

893. D'Amore B. (2016). Una reflexión sobre los textos de Raymond Duval aquí presentados. Duval, R. & Saenz Ludlow, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas*. [Prólogo de Bruno D'Amore. Comentarios a los artículos de Bruno D'Amore y de Carlos Eduardo Vasco Uribe]. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. 237-254. ISBN: 978-958-8972-31-2; e-ISBN: 978-958-8972-32-9. *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas*

Una reflexión sobre los textos de Raymond Duval aquí presentados

Bruno D'Amore

Lo que siempre me ha entusiasmado del trabajo de investigación y de reflexión del amigo Raymond Duval es su constante y sincera atención a los verdaderos problemas del aprendizaje. Muchos investigadores, atraídos por una didáctica de la matemática que trata cuestiones concretas, ligadas al aprendizaje de los estudiantes, después de algunos años saborean el gusto embriagante de la investigación abstracta, investigación ligada a temas epistemológicos, semióticos, filosóficos olvidando los problemas concretos del aula, el estudiante, el aprendizaje. Según mi opinión, es como si un investigador de medicina se dedicara a la ... filosofía del ácido acetilsalicílico y a la semiótica del diazepam, olvidando los enfermos que esperan nuevas medicinas que podrían curar sus reales y concretos problemas de salud.

Conocí personalmente a Duval en 1995, durante un ICMI study sobre el aprendizaje de la geometría donde tuvimos dos relaciones consecutivas, y desde entonces las oportunidades de encuentro han sido asiduas y continuas; al año siguiente fue mi colaborador en el Topic Group 14 en Sevilla durante ICME 8: *Infinite processes throughout the curriculum*, 14-21 julio 1996, del cual era yo el Chief Organizer.

He aprendido mucho de él, de sus textos, de la discusión personal, de haber sido su huésped a Lille como potencial estudiante de doctorado; es él, tal vez, el estudioso de quien, directa y personalmente, he aprendido más.

Nunca, en ningún escrito, en ninguna conferencia, en ningún curso, en ninguna ocasión él olvida que el problema de fondo de la didáctica de la matemática es el aprendizaje de la matemática o, mejor aún, la razón por la cual no se da este aprendizaje.

Estos tres artículos son ejemplares y constituyen para todos nosotros una ocasión de reflexión y de análisis crítico de su misma obra, entendida en sentido general.

En uno de estos, Duval se concentra en las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría centrando la atención en algunos problemas de mayor significación: el desarrollo de la visualización, la diferencia de los razonamientos que caracterizan el discurso geométrico y su aprendizaje, la coordinación de sus funcionamientos.

Tuve el privilegio de escuchar en ante prima este tipo de reflexiones tanto que, en un congreso que se hizo en mi honor en la Universidad de Bologna el 8 octubre de 2011, estando presente entre los relatores Raymond Duval, yo le pedí explícitamente de abordar este tema como primera intervención, como inauguración de la jornada, frente a estudiosos de didáctica de la matemática, pero también frente a matemáticos (entusiasmados de su discurso) y a algunos rectores de universidades.

No puedo dejar de precisar que desde hace algunas décadas se estudia la problemática de la visualización de la geometría; ¿cómo no recordar la obra pionera que en esta dirección cumplió el

grande Efraim Fischbein (1920 – 1998)?, quien fuera el primero estudioso de didáctica de la matemática en la acepción moderna de esta disciplina a quien conocí (en Italia, en 1980). Pero es Duval el máximo intérprete de este estudio con sus fascinantes y eficaces instrumentos, con una capacidad analítica que nos deja estupefactos.

En otro artículo aquí presentado propone un análisis cognitiva de los problemas de comprensión (mucho más en general) del aprendizaje de la matemática. Las preguntas de investigación que se plantea parecen ser de una gran ingenuidad (¿Cómo podemos entender las dificultades, frecuentemente insuperables, que muchos estudiantes tienen en la comprensión de la matemática? ¿Cuál es la naturaleza de estas dificultades? ¿Dónde están localizadas?), pero precisamente esta es su fuerza, el coraje de afrontar la problemática desde las raíces, así como lo vive un docente en el aula. Con una simplicidad que nos deja asombrados, Duval es capaz de reportar el problema general al problema de la representación (Una representación es algo que se pone en el lugar de otro algo. Pero al mismo tiempo esta noción puede ser elusiva o demasiado formal. ¿Cuál es la naturaleza de este “algo que se pone en el lugar de...”?). Y aquí inicia su análisis que lo hace partir teóricamente de estudios de Piaget de los años '20 y lo porta lejos, hasta llegar a nosotros, al momento actual.

Entre las temáticas matemáticas de mayor significado que forman parte de los estudios iniciados por Duval, ¿quién no recuerda el *glissement* entre los verbos “tener” y “ser”, relativo a la falta de construcción cognitiva del infinito por parte de los estudiantes?, ¿quién no recuerda la distinción profunda entre demostración y argumentación que nos ha llevado, primero al estudio y después a la reflexión, de todos nosotros? Duval retoma en esta ocasión la idea de *prueba*, con características un poco más generales respecto a la idea matemática de demostración.

Indudablemente, el proceso de prueba (y, aún más, para mí, él de demostración) constituye por sí mismo un aparato matemático complejo desde el punto de vista epistemológico; tanto que, aún después de un milenio y medio, se está aún discutiendo. Pero, desde el punto de vista de la comprensión y por tanto acerca de su funcionamiento cognitivo, los problemas son aún mayores. El Autor se pide, en forma aparentemente ingenua: ¿Por qué hay tantos estudiantes que no tienen éxito en atravesarlo verdaderamente?

Sabemos que el estudio de este objeto ha creado tres direcciones de estudio en el ámbito de la didáctica de la matemática: una dirección psicológica que asume como modelo de razonamiento las formas aristotélicas (a esta hacen referencia los estudios iniciales de Piaget y Inhelder, por ejemplo); una segunda corriente didáctica que evidencia una relación de interacción entre las figuras, los teoremas y las definiciones, llegando a producciones discursivas, a las cuales se vuelven a estudiar los trabajos de Balacheff; y una última dirección que aprovecha las ideas de modelos de razonamiento que funcionan como máquinas de inferencia, algo así como la inteligencia artificial, típica de los años '80.

Duval analiza cada una de estas corrientes y logra proporcionar interpretaciones personales del funcionamiento del objeto “prueba”; logra exponer diversas interpretaciones posibles de los malentendidos que se pueden individuar en el aprendizaje cognitivo de la prueba, reafirmando la necesidad hecha explícita en los años '90 en sus mismos escritos, de la coordinación de los pasajes formales entre proposiciones, al interno de la lengua materna.

Sugiere también una visualización de carácter semiótico que regula el funcionamiento de una prueba: desde una hipótesis, sale una flecha pero nunca puede llegar una flecha; una o varias flechas llegan a un teorema pero sólo una flecha puede salir de él; una o varias flechas llegan a la conclusión buscada (lo que se va a probar) y ninguna flecha sale de ella. Una ejemplificación de una

elegante simplicidad. Sugiere también un uso heurístico de las figuras que podrían construir una base cognitiva notable.

El investigador puede obtener ventajas del estudio de estos tres artículos, pero también aquel docente consciente del malestar cognitivo de sus estudiantes y busca la forma de interpretarlo de forma inteligente, buscando no los síntomas del mal, los signos, los errores, sino las causas que los han generado, causas sobre las cuales se debe intervenir.

De forma más específica, en el primer artículo Duval toma en consideración las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría, la función que tiene en este proceso la visualización, las diferencias entre los diversos tipos de razonamiento y como se coordinan entre sí los respectivos funcionamientos.

En cuanto al primer punto, él logra establecer una clasificación del papel que asumen las figuras dentro de la actividad geométrica que constituyen las actividades de los estudiantes, en el proceso de aprendizaje. Obviamente estos papeles deben ser examinados sobre la base del funcionamiento cognitivo, lo cual crea una dualidad de extremo interés entre la visualización icónica y la no icónica. Esta dualidad condiciona la forma de ver lo que se realiza en geometría, por lo general dado por descontado, adquirido sin un explícito proceso de enseñanza - aprendizaje; en particular la de-construcción dimensional de las formas. Además, una cosa es el ver, otra, muy diferente, el decir; la necesidad de fundir estas dos acciones se enfrenta con la dificultad de hacerlas confluir en una actividad única o, por lo menos, en una actividad fluida. Por ejemplo, ¿cómo una proposición puede ser transformada en figura?, o ¿cómo una figura puede ser vista como un contra-ejemplo del enunciado de una conjetura?, o ¿cómo las figuras representan una definición?

El hecho es que la cantidad de actividad que se puede proponer a los estudiantes como trabajo sobre una figura no es unívoca, por el contrario es extremadamente amplia. Estas actividades pueden hacer referencia al trabajo que debe realizarse (por ejemplo reproducir la figura misma, o adaptarla a un determinado modelo, o medir algunas de sus magnitudes, o describirla oralmente de forma tal que otro estudiante la pueda reproducir), o al tipo de trabajo pedido (con material concreto, o sólo la reproducción gráfica, con o sin ciertos instrumentos establecidos).

Naturalmente, se debe tomar en consideración el hecho de si la figura es bidimensional o tridimensional, la forma perceptiva de ser vista, si se desea modificar o no...

Tomando como criterios los tipos de operaciones que se desean cumplir sobre las formas dadas, el Autor toma en examen cuatro modalidades diversas; y cada una de estas conduce a modalidades de ingreso diferentes en el mundo de la geometría por parte de los aprendices; él las llama: modalidad del botánico, del agrimensor – geómetra, del constructor y del inventor; para cada una de estas modalidades, distingue el tipo de operación sobre las formas visuales requeridas por la actividad propuesta y como se movilizan las propiedades geométricas con respecto al tipo de operación.

A parte el agudo y detallado análisis, que no dudo en definir al mismo tiempo didáctico y epistemológico, yo veo en esta actitud una gran ayuda para el docente que distingue los diversos modos de entender el contacto con la geometría por parte de los alumnos.

Aún en sus diferencias, los problemas evidenciados tienen en común el análisis de una actividad fundamental de todas las acciones en geometría, es decir, el uso heurístico de las figuras: se debe partir de una figura inicial (por ejemplo aquella que acompaña el enunciado de un problema o que se puede construir gráficamente leyendo el texto de un problema) con el objetivo de individuar sobre la misma figura, con intervenciones oportunas, un procedimiento de resolución, como se pide generalmente en geometría.

Duval, siguiendo aún la distinción de las cuatro actitudes precedentes, distingue entre un estatus epistemológico y una “fuente cognitiva de la certidumbre”. Inconsciente o intuitivamente, los estudiantes se sitúan en diversas posiciones que crean respuestas diversas al mismo problema.

A este punto el Autor pone en campo dos modelos opuestos de funcionamiento cognitivo: una visualización icónica y una no icónica, mostrando como estas constituyen dos mecanismos de identificación de objetos a partir de formas visuales. Las diferencias son puestas en evidencia, pero con rasgos comunes, por ejemplo que las figuras se generan la una de la otra en cada caso, sea por motivos debidos a los procesos de construcción, sea por la reorganización visual de las formas.

El proceso de generación es autónomo y está estrictamente ligado al control discursivo. Sobre esto se basa la aprehensión operatoria la cual está a la base de la “fecundidad intuitiva de las figuras”.

La iconicidad puede representar un obstáculo al aprendizaje. Como Duval lo manifestó en artículos precedentes, si el referente objetual es el mismo espacio físico circunstante o los objetos materiales, establecer correspondencias entre las formas y el referente real trae a colación el cuerpo de quien observa (incluidos sus gestos, la visión, el desplazamiento del cuerpo). Por ejemplo, los esquemas que acompañan las instrucciones de montaje de un mueble, los mapas de una ciudad, los planos urbanos entran en esta categoría. Pero si la figura de la cual se habla es una típica figura geométrica, el rectángulo, el triángulo, entonces existen formas típicas de representación estándar que son llamadas a formar parte de la representación. Estas obstaculizan la visualización icónica y bloquean el desarrollo de las figuras de partida, sean las que sean, y bloquean también las figuras que se tienen delante y que son obtenidas de aquellas de partida con algunas intervenciones.

En relación con la visualización no icónica, es necesario tomar en consideración la descomposición de formas, iniciando por aquellas que parecen visualmente simples; de hecho, para entrar en el funcionamiento específico de la visualización icónica, es necesaria su identificación.

Frente a la aparente simplicidad de estas operaciones que parecen espontáneas, Duval evidencia dos formas diversas de descomponer una figura de partida en unidades figurales que él analiza con atención y en detalle con gran interés concreto.

Pero volvamos a la figura que se desea usar para resolver un problema; en este caso, la situación es completamente diversa. Por ejemplo, iniciar de un particular triángulo y cortarlo oportunamente para transformarlo en un paralelogramo, actividad típica de niños en una clase de geometría. En este caso se debe hablar de “deconstrucción” de una forma visual de base para obtener otra forma visual de base. Dicha “deconstrucción” no es relacionable a aquella implicada en la construcción de las figuras, como podría aparecer a primera vista.

Entra en juego la especificidad del acto de ver en el aprendizaje de la geometría; la visualización icónica es totalmente independiente de toda enunciación explícita o implícita. En otros términos, no está en absoluto subordinada a un conocimiento de propiedades geométricas.

Todo esto lo muestra Duval con un fino y concreto análisis. También él analiza la siguiente cuestión: ¿Las adquisiciones relativas a una manera de ver ayudan a entrar en las otras maneras de ver?

Es decir: conocer o darse cuenta de lo que se ha adquirido gracias a una transferencia de un tipo de actividad propuesta en clase a otro tipo de actividad, es algo crucial para el aprendizaje de la matemática en primaria y a comienzos de secundaria. Por ejemplo, si la “transferencia” tiene que ver con el trabajo de transformación de figuras, esto es crucial, repito, por el aprendizaje de la geometría. Querer privilegiar una entrada como más accesible que las otras lleva a suponer la transferibilidad, más o menos espontánea, de una manera de ver a otras. Pasar de la visualización

icónica, que es común a todos los campos de conocimiento, a la visualización no icónica, que es específica de la matemática, exige un cambio completo del funcionamiento cognitivo del acto de “ver”.

Estamos habituados desde hace algunos decenios a estas formas de análisis típicas de los estudios de Duval; desde una pregunta de tipo didáctico, aparentemente simple, a una reflexión profunda sobre el funcionamiento cognitivo, que implican semiótica y noética.

Después Duval dedica algunos estudios específicos al caso de la descomposición por deconstrucción dimensional de las formas; este caso presenta especificidades que son examinadas minuciosamente.

¿Y qué relación existe entre saber ver la figura y los teoremas que eventualmente la figura evidencia? El Autor presenta ejemplos de gran interés.

Queda una clásica problemática, la relación entre “ver” y “decir”; aquí la pregunta es: ¿Como y hasta donde se pueden reunir en geometría? El problema es que las figuras geométricas dependen de dos registros de representación que son cognitivamente heterogéneos, pues conservan sus propias posibilidades de tratamiento, lo que quiere decir que funcionan en paralelo y de manera independiente.

Asevera Duval que la geometría requiere la utilización de un vocabulario técnico relativamente pesado. Podemos encontrar muy rápidamente en el currículo la introducción de por lo menos cuarenta términos, y si hacemos la suma de lo que se introduce hasta tercer grado de secundaria, ¡se supera ampliamente la centena de términos! Sin embargo, lo más importante no es eso, sino la heterogeneidad semántica de esta terminología. Toda formulación en geometría recurre a un vocabulario que cubre por lo menos cuatro tipos de términos denominativos.

Problemas que son examinados con atención son:

Clasificación de términos geométricos en función de su valor descriptivo de un dato visual;

¿Cómo se pueden poner las proposiciones en correspondencia con una figura o convertirse ellas mismas en una figura?

El papel del lenguaje no es “poner en palabras” lo que ya estaría pensado claramente o vivido, sino determinar proposiciones para construir el pensamiento de los objetos de conocimiento, por lo menos en los campos de las ciencias y la matemática. Lo que las proposiciones enuncian constituye un sentido que es irreductible al de las palabras que ellas articulan. Esta irreductibilidad aparece con los problemas específicos que plantean tanto la producción, oral y sobre todo escrita, como la comprensión de las proposiciones, escuchadas o leídas: por ejemplo, la distinción entre una proposición y su recíproca aunque emplean las mismas palabras, o la modificación del sentido relacionada con la cuantificación y la negación, o incluso el cambio de sentido de una proposición en función del estatus que se le da en el desarrollo de un discurso.

Y ¿cuál es un análisis funcional de la relación entre una proposición enunciada y una figura?

Son muy bien conocidos los estudios de Duval sobre la relación entre argumentación y demostración que reaparecen con la pregunta que él se plantea: ¿Qué solapamientos hay entre visualización y razonamientos para justificar o para probar? En qué se diferencia un razonamiento de una descripción o de una explicación y, sobre todo, en qué es diferente un razonamiento que justifica, como por ejemplo en el marco de un debate sobre un asunto de sociedad o para tomar una decisión, de un razonamiento que demuestra, como en matemática. Invocar la lógica, o la “derivabilidad lógica”, es evidentemente ingenuo cuando se trata de razonamientos que se hacen en lenguaje natural y con sus recursos, pues esto no permite comprender por qué las deducciones válidas no tienen de ninguna manera fuerza de prueba a los ojos de los estudiantes y cómo se inscriben ellas en el lenguaje natural.

Este es un artículo que afronta temas de extrema delicadeza sobre el tema del aprendizaje de la geometría en los primeros niveles de escolaridad, primaria y secundaria; que ofrece al docente y al investigador formidables elementos de análisis de las dificultades que tiene los estudiantes en la articulación del cognitivo, la visión de las figuras (y su uso) con el lenguaje.

En el segundo artículo, Duval propone un análisis cognitivo de los problemas de comprensión en el aprendizaje de la matemática.

El primer punto que se debe examinar es la forma en la cual se pueden caracterizar las actividades matemáticas desde un punto de vista cognitivo.

En primer lugar, él examina el papel “capital” de las representaciones semióticas; relanza la idea de paradoja cognitiva del acceso a los objetos de conocimiento; y muestra la gran variedad de representaciones semióticas usadas en matemática.

Después de esto, analiza los procesos de pensamiento que entran en juego en la actividad matemática. Pero lo hace de forma problemática: como describir la gran variedad de procesos matemáticos, usando y evidenciando los diversos registros que se colocan en juego en dichos procesos, incluso con ejemplos específicos. Siempre recurriendo ampliamente a ejemplos, aritméticos y geométricos, trata de las transformaciones semióticas de tratamiento y conversión. Ciertamente, los problemas que este análisis presenta son múltiples; por ejemplo el problema de reconocer el mismo objeto matemático a través de representaciones cuyos contenidos son heterogéneos.

Por último, Duval propone dos fuentes de incompreensión en el aprendizaje de la matemática, y las hace coincidir precisamente con las dos transformaciones semióticas. En primer lugar, considera la complejidad y la especificidad de los tratamientos realizados en un registro multifuncional; aquí los ejemplos que presenta son múltiples. En segundo lugar, toma en examen la conversión de representaciones o cambio de registro. En los dos casos las fuentes de incompreensión llevan al problema de reconocer en una representación, y para cualquier registro usado, aquello que es matemáticamente relevante, de lo que no lo es.

Entrando más en detalle, las preguntas que el Autor se pone inicialmente son por lo tanto, repito, las siguientes: ¿Cómo podemos entender las dificultades, frecuentemente insuperables, que muchos estudiantes tienen con la comprensión de la matemática? ¿Cuál es la naturaleza de estas dificultades? ¿Dónde están localizadas? Estas preguntas han cobrado una magnitud y una importancia particular con la reciente presión para lograr más educación matemática inicial para todos los estudiantes, y esto en todo el mundo; también la Unesco publicó recientemente un amplio estudio sobre el conocimiento matemático necesario para los futuros ciudadanos, conocimientos que los prepare para enfrentar un entorno tecnológico y orientado hacia la computación (y la estadística, agro y yo), de una complejidad que se incrementa ilimitadamente (Artigue, 2011).

Los estudios de las últimas décadas han mostrado que los procesos de adquisición del conocimiento matemático son tan complejos que parece ser necesario considerar diferentes enfoques, el epistemológico y el educativo, los cuales tienen en común el uso de la noción de representación para caracterizar el tipo de fenómenos que ocurren en cualquier proceso de conocimiento o que lo constituyen.

A partir de estas consideraciones inicia una larga reflexión sobre la idea de representación: algo que se pone en lugar de otro algo. Pero, ¿Cuál es la naturaleza de este “algo que se pone en lugar de...”? La respuesta puede ser múltiple, dependiendo de si se consideran las representaciones con respecto a un individuo concreto y sus experiencias, a las estructuras mentales, o a los objetos de

conocimiento con sus requisitos epistemológicos específicos. Las representaciones entonces pueden ser creencias, concepciones o concepciones erróneas individuales a las cuales cada quien accede a través de sus producciones verbales o esquemáticas.

Anteriormente hice explícito el hecho que Duval, a este punto, recurre a los estudios de Piaget de los años '20, para pasar inmediatamente a investigaciones mucho más recientes, en las cuales las representaciones semióticas, incluido todo los lenguajes, aparecen como herramientas comunes para producir nuevos conocimientos y no sólo para comunicar cualquier representación mental particular.

En esta dirección se encuentran Frege y Hilbert, con respecto a los requisitos epistemológicos y meta-matemáticos; pero todo esto se reveló inútil incluso para las investigaciones sobre la cognición. Las representaciones son solamente los resultados superficiales del funcionamiento de estructuras mentales profundas, que no dependen de la consciencia real de los individuos, y con esto volvemos a Piaget.

Para determinar el origen de la incomprensión de los estudiantes, primero debemos determinar las condiciones cognitivas que hacen posible la comprensión.

Y este punto nos lleva a preguntas de gran interés: ¿Qué sistemas cognitivos se requieren y se movilizan para acceder a los objetos matemáticos y al mismo tiempo hacer posible la realización de las múltiples transformaciones que constituyen los procesos matemáticos? ¿La manera de pensar en matemática es la misma que en las otras áreas de conocimiento? ¿La actividad matemática requiere solamente de los procesos cognitivos comunes o, de hecho, requiere de ciertas estructuras cognitivas específicas cuyo desarrollo se debe tener en cuenta en la enseñanza?

Son las preguntas clásicas que se hace un docente de matemática y que se plantean quienes estudian el complejo sistema cognitivo que hace referencia a la matemática.

Para entrar en el complejo sistema que el Autor evidencia para dar respuesta a estas preguntas, sería oportuno acceder a artículos precedentes, en los cuales el tema fue ya afrontado. En este artículo, él presenta resultados concretos y específicos que ilustran muy bien la problemática. Para hacer esto, Duval prosigue con una serie de preguntas siempre más precisas. ¿Qué caracteriza la actividad matemática desde un punto de vista cognitivo? Estamos todos convencidos que el aprendizaje de la matemática es un hecho específico, tanto que desde el inicio de la didáctica se estudiaron los casos del fracaso electivo en matemática. Pero aquí Duval hace un análisis mucho más fino e interesante que involucra un estudio sobre los obstáculos que los estudiantes experimentan para comprender; a menudo se recurre a los conceptos y su complejidad epistemológica. La complejidad epistemológica se puede explicar mediante la historia de dichos conceptos. Pero, justamente, nota Duval, tal enfoque no es suficiente para caracterizar lo que es nuevo y específico para los procesos de pensamiento en matemática. En matemática tienen un papel específico las representaciones semióticas. Mirando la historia del desarrollo de la matemática, se ve que el desarrollo de las representaciones semióticas (en el sentido de tratamientos y conversiones) fue una condición esencial para el desarrollo del pensamiento matemático mismo. A este punto Duval proporciona algunos ejemplos tomados de la historia de la matemática, relacionados siempre con experiencias de aula.

Gracias a este punto de vista epistemológico, nuestro Autor reafirma la potencia de su famosa paradoja cognitiva, que tanto nos ha influenciado como investigadores en los últimos decenios. Esta ha sido objeto de un estudio específico desde un punto de vista epistemológico y filosófico (D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, Matteuzzi, 2013).

Otro argumento fuerte de la teoría duvaliana es el relacionado con la gran variedad de representaciones semióticas usadas en matemática.

Ahora bien, que una variedad de estas sea necesaria para la construcción cognitiva del objeto matemático es obvio y se señaló en estudios precedentes; que una excesiva cantidad de representaciones crea dificultades ulteriores, necesita un análisis didáctico concreto y oportuno (véase: D'Amore, Fandiño Pinilla, 2013; no es por caso que una de las prefaciones a este libro esté firmada por el mismo Raymond Duval).

Nuestro Autor se lanza aquí en una interesante y abundante serie de ejemplos, tomados de varios temas de la matemática, relacionándolos con el problema de la multiplicidad de las representaciones semióticas traídas a colación.

Existe siempre el problema de la definición de los procesos de pensamiento involucrados en la actividad matemática; la representación semiótica no se reduce a designar objetos, a ... poner algo en lugar de otro. De otra parte, para analizar los procesos de pensamiento complejos y específicos que subyacen a la actividad matemática, debemos tener en cuenta las diferencias entre los diversos sistemas de representación semiótica usados.

¿Qué papeles tienen? y ¿Que diferencias llevan con sí? ¿Son importantes estas diferencias en los procesos matemáticos?

Una vez establecidos los varios procesos matemáticos estos deben ser descritos, otro campo de reflexiones que se abre. Aquí entran en campos las imágenes, los lenguajes tanto naturales como simbólicos. Entre los diversos sistemas de representación semiótica usados existe una diferencia funcional que es esencial porque está intrínsecamente conectada con la manera en que los procesos matemáticos transcurren. Y los procesos nunca se pueden convertir en algoritmos (sobre este tema véase también: Brousseau, D'Amore, 2008).

Duval propone a este punto un estudio sobre los dos tipos de transformación de las representaciones semióticas, es decir tratamiento y conversión. Las explica con ejemplos concretos y analiza sofisticadamente sus características.

No obstante se trata de un argumento muy bien conocido, los ejemplos proporcionados y el análisis propuesto clarifican ciertas posiciones y aclaran algunas dudas. Por ejemplo, evidencian la frase: los tratamientos que se pueden realizar dependen principalmente de las posibilidades de transformación semiótica que son específicas para el registro utilizado.

Yo mismo tuve la posibilidad de estudiar por mucho tiempo el tratamiento, y por tanto puedo testificar que se trata de consideraciones de gran interés teórico y práctico, de hecho empírico.

Pero, si nos encontramos frente a dos representaciones cuyos contenidos son heterogéneos, ¿Cómo reconocer el mismo objeto matemático? En pasado la respuesta parecía clara: Frege nos enseñó a evidenciar la diferencia entre el contenido de una representación y aquello a lo cual hace referencia la representación. Pero hoy somos propensos a pensar, con Duval, que el contenido de una representación depende más del registro de representación que del objeto representado. Esta relación entre el contenido de una representación y el objeto representado depende del sistema que se moviliza para producir la representación. Podemos obtener iconicidad o no iconicidad para una representación semiótica, lo mismo que para una representación no semiótica. Y eso nos devuelve a la paradoja cognitiva de la comprensión en matemática.

Volviendo al tema de base, Duval estudia a este punto las fuentes de incompreensión en el aprendizaje de la matemática. Estas son dos, relacionadas precisamente con los dos tipos de transformaciones de representaciones semióticas.

En un primer momento el Autor estudia la complejidad de los tratamientos relacionados en un registro multifuncional, recurriendo a ejemplos tomados de diversos campos, por ejemplo de la geometría. En un segundo momento estudia la otra fuente de incompreensión: conversión de las representaciones, la cual implica necesariamente un cambio de registro.

El Autor hace notar como las dificultades de conversión se consideran normalmente un signo de incompreensión conceptual. Y esto complica la comprensión por parte del docente de las causas del

fracaso de sus estudiantes. Esta es la razón por la cual la mayor parte de la investigación se ha dirigido a la reorganización de representaciones auxiliares de transición, las que los aprendices desarrollan espontáneamente o las que se introducen en la enseñanza.

Un ulterior tema de gran interés para la investigación y para el mundo de la escuela es el siguiente: a veces se confunden las características relevantes y las no relevantes de las representaciones. ¿Cómo seleccionar y valorizar estas informaciones? Duval propone varios ejemplos tomados de diferentes temas de la matemática, en un primer momento para evidenciar el fenómeno y en un segundo momento para analizarlo, en álgebra, en geometría, en aritmética etcétera.

Que este tipo de estudio sea relevante es aquí puesto en evidencia de una frase que comparto plenamente: Cambiar el registro de representación es el umbral de la comprensión matemática para los aprendices en cada etapa del currículo. Esto depende de la coordinación de varios registros de representación y es sólo en matemática donde se requiere fuertemente la coordinación de registros.

En el tercer artículo, Duval estudia los procesos matemáticos de prueba y en particular examina el funcionamiento cognitivos y la comprensión de tales procesos por parte de los estudiantes.

En un primer momento presenta un amplio análisis de los estudios sobre la complejidad cognitiva del funcionamiento del razonamiento. Pero también reflexiones profundas sobre cuales sean las características de un razonamiento, partiendo de la idea de organización discursiva de las proposiciones. Esto implica: el estudio de las componentes “internas” del significado de una proposición y un análisis del estatuto de las proposiciones y de las diferencias funcionales entre estas en el desarrollo discursivo (en las diversas acepciones de razonamiento, argumentación, prueba etc.). Retomando sus estudios precedentes sobre este mismo tema, Duval propone una forma de ver y de determinar el funcionamiento cognitivo específico de una prueba de matemática mostrando, entre otras cosas, como cambia el focus al interior de un “espacio del significado” de una proposición; si es verdad que en el habla ordinaria las interacciones sociales, las únicas características del significado que se activan para cualquier proposición expresada son su contenido (informativo) y su valor pragmático de comunicación, en el razonamiento, los valores epistémicos llegan a ser las características predominantes del significado, porque el razonamiento juega con las diferencias de los valores epistémicos de las proposiciones. Esta observación es suficiente para el avío de un análisis profundo, basado también en la experiencia de aula.

Sucesivamente formula el problema de qué es y de cómo se puede formular el aprender a probar, iniciando de la pregunta: ¿qué diferencia existe entre un razonamiento válido y uno no válido? Si la pregunta que se plantea es de carácter cognitivo, se puede hacer referencia a la clásica distinción de Nicolás Balacheff de 1987, quien distingue cuatro tipos de pruebas: empirismos ingenuo, experimento crucial (estas dos pruebas son de tipo pragmático basadas en la observación), experimento genérico y experimento mental (estas dos pruebas son de tipo intelectual, basadas en la necesidad de la afirmación).

Por último, examina la forma en la cual se puede inducir a los estudiantes para hacer funcionar cognitivamente el razonamiento deductivo, lo cual trae a colación varios factores entre los cuales emergen por importancia: la diferenciación y la coordinación de los registros de representación semiótica, analizar la organización deductiva y cómo esta funciona.

Entre las temáticas matemáticas de mayor significado que forman parte de los estudios iniciados por Duval, ¿quién no recuerda el deslizamiento entre los verbos “ser” y “tener”, en relación a la falta de construcción cognitiva del infinito por parte de los estudiantes?, ¿Quién no recuerda la distinción profunda entre demostración y argumentación que nos ha llevado a todos nosotros, primero al

estudio y después a la reflexión sobre estos argumentos? Duval retoma en esta ocasión la idea de prueba, con características un poco más generales respecto a la idea matemática de demostración.

Indudablemente, el proceso de prueba (y, aún más, para mí, él de demostración) constituye por sí mismo un aparato matemático complejo desde un punto de vista epistemológico, tanto que, después de un milenio y medio, se está aún discutiendo. Pero, desde el punto de vista de la comprensión y, por tanto del de su funcionamiento cognitivo, los problemas son aún mayores. Duval se pregunta, en forma aparentemente ingenua: ¿Por qué hay tantos estudiantes que no tienen éxito en lograrlo verdaderamente?

Sabemos que el estudio de este objeto ha creado tres direcciones de investigación en el ámbito de la didáctica de la matemática: una dirección psicológica que asume como modelo de razonamiento las formas aristotélicas (a esta hacen referencia los estudios iniciales de Piaget y Inhelder, por ejemplo); una segunda corriente didáctica que evidencia una relación de interacción entre las figuras, los teoremas y las definiciones, llegando a producciones discursivas, a las cuales se refieren los trabajos de Balacheff; y una última dirección que aprovecha las ideas de modelos de razonamiento que funcionan como máquinas de inferencia, algo así como la inteligencia artificial, típica de los años '80.

Duval analiza cada una de estas corrientes y logra proporcionar interpretaciones personales del funcionamiento del objeto "prueba"; logra exponer diversas interpretaciones posibles de los malentendidos que se pueden encontrar en la actividad cognitiva de la prueba, reafirmando la necesidad ya explícita en sus mismos escritos en los años '90, acerca de la coordinación de los tránsitos formales entre proposiciones en el interior del registro semiótico de la lengua materna.

Sugiere también una visualización de carácter semiótico que regula el funcionamiento de una prueba: desde la hipótesis, parte una flecha pero nunca puede llegar una flecha; una o varias flechas llegan a un teorema pero sólo una flecha puede salir de él; una o varias flechas llegan a la conclusión buscada (lo que se va a probar) y ninguna flecha sale de ella. Una ejemplificación de una elegante simplicidad. Sugiere también un uso heurístico de las figuras que podrían construir una base cognitiva notable.

En este artículo, Duval estudia entonces los procesos matemáticos de prueba y en particular examina el funcionamiento cognitivos y la comprensión de tales procesos por parte de los estudiantes.

En un primer momento presenta un amplio análisis de los estudios sobre la complejidad cognitiva del funcionamiento del razonamiento. Pero también reflexiones profundas sobre cuales sean las características de un razonamiento, partiendo de la idea de organización discursiva de las proposiciones. Esto implica: el estudio de las componentes "internas" del significado de una proposición y un análisis del estatuto de las proposiciones y de las diferencias funcionales entre estas en el desarrollo discursivo (en las diversas acepciones de razonamiento, argumentación, prueba etc.). Retomando sus estudios precedentes sobre este mismo tema, Duval propone una forma de ver y de determinar el funcionamiento cognitivo específico de una prueba de matemática mostrando, entre otras cosas, como cambia el foco al interior de un "espacio del significado" de una proposición; si es verdad que en el habla ordinaria las interacciones sociales, las únicas características del significado que se activan para cualquier proposición expresada son su contenido (informativo) y su valor pragmático de comunicación, en el razonamiento los valores epistémicos llegan a ser las características predominantes del significado, porque el razonamiento juega con las diferencias de los valores epistémicos de las proposiciones. Esta observación es suficiente para el avío de un análisis profundo, basado también en la experiencia de aula.

Sucesivamente formula el problema de qué es y de cómo se puede formular el aprender a probar, iniciando de la pregunta: ¿Qué diferencia existe entre un razonamiento válido y uno no válido? Si la pregunta que se plantea es de carácter cognitivo, se puede hacer referencia a la clásica distinción de Nicolás Balacheff de 1987, quien distingue cuatro tipos de pruebas: empirismos ingenuo, experimento crucial (estas dos pruebas son de tipo pragmático basadas en la observación), experimento genérico y experimento mental (estas dos pruebas son de tipo intelectual, basadas en la necesidad de la afirmación).

Por último, examina la forma en la cual se puede inducir a los estudiantes para hacer funcionar cognitivamente el razonamiento deductivo, lo cual trae a colación varios factores entre los cuales emergen por importancia: la diferenciación y la coordinación de los registros de representación semiótica, el análisis de la organización deductiva y cómo esta funciona.

Uno de los problemas para la enseñanza es que sigue faltando la discriminación entre los diferentes estatus operativos de las proposiciones, aun cuando ya no haya confusión superficial o circularidad en las expresiones. Muchos estudiantes, sin cometer errores evidentes, no captan exactamente cómo operan en una prueba las diferencias funcionales entre las proposiciones de un discurso o de una “explicación”. No ven por qué y cómo el estatus operativo, y no sólo el estatus teórico (definiciones, teoremas), son herramientas para desarrollar el razonamiento de una manera bien diferente a la de la argumentación en el lenguaje natural. Se ha observado la misma incomprensión en estudiantes de entre quince y dieciséis años. Pero mi experiencia personal es que este tipo de actitud no tiene que ver sólo con la edad, no necesariamente se desarrolla con el pasar del tiempo. En mi experiencia personal, he visto profesores decidir de anticipar a la didáctica de los teoremas una larga enseñanza de la lógica aristotélica o proposicional; con un resultado que podemos calificar de negativo; esto porque, entre otros aspectos, muchos docentes confunden la implicación material $A \rightarrow B$ (que pertenece al lenguaje: si A entonces B) con la deducción lógica $A \vdash B$ (que pertenece al meta-lenguaje: de A se deduce B). Y porque no es un hecho que la modalidad de razonamiento aristotélico sea la más cercana la experiencia argumentativa del estudiante, por el contrario, mis investigaciones me llevaron a mostrar que el razonamiento lógico intuitivo del estudiante de 15-17 años es mucho más cercana a la *nyaya* indiana que no a la lógica aristotélica (D’Amore, 2005).

Lo que sucede además, es que en el nivel de organización de los pasajes, estos están conectados por proposiciones que se superponen: algunas conclusiones del último pasaje se toman como premisas para el nuevo pasaje. Es debido a esto que no hay brecha entre dos pasajes. En este nivel, el uso de los conectores por parte de los estudiantes no es relevante, aspecto que sí es importante para los profesores.

El estudio que se puede proponer entonces, desde un punto de vista epistemológico, es el de considerar las pruebas desde un tercer nivel: el nivel teórico. Este nivel involucra un cambio de escala: se pasa de la deducción local de una proposición a la deducción global dentro de un conjunto de proposiciones. Pero, existen aspectos que deben ser tenidos en cuenta, aspectos de carácter lingüístico de gran interés. A diferencia del habla ordinaria, el razonamiento moviliza los tres componentes posibles del significado de cada proposición, pero están combinados de maneras específicas para el argumento y para la prueba matemática. El argumento no fluye como una deducción válida porque el contenido se impone sobre los otros componentes, como lo hace en el habla ordinaria.

Por ejemplo, existe una gran diferencia en el uso de la palabra “entonces” en el habla ordinaria y el uso de la misma palabra en el lenguaje lógico o matemático, por ejemplo en el curso de una demostración.

Podríamos entonces pensar en demostraciones (o pruebas, más generales) sin lenguaje; pero no hay razonamiento válido sin lenguaje, porque sólo las proposiciones pueden ser verdaderas o falsas y porque no hay proposición sin enunciado. Por tanto, el problema de la relación entre razonamiento y redacción explícita no se puede desconocer, especialmente en la educación matemática. Nace una pregunta que no tiene sólo interés didáctico, sino que tiene también un interés cultural y epistemológico: ¿Cuáles son las interacciones entre el razonamiento como organización específica de proposiciones y la redacción, o expresión, como expresión explícita en un lenguaje particular?

En la argumentación común el lenguaje dominante y por tanto el más usado es la lengua materna; es mediante esta que los aprendices se pueden percatar de lo que se requiere para una prueba matemática y lo que esta produce. De otra parte, razonar en lengua materna requiere tomar en cuenta el estatus y el valor epistémico de cada proposición al mismo tiempo. Sólo así el razonamiento puede funcionar como un verdadero razonamiento convincente. Quedándonos dentro la matemática, al contrario, en el cálculo lo importante es enfocarse en las reglas de uso y en la sustitución para cada símbolo (variables, cuantificadores, operadores, relaciones etc.): el estatus y el valor epistémico de las expresiones simbólicas no interesan. Desde un punto de vista cognitivo, esta es la diferencia profunda: el cálculo es más “fácil” que el razonamiento.

No es un caso, agrego entre líneas, que muchos lógicos en el transcurso del tiempo han intentado transformar la lógica, la demostración, el razonamiento, en puro cálculo simbólico, en un algoritmo o en un mecanismo.

Pero, ¿Cómo un individuo, un estudiante, llega a la necesidad de hacer uso de una proposición? La primera experiencia que conduce a la consciencia de la necesidad de alguna proposición, según Duval, es cuando su contenido corresponde a datos sensoriales, percibidos con o sin instrumentos. Sólo así se puede verificar lo que se dice examinando lo que se puede percibir. Esa es la práctica epistemológica común. De esa manera, la mejor prueba común es la observación directa. Es lo que pasa, por ejemplo, en el uso de una figura al interior de una demostración o prueba de carácter geométrico; frente a la figura, usar la exhortación: “¡Mire, eso se ve en la figura!”. Se trata de la experiencia sensorial más directa, convincente. Esto es lo que desearíamos poder transformar en proposiciones verdaderas. Para todo el mundo esta práctica es la más natural y es difícil comprender por qué no se puede usar en geometría como, por ejemplo, en botánica, geología etc. En estas ciencias, y en la vida común, las raíces cognitivas de la necesidad son extrínsecas y no intrínsecas al razonamiento; las raíces de la necesidad y la convicción están en la experiencia, en este punto el razonamiento funciona como una descripción precisa de las relaciones observadas.

Este tipo de debate no es nuevo, se trata de lo que Leibniz denominó la “necesidad física” como opuesta a la “necesidad lógica o geométrica”. Pero es siempre actual. La distinción entre los tipos de lenguaje y su necesidad es sofisticada, muchas veces fuera del alcance de los estudiantes.

Relacionada con este debate existe el sentido según el cual algunas proposiciones son consideradas verdaderas y otras no. O, mejor, son consideradas *necesariamente* verdaderas.

Por último, siempre en relación con este hecho existe la posibilidad de reconocer que una determinada proposición es la única conclusión posible de lo que se ha afirmado previamente, aunque vaya eventualmente en contra de la evidencia perceptual o de un acuerdo general.

Todas estas temáticas están estrechamente ligadas a la vida de aula, al aprendizaje de la prueba y de la demostración, pero también con la resolución de un problema, como lo muestra con varios ejemplos el mismo Duval.

La tarea del estudiante no es banal: debe llegar a ser capaz de discriminar entre una prueba matemática y un argumento, que tienen redacciones similares o las mismas marcas verbales (conectores gramaticales y lógicos); esto incluye cambiar de foco con respecto a lo que se considera

como el primer componente de los significados de las proposiciones: su estatus en lugar de su contenido.

Muy pocas veces se considera la importancia que tiene, para seguir una argumentación, la capacidad de diferenciación y de coordinación implícita y compleja de registros de representación semiótica en un modo que por lo general no se requiere en otros campos de actividad mental.

Se debe tener en cuenta que la comprensión (matemática) no sigue el orden de la construcción (matemática) del conocimiento; no se puede enseñar matemática, en un nivel inferior, sin tener en cuenta los requisitos básicos para desarrollar la “arquitectura cognitiva” específica del sujeto. Y esto es particularmente cierto para la prueba matemática.

Duval tiene una formidable experiencia en lo relacionado con la enseñanza de la prueba, enseñanza que divide en tres etapas: una primera de exploración libre, una segunda de investigación específica de la organización deductiva de proposiciones en un registro no discursivo, y una tercera de descripción o explicación verbal de la organización deductiva que se ha descubierto. Sobre este tema insiste con ejemplos en este artículo, como lo ha hecho en tantos otros, publicados en pasado.