Il lungo percorso dell'apprendimento delle operazioni: l'esempio della moltiplicazione

Andrea Maffia
Dipartimento di Matematica, Università di Bologna

Abstract. *The process of learning the basic arithmetic operations (addition, subtraction, multiplication, division) starts very early – even before formal schooling – and progresses through lifetime. Drawing on the example of multiplication, this contribution reflects on the basis of multiplicative thinking in kindergarten, its evolution in schooling, and what is still available to adults. Research data will support and instantiate the claim that learning multiplication is a lifelong process.*

1. Apprendere le quattro operazioni

L'obiettivo di questo contributo è di riflettere su quanto il processo di apprendimento delle quattro operazioni fondamentali dell'aritmetica (così come di tutta la matematica e non solo) sia un processo di lunghissimo termine, che inizia prima ancora dell'istruzione formale e prosegue per tutta la vita. Del resto, questo viene ribadito dalle Indicazioni Nazionali per il primo ciclo d'istruzione secondo cui "la costruzione del pensiero matematico è un processo lungo e progressivo nel quale concetti, abilità, competenze e atteggiamenti vengono ritrovati, intrecciati, consolidati e sviluppati a più riprese" (MIUR, 2012, p. 49). In particolare, qui si userà l'esempio della moltiplicazione e si farà riferimento a risultati di diverse ricerche in Didattica della Matematica per supportare gli argomenti presentati.
Per poter parlare di apprendimento di un concetto matematico occorre prima chiarire cosa si intenda. Piuttosto che parlare di "moltiplicazione", parleremo di "campo concettuale della moltiplicazione" facendo riferimento alla Teoria dei Campi Concettuali di Gerard Vergnaud. Vergnaud (2009) problematizza la natura dei concetti matematici notando come questi non possano descriversi facilmente in termini di sola conoscenza operativa e/o predicativa. Individua tre componenti che ci permettono di definire un campo concettuale:

- le *situazioni* in cui il concetto viene applicato e che a esso danno significato. Nel caso della moltiplicazione possiamo pensare ai gruppi ripetuti, il conteggio di oggetti disposti a schieramento, i tassi di crescita, l'area dei rettangoli, ecc.
- Le *rappresentazioni* del concetto che includono le parole che ci permettono di parlare del concetto (doppio, prodotto, commutatività, ecc.) così come le varie rappresentazioni in diversi registri semiotici (il simbolo ×, uno schieramento, degli incroci, una somma ripetuta, ecc.)

- Gli *operatori invarianti*, ovvero l'insieme di proprietà e procedure che sistematicamente intervengono nelle situazioni in cui il concetto è coinvolto. Nel caso della moltiplicazione possiamo pensare agli algoritmi di calcolo scritto così come le strategie di stima, il ruolo delle proprietà commutativa, associativa e distributiva nel calcolo mentale e scritto.

Notiamo quindi che, in questo contributo, quando parliamo di apprendimento di un'operazione non ci stiamo riferendo semplicemente alla memorizzazione dei passaggi degli algoritmi di calcolo per la stessa, ma alla costruzione ed evoluzione del campo concettuale.

2. Primi passi nel mondo delle moltiplicazioni

Di moltiplicazioni non si parla solo a scuola, ma anche nella vita quotidiana – in contesti informali e non formali. I bambini sono esposti a essa sin da piccolissimi: è sufficiente per dare significato alle prime situazioni moltiplicative? In una ricerca svolta insieme ad Ann Downton ci siamo posti questa domanda e abbiamo notato che prima dell'introduzione formale dell'operazione, la maggior parte dei bambini riesce a rappresentare situazioni moltiplicative con disegni (Figura 1) o con l'uso di manipolativi; queste rappresentazioni possono essere un supporto per processi risolutivi (Downton & Maffia, 2023).

Nel nostro studio, abbiamo intervistato individualmente bambini di sei anni, proponendo loro semplici situazioni di moltiplicazione/divisione come "Ted ha pescato dodici girini; mette quattro girini in ogni barattolo. In quanti barattoli metterà i suoi girini?". Alcune situazioni sono state rappresentate dalla maggior parte dei bambini, altre sono risultate accessibili solo a pochi.

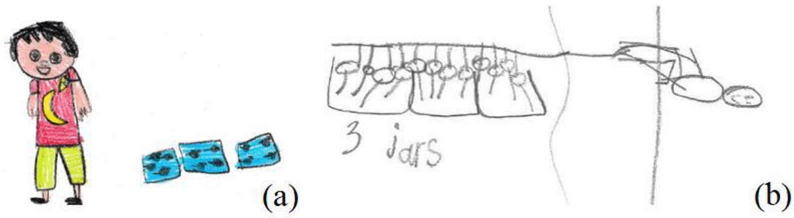

Figura 1: Esempi di disegni prodotti dai bambini di 6 anni nello studio di (Downton & Maffia, 2023)

Quello che questo studio ci racconta è che la familiarità con le situazioni moltiplicative inizia ben prima dell'introduzione formale dell'operazione. Non significa che si debba introdurre la moltiplicazione formalmente prima di quanto già si fa. Piuttosto, possiamo riflettere su come la familiarità acquisita fuori dal contesto scolastico (con situazioni, rappresentazioni, invarianti) possa avvantaggiare alcuni bambini rispetto ad altri e come la scuola possa avere un ruolo nel ridurre tale disparità.

3. L’introduzione di nuovi numeri

Quando gli studenti proseguono nello studio della moltiplicazione nel corso della scuola primaria e poi nella scuola secondaria, scoprono come questa operazione possa essere definita anche per insiemi numerici diversi dai numeri naturali. Lo studio di Fischbein e colleghe (1985) è tra i noti studi che mettono in evidenza come il passaggio a nuovi insiemi numerici (i numeri razionali nel loro caso) possa nascondere numerose insidie. Secondo questi autori, l’apprendimento iniziale della moltiplicazione porta alla formazione di modelli primitivi impliciti che continuano ad esercitare la loro azione in modo coercitivo e per tempi molto lunghi. Il modello primitivo per la moltiplicazione da loro individuato è quello dell’addizione ripetuta: una moltiplicazione è vista come l’addizione ripetuta di uno dei due fattori (il moltiplicando) per tante volte quanto indicato dall’altro fattore (il moltiplicatore). Quando si parla di una moltiplicazione tra numeri naturali, questo modello funziona: $3\times4=3+3+3+3$. Il ricorso a questo modello può portare a convincersi che uno dei due fattori (il moltiplicatore) debba sempre essere un numero intero e che il risultato della moltiplicazione debba sempre essere maggiore del moltiplicando.
Fischbein et al. (1985) mettono in evidenza quanto queste convinzioni siano diffuse confrontando le risposte fornite dagli studenti per situazioni in linea con il modello primitivo con quelle date per situazioni che lo violano. Notano un notevole calo di prestazione nelle situazioni che violano il modello e questo succede (con percentuali diverse) in quinta primaria, seconda secondaria di primo grado e prima secondaria di secondo grado.
Certamente lo studio è datato e ha alcune debolezze dal punto di vista metodologico, ma i risultati sono così importanti da aver meritato uno studio di replicazione più ampio per attualizzarli (Cascella et al., 2024). I risultati dello studio originale sono confermati: i modelli intuitivi continuano ad esercitare un importante effetto e occorre interrogarsi su come la didattica possa essere modificata per supportare gli studenti: esistono altre rappresentazioni oltre all’addizione ripetuta a cui potremmo far riferimento?

4. Cosa resta nel lungo termine?

Assunto che ci sono degli aspetti della didattica che potrebbero essere modificati per supportare i nostri studenti, ci possiamo invece chiedere quali aspetti della didattica siano più efficaci: quale valore aggiunto fornisce l’educazione matematica? Nel tentativo di esplorare questo quesito, ho lavorato insieme a Maria Alessandra Mariotti (Mariotti & Maffia, 2015) alla conduzione di interviste a soggetti adulti. Il focus di queste interviste sono stati i loro apprendimenti sulla moltiplicazione a livello di scuola primaria. Abbiamo chiesto loro di risolvere (a mente) semplici moltiplicazioni, di spiegarci come lo fanno e di abbinare queste moltiplicazioni a delle situazioni. In questo modo, abbiamo analizzato il loro campo concettuale moltiplicativo in termini di situazioni, rappresentazioni ed operatori invarianti.

I soggetti intervistati avevano formazione diversa: alcuni avevano solo completato la scuola dell'obbligo, altri avevano un diploma e alcuni anche un titolo di laurea (in campo umanistico in alcuni casi e scientifico in altri). In questo modo, abbiamo potuto mettere a confronto il campo concettuale maturato in situazioni di diversa formazione matematica. Quello che emerge è che non ci sono particolari differenze nel numero di risultati corretti; la sostanziale differenza si trova nella varietà di procedure che le persone riescono ad individuare per uno stesso calcolo. Coloro che hanno una formazione matematica più alta riescono a adottare una maggiore varietà di strategie e sono flessibili nella scelta della strategia a seconda del prodotto proposto. Possiamo pensare che quindi questo sia un importante prodotto della formazione matematica, che vale la pena preservare. D'altra parte, è anche possibile l'interpretazione contraria: la maggiore manifestazione di flessibilità in casi di alta formazione potrebbe essere indice del fatto che tale flessibilità sia una sorta di prerequisito per l'accesso a una formazione superiore.
In conclusione, questo studio aggiunge un'ultima questione che insieme a quanto esposto nelle sezioni precedenti permette di mettere in luce tre aspetti su cui appare importante intervenire, a tutti i livelli scolari, per supportare gli studenti in difficoltà: (1) far familiarizzare gli studenti con le situazioni moltiplicative; (2) fornire diverse rappresentazioni e non solo una (l'addizione ripetuta); (3) supportare lo sviluppo di flessibilità nella scelta delle procedure.

Bibliografia

Cascella, C., Giberti, C., & Maffia, A. (2024). Percentages versus Rasch estimates: alternative methodological strategies for replication studies in mathematics education, *Research in Mathematics Education, 26*(1), 156–174.

Downton, A., & Maffia, A. (2023). Preschool children's representation of division word problems through drawings. In: M. Ayalon, B. Koichu, R. Leikin, L. Rubel & M. Tabach (Eds.), *Proceedings of the 46th conference of the international Group for the Psychology of Mathematics Education, Volume 2* (pp. 235–242). University of Haifa & IGPME.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*(1), 3–17.

Mariotti, M.A, & Maffia, A. (2015). Cosa ricordano gli adulti sulle tabelline? *Pedagogia più didattica, 1*(1).

Ministero dell'Istruzione, Università e Ricerca (2012). *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*. MIUR.

Vergnaud, G. (2009). The theory of conceptual fields. *Human development, 52*(2), 83–94.

Parole chiave: apprendimento permanente; aritmetica; moltiplicazione; proprietà delle operazioni.