manera posible a las necesidades de los docentes».

Consideramos que este testimonio de tan ilustre personaje garantiza la importancia de este tema dentro de las futuras reflexiones indispensable para nuestra comunidad internacional.

Todo esto quiere ser un homenaje a la revista *Educación Matemática*, por su contribución internacionalmente reconocida en didáctica de la matemática.

Referencias bibliográficas

- Artigue, M., & Douady R. (1986). La didactique des mathématiques en France. *Revue française de pédagogie*, 20(76), 69-88.
- Audigier, F. (1990). *Histoire. Géographie. Éducation civique. Collège Lycée*, 8. París: CRDP.
- Asenova, M. (2018). Esperienze relative alle costruzioni geometriche con riga e compasso nella scuola elementare. En curso de evaluación.
- Bagni, G. T., & D'Amore, B. (2005). Epistemologia, sociologia, semiotica: la prospettiva socio-culturale. *La matematica e la sua didattica*, 19(1), 73-89.
- Becerra Galindo, H. M. (2017). Las problemáticas semióticas en las representaciones de los conjuntos infinitos en la práctica docente. *La matematica e la sua didattica*, 25(2), 191-201.
- Brousseau, G. (1972). *Processus de mathématisation. La mathématique à l'école élémentaire*. París: APMEP. 428-457.
- Brousseau, G. (1980a). Les échecs électifs dans l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. *Revue de laryngologie, otologie, rinologie*, 101(3-4), 107-131.
- Brousseau, G. (1980b). L'échec et le contrat. *Recherches en didactique des mathématiques*, 1(41), 177-182.
- Brousseau, G. (1982). *À propos d'ingénierie didactique*. Université de Bordeaux I. IREM.
- Brousseau, G. (1984). Le rôle central du contrat didactique dans l'analyse et la construction des situations d'enseignement et d'apprentissage. *Actas de la Reunión de la tercera Universidad de verano de didáctica de la matemática de Olivet*.
- Brousseau, G. (1986a). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*. Thèse pour le doctorat d'état. Université de Bordeaux I.
- Brousseau, G. (1986b). *Le jeu et l'enseignement des mathématiques*. (Alocución al 59^{esimo} congreso AGIEM). Bordeaux.
- Brousseau, G. (1986c). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématique*, 7(2), 33-115.

- Brousseau, G. (1988a). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9(3), 309-336.
- Brousseau, G. (1988b). *Perspectives sur la didactique des mathématiques*. IREM de Bordeaux.
- Brousseau, G. (1988c). Traitement de la mémoire des élèves dans le contrat didactique. En: Laborde C. (Compiladores) (1988). *Actes du premier colloque Franco-Allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Brousseau, G. (1988d). Didactique fondamentale, Didactique des mathématiques et formation des maîtres. *Actes de l'Université d'été d'Olivet*. Juillet 1988, Bordeaux. IREM. 10-25.
- Brousseau, G. (1989a) Utilité et intérêt de la didactique des mathématiques pour un professeur de collège. *Petit x*, 7(21), 47-68.
- Brousseau, G. (1989b). La tour de Babel. *Etude en didactique des mathématiques*. Université de Bordeaux I: IREM.
- Brousseau, G., & Brousseau, N. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. Bordeaux: Université de Bordeaux I: IREM.
- Brousseau, G., & Perez, J. (1981). *Le cas Gaël*. Université de Bordeaux I: IREM.
- Brun, J. (1981). À propos de la didactique des mathématiques. *Math-École*, 21(100-101), 14-21.
- Brun, J. (1996). Évolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques. En: Brun J. (Compilador) (1996). *Didactique des mathématiques*. Neuchâtel: Delachaux et Niestlé, 19-43. [También en: Artigue M., Gras R., Laborde C., Tavinot P. (Compiladores.) (1994). *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud*. Grenoble: La Pensée Sauvage. 67-83].
- Bunge, M. (1985). *Pseudociencia y ideología*. Madrid: Alianza.
- Chevallard, Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble*. LSD2, IMAG. Grenoble: Université J. Fourier.
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12(1), 73-112.
- Conne, F. (1996). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. En: Brun J. (compilador) (1996). *Didactique des mathématiques*. Neuchâtel: Delachaux et Niestlé. 275-338.
- D'Amore, B. (1998). Oggetti relazionali e diversi registri rappresentativi: difficoltà cognitive ed ostacoli – Relational objects and different representative registers: cognitive difficulties and obstacles. *L'educazione matematica*, 13(1), 7-28. [Versión en idioma español: 1998. Objetos relacionales y diversos registros representativos: dificultades cognitivas y obstáculos. *Uno*, 5(15), 63-76].
- D'Amore, B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica*. Prefacio de Colette Laborde. Bologna: Pitagora. [Edición en idioma español: 2006, *Didáctica de la Matemática*. Prefacios de Colette Laborde, Guy Brousseau, Luis Rico. Bogotá: Editorial Magisterio]. [Edición en idioma portugués: 2007, *Elementos da Didática da Matemática*. São Paulo: Livraria da Física. Prefacios de Ubiratan D'Ambrosio, Luis Rico Romero, Colette Laborde y Guy Brousseau].
- D'Amore, B. (2000). La didáctica de la matemática a la vuelta del milenio: raíces, vínculos e intereses. *Educación Matemática*, 12(1), 39-50.
- D'Amore, B. (2001a). *Scritti di Epistemologia matematica. 1980-2001*. Bologna: Pitagora.
- D'Amore, B. (2001b). Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos. *Uno*, 8(27), 51-76.
- D'Amore, B. (2002). La complejidad de la noética en matemática como causa de la falta de devolución. *TED* (Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional), 10(11), 63-71.
- D'Amore, B. (2003a). La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manquée. *For the learning of mathematics*, 23(1), 47-51].

- D'Amore, B. (2003b). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Prefacio de Guy Brousseau. Bologna: Pitagora. [En idioma español: D'Amore B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. Prefacio de Guy Brousseau. Prefacio a la edición en idioma español de Ricardo Cantoral. México DF, México: Reverté-Relime].
- D'Amore, B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Uno*, 11(35), 90-106.
- D'Amore, B. (2005). Pratiche e metapratiche nell'attività matematica della classe intesa come società. Alcuni elementi rilevanti della didattica della matematica interpretati in chiave sociologica. *La matematica e la sua didattica*, 19(3), 325-336.
- D'Amore, B. (2007). Definiciones para el diccionario: Frabboni F., Wallnöfer G., Belardi N., Wiater W. (Compiladores) (2007). *Le parole della pedagogia. Teorie italiane e tedesche a confronto*. Turín: Bollati Boringhieri. Definiciones en el diccionario: Didattica disciplinare (pagg. 72-75), Formazione in scienze naturali (pagg. 140-142), Formazione in matematica (pagg. 145-147), Scienza (pagg. 335-337). [Versión en idioma alemán: D'Amore, B. (2010). Definiciones para el diccionario: Wiater W., Belardi N., Frabboni F., Wallnöfer G. (Compiladores) (2010). *Pädagogische Leitbegriffe, im deutsch-italienischen Vergleich*. Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren. Definiciones: Fachdidaktik (pagg. 98-101), Mathematische Bildung (pagg. 227-228), Naturwissenschaftliche (pagg. 255-258), Wissenschaft (pagg. 362-364)].
- D'Amore, B. (2015). Saber, conocer, labor en didáctica de la matemática: una contribución a la teoría de la objetivación. En: L. Branchetti (Compiladora.). *Teaching and Learning Mathematics. Some Past and Current Approaches to Mathematics Education*. 151-171. Isonomia, On-line Journal of Philosophy — Epistemologica. University of Urbino Carlo Bo. <http://isonomia.uniurb.it/epistemologica/> <http://isonomia.uniurb.it/node/30>
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2002). Un acercamiento analítico al “triángulo de la didáctica”. *Educación Matemática*, 14(1), 48-61.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2003). “Competenze”: obiettivo per chi costruisce il proprio sapere. *La matematica e la sua didattica*, 17(3), 327-338.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2006). Una riflessione sul termine “competenza” nell'educazione matematica. *Difficoltà in matematica*, 2(2), 155-164.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2007). *Le didattiche disciplinari*. Prefacio de Franco Frabboni. Trento: Erickson.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2013a). El paso más largo. Sobre la necesidad de no tirar por la borda (en el nombre de un modernismo vacío) las teorías de la educación matemática que explican, perfectamente, situaciones reales del aula. *Acta Scientiae. Revista de ensino de Ciências e Matemática*, 15(2), 246-256. <http://periodicos.ulbra.br/index.php/acta>
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2013b). La didattica della didattica della matematica: esperienze personali e spunti critici di discussione e ricerca. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 36B(4), 325-353.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2014). Illusioni, panacee, miti nell'insegnamento-apprendimento della matematica. *DiM Difficoltà in Matematica*, 11(1), 89-109.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (Compiladores) (2015a). *Didáctica de la matemática. Una mirada epistemológica y teórica*. Prólogo de: Bruno D'Amore y Martha Isabel Fandiño Pinilla. Textos de: Guy Brousseau, John Alexander Alba, Luis Carlos Arboleda, Ferdinando Arzarello, Giorgio Bolondi, Ricardo Cantoral, Bruno D'Amore, Raymond Duval, Martha Isabel Fandiño Pinilla, Vicenç Font, Athanasios Gagatsis, Juan Diaz Godino, Salvador Llinares. Textos completos de las conferencias dictadas por lo conferencistas invitados al Congreso Internacional: *Didáctica de la matemática. Una mirada epistemológica y empírica*, Santa Marta (Colombia), 9-11 septiembre 2015, organización científica de Bruno D'Amore y

Martha Isabel Fandiño Pinilla bajo la coordinación de la Universidad de La Sabana. Chía (Colombia): Ediciones Universidad De La Sabana.

- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2015b). Propuestas metodológicas que constituyeron ilusiones en el proceso de enseñanza de la matemática. *Educación Matemática*, 27 (3), 7-44.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2017a). Reflexiones teóricas sobre las bases del enfoque onto-semiótico de la Didáctica de la Matemática. Theoretical reflections on the basis of the onto-semiotic approach to Didactic of Mathematics. En: J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Compiladores) (2017). *Actas del II Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico*. Granada, 23-26 marzo 2017. Sitio web: <http://enfouqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html>
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2017b). La didáctica de la matemática: experiencias personales e indicaciones críticas de algunas discusiones e investigaciones. En: D'Amore, B., & Radford, L. (2017). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Prefacios de: Michèle Artigue y Ferdinando Arzarello. Bogotá: DIE Universidad Distrital Francisco José de Caldas. 41-66. http://die.udistrital.edu.co/sites/default/files/doctorado_ud/publicaciones/ensenanza_y_aprendizaje_de_las_matematicas_problemas_semioticos_epistemologicos_y_practicos.pdf
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I., & Iori M. (2013). *Primi elementi di semiotica. La sua presenza e la sua importanza nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica*. Prefación de Raymond Duval y de Luis Radford. Bologna: Pitagora. (Versión en idioma español: D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I., Iori M. (2013). *La semiótica en la didáctica de la matemática*. Prefacios de Raymond Duval y Luis Radford. Prólogo a la edición en idioma español de Carlos Eduardo Vasco. Bogotá: Magisterio).
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Matteuzzi, M. (2015). Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la "paradoja cognitiva de Duval". *Relime, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18(2), 177-212. <http://www.clame.org.mx/relime.htm> Doi: 10.12802/relime.13.1822
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sarrazy, B. (2010). *Didattica della matematica. Alcuni effetti del "contratto"*. Prefacio y postfacio de Guy Brousseau. Bologna: Archetipolibri. [Trad. en español: D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sarrazy, B. (2018). *Didattica della matematica. Alcuni effetti del "contratto"*. Prefacio y postfacio de Guy Brousseau. Bogotá: Magisterio].
- D'Amore, B., Font, V., & Godino, D. J. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradigma*, 38(2), 49-77.
- D'Amore, B., Font, V., & Godino, D. J. (2008). La dimensione metadidattica dei processi di insegnamento e di apprendimento della matematica. *La matematica e la sua didattica*, 22(2), 207-235.
- D'Amore, B., & Frabboni, F. (1996). *Didattica generale e didattiche disciplinari*. Milán: Angeli.
- D'Amore, B., & Frabboni, F. (2005). *Didattica generale e didattica disciplinare*. Milán: Bruno Mondadori.
- D'Amore, B., & Godino, D.J. (2006). Puntos de vista antropológico ed onto-semiótico en didáctica de la matemática. *La matematica e la sua didattica*, 20(1), 9-38.
- D'Amore, B., & Godino, D.J. (2007). El enfoque onto-semiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en Didáctica de la Matemática. *Relime*, 10(2), 191-218.
- D'Amore, B., Godino, D. J., & Fandiño Pinilla, M. I. (2008). *Competencias y matemática*. Bogotá: Magisterio.
- D'Amore, B., & Martini, B. (2000). Sobre la preparación teórica de los maestros de matemáticas. *Relime*, 3(1), 33-46.
- D'Amore, B., & Radford, L. (2017). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Prefacios de: Michèle Artigue y Ferdinando Arzarello. Bogotá: DIE Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

http://die.udistrital.edu.co/sites/default/files/doctorado_ud/publicaciones/ensenanza_y_aprendizaje_de las_matematicas_problemas_semioticos_epistemologicos_y_practicos.pdf

- D'Amore, B., Radford, L., & Bagni GT. (2006). Ostacoli epistemologici e prospettive socioculturali. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 29B(1), 11-40. (Versión en idioma español: en D'Amore, B., & Radford, L. (2017), 165-192).
- Douady, R. (1984). *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques*. Thèse d'État, Univ. de Paris. [Véase también en: *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 1986, 5-31].
- Durkheim, É. (1922/1968). *Éducation et sociologie*. París: PUF.
- Duval, R. (1988a). Ecarts sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, 1(1), 7-25.
- Duval, R. (1988b). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, 1(1), 57-74.
- Duval, R. (1988c). Graphiques et équations. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, 1(1), 235-253.
- Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 6(5), 37-65.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang. [En idioma español: Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. Cali: Universidad del Valle].
- Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations*. Foreword by Bruno D'Amore. Cham, Switzerland: Springer International Publishing AG.
- Duval, R., & Sáenz Ludlow, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas*. [Prólogo de Bruno D'Amore. Artículos comentados por Bruno D'Amore y Carlos Eduardo Vasco Uribe]. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Fandiño Pinilla M. I. (1999). Alumnos competentes: objeto de formación (evaluación) del profesor de matemáticas. En: Bonilla M., Fandiño Pinilla M.I., Sanchez N., Romero J. (1999). *La evaluación de profesores de matemáticas*. XVI Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia. 32-38.
- Fandiño Pinilla M. I. (Compiladora) (2003a). *Riflessioni sulla formazione iniziale degli insegnanti di matematica: una rassegna internazionale*. Bologna: Pitagora.
- Fandiño Pinilla, M. I. (2003b). "Diventare competente", una sfida con radici antropologiche. *La Matematica e la sua didattica*, 17(3), 260-280.
- Fandiño Pinilla, M. I. (2004). "Diventare competente": una sfida con radici antropologiche. En: Arrigo G. (Compilador) (2004). *Actas del Congreso de didactica de la matematica 2004*. Locarno, 24-25 septiembre 2004. Locarno: Quaderni Alta Scuola Pedagogica. 109-112.
- Fandiño Pinilla, M. I. (2005a). Competenza e valutazione: una sfida dell'educazione di oggi. En: Benini AM., Gianferrari L. (Compiladores) (2005). *Valutare per migliorarsi*. Nápoles: Tecnodid. 40-48.
- Fandiño Pinilla, M. I. (2005b). La competencia matemática: un reto con raíces antropológicas. En: *Actas del VII Simposio de Educación Matemática*, Chicilcoy (Argentina), 3-6 mayo 2005. www.edumat.com.ar
- Fandiño Pinilla, M. I. (2006). Educare alla competenza matematica. *Rassegna*. Número especial: D'Amore B. (Compilador). *Matematica: l'emergenza della didattica nella formazione*. Bolzano: Istituto Pedagogico di lingua italiana. 21-28.
- Fandiño Pinilla, M. I., & Pedraza Daza, F. P. (1999). La evaluación de competencias como estrategia para la cualificación de la educación matemática en Colombia. En: AA. VV. (1999). *Memorias IV Congreso Nacional de Matemática Educativa*. Guatemala, noviembre 1999. Città di Guatemala: Ministerio de Educación de Guatemala. 199-208.

- Font, V., Godino, D. J., & D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematical education. *For the learning of mathematics*, 27(2), 2-7 and 14.
- Godino J. D. (1996). Relaciones entre la investigación en didáctica de las matemáticas y la práctica de la enseñanza. En: Puig L., Calderón J. (Compiladores) (1996). *Investigación y Didáctica de las Matemáticas*. Madrid: CIDE (Ministerio de Educación y Ciencia). 119-137.
- Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Iori, M. (2017). Objects, signs, and representations in the semio-cognitive analysis of the processes involved in teaching and learning mathematics: A Duvalian perspective. *Educational Studies in Mathematics*, 94(3), 275–291. doi:10.1007/s10649-016-9726-3
- Iori, M. (2018). Teachers' awareness of the semio-cognitive dimension of learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 98(1), 95–113. doi:10.1007/s10649-018-9808-5
- Kuhn, T. S. (1957). *The Copernican Revolution*. Cambridge (Mass): Harvard Univ. Press.
- Lacombe, D. (1985). La didactique des disciplines. En: AA. VV. (1985). *Encyclopedia Universalis*. Paris: Les Enjeux. 394-396.
- Lakatos, I., & Musgrave, A. (Compiladores) (1960). *Criticism and the Growth of Knowledge*. Cambridge: Cambridge Univ. Press.
- Loria, G. (1933). Commission internationale de l'enseignement mathématique. La préparation théorique et pratique des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire dans les divers pays. I. Rapport général. *L'enseignement mathématique*, 34(1), 5-20.
- Mialaret, G. (1982). *Les sciences de l'éducation pour l'ère nouvelle*. Caen: Cerse.
- Narváez Ortiz, D. (2017). Elementos para un estudio actual sobre el contrato didáctico, sus efectos y cláusulas. *La matematica e la sua didattica*, 25(2), 181-189.
- Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics: Towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 26–33.
- Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written: A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*, 22(2), 14–23.
- Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37–70.
- Radford, L. (2004). Cose sensibili, essenze, oggetti matematici ed altre ambiguità. *La matematica e la sua didattica*, 18(1), 4–23.
- Radford, L. (2005). La generalizzazione matematica come processo semiotico. *La matematica e la sua didattica*, 19(2), 191–213.
- Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. En L. Radford & B. D'Amore (Compiladores). *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking* [Special Issue]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(1), 103–129.
- Radford, L. (2013a). Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(1), 7–44.
- Radford, L. (2013b). *De la teoría de la objetivación*. Conferencia inaugural del XIV Congreso Colombiano de Matemática Educativa, Barranquilla, Colombia, Octubre 9–11, 2013. Actas del congreso homónimo: Revista Científica, octubre 2013, edición especial, http://asocolme.org/images/eventos/14/ECME_14_Revista_Cientifica_EdicionEspecial_-_Memorias_ECME_14.pdf
- Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2), 132–150.
- Radford, L. (2017). Mathematics education theories: The question of their growth, connectivity, and affinity. *La matematica e la sua didattica*, 25(2), 217-228.
- Radford, L., & D'Amore, B. (Compiladores) (2006). *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*. Número especial (en idioma inglés, francés y español) de la revista *Relime*

- (Cinvestav, México DF., México). Introducción de Luis Radford, conclusión de Bruno D'Amore; artículos de: M. Otte; R. Duval; R. Cantoral, R-M. Farfán, J. Lezama, G. Martínez Sierra; L. Radford; Juan D. Godino, V. Font, M. R. Wilhelmi; A. Koukkoufis, J. Williams; B. D'Amore; A. Gagatsis, I. Elia, N. Mousoulides; A. Sáenz-Ludlow; GT. Bagni; F. Arzarello. http://www.luisradford.ca/pub/56_Relime_semiotics_06PP157313.pdf; <http://luisradford.ca>
- Ramírez Bernal, H. A. (2017). Posibles cambios en las concepciones de profesores universitarios sobre las causas de los errores (de sus estudiantes) en el aprendizaje de la matemática. *La matematica e la sua didattica*, 25(2), 203–216
- Romberg, T. (1988). Necessary ingredients for a theory of mathematics education. En H. G. Steiner & A. Vermandel (Eds.), *Foundations and methodology of the discipline Mathematics Education*. Proceedings of the 2nd TME (pp. 97–112). Bielefeld - Antwerpen: IDM Publications.
- Santi, G. (2011a). Objectification and semiotic function. *Educational Studies in Mathematics*, 88(77), 285-311.
- Santi, G. (2011b). Meaning of mathematical objects: a comparison between semiotic perspectives. *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME – 7)*. Rzeszów, Poland, 9-13 Febbraio 2011.
- Sarrazy, B. (1995). Le contrat didactique. *Revue française de pédagogie*, 28(112), 85-118.
- Sbaragli, S., & Santi, G. (2011). Teacher's choices as the cause of misconceptions in the learning of the concept of angle. *International Journal for Studies in Mathematics Education*, 4(2), 117-157. Revista online: <http://periodicos.uniban.br/index.php/JIEEM/article/view/194/196>, San Paolo, Brasil: Uniban.
- Schubauer-Leoni, M. L. (1996). Il contratto didattico come luogo di incontro, di insegnamento e di apprendimento. En: Gallo E., Giacardi L., Roero C.S. (Compiladores) (1996). *Conferenze e seminari 1995-1996*. Associazione Subalpina Mathesis - Seminario di Storia delle Matematiche "T. Viola", Turín. 21-32.
- Vergnaud, G. (1985). Psicología cognitiva ed evolutiva. Ricerca in didattica della matematica: alcune questioni teoriche e metodologiche. En: Chini Artusi L. (Compilador) (1985). *Numeri e operazioni nella scuola di base*. Bologna: Zanichelli-UMI. 20-45.
- Vergnaud, G., Holbwachs, F., & Rouchier A. (1977). Structure de la matière enseignée, histoire des sciences et développement conceptuel chez l'élève. *Revue française de pédagogie*, 21(45), 7-15.
- Vygotsky, L. S. (1977). *Pensamiento y Lenguaje*. Buenos Aires: La Pléyade. [Ed. original en lengua rusa, 1956].