Tricase (Lecce), 3-4-5 marzo 2014, Convegno Nazionale

La didattica della matematica: strumenti per capire e per intervenire.

Associazione *Asfodelo*, Tricase
in collaborazione con il Nucleo di Ricerca in Didattica dell'Università di Bologna

Auditorium del Liceo "G. Comi"

Programma

Saluti delle autorità
Lunedì 03 marzo ore 08:30-09:00
Mercoledì 05 marzo ore 11:00-11:30 (con consegna degli attestati)

Conferenze
Lunedì 03 marzo 2014

09:00-10:00 **Bruno D'Amore**: *La ricerca in didattica della matematica e la sua applicazione concreta in aula*.

10:00-11:00 **Martha Isabel Fandiño Pinilla**: *Che cosa si intende per apprendimento concettuale in matematica*.

Martedì 04 marzo 2014

09:00-10:00 **Giorgio Bolondi**: *Le valutazioni esterne in matematica (prove Invalsi, TIMSS, OCSE-Pisa): utilità, limiti, ricadute*.

10:00-11:00 **Annarita Monaco**: *Apprendimento matematico: la forza della didattica*.

Mercoledì 05 marzo 2014

09:00-10:00 **Benedetto Di Paola**: *I libri di matematica che circolano nella scuola, italiana e non: ricadute nella pratica d'aula*.

10:00-11:00 **Rosetta Zan**: *La comprensione di un problema*.

Seminari
lunedì 03 marzo, 11:15-13:00 e 15:00-18:00
martedì 04 marzo: 15:00-18:00
per la scuola dell'infanzia:

Bruno D'Amore: *Insegnamento/Apprendimento significativo della matematica nella scuola dell'infanzia*.

Benedetto Di Paola: *Gli insegnati si raccontano … Matematica in Sezione*.

per la scuola primaria:

Martha Isabel Fandiño Pinilla: *Diverse componenti dell'apprendimento della matematica*.

Annarita Monaco: *Mondi matematici in aula: tra creazione, comunicazione e discussione*.

per la scuola secondaria:

Giorgio Bolondi: *Dalle Indicazioni Nazionali alla pratica d'aula. 1- Gli obiettivi e i traguardi. 2- Le criticità degli apprendimenti. 3- La progettazione dei percorsi*.

Rosetta Zan: *Difficoltà in matematica; 1^a puntata: Osservare; 2^a: Interpretare; 3^a: Intervenire*.

Tavola rotonda
Martedì 04 marzo 2014, 11:15-13:00

Giorgio Bolondi, Bruno D'Amore, Benedetto Di Paola, Martha Isabel Fandiño Pinilla, Annarita Monaco, Rosetta Zan: *La paura della matematica, la fobia antimatematica, il senso della matematica, … Come far pace con la matematica?*

La didattica della matematica: strumenti per capire e per intervenire.

Editor:
Bruno D'Amore

Testi delle relazioni e dei seminari di:
Giorgio Bolondi, Bruno D'Amore, Benedetto Di Paola, Martha Isabel Fandiño Pinilla, Annarita Monaco, Rosetta Zan

Indice

Prefazione
Bruno D'Amore

Conferenze

Giorgio Bolondi: *Le valutazioni esterne in matematica (prove Invalsi, TIMSS, OCSE-Pisa): utilità, limiti, ricadute*.
Bruno D'Amore: *La ricerca in didattica della matematica e la sua applicazione concreta in aula*.
Benedetto Di Paola: *I libri di matematica che circolano nella scuola, italiana e non: ricadute nella pratica d'aula*.
Martha Isabel Fandiño Pinilla: *Che cosa si intende per apprendimento concettuale in matematica*.
Annarita Monaco: *Apprendimento matematico: la forza della didattica*.
Rosetta Zan: *La comprensione di un problema*.

Seminari

per la scuola dell'infanzia:
Bruno D'Amore: *Insegnamento/Apprendimento significativo della matematica nella scuola dell'infanzia*.
Benedetto Di Paola: *Gli insegnanti si raccontano … Matematica in Sezione*.

per la scuola primaria:
Martha Isabel Fandiño Pinilla: *Diverse componenti dell'apprendimento della matematica*.
Annarita Monaco: *Mondi matematici in aula: tra creazione, comunicazione e discussione*.

per la scuola secondaria:
Giorgio Bolondi: *Dalle Indicazioni Nazionali alla pratica d'aula. 1- Gli obiettivi e i traguardi. 2- Le criticità degli apprendimenti. 3- La progettazione dei percorsi*.
Rosetta Zan: *Difficoltà in matematica; 1^a puntata: Osservare; 2^a: Interpretare; 3^a: Intervenire*.

Bruno D'Amore
Prefazione

Una volta andai dal medico, il mio amico medico di famiglia, Paolo. Quando arrivai in ambulatorio non c'era la solita coda, ma solo poche persone, una delle quali mostrava una forte avversione per un foglio appeso sulla porta, foglio che conteneva un laconico messaggio che avvisava noi pazienti che quel giorno e il giorno dopo Paolo non avrebbe ricevuto, perché si trovava ad un convegno sul tema … Beh, il tema era specificamente medico e qui non importa ricordarlo. Certo, tornare a casa era una seccatura, ma feci notare a quel signore seccato che era meglio essere pazienti di un medico che, almeno una volta l'anno si informa e si forma, che non di uno che ritiene di sapere già tutto per sempre. Paolo, molto correttamente, a parte chiedere scusa per il disagio, dava un numero di telefono di un collega per casi di urgenza.
Ve l'immaginate un chirurgo che segua asportando l'ernia al disco come si faceva venti anni fa? O a rimuovere la cataratta come hanno fatto a mio padre alcuni decenni fa? O … E potrei continuare facendo mille esempi, nel campo della medicina, dell'edilizia, della legge, …
Perché chi opera in questi campi, medici, chirurghi, ingegneri edili, avvocati, … è considerato professionista, riverito da tutti, stimato anche solo per il mestiere che fa, non tanto per come lo fa.

Troppo acuto il mio lettore, per non aver già capito dove voglio andare a parare. E l'insegnante, è o non è un professionista? Non ha tra le mani uno dei compiti più sottili e complessi della nostra società, la formazione dei futuri cittadini? Formare menti ben fatte, far emergere le propensioni naturali, far amare la cultura in ogni sua espressione, sviluppare opportuno ed acuto senso critico, capacità dialogica e capacità di ascolto, dare senso alle competenze, … Se uno ci pensa, la responsabilità sociale ed etica del docente è infinitamente superiore a quella del chirurgo, dell'ingegnere, dell'avvocato e del politico.
Quel che ci differenzia dagli altri professionisti è la mancanza di una vocazione alla formazione critica continua, culturale, professionale? Non è mica tanto vero, basta vedere come si è formato questo evento di Tricase, una associazione culturale che decide di offrire un'opportunità di formazione in servizio agli insegnanti, che si concretizza con la proposta al sottoscritto di generare una significativa occasione, ed eccoci qua, ricercatori fra i più attivi della nostra bella lunga Penisola riuniti per dialogare con gli insegnanti che lo vogliono, offrendo loro riflessioni sulla didattica della matematica, la disciplina che è stata creata apposta, circa 40 anni fa, anche proprio per la formazione in servizio professionale degli insegnanti di matematica.
M'è bastato chiamare a raccolta colleghi che stimo, ricercatori che dedicano la loro vita non solo alla ricerca, ma anche alla formazione dei docenti, e il gioco è fatto.

Non solo incontri a tu per tu, ma dialoghi permanenti, seminari specifici, una tavola rotonda e questo strumento, questa raccolta a stampa preconfezionata dei materiali che saranno oggetto di formazione e dibattito, cosa che non sempre e non tutti fanno, una sorta di libro che testimonia quel che l'evento vuol produrre, consapevolezza critica, domande da professionisti, un tassello di formazione che aspira a dare un impulso alla formazione continua.

Magari ci fossero mille occasioni così all'anno nella nostra bella, lunga e variegata Penisola … La realtà è che occorre una certa dose di coraggio, di fede, di lungimiranza a ideare questo tipo di attività. E questo la dice lunga sulla stima che ho provato, subito, incondizionata, al momento stesso nel quale sono stato invitato a creare questo corso – seminario – evento.

Conferenze

Giorgio Bolondi (NRD, Università di Bologna)

Le valutazioni esterne in matematica (prove Invalsi, TIMSS, OCSE-Pisa): utilità, limiti, ricadute.

L'irrompere delle *Prove Invalsi*, a partire dalla prima Prova Nazionale nel giugno 2008, è stato sicuramente uno degli elementi di maggiore impatto sulla scuola italiana negli ultimi anni. Origine di continue discussioni che dal mondo degli insegnanti tracimano su studenti e famiglie, sono circondate da una *leggenda nera* che si coagula intorno a due slogan: *test sugli studenti* e *graduatorie tra le scuole*.
Nessuno di questi stereotipi corrisponde alla realtà, e chi ha guardato le prove lo sa bene. Le "domande a crocette" sono solo una parte dei quesiti di matematica, e comunque si può affermare -senza entrare in tecnicismi- che spesso una domanda a risposta chiusa, con i distruttori costruiti adeguatamente sulla base anche di pretest sul campo, è in grado di restituire informazioni che una domanda aperta non può dare.

È vero anche che i *Rapporti* che ogni anno l'Invalsi pubblica, e i risultati che vengono restituiti alle singole scuole (e solo a loro!), contengono *numeri* che posizionano rispetto a *benchmark* di riferimento il risultato di una macroarea del paese, di una categoria di studenti, di una classe o di una scuola. Questi numeri, però, sono solo una piccola parte di quanto viene restituito dalle prove; sono dati che, presi da solo, non significano nulla e di cui non si può far alcun uso sensato.
I numeri in generale, da soli, sono privi di significato: i numeri sono completamente inutili- spesso dannosi- se non li sappiamo leggere. Per comprendere e utilizzare i "numeri dell'Invalsi" occorre sapere cosa viene effettivamente viene valutato e in qualche modo misurato dalle prove Invalsi di matematica.
Ogni discussione sulla scuola, ogni proposta di intervento, ogni lavoro di rielaborazione, aggiornamento, formazione dovrebbe basarsi su informazioni per quanto possibile veritiere e attendibili. Nessuno può mettere in dubbio che tra le informazioni fondamentali devono esserci anche quelle riguardanti ciò che i nostri ragazzi hanno effettivamente appreso o non appreso, e informazioni sulle competenze che hanno acquisito o non acquisito. Partendo da queste è possibile anche ricavare informazioni sulle caratteristiche degli insegnamenti sviluppati, sulla coerenza e l'effettiva realizzabilità delle indicazioni di legge, sull'efficacia delle azioni formative pre-servizio e in-servizio ….

Le prove Invalsi hanno il fondamentale obiettivo di restituire informazioni; in particolare, informazioni su quale e quanta matematica hanno appreso e sanno utilizzare i nostri studenti. Non sono costruite per valutare direttamente altre cose, e non possono direttamente fornire informazioni su di esse, ad esempio la bravura degli insegnanti e l'efficienza di una scuola, o la capacità di direzione di un dirigente- anche se ovviamente per tutte queste "valutazioni" (tra virgolette), quanto i ragazzi alla fine apprendono in matematica, opportunamente interpretato alla luce del contesto sociale, economico, geografico, familiare, …, è un dato imprescindibile.
Valutazione, nel contesto delle prove Invalsi, NON significa *giudizio*, né implica in alcun modo un giudizio. Forse proprio il fatto che nella prassi scolastica italiana e nella percezione di allievi e famiglie la valutazione degli apprendimenti (o, come si dice con un'espressione infelice, la "valutazione del rendimento scolastico") sia spesso, impropriamente, abbinata a un giudizio (talvolta persino a un giudizio morale …) è uno dei motivi per cui è così difficile far accettare una valutazione esterna: come può "giudicare" chi non conosce direttamente la situazione? Il punto è proprio questo: le prove Invalsi non sono costruite per giudicare, ma per acquisire informazioni che poi vanno interpretate in contesto da chi il contesto conosce.

I principi in base ai quali tutta questa operazione viene condotta sono presentati nel quadro di riferimento per la matematica. È il documento fondamentale che cerca di esplicitare quali informazioni queste prove possono acquisire: *per valutare cosa* sono costruite, e *che utilizzo è lecito fare* dei loro risultati.
L'apprendimento della matematica è un fatto estremamente complesso, riguardo al quale spesso la valutazione (e l'autovalutazione di docenti e studenti) tende a essere molto drastica e sbrigativa (*sa/non sa*; o peggio ancora *capisce/non capisce*; *è portato/non è portato*; *ha logica/non ha logica*). Chi valuta gli apprendimenti in matematica sa invece che c'è bisogno di indicatori quanto più possibili precisi, analitici, ma che i dati forniti da questi indicatori devono essere interpretati all'interno di un quadro complessivo e

sintetico. La relazione tra le singole domande (*non solo test!*) e l'apprendimento complessivo è esplicitata nel *Quadro di Riferimento*.

Uno degli obiettivi delle prove di matematica è dunque quello di fornire indicatori analitici inseriti in un quadro complessivo, indicatori e quadro complessivo che permettano di avere informazioni utilizzabili a più livelli.
Le informazioni sono importanti per tutti gli attori del sistema scuola: i docenti, prima di tutto; gli studenti e le loro famiglie; i dirigenti; i decisori politici locali, nazionali e sovranazionali; i ricercatori dei processi di insegnamento e apprendimento della matematica. Tutti questi attori hanno bisogno di informazioni attendibili, e ovviamente, nessuno strumento valutativo potrà mai fornire TUTTE le informazioni. Non lo possono fare le prove Invalsi, come non lo possono fare da sole le verifiche somministrate dagli insegnanti, o le visite ispettive, o qualsiasi altro strumento. OGNI strumento valutativo, anche una valutazione esterna come quella dell'Invalsi, ha però il suo ruolo nella "fotografia" degli apprendimenti del singolo studente, della classe, della scuola o del sistema italiano nel suo complesso. Le prove vengono quindi costruite e i risultati vengono restituiti tenendo presenti tutti questi potenziali utilizzatori delle informazioni.

Partiamo per esempio dall'elemento apparentemente più "lontano" dalla discussione sulle prove. Perché hanno bisogno di prove come quelle dell'Invalsi gli studenti e le famiglie? Ad esempio, basta pensare a un dato molto semplice: il 50% degli studenti italiani è insufficiente in matematica al termine del primo quadrimestre della scuola superiore. Per molti di questi studenti, la matematica sarà uno degli elementi cruciali per decidere di cambiare percorso (spesso perdendo un anno, ma in molti casi nessun indizio nella valutazione interna precedente lasciava presupporre una tale difficoltà. La differenza tra un 7 e un 9 in matematica in uscita dal primo ciclo ha significato all'interno della stessa classe; ne ha di meno già a livello di scuola e lo perde completamente se il 7 è ottenuto in una scuola e il 9 in un'altra. È normale e per certi versi inevitabile, ma può anche essere fuorviante nel momento in cui io, famiglia o studente, valuto se sono adeguatamente attrezzato per seguire un determinato percorso formativo nella scuola superiore. Il voto ottenuto nei tre anni di scuola secondaria di primo grado, nella prova interna dell'esame di stato,... molto spesso è basato su una logica restituiva - misura quanto il ragazzo è in grado di restituire dell'insegnamento erogato. La scala e l'unità di misura sono stabilite dal docente, talvolta solo indirettamente interfacciate con la scala e la misura del docente della classe accanto. Il voto interno, in tutti i segmenti scolastici, spesso non restituisce una valutazione adeguata, sufficientemente oggettiva, delle competenze acquisite e delle conoscenze o abilità possedute, e sicuramente è un elemento che ha poco significato al di fuori del contesto nel quale è stato assegnato.
Questo fatto è ben noto nella letteratura scientifica e confermato dalle valutazioni internazionali, nonché da qualunque prova che valuti nella stessa situazione studenti provenienti da scuole diverse (ad esempio le prove di ammissione all'università).
Non è detto che questo sia negativo o sbagliato di per di sé: l'importante è che ci sia chiarezza su cosa rappresenta il risultato di una valutazione, perché altrimenti si rischia di utilizzare male questa informazione per prendere decisioni sbagliate.
Per una famiglia, per un ragazzo che sta scegliendo dopo il primo ciclo, che sta passando da un liceo o un istituto tecnico all'università, è importante avere anche una informazione esterna, per certi versi anche comparativa, per evitare scelte sbagliate, per considerare serenamente come investire nel proprio futuro.

È importante anche per l'insegnante avere una informazione sugli esiti del proprio lavoro, perché è alla base del processo di autovalutazione che ogni insegnante sviluppa continuamente. Ad esempio, sapere che la mia classe è sopra alla media della mia regione nell'ambito numeri e al di sotto nell'ambito geometria, non è una informazione che serve per stabilire delle classifiche: è un dato che può servire a *me* per mettere a fuoco le caratteristiche del *mio* insegnamento.
Un esito di questo tipo non dipende probabilmente dal fatto che il dirigente ha messo nella mia classe tutti gli studenti con intelligenza aritmetica e in quella di fianco tutti quelli con intelligenza geometrica. Più facilmente dipende dai miei gusti, dal tempo che ho dedicato in classe ai diversi ambiti di contenuti (e questa è una scelta che spesso riflette le mie convinzioni sull'importanza degli ambiti medesimi), dai libri o in generale dagli strumenti che utilizzo, dalla formazione in servizio o pre-servizio che ho seguito. Non spetta all'Invalsi dire *perché* c'è questo risultato: questo lo posso fare solo io, che conosco il contesto.

Avere informazioni sugli apprendimenti è importante per le scuole, per il MIUR e per gli Uffici Scolastici. Nel momento in cui sono entrate in vigore le nuove indicazioni nazionali per il primo ciclo e per il secondo- e oggi per la prima volta dopo quasi cent'anni viviamo un momento in cui gli obiettivi di tutto il sistema scuola sono stati ridefiniti e messi a fuoco, contemporaneamente- è lecito domandarsi se queste indicazioni pongono obiettivi effettivamente raggiungibili, e quanto della prassi didattica, degli strumenti, della preparazione degli insegnanti è adeguato al raggiungimento di questi obiettivi. Servono informazioni attendibili per sapere come e dove investire, come sostenere le situazioni di difficoltà e come fare tesoro delle esperienze positive; per capire come costruire meglio i percorsi di formazione; per far evolvere le indicazioni senza dover aspettare altri novant'anni.
Per aiutare tutti questi attori interessati a individuare, organizzare e utilizzare le informazioni, ogni domanda proposta viene etichettata con una serie di indicatori che ne riassumono e mettono in evidenza alcune caratteristiche, coerentemente con quanto descritto nel Quadro di Riferimento: l'aggancio alle Indicazioni di legge (del livello e dell'indirizzo scolastico corrispondente), l'ambito prevalente dei contenuti, il *question intent*, il processo prevalente richiesto per rispondere, la posizione nel ciclo della ma tematizzazione.
I risultati vengono poi aggregati secondo una o più di queste direzioni di etichettatura, per aiutare gli insegnanti e le scuole a individuare caratteristiche del tipo di insegnamento erogato (per una autovalutazione del proprio percorso) e per meglio descrivere l'apprendimento degli allievi. Queste aggregazioni sono la base per ottenere dati statistici affidabili e rappresentano il punto di partenza per l'analisi qualitativa delle singole situazioni.

Ogni domanda delle prove di matematica porta dunque una serie di etichette che permettono di organizzare la restituzione dei dati e comporre una informazione complessiva sulla base di informazioni analitiche.
La prima etichetta è il riferimento alle indicazioni di legge: la definizione degli obiettivi è basata sulle indicazioni nazionali e il punto di partenza per la costruzione delle prove di matematica è sempre costituito dai traguardi e gli obiettivi delle indicazioni.
I contenuti valutati sono raggruppati in quattro ambiti, *Numeri, Spazio e figure, Dati e previsioni, Relazioni e funzioni*, coerentemente con l'organizzazione dei contenuti presente sia nelle indicazioni del primo che in quelle del secondo ciclo.
I contenuti sono poi raggruppati in nuclei concettuali in cui sono collegati i diversi obiettivi previsti dalle indicazioni di legge.
Restituendo questi dati così aggregati e etichettati si fornisce alla scuola e all'insegnante uno strumento per valutare come gli obiettivi di apprendimento fissati a livello nazionale sono stati raggiunti dalla classe, dalla scuola, o in certi casi dal singolo studente.

Siccome l'apprendimento della matematica è sempre un fatto di medio-lungo periodo, le prove sono costruite con una particolare attenzione alla verticalità. Ci sono domande che sono esplicitamente collegate una all'altra, in diversi livelli scolastici; alcune sono addirittura riprese da un livello all'altro o da un anno all'altro. In questo modo è possibile avere non solo una informazione statica, ma anche una visione dinamica del processo di apprendimento.
I dati accumulati nel corso degli anni forniscono quindi anche uno strumento molto potente per valutare la coerenza complessiva dell'insieme di indicazioni.
La seconda dimensione lungo la quale sono costruite le prove, e che è stata negli anni passati una delle caratteristiche della restituzione dei dati, è quella dei *processi*. L'apprendimento della matematica è un fatto complesso, abbiamo detto, e ogni attività matematica coinvolge competenze e capacità molto diverse. La metafora più frequentemente utilizzata per esprimere questo intreccio di diverse competenze nell'apprendimento della matematica è quella della corda intrecciata: questo intreccio è presente, nella costruzione delle prove Invalsi, attraverso la componente dei processi.

Aggregare le domande secondo il processo coinvolto fornisce una informazione importante. Ad esempio, non è attraverso una sola domanda che posso affermare che un bambino, o il bambino medio italiano, ha appreso la moltiplicazione. Sapere che il mio bambino sa che 25×3 è uguale a 75 (eseguendolo a mente o per iscritto) è una informazione molto diversa, in qualche modo indipendente, dal sapere che25×3 è uguale a 3×25; ed è anche diverso dal sapere che se in una classe di 25 bambini ognuno deve portare 3 euro, per trovare quanto si raccoglie in tutto occorre eseguire la moltiplicazione 25×3. Per valutare queste diverse componenti sono necessarie domande diverse, che sono etichettate con diversi processi.

Le domande, e i rispettivi risultati, hanno quindi una terza etichetta (oltre alle indicazioni e all'ambito): riportano il processo prevalente richiesto per rispondere. Tra glie elementi valutati, ci sono anche l'acquisizione di particolari conoscenze o determinate abilità, ma non sono questi gli aspetti fondamentali della valutazione Invalsi. Anzi, anche se queste componenti dell'apprendimento sono molto importanti, sono anche quelle per le quali è meno necessario uno strumento come la prova Invalsi. Per sapere se un bambino sa quanto fa 6×3 non c'è bisogno dell'Invalsi: lo verifica molto più rapidamente e efficacemente l'insegnante.
In nessuno di questi processi, in particolare, c'è un riferimento esplicito alla memoria. Non perché la memoria non sia importante, in matematica come nelle altre discipline. Gioca un ruolo importante, ma non occorre un servizio nazionale di valutazione per valutare quanto hanno imparato a memoria i ragazzi. Checché ne dicano autorevoli *maitre à penser*, nessuna delle quasi 300 domande proposte quest'anno nelle prove di matematica "premiava la memoria" . Non perché la memoria non sia importante, ma perché non è questo lo scopo né lo spirito delle prove Invalsi di matematica- non è questo che vogliono valutare e non è per questo che vengono costruite. Quando in una domanda si vuole valutare qualcosa ed è richiesto di ricordare una formula- e non si vuole che questo elemento di memoria interferisca con l'aspetto che si vuole valutare- questa formula viene esplicitamente richiamata (proprio perché si vuole avere un dato ripulito, chiaro, senza interferenze).

Per arricchire ulteriormente la restituzione dei dati, quest'anno i risultati vengono restituiti anche con una ulteriore etichetta.
Uno degli obiettivi fondamentali per gli allievi, esplicitato nelle Indicazioni di legge di tutti i livelli scolastici, è l'acquisizione della capacità di utilizzare la matematica per leggere e rappresentare la realtà, nonché ovviamente degli strumenti matematici necessari per questa effettuare questa *matematizzazione* e ricavare risultati da essa, risultati da interpretare infine nel contesto di partenza. La parola *modello* ricorre con insistenza sia nelle indicazioni per il primo ciclo che nei documenti del secondo, ed è forse la novità più evidente di questo insieme di documenti.
Questa operazione di matematizzazione viene abitualmente schematizzata in tre fasi, che sono anche riprese nei principali framework delle valutazioni internazionali dell'apprendimento in matematica:
- il passaggio dalla situazione di problema reale al modello matematico (*formulare*),
- il lavoro sul modello matematico (*utilizzare*),
- l'interpretazione dei risultati rispetto alla situazione di partenza (*interpretare*).

A partire dal 2013 ogni domanda viene anche etichettata con la fase del ciclo della matematizzazione che viene più specificatamente coinvolta in quella domanda. In questo modo, i risultati delle risposte sono quindi aggregati in tre categorie, corrispondenti alle tre fasi del ciclo della matematizzazione. Questo permetterà agli insegnanti di avere un nuovo importante "taglio di lettura" dei propri risultati, coerente con gli obiettivi fondamentali delineati dalle indicazioni di legge.
Nel *Formulare*, ad esempio, sono aggregati i risultati di tutte quelle domande in cui all'allievo è richiesto di descrivere con uno strumento matematico (un'equazione, un'operazione, una tabella, un grafico, un diagramma...) un problema o una situazione.
Nell'*Utilizzare* sono aggregati i risultati delle domande in cui il processo richiesto all'allievo è *interno alla matematica* (trovare il risultato di una operazione, risolvere un'equazione,...).
Nell'*Interpretare* infine sono aggregati i risultati delle domande in cui l'allievo deve leggere e interpretare i risultati delle procedure matematiche implementate o descritte, nel particolare contesto di un problema.

La costruzione delle prove risponde quindi a una concezione multidimensionale dell'apprendimento della matematica, e questo porta a una restituzione articolata del risultato. L'obiettivo del *Servizio Nazionale di Valutazione* è esplicitato nel nome: fornire un servizio a tutti gli attori del sistema scuola, un servizio che per raccogliere, organizzare e utilizzare informazioni sugli apprendimenti degli allievi.

Bruno D'Amore (DIE, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotà)
La ricerca in didattica della matematica e la sua applicazione concreta in aula.

La ricerca in didattica disciplinare degli ultimi 30 anni ha caratteristiche ricorrenti: accentrare l'attenzione sul fenomeno dell'apprendimento, ma da un punto di vista fondazionale e comunque non accettando un unico modello di teoria dell'apprendimento.
Traccerò qui di seguito alcuni elementi di base della ricerca cosiddetta "fondamentale" in didattica della matematica, analizzando solo alcune tra le problematiche che mi sembrano emergere con più forza negli ultimi anni, che si sono consolidate come elementi di ricerca in didattica della matematica, e che forniscono appigli solidi e significativi per azioni d'aula concrete.

1. Il contratto didattico.

Fin dagli anni '70 fece l'ingresso nel mondo della ricerca in Didattica della matematica l'idea di *contratto didattico*, lanciata da Guy Brousseau, che si rilevò subito fruttifera e che venne definitivamente sancita dalle sue ricerche dei primi anni '80. Furono poi gli studi della seconda metà degli anni '80 a decretarne il trionfo e la teorizzazione piena; ad essi parteciparono vari studiosi di tutto il mondo: l'idea veniva riconosciuta ed entrava a far parte del linguaggio condiviso dall'intera comunità internazionale.
Uno dei primi tentativi di "definizione" del contratto didattico è il seguente: «In una situazione d'insegnamento, preparata e realizzata da un insegnante, l'allievo ha generalmente come compito di risolvere un problema (matematico) che gli è presentato, ma l'accesso a questo compito si fa attraverso un'interpretazione delle domande poste, delle informazioni fornite, degli obblighi imposti che sono costanti del modo di insegnare del maestro. Queste abitudini (specifiche) del maestro attese dall'allievo ed i comportamenti dell'allievo attesi dal docente costituiscono il contratto didattico» (Brousseau, 1986).
Spesso queste "attese" non sono dovute ad accordi espliciti, imposti dalla scuola o dagli insegnanti o concordati con gli allievi, ma alla concezione della scuola, della matematica, alla ripetizione di modalità.
Lo studio dei vari fenomeni di comportamento degli allievi da questo punto di vista ha dato enormi frutti, di estremo interesse. Oggi molti comportamenti considerati fino a poco tempo fa inspiegabili o legati al disinteresse, all'ignoranza, o alla età immatura, sono invece stati chiariti.
Uno degli studi più noti è quello che va sotto il nome di *L'età del capitano*. Io lo racconterò qui di seguito, così come l'ho vissuto (e fatto vivere) personalmente. In una classe IV elementare (età degli allievi 9-10 anni) di un importante centro agricolo, ho proposto il celeberrimo problema (nel quale il "capitano" diventa un "pastore"): «Un pastore ha 12 pecore e 6 capre. Quanti anni ha il pastore?».
In coro, con sicurezza, e *tutti* senza eccezioni o riserve, i bambini hanno dato la risposta attesa: «18». Di fronte allo sgomento della maestra, ho reagito spiegandole che si tratta di un fatto legato al contratto didattico: lei non aveva mai dato problemi senza soluzione, o impossibili (per una delle tante forme di impossibilità), dunque i bambini avevano introdotto nel contratto didattico una clausola in base alla quale, per così dire: «Se la maestra ci dà un problema, questo deve essere risolto certamente». E, poiché vige un'altra clausola micidiale secondo la quale i dati numerici presenti nel testo vanno presi tutti e possibilmente nell'ordine in cui compaiono, i bambini di quella classe non avevano nessun'altra possibilità, nessuno scampo: *dovevano* rispondere usando i dati 12 e 6. L'unico imbarazzo stava semmai nella scelta della operazione da eseguire. Ora, può darsi che quella dell'addizione sia stata una scelta casuale; ma va detto che alla mia richiesta ad un biondino particolarmente vivace di spiegare perché non avesse fatto uso per esempio della divisione, questo, dopo un attimo di riflessione, mi ha spiegato che: «No, è troppo piccolo!», riferendosi ovviamente all'età del pastore...
Gli studi sul contratto didattico, praticamente coltivati in tutto il mondo, si stanno rivelando molto fruttiferi ed hanno dato, in pochissimi anni, risultati di grande interesse, che sempre più ci stanno facendo conoscere l'epistemologia dell'apprendimento matematico.

2. Misconcezioni.

Una misconcezione è un concetto errato e dunque costituisce genericamente un evento da evitare; essa però non va vista sempre come una situazione del tutto o certamente negativa: non è escluso che, per poter

raggiungere la costruzione di un concetto, si renda *necessario* passare attraverso una misconcezione momentanea, ma in corso di sistemazione.
Si può notare come, almeno in taluni casi, alcune immagini possono essere delle vere e proprie misconcezioni, cioè interpretazioni errate delle informazioni ricevute.
Qui si presenta la vasta ed interessante problematica del curricolo nascosto. Lo studente rivela le proprie misconcezioni quando applica *correttamente* regole *scorrette*. Spesso, all'origine di questo fatto c'è una mancata comprensione od un'errata interpretazione. Se l'insegnante non si rende conto di ciò, le sue sollecitazioni cadono a vuoto perché lo studente ha già incluso nel proprio curricolo quelle regole che ritiene corrette e che, in taluni casi, hanno funzionato.
Per esempio, in una III primaria, uno studente eseguiva in colonna le seguenti sottrazioni:

37-	89-	26-	56-
24=	67=	18=	43=
----	----	----	----
13	22	12	13

L'insegnante osservò che tre sottrazioni su quattro erano state eseguite correttamente, diede dunque una valutazione positiva, ma invitò lo studente, nella terza, a "prendere in prestito una decina". Lo studente non capiva di che decina si stava parlando perché aveva in mente un'altra regola personale: per eseguire le sottrazioni in colonna si procede da destra verso sinistra e, in ogni colonna, si sottrae dal più grande il più piccolo. Ne aveva avuto conferma in molti casi, la comunicazione che riguardava casi come la terza sottrazione non gli era giunta per chissà quale motivo, e dunque aveva assunto nel suo curricolo quella "regola". Essa funzionava *quasi* sempre e nei casi negativi egli non capiva perché: stava usando *correttamente*, infatti, una regola che non sapeva essere invece scorretta. Una vera e propria misconcezione.
Dunque, le *misconcezioni* si possono interpretare come concezioni momentanee non corrette, in attesa di sistemazione cognitiva più elaborata e critica. Attenzione, però: lo studente non lo sa e dunque ritiene che le sue, quelle che per il ricercatore sono misconcezioni, siano invece concezioni vere e proprie. Dunque è l'adulto che sa essere quelle elaborate e fatte proprie dai ragazzi delle misconcezioni. Chiamarle *errori* è troppo semplicistico e banale: non si tratta di punire, di valutare negativamente; si tratta, invece, di dare gli strumenti per l'elaborazione critica.

3. Immagini e modelli.

Immagine mentale è il risultato figurale o proposizionale prodotto da una sollecitazione (interna o esterna). L'immagine mentale è condizionata da influenze culturali, stili personali, in poche parole è prodotto tipico dell'individuo, ma con costanti e connotazioni comuni tra individui diversi. Essa può più o meno essere elaborata coscientemente (anche questa capacità di elaborazione dipende però dall'individuo). Tuttavia l'immagine mentale è interna ed almeno in prima istanza involontaria.
L'insieme delle immagini mentali elaborate (più o meno coscientemente) e tutte relative ad un certo concetto costituisce il modello mentale (interno) del concetto stesso.
Farsi un modello di un concetto, dunque, significa rielaborare successivamente immagini (deboli, instabili) per giungere ad una di esse definitiva (forte, stabile).
Ci sono due possibilità:
• il modello si forma al momento giusto nel senso che si tratta davvero del modello corretto, proprio quello che l'insegnante auspicava per quel tale concetto; l'azione didattica ha funzionato e lo studente si è costruito il modello corretto (quello voluto dall'insegnante) del tale concetto ;
• il modello si forma troppo presto, quando ancora rappresenta solo un'immagine che avrebbe dovuto essere ulteriormente ampliata; a questo punto non è facile raggiungere il concetto auspicato perché la stabilità del modello è di per sé stessa un ostacolo ai futuri apprendimenti.
Proseguiamo nell'analisi dei modelli e del loro ruolo nell'apprendimento.
Quando un insegnante propone un'immagine forte e convincente, che diventa persistente, confermata da continui esempi ed esperienze, di un concetto, l'immagine si trasforma in *modello intuitivo*.
C'è insomma rispondenza diretta tra la situazione proposta ed il concetto matematico che si sta utilizzando; ma questo modello potrebbe non essere ancora quello che del concetto ci si aspetta all'interno del sapere matematico.

Dunque, tra i modelli, si riserva il nome di *modello intuitivo* a quei modelli che rispondono pienamente alle sollecitazioni intuitive e che hanno dunque un'accettazione immediata forte.
Si parla anche, talvolta, di *modelli parassiti*.
Per esempio, avendo accettato il modello intuitivo di moltiplicazione tra numeri naturali ed avendolo erroneamente esteso a tutte le moltiplicazioni, modello intuitivo rafforzato dalle raffigurazioni schematiche (per *schieramento*), si forma un modello parassita che si può enunciare così: la moltiplicazione accresce sempre, *deve* accrescere sempre.
Analogo è il modello parassita della divisione. Sia che venga affrontata "per contenenza" sia "per ripartizione", se non si conosce un po' di didattica della matematica, si può correre il rischio di dare allo studente un modello intuitivo che finirà con il produrre un modello parassita: in una divisione A:B, il numero B *deve* essere minore del numero A.
Didatticamente, allora, conviene lasciare immagini ancora instabili, in attesa di poter creare modelli adatti e significativi, vicini al sapere matematico che si vuole raggiungere.
Più "forte" è il modello intuitivo, più difficile è infrangerlo per *accomodarlo* ad una nuova immagine. Insomma, la immagine - misconcezione non deve diventare modello visto che, per sua stessa natura, è in attesa di definitiva sistemazione.
Si tratta allora di non dare informazioni distorte e sbagliate; non solo non darle in modo esplicito, ma addirittura evitare che si formino autonomamente per non favorire l'insorgere di modelli parassiti.
Vediamo un solo esempio in dettaglio.
La sottrazione.
La sottrazione, per sua stessa natura, presenta almeno due diversi significati intuitivi, a dispetto di un unico significato formale, che si possono evidenziare ricorrendo ancora a due problemi suggeriti da Efraim Fischbein:
1. *Se togliamo 7 palline da un insieme di 10 palline, quante palline rimarranno?*
2. *Ho 7 palline, ma me ne occorrono 10 per giocare. Quante palline devo aggiungere a quelle che ho già, per poter cominciare a giocare?*
È ovvio che entrambi i problemi si risolvono con una sottrazione, 10-7; ma nel primo caso, quello che ha come modello intuitivo il *togliere via*, la cosa è intuitiva perché c'è coincidenza tra significato formale e significato intuitivo; nel secondo caso è assai più spontaneo il ricorso a strategie additive del tipo: 7 + … = 10, intendendo in qualche modo che quei puntini … devono valere 3. D'altra parte è additiva ogni strategia di "complemento a", come, per esempio, l'operazione di dare il resto in un negozio: il negoziante di solito non fa la differenza, ma fa, passo a passo, il complementare a partire dalla spesa fino ad arrivare alla somma versata. Abbiamo dunque tra gli allievi una certa percentuale di risposte che non contemplano la sottrazione; al suo posto c'è chi fa l'addizione 7+10 o 10+7 legata al fatto che c'è la parola *aggiungere* che suggerisce l'uso dell'addizione, e c'è chi scrive 7+3=10.
C'è un forte contrasto tra l'operazione ingenua e spontanea di conteggio che verrebbe di fatto ad essere usata in una situazione concreta (cioè il conteggio: 7+1+1+1, con la risposta 3 legata al numero dei +1 necessari per giungere a 10) ed il significato formale della sottrazione. Se esistesse un'operazione specifica che esprime il numero di quei +1 che permettono di passare da 7 a 10, probabilmente la percentuale di successo salirebbe nettamente; qualcuno potrebbe dire che quell'operazione esiste ed è proprio la sottrazione espressa da 10-7; ma le prove fatte e le considerazioni effettuate finora mostrano che *non* è questo il significato intuitivo con cui gli studenti costruiscono nel loro cognitivo la sottrazione.

4. Ostacoli.

Da qualche decennio si sono i individuati in didattica della matematica tre tipi di ostacoli che si frappongono all'apprendimento:
- ostacoli di natura ontogenetica
- di natura didattica
- di natura epistemologica.

Ogni soggetto che apprende sviluppa capacità e conoscenze adatte alla sua età mentale (che può essere diversa dall'età cronologica), dunque adatte a mezzi e scopi di quella età: rispetto all'acquisizione di certi concetti, queste capacità e conoscenze possono essere insufficienti rispetto ad un progetto didattico da parte dell'insegnante e possono costituire quindi ostacoli di *natura ontogenetica* (l'allievo potrebbe avere limitazioni neurofisiologiche anche solo dovute alla sua età cronologica).

Ogni docente sceglie un progetto, un curricolo, un metodo, interpreta in modo personale la trasposizione didattica, che trasforma il sapere adulto in un sapere da insegnare agli allievi, secondo le sue convinzioni sia scientifiche sia didattiche: egli crede in quella scelta e la propone alla classe perché la pensa efficace; ma quel che è efficace effettivamente per qualche studente, non è detto che lo sia per altri. Per questi *altri*, la scelta di *quel* progetto si rivela un *ostacolo didattico*.
Un esempio di ostacolo didattico è la presentazione che fanno taluni insegnanti della scuola primaria al momento di presentare gli oggetti infiniti: il segmento come infinità di punti, la retta come figura illimitata. Il modello più diffuso nelle scuole è quello del segmento come una collana di perline che, per la sua immediatezza, viene subito accettato dagli studenti e diventa modello intuitivo; esso costituisce un evidente ostacolo didattico al momento in cui si deve introdurre l'idea di densità, nella stessa scuola elementare ed ancora di più nella scuola media, e quando si deve introdurre l'idea di continuità nella scuola superiore. Ricerche accurate hanno ampiamente evidenziato che gli studenti maturi (ultimo anno delle superiori e primi anni di università) non riescono a diventare padroni del concetto di continuità proprio a causa del modello intuitivo persistente di segmento come collana di perle. Quanto alla retta come figura illimitata, essa ed il conteggio prolungato dei numeri naturali, sembrano fornire agli studenti la capacità di vedere l'infinito solo in potenza e non in atto, il che pure crea gravi ostacoli didattici nei corsi successivi.
Ogni argomento a carattere matematico ha un proprio statuto epistemologico che dipende dalla storia della sua evoluzione all'interno della matematica, dalla sua accettazione critica nell'àmbito della atematica, dalle riserve che gli sono proprie, dal linguaggio in cui è espresso o che richiede per potersi esprimere. Quando nella storia della evoluzione di un concetto si individua una non continuità, una frattura, cambi radicali di concezione, allora si suppone che quel concetto abbia al suo interno ostacoli di carattere epistemologico ad essere appreso; ciò si manifesta, per esempio, in errori ricorrenti e tipici di vari studenti, in diverse classi, stabili negli anni.
Riassumendo, l'ostacolo ontogenetico è legato allo studente ed alla sua maturità (da tanti punti di vista), quello didattico alla scelta strategica del docente, quello epistemologico alla natura stessa dell'argomento.

Bibliografia.

Brousseau G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7, 2, 33-115.

D'Amore B. (1993). *Problemi. Pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di problem solving*. Milano: Angeli. II ed. it. 1996.

D'Amore B. (1999). *Elementi di Didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2009). *Zero. Aspetti concettuali e didattici*. Trento: Erickson.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Marazzani I., Sbaragli S. (2008). *La didattica e le difficoltà in matematica*. Trento: Erickson.

Fandiño Pinilla M.I. (2005). *Le frazioni. Aspetti concettuali e didattici*. Bologna: Pitagora.

Fandiño Pinilla M.I. (2008). *Diverse componenti dell'apprendimento della matematica*. Trento: Erickson.

Fandiño Pinilla M.I., D'Amore B. (2007). *Area e perimetro. Aspetti concettuali e didattici*. Trento: Erickson.

Fandiño Pinilla M.I., Sbaragli S. (2001). *Matematica di base per insegnanti in formazione*. Bologna: Pitagora.

Marazzani I. (ed.) (2007). *I numeri grandi*. Trento: Erickson.

Benedetto Di Paola (G.R.I.M., Università di Palermo)
Gli insegnati si raccontano … Matematica in Sezione

Fare Matematica nella Scuola dell'infanzia.

La Ricerca Educativa in Matematica già da diversi anni si occupa delle competenze del bambino al suo ingresso nella Scuola Primaria; è ormai risaputo che il soggetto apprendente possiede già competenze matematiche costruite grazie alle esperienze vissute in famiglia, nella società e nella Scuola dell'Infanzia. Competenze spesso ingenue, implicite, veicolate dalle attività di gioco che le Maestre e i Maestri propongono durate il primo triennio di formazione.
Le ricerche condotte in Italia su questo tema però non sono tantissime, particolare menzione merita il lavoro del gruppo di Ricerca di Bologna (l'NRD) fondato e diretto dal Prof. Bruno D'Amore che da anni ornai discute le problematiche educative relative all'insegnamento/apprendimento della Matematica alla Scuola dell'Infanzia, come disciplina specifica per questo grado scolastico, attraverso la quale gli insegnanti si mettono in gioco, esplorano con i propri bambini la bellezza della scoperta e del pensiero scientifico, sotteso al ragionamento matematico, anche ingenuo.
Molte sono le loro esperienze didattiche riferite a bambini piccoli di 3, 4 e 5 anni su contenuti o proto-contenuti matematici che divulgate in parecchie regioni italiane hanno sottolineato come già prima dell'età scolare, i bambini siano in grado di valutare quantità, classificare, dividere giocattoli e oggetti concreti in categorie pensate in modo vario etc. Tutto questo è Matematica in modo giocoso e divertente!
Volendo citare qualcuna di queste attività laboratoriali, ci si può certamente riferire all'uso delle filastrocche, delle conte, delle attività di routine, come registrare le presenze o segnare i giorni sul calendario, alla capacita di far esplorare ai bambini gli oggetti (i giocattoli) tridimensionali e provarne a descriverne le caratteristiche etc.
Queste, come sempre afferma D'Amore, sono una fonte continua di spunti di matematizzazione, che possono permettere all'insegnante di far realizzare ai bambini ricche e articolate esperienze nell'ambito *spazio, ordine e misura*.
La Scuola in quest'ottica deve essere capace di *potenziare* quelle che possono identificarsi come processi cognitivi impliciti e permettere, negli anni, il passaggio dalle conoscenze ingenue a quelle scientifiche non dimenticando mai il senso della Matematica e la capacità di questa disciplina di attrarre, se insegnata in modo opportuno e in modo adeguato all'età. Non è facile ma neanche impossibile! Alla Scuola dell'Infanzia bisogna superare quella difficoltà iniziale che si ha nel parlare di acquisizione di concetti matematici da parte dei bambini, spostare l'attenzione ad un ambito più generale/trasversale, divertendosi e giocando in Sezione in modo naturale, spontaneo, osservando però i comportamenti dei bambini con una lente di tipo matematico. Giocare è già fare Matematica! ("Rubo" questa frase da D'Amore). Giocare con la Lingua, porsi domande e cercare le risposte, difendere la propria idea davanti ad un compito che richiede una soluzione etc è già Matematica!

La Ricerca condotta dal G.R.I.M. di Palermo: gli insegnanti si raccontano.

Il Gruppo di Ricerca di Palermo, all'interno del percorso di formazione della Facoltà di Scienze della Formazione (CdL in Scienze ella Formazione Primaria) già da qualche anno si sta occupando di questa tematica, proponendo, in una prima approssimazione, possibili riflessioni teorico/sperimentali che coinvolgono direttamente Insegnanti, Insegnanti-Ricercatori e Ricercatori in Didattica che lavorano sulla scuola dell'infanzia e non solo.
Il contributo qui proposto ha l'obiettivo di discutere possibili riflessioni epistemologiche sull'insegnamento/apprendimento della Matematica alla Scuola dell'Infanzia, che vengono fuori in modo diretto non dalla Ricerca ma dalle parole e dal lavoro degli insegnanti stessi che operano nella Scuola.
L'intervento previsto si articolerà in due fasi: in prima battuta si discuteranno alcune interviste realizzate da un gruppo di tre "esperti" del G.R.I.M. di Palermo che hanno coordinato e diretto il progetto di ricerca qui discusso; si presenteranno i dati raccolti commentando impressioni, paure, riflessioni didattiche e approcci differenti alla pratica d'aula di Matematica emerse dal gruppo di insegnanti in servizio presso sette istituzioni scolastiche di Scuola dell'Infanzia del territorio siciliano. Successivamente si presenteranno alcune pratiche

d'aula realizzate dalle stesse insegnati presso le loro istituzioni scolastiche di Scuola dell'Infanzia; sottolineandone potenzialità e limiti nell'approccio didattico messo in atto dalle stesse. Alle interviste, in fase di ricerca, è seguito infatti un percorso di osservazione diretta in classe delle Maestre che è stato monitorato continuamente dagli esperti in termini di coerenza ed efficacia dell'intervento educativo sui bambini.
Tutti gli insegnanti coinvolti, pur non avendo mai avuto prima esperienze di questo genere, si sono subito dimostrati ben felici di lavorare con il gruppo di ricerca per poter migliorare insieme e riflettere ognuno nel proprio ambito sul fenomeno di insegnamento/apprendimento in oggetto.
Riassumendo brevemente i vari step di lavoro che saranno presentati ai corsisti come spunto di riflessione per la definizione di una possibile pratica didattica d'aula coerente con il grado scolastico indagato, si evidenzia come dopo aver "registrato" la loro visione della Matematica da proporre alla Scuola dell'Infanzia e senza influenzare inizialmente il loro modo di fare Matematica in Sezione, sono state preparate le lezioni sugli argomenti stabiliti, non è stata definita una regia fissa, anzi si è deciso di lasciare quanto più liberi gli ingegnanti di proporre approcci e atteggiamenti differenti, da analizzare successivamente tutti assieme.
Gli obiettivi generali prefissati per le pratiche d'aula sono stati definiti in modo univoco per tutti gli insegnanti coinvolti e possono riassumersi in:
- analizzare e confrontare;
- scegliere e decidere;
- formulare ipotesi;
- anticipare possibili soluzioni;
- elaborare strategie razionali.

Ogni insegnante ha poi definito con l'aiuto di un esperto gli argomenti di Matematica intorno ai quali lavorare in Sezione.
Tra i vari percorsi didattici realizzati in Sicilia, verranno presentati, durante il corso/seminario, quelli condotti dalle insegnanti Catalano S., Di Martino M.R. e Grafato R.: *Giochiamo con lo spazio … esperienze di tassellazione con Escher*; dall'insegnante Cocchiara R. dal titolo: *Artefatti e segni nell'insegnamento-apprendimento della Matematica*, che insiste su competenze di natura geometrica con bambini di 5 anni; e quello dell'insegnante Frangiamore O. dal titolo: *Dai racconti di Lupo Sabbioso, un approccio metodologico giocoso e incisivo per il pensiero logico-matematico*.

Principali riferimenti bibliografici.

Aglì F., D'Amore B. (1995). *L'educazione matematica nella scuola dell'infanzia.* Milano: Juvenilia.

Caldelli M. L., D'Amore B. (1986). *La matematica dalla scuola dell'infanzia alla scuola elementare.* Firenze: La Nuova Italia.

Caldelli M. L., D'Amore B., Giovannoni L. (1984). *Il bambino matematizza il mondo.* Firenze: La Nuova Italia.

D'Amore B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica.* Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (2011). Alcune riflessioni su didattica, concetto, competenza, schema, situazione. *Bollettino dei docenti di matematica*. [Bellinzona, Svizzera]. 63, 19-26.

D'Amore B., Frabboni F. (1996). *Didattica generale e didattiche disciplinari*. Milano: Angeli.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2001). Concepts et objets mathématiques. In: Gagatsis A. (ed.) (2001). *Learning in Mathematics and Sciences and Educational Technology.* Nicosia: Intercollege P. 111-130.

D'Amore B, Fandiño Pinilla M.I., Gabellini G., Mrazzani I., Masi F., Sbaragli S. (2004). *Infanzia e matematica. Didattica della matematica nella scuola dell'infanzia*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (2011). Frasi illuminanti di studenti e di docenti in 40 anni di ricerca. In: D'Amore B., Sbaragli S. (Eds.) (2011). *Un quarto di secolo al servizio della didattica della matematica. Atti del Convegno "Incontri con la matematica"*, n. 25, Castel San Pietro Terme (Bo). Bologna: Pitagora. 15-20.

Fandiño Pinilla M. I. (2008). *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica*. Trento: Erickson. [Versione in lingua spagnola, 2010, Bogotà: Magisterio).

Gardner H. (1993), *Educare al comprendere. Stereotipi infantili e apprendimento scolastico.* Milano: Feltrinelli.

Marazzani I. (2000), Alla scoperta del numero. *La vita scolastica.* 4, 17-20.

Martini B. (1998). Introduzione all'aritmetica nella scuola dell'infanzia. *Infanzia*. 5, 35-38.

Martha Isabel Fandiño Pinilla (NRD, Università di Bologna)
Che cosa si intende per apprendimento concettuale in matematica.

1. Registri di rappresentazione semiotica.

Va detto subito che l'apprendimento dei concetti della matematica è qualche cosa di specifico, rispetto alle altre discipline e in particolare alle altre scienze.
Nelle cosiddette *scienze sperimentali* si può far ricorso a "fatti", "oggetti", "cose",… cioè si possono "indicare" avvenimenti, strumenti, materiali concreti che sono l'oggetto stesso della trattazione o il riferimento ostensivo di quel che si sta dicendo.
In matematica no; i concetti della matematica rivestono un aspetto ideale, possono essere considerati, a seconda delle filosofie che li elaborano, astratti, ideali, linguistici, risultato di accordi interpersonali, scoperte, invenzioni, creazioni etc., ma *non* cadono comunque sotto i sensi.
Aristotele affermava che una cosa, cioè un oggetto inteso nella sua accezione più ingenua, ha tre caratteristiche che la definiscono: 1) è tridimensionale, 2) cade sotto i sensi umani, 3) è separabile dalle altre cose.
Una retta non è tridimensionale, non cade sotto alcun senso umano, non è separabile in senso concreto dagli altri concetti; dunque, la retta non è una cosa che possa essere indicata o mostrata, in senso ingenuo. Né il quadrato, né il punto, né il numero tre, né l'area, né la divisione, né la dimostrazione, né l'implicazione materiale etc.
L'unica cosa che l'essere umano è in grado di fare, rispetto ad un concetto matematico che vuole evocare, è quello di scegliere una rappresentazione in un registro semiotico opportuno, e lavorare su questa rappresentazione.
Se poi accettiamo un punto di vista ontologico, allora ha senso, com'è vezzo dei matematici, chiamare "oggetti" i concetti della matematica, nel senso qui appena delineato (per saperne di più, si veda D'Amore, 2003b).
Per poter capire a fondo il senso che hanno queste riflessioni che potrebbero apparire vaghe e fumose, ne darò una breve trattazione basata solo su esempi e sui primi principi della semiotica.

Comincio con il dire che, con il termine "noetica" si intende l'acquisizione concettuale; nel caso dell'ambiente scuola, l'apprendimento concettuale da parte dell'allievo; con il termine "semiotica" si intende la rappresentazione dei concetti mediante sistemi di segni.
Gli oggetti della matematica non esistono nella realtà concreta; in matematica l'unica cosa che possiamo fare è scegliere un registro semiotico e *rappresentare* quel concetto in quel registro, come abbiamo già detto.
Quel che si impara a maneggiare in matematica, dunque, non sono tanto gli oggetti quanto le loro *rappresentazioni* semiotiche; anche se l'obiettivo principale è la noetica, cioè l'apprendimento concettuale.
Va anche detto che l'attività semiotica è costitutiva dell'apprendimento, è parte stessa del funzionamento cognitivo in matematica, e non ha solo la funzione di appropriarsi e di comunicare concetti già acquisiti per altra via. Non possiamo non concordare con Duval (1993): «Non c'è noetica senza semiotica», e forse non solo nell'apprendimento della matematica.

Per esempio, rappresentiamo in diversi registri il concetto che formalizza l'idea di dividere a metà un intero, cioè l'oggetto matematico "metà":[1]

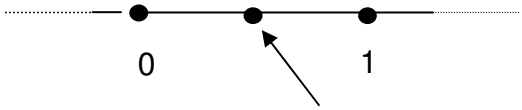
registro semiotico: la lingua comune: un mezzo, la metà, …

registro semiotico: la lingua aritmetica: ½, 2/4, 7/14… scrittura frazionaria; 0,5 scrittura decimale; 5×10^{-1} scrittura esponenziale; 50% scrittura percentuale; $0,4\overline{9}$; …

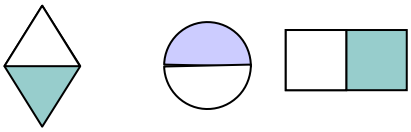
[1] L'esempio delle frazioni è a mio avviso paradigmatico; ad esso ho dedicato vari anni di studio (Fandiño Pinilla, 2005).

registro semiotico: la lingua algebrica: $\{x \in Q^+ / 2x-1=0\}$ scrittura insiemistica; $y=f(x)$: $x \rightarrow x/2$ scrittura funzionale, …

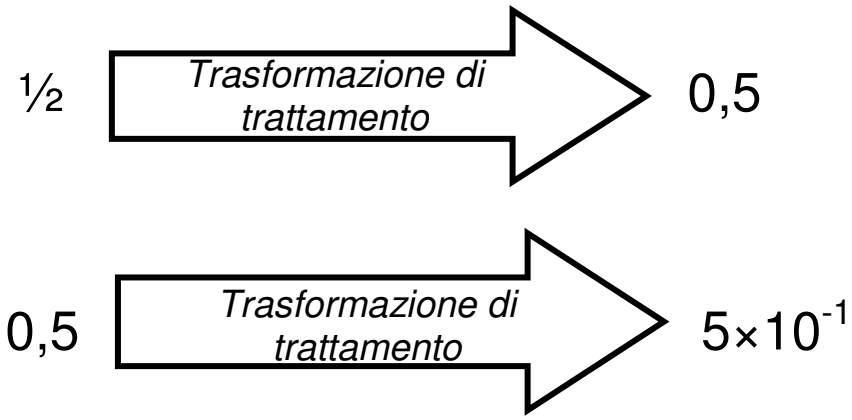
registro semiotico: il linguaggio figurale:



registro semiotico: schemi pittografici:



Il passaggio da una rappresentazione semiotica ad un'altra nello stesso registro semiotico si chiama "trasformazione di trattamento":



Il passaggio da una rappresentazione semiotica ad un'altra in un altro registro semiotico si chiama **"**trasformazione di conversione**":**

Nella semiotica, dunque, tre sono le operazioni fondamentali:

- *rappresentazione* (scelta degli elementi distintivi dell'oggetto da rappresentare e scelta del registro semiotico in cui rappresentarlo);
- *trattamento*;
- *conversione*.

La costruzione cognitiva degli oggetti matematici è strettamente connessa alla capacità di usare *più* registri di rappresentazione di quegli oggetti.

Possiamo perciò dichiarare che l'allievo ha raggiunto su un certo oggetto l'apprendimento concettuale quando è in grado di:

- scegliere i tratti distintivi del concetto e *rappresentarli* in un dato registro;
- *trattare* tali rappresentazioni all'interno di uno stesso registro;
- *convertire* tali rappresentazioni da un dato registro ad un altro.

Si può considerare che un concetto è cognitivamente costruito quando l'allievo è rispettivamente in grado di:

- identificare proprietà del concetto utilizzabili in diversi contesti e dunque di rappresentarlo in maniera adeguata a seconda delle situazioni;
- di trasformare tale rappresentazione in caso di necessità;

- di usarla in modo opportuno in una pluralità di situazioni, anche dopo trasformazioni di conversione.

Non si può, a questo punto, non citare il celeberrimo "paradosso cognitivo" di Duval; vediamo in che cosa consiste (Duval, 1993, pag. 38; la traduzione è concordata con l'Autore): «(…) da una parte, l'apprendimento degli oggetti matematici non può che essere un apprendimento concettuale e, d'altra parte, è solo per mezzo di rappresentazioni semiotiche che è possibile un'attività su degli oggetti matematici. Questo paradosso può costituire un vero circolo vizioso per l'apprendimento. Come dei soggetti in fase di apprendimento potrebbero non confondere gli oggetti matematici con le loro rappresentazioni semiotiche se essi non possono che avere relazione con le sole rappresentazioni semiotiche? L'impossibilità di un accesso diretto agli oggetti matematici, al di fuori di ogni rappresentazione semiotica, rende la confusione quasi inevitabile. E, al contrario, come possono essi acquisire la padronanza dei trattamenti matematici, necessariamente legati alle rappresentazioni semiotiche, se non hanno già un apprendimento concettuale degli oggetti rappresentati? Questo paradosso è ancora più forte se si identifica attività matematica ed attività concettuale e se si considera le rappresentazioni semiotiche come secondarie o estrinseche».
In questa fase "paradossale" dell'apprendimento, bisogna stare molto attenti; da un lato lo studente non sa che sta apprendendo segni che stanno per concetti e che dovrebbe invece apprendere concetti; se l'insegnante non ha mai riflettuto su questo punto, d'altra parte, crederà che lo studente stia apprendendo concetti, mentre questi sta in realtà "apprendendo" solo a far uso di segni (D'Amore, 1999a).

Mi pare che, centrando l'attività (e dunque la ricerca) didattica sull'apprendimento e dunque sull'epistemologia del versante che ha come protagonista l'allievo, si sia costretti ad interpretare ogni passo di costruzione della conoscenza come rispondente al *gioco di parole*, ammettendo dunque che vi sia una semantica che si confonde con la pragmatica d'uso.
Non solo: mi pare anche che si possa e si debba intendere la classe, l'aula, l'ambiente di insegnamento – apprendimento come una vera e propria "comunità di pratica" nella quale si *negoziano* i significati, dando loro quei significati che emergono e si concretizzano proprio nell'azione di negoziazione. Imporre significati e oggetti come dall'esterno, in una visione realista della matematica e del suo apprendimento, limita il potere di negoziazione dello studente che deve adattare i nuovi concetti in costruzione proposti dall'insegnante in base ad una trasposizione didattica opportuna, con quelli che informalmente ed ingenuamente già possiede; questa imposizione con la conseguente limitazione ha spesso il risultato di allontanare lo studente dalla costruzione concettuale matematica, rendendolo succube di una istituzione alla quale non demanda più il compito di accompagnarlo ed assisterlo nell'apprendimento, ma alla quale assegna in modo totalitario le scelte possibili, di contenuto e di modalità (si veda l'idea di *scolarizzazione* proposta in D'Amore, 1999b; D'Amore ha anche dimostrato ampiamente che uno dei motivi per cui non funzionano a volte le attività in situazione adidattica è proprio la confusione in cui versa lo studente, dovuta a eccesso di richieste semiotiche in situazioni realiste; si veda D'Amore, 2002b, 2003a).

Nel processo di insegnamento - apprendimento della matematica, ogni entrata in contatto con nuovi "oggetti di conoscenza matematica" (o, se si vuole abbreviare, "oggetti della matematica") è un contatto personale prima d'ogni altra cosa; dunque tale contatto mette in moto strumenti semiotici dalle due parti (la matematica che si vuole far apprendere e la persona che apprende); ma la relazione tra persona e oggetto è condizionata dal processo di istituzionalizzazione della conoscenza che porta, appunto, alla conoscenza istituzionalizzata di quell'oggetto.

2. Valutare l'apprendimento concettuale.

La ricerca in didattica della matematica ha creato una enorme quantità di strumenti per valutare l'apprendimento concettuale; rimando a Fandiño Pinilla M. I. (2008) per una loro analisi dettagliata, qui mi limito solo a ricordarne i nomi:
la tecnica dei TEP (una sigla tedesca, molto usata in didattica, per identificare testi scritti di matematica prodotti in modo autonomo, *textual eigenproduction*, produzioni testuali autonome degli allievi);
l'uso e la discussione delle mappe concettuali (elementi diagnostici che permettono la visualizzazione della realtà del gruppo classe; elementi organizzatori che permettono di stabilire il progresso nella concettualizzazione degli allievi e le attività più consone alla situazione cognitiva reale; elementi organizzatori che permettono di stabilire l'efficacia dello svolgimento curricolare);
la tecnica dell'osservazione e richiesta di spiegazioni;

la tecnica dei resoconti;
la discussione collettiva in aula;
molte prove considerate "tradizionali";
In quanto precede abbiamo implicitamente privilegiato il "valutare per misurare, per dare un voto" (Fandiño Pinilla, 2002). Ma non dimentichiamo che:

- si valuta per prendere decisioni circa il contenuto (trasposizione didattica) e circa la metodologia del lavoro in aula (ingegneria didattica);
- si valuta per prendere decisioni circa l'ambiente di classe;
- si valuta per comunicare agli allievi quel che è importante.

Sarebbe inopportuno puntare tutto su uno solo degli aspetti relativi alla valutazione, come quella che assegna punti – numeri – note – voti – … allo studente, e basta. È professionalmente opportuno approfittare sempre di valutazioni a tutto campo.

Bibliografia.

D'Amore B. (1999a). *Elementi di didattica della matematica.* Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (1999b). Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della Matematica e delle scienze integrate.* 22A, 3, 247-276.

D'Amore B. (2002a). Basta. *La Vita Scolastica*. 8, 14-18.

D'Amore B. (2002b). La complejidad de la noética en matemáticas como causa de la falta de devolución. *TED*. Bogotà, Università Pedagogica Nazionale. 11, 63-71.

D'Amore B. (2003a). La complexité de la noétique en mathématiques ou la raison de la dévolution manquée. *For the learning of mathematics*. 23(1).

D'Amore B. (2003b). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora.

Duval R. (1993). Registres de Répresentations sémiotiques et Fonctionnement cognitif de la Pensée. Annales de didactique et de sciences cognitives. 5, 37-65.

Fandiño Pinilla M. I. (2002). *Curricolo e valutazione in matematica*. Prefazione di Salvador Llinares. Presentazione di Franco Frabboni. Pitagora: Bologna.

Fandiño Pinilla M. I. (2005). *Le frazioni, aspetti concettuali e didattici*. Prefazione di Athanasios Gagatsis. Pitagora: Bologna.

Fandiño Pinilla M. I. (2008). *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica. Valutare e intervenire in modo mirato e specifico*. Prefazione di Giorgio Bolondi. Trento: Erickson.

Annarita Monaco (Roma; RSDDM di Bologna)
Apprendimento matematico: la forza della didattica

1.Insegnare da professionisti.

Per essere buoni insegnanti di matematica dobbiamo conoscere la matematica? Certamente sì. Possedere una solida conoscenza di ciò che si vuole insegnare è premessa fondamentale per poter intraprendere, con professionalità e competenza, quel meraviglioso e avvincente itinerario di trasmissione di questa nostra disciplina, che si rivela basilare per lo studio di tutte le altre. Tutto ciò è sacrosanto, ma non basta a garantire che chi insegna sia un bravo docente.
Bisogna saper *trasporre*: dobbiamo cioè essere in grado di trasformare il sapere in oggetto di insegnamento, in funzione del pubblico e delle finalità didattiche che ci si pone.
La *trasposizione*, d'altronde, non è mai un atto unico per tutti noi, ma ogni volta è creativo e originale, e strettamente legato alle singolarità degli allievi e alla specificità delle situazioni reali in cui operiamo (D'Amore, 1999; D'Amore, Sbaragli, 2011, pag. 40). È chiaro che, in questo nostro lavoro, non siamo da soli, ma all'interno di un quadro pedagogico e didattico, strettamente legato a ciò che le Istituzioni definiscono e prevedono.
E poi, il nostro agire è condizionato dal sistema dall'ambiente sociale e culturale in cui ci troviamo a prestare la nostra opera (la noosfera) (Ibidem).
Ma che cosa vuol dire *apprendere la matematica*? Quali sono le *componenti* di questo apprendimento? Possiamo verificare che un allievo abbia appreso un concetto matematico? Che cosa s'intende per *concetto matematico*? E per *oggetto matematico*? Cosa noi facciamo in aula per favorire l'apprendimento di oggetti matematici?
Un buon docente si pone sempre moltissime domande ed evita di dare per scontati elementi e processi che ogni volta, invece, richiedono di essere chiarificati e analizzati.
A queste domande, e a moltissime altre, gli studiosi hanno cercato di rispondere attraverso la messa a punto di ricerche e studi che sono partiti dalla cosiddetta "scuola francese", ma che sono ormai diffusi a livello internazionale.
È opportuno dunque che un insegnante professionista tenga sempre aperto un canale di comunicazione con la ricerca didattica internazionale, attraverso la lettura di riviste scientifiche specializzate e con la frequenza di seminari e convegni che aprano la sua mente alla conoscenza dei temi che sono all'attenzione degli studiosi e che permettano di familiarizzare con quel linguaggio specialistico e condiviso creato lentamente e profondamente dalla comunità dei ricercatori.

2. I significati della didattica.

Che cosa intendiamo per "didattica della matematica"?
Ci sono tre modi di intendere la didattica della matematica:
la didattica di tipo A, che riguarda la divulgazione delle idee e, in particolare, focalizza l'attenzione sulla fase dell'insegnamento (A sta per *ars*);
la didattica di tipo B, che si occupa della ricerca empirica, fissando la sua attenzione sulla fase dell'apprendimento, in particolare sull'epistemologia dell'apprendimento (D'Amore, 1999, pagg. 34-35);
la didattica di tipo C, che studia delle convinzioni personali degli insegnanti di matematica e della loro influenza sulle azioni d'aula e dell'apprendimento degli studenti (D'Amore, 2006).
Lo sforzo del didatta della matematica è stato, ed è ancora, quello di trasformare discorsi specialistici della matematica in argomenti comprensibili per gli allievi, consoni alla loro specificità. Chi si è occupato e si occupa di didattica A è molto sensibile all'allievo, lo pone al centro della sua attenzione, ma la sua azione didattica è attenta soprattutto a confezionare proposte attraenti e appassionanti.
Faccio un esempio: come posso insegnare le operazioni aritmetiche in modo da rendere più chiari gli algoritmi di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione? Quali materiali, strumenti, sussidi possono mediare questo insegnamento? Quale processo posso seguire per attuare la mia proposta didattica? E per anni, e tuttora, le aule sono state invase da regoli colorati, BAM, blocchi logici, nella convinzione che l'uso

di questi strumenti producesse di per sé apprendimento dell'oggetto matematico in questione. Ci si occupava dell'insegnamento, ma si trascurava ogni analisi dell'avvenuto apprendimento.
I corsi di formazione in servizio, con relative proposte dei formatori, quasi sempre hanno avuto, e hanno, come obiettivo prioritario quello di offrire proposte didattiche accattivanti, motivanti, interessanti, che migliorino l'immagine della matematica, gratificando il docente, convinto di sperimentare attività alla moda, avvincenti, utili. Spesso ci si limita a dare supposte ricette acritiche, che nulla hanno a che fare con la ricerca (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2014).
La didattica A, senza alcun dubbio, ha contribuito a migliorare l'immagine della matematica, combattendo una certa idea stereotipata che la concepiva come un insieme di tecniche ripetitive e noiose.
All'interno della didattica A, va assolutamente menzionato l'uso appropriato della storia della matematica: si tratta di uno strumento didattico nobile che rende più vicina la matematica alla vita quotidiana dell'essere umano e comunica l'idea che la matematica è cultura (D'Amore, Sbaragli, 2011, pag. 12). Faccio un esempio: è opportuno introdurre il discorso delle basi diverse con gli alunni attraverso la presentazione di sistemi diversi di numerazioni in varie epoche e culture, piuttosto che lavorare sulle basi diverse dei BAM, perché questa scelta valorizza i processi culturali storici della matematica e non privilegia un sussidio, il cui uso nasce e muore in aula.
Nell'ambito della didattica A, grande valore hanno avuto anche i laboratori di matematica, che rappresentano un ambiente di apprendimento all'interno del quale si instaura un particolare tipo di relazione tra insegnante e allievo; nella cornice teorica della pedagogia attiva, il ragazzo costruisce con le proprie mani oggetti che producono conoscenza. A partire da un progetto, in laboratorio si producono manufatti, a cura degli allievi, ma di questi prodotti è fondamentale verificare l'efficacia, ad opera del docente che ne garantisce il significato e il valore matematico (D'Amore, Marazzani, 2011). Con i laboratori, possiamo dire di aver creato un ponte tra la didattica A e la didattica B. Ma una scelta metodologica non è mai garanzia di apprendimento in sé stessa; i laboratori sono utili, ma vanno studiati nell'ottica dell'apprendimento degli allievi, cioè con gli strumenti della didattica B (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2014).

3. Limiti della didattica A e nascita della didattica B.

Ma che cosa c'è dietro a un'idea o proposta didattica, per affascinante che sia, o che cosa manca? Ciò che mancano sono spesso i risultati di una ricerca didattica che si sia proposta di studiare le modifiche degli apprendimenti avvenuti in quello specifico contesto di apprendimento, e con quei determinati strumenti. Molti degli ambienti didattici creati nei decenni scorsi si sono rivelati banali ambienti artificiali, nei quali si potenziavano gli aspetti matematici delle attività stesse, cioè quelli specifici di quello strumento.
Quel che si sa per certo oggi è che l'allievo non riesce a trasferire il sapere appreso in un determinato contesto strutturato – artificiale in un'altra situazione, in modo naturale e spontaneo; c'era la convinzione implicita che il transfer cognitivo fosse automatico: da una conoscenza artificiale si passava a una conoscenza generalizzata, producendo abilità cognitive e procedurali in situazioni nuove.
Ma, purtroppo, difficilmente le cose vanno così: l'apprendimento degli esseri umani è "situato" e gli alunni non riescono a trasferire la conoscenza, se non in casi particolari (D'Amore, 1999).
Ritornando all'esempio dell'apprendimento degli algoritmi delle operazioni, siamo certi che usare a lungo regoli, multibase, abaco o simili renderà gli allievi abili nell'acquisire gli algoritmi in oggetto o piuttosto lo allenerà nell'uso specifico di tali artefatti? Qual è l'argomento dell'insegnamento, lo strumento o la matematica che nasconde?
E fu così che il lungo, decennale lavoro di Dienes, Papy ed altri didatti degli anni '60/'70 fu sottoposto a critiche radicali da parte della nuova categoria dei ricercatori in didattica della matematica che cominciavano a nascere, in particolare da Guy Brousseau, quando era ancora un maestro elementare e prima che diventasse professore universitario (Fandiño Pinilla, 2012). Brousseau ebbe il merito di fondare una nuova dimensione della didattica e di evidenziare l'importanza della didattica B, mirata sull'apprendimento specifico della matematica. Non più "apprendimento" semplice e generico, dunque, ma "apprendimento specifico della matematica" con la messa in evidenza delle caratteristiche, condizioni e modalità di costruzione delle conoscenze matematiche dell'allievo in situazione di aula.
Una teoria dell'apprendimento matematico si basa sugli studi cognitivi; la linea più seguita da chi si occupa di teoria dell'apprendimento è quella del costruttivismo secondo la quale l'allievo costruisce in modo attivo una sua propria conoscenza, interagendo con l'ambiente ed organizzando le sue costruzioni mentali; l'istruzione influenza ciò che l'allievo apprende, ma non determina tale apprendimento; l'allievo non

recepisce passivamente, ma rielabora costantemente in maniera autonoma ogni proposta (D'Amore, 1999; D'Amore, Sbaragli, 2011, pag. 18).
All'interno del costruttivismo, grande è stato il proliferare di studi; alcuni autori hanno messo in evidenza il ruolo centrale dell'interazione sociale in aula.

4. Il contratto didattico.

L'idea di contratto didattico si è rivelata un concetto chiave per la comprensione di tantissime situazioni d'aula precedentemente incomprensibili. Fu lanciata da Brousseau in Francia e si diffuse ben presto in tutto il mondo. *In una situazione di insegnamento, preparata e realizzata da un docente, l'allievo ha generalmente il compito di risolvere un problema matematico che gli è stato presentato, ma l'accesso a questo compito si fa attraverso un'interpretazione delle domande poste, delle informazioni fornite, degli obblighi imposti che sono costanti del modo di insegnare del maestro* (Brousseau, 1986).
Uno degli esempi di contratto didattico è la concezione che l'insegnante ha della matematica e che viene percepita come obbligatoria dall'allievo: in matematica si devono fare dei calcoli. Se per risolvere un problema, dunque, non occorrono calcoli, l'allievo si trova a disagio e tende comunque a utilizzare dati numerici presenti in un problema, anche se non sono legati alla risoluzione del quesito posto.
Uno degli studi più noti è quello che va sotto il termine "Età del capitano". Il nome è legato ad un celebre ed antico problema, nel quale, forniti dati su un natante (colore, lunghezza dello scafo, altezza degli alberi), si chiedeva quale fosse l'età del capitano (Fandiño Pinilla, 2012). Incredibilmente, i bambini rispondevano al quesito utilizzando i dati, che nulla avevano a che vedere con la richiesta fatta. Bruno D'Amore, nel 1993, in una classe quarta, ha proposto il celeberrimo problema nel quale si chiedeva: *Un pastore ha 12 pecore e 6 capre. Quanti anni ha il pastore?* La risposta, attesa e confermata, è stata: 18 (D'Amore, 1993). L'insegnante, in quel caso, probabilmente non aveva mai dato problemi senza risoluzione o impossibili e i bambini avevano introdotto nel contratto didattico una clausola implicita: "Se la maestra ci dà un problema da risolvere, questo deve essere certamente risolto". E poi c'è un'altra clausola, secondo la quale i dati numerici vengono presi tutti e possibilmente nell'ordine in cui compaiono nel testo del problema. In aula si verificano di frequente situazioni in cui scatta la creazione di un contratto didattico con relative clausole. Nostro impegno di docenti dovrebbe essere quello di favorire la rottura del contratto didattico, liberando finalmente il ragionamento degli alunni da questo vincolo. Come farlo, lo scopriremo tra poco.

5. La forza delle situazioni a-didattiche in aula

Brousseau, nel 1986, *definì* le situazioni didattiche come l'insieme delle relazioni stabilite in modo esplicito e implicito tra insegnante, allievi ed elementi di contorno (strumenti o materiali); *chiarì* lo scopo di esse: far sì che gli alunni apprendano, ossia costruiscano, una certa conoscenza stabilita in precedenza; *distinse* tre tipi di situazioni: didattiche, a-didattiche, non didattiche.
Per illustrare queste tre situazioni, faccio riferimento ancora a: D'Amore e Sbaragli (2011, pagg. 46 - 52).
Nelle situazioni didattiche l'insegnante struttura l'ambiente in modo opportuno, con strumenti scelti, al fine di giungere ad una determinata conoscenza: l'allievo sa che sta imparando ciò che l'insegnante sta insegnando. L'insegnante dichiara il traguardo cognitivo che vuole raggiungere, le proprie attese, ciò che si aspetta che gli allievi sappiano fare, quali risposte debbano dare alle sue domande. L'allievo si impegna non tanto ad apprendere la matematica, che dovrebbe costituire l'oggetto della sua attività, ma a comprendere cosa deve fare o dire per assecondare le attese dell'insegnante su quel determinato tema. Le attività comunemente svolte in aula sono, nella quasi totalità, situazioni didattiche.
Nelle situazioni a-didattiche, di contro, sono protagonisti gli studenti e l'oggetto della conoscenza. La situazione, in questo caso, suggerisce delle esigenze conoscitive; gli allievi danno risposta ad esse; il docente gioca un ruolo da regista. L'allievo effettua, da solo o in gruppo, dei tentativi per affrontare il compito, verifica se tali tentativi vanno a buon fine o sono inefficaci; discute se tale tentativo non riesce al primo colpo, per accordarsi sulle modalità più opportune attraverso le quali si può risolvere la questione. Si ha produzione di conoscenza, non esplicitamente richiesta e condizionata dalle attese del docente e non ancora da lui istituzionalizzata.
Quali sono le fasi di una situazione a-didattica?
La prima fase è la *devoluzione*: l'insegnante consegna l'obiettivo cognitivo alla responsabilità degli allievi: chiede loro che si responsabilizzino e si impegnino nella risoluzione di un problema o nell'affrontare

un'attività cognitiva in generale. La seconda è la fase dell'*implicazione*: lo studente accetta l'offerta dell'insegnante e si implica nell'attività proposta, occupandosi personalmente del problema senza la guida del docente. A queste due prime fasi, succede quella della *costruzione di conoscenza privata*: ogni studente crea una propria conoscenza personale che dovrà poi essere comunicata agli altri. Nella fase successiva, della *validazione*, un allievo accetta l'invito da parte del docente a difendere la propria costruzione privata di conoscenza; si mette in una situazione esplicitamente comunicativa e spiega ai compagni la sua idea; il sapere privato diventa a quel punto un prodotto di comunicazione e viene validata la sua costruzione nella fase della *istituzionalizzazione*: l'insegnante dichiara di accettare quel che la classe ha prodotto, da ora in poi farà parte delle conoscenze disponibili o delle risoluzioni a disposizione. In matematica ciò è fondamentale, senza questa fase l'apprendimento matematico non funziona.
Nel terzo tipo di situazione, invece, quella non didattica, insegnante e allievi non hanno un rapporto specifico con il sapere in gioco, manca cioè la volontà esplicita didattica del docente (per esempio, gli alunni in aula costruiscono spontaneamente delle pavimentazioni con figure geometriche). Se apprendimento avviene, è casuale, non costruito con una scelta opportuna previa.
Riflettiamo, ora, sul significato che la conoscenza della teoria delle situazioni può avere per noi che dobbiamo progettare operando delle scelte.
Brousseau (1986) sostenne che la situazione a-didattica sembrava essere la più consona alla costruzione di conoscenza: l'allievo costruisce conoscenza solo se è interessato personalmente alla risoluzione di quanto gli è stato proposto, se cioè ha la responsabilità personale della costruzione cognitiva dell'oggetto matematico. Nella situazione a-didattica l'allievo si attiva, nella situazione didattica l'allievo riproduce ciò che ha detto l'insegnante, entra nel trabocchetto del contratto didattico e cambia di interesse: non impara la matematica, impara a intuire che cosa vuol sentirsi dire l'insegnante.
Risulta vincente ciò che riusciamo a mettere sotto forma di situazione a-didattica nell'apprendimento; si tratta di una situazione più lenta, ma che permette di rompere il contratto didattico e che può produrre un tipo di apprendimento più consapevole e profondo. In aula si arriva ad una vera e propria conoscenza, capace anche di transfer cognitivi. Non è necessario, né possibile, affrontare tutti gli argomenti nuovi attivando situazioni a-didattiche ma, in fase di progettazione, è bene individuare a priori i nuclei fondanti della disciplina che si vogliono far costruire agli allievi.
Il messaggio implicito dato ai nostri allievi è "Credimi; osa utilizzare il tuo proprio sapere e imparerai!" (Sarrazy, 1995).

Bibliografia.

Brousseau G. (1986). Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*. 7, 2, 33-115.

D'Amore B. (1993). Il problema del pastore. *La vita scolastica*. 2, 14-16

D'Amore B.(1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (2006). Didattica della matematica "C". In: Sbaragli S. (ed.) (2006). *La matematica e la sua didattica, vent'anni di impegno*. Atti del Convegno Internazionale omonimo, Castel San Pietro Terme (Bo)

D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I. (2014). Illusioni, panacee, miti nell'insegnamento-apprendimento della matematica. *Difficoltà in matematica*. In corso di stampa.

D'Amore B., Marazzani I. (2011). *Problemi e laboratori. Metodologie per l'apprendimento della matematica*. Progetto: *Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere*. Vol. 4. Bologna: Pitagora.

D'Amore B, Sbaragli S. (2011). *Principi di base di Didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

Fandiño Pinilla M. I. (2012). Elementi di didattica della matematica. In: Bolondi G., Fandiño Pinilla M. I. (a cura di) (2012). Metodi e strumenti per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica. Napoli: Edises. 1-112.

Sarrazy B. (1995). Le contrat didactique. *Revue française de pédagogie*. 112, 85-118. [Trad. it.: *La matematica e la sua didattica*, 1998, 2, 132-175].

Rosetta Zan (Università di Pisa)

La comprensione di un problema.

1. Introduzione.

L'attività di risoluzione di problemi è una delle attività più importanti nel lavoro dei matematici, che trova ampio spazio anche nella pratica didattica. In realtà l'attività tradizionale sui problemi in classe è caratterizzata troppo spesso dalla richiesta da parte dell'insegnante di produrre risposte corrette a domande inserite in testi stereotipati e poco motivanti, piuttosto che da una stimolante avventura intellettuale.
Non stupisce allora che nei processi messi in atto da molti bambini nel risolvere un problema si osserva un'apparente 'sospensione' di senso, come evidenziano alcuni esempi diventati ormai dei classici. Il più noto è indubbiamente il problema dell'età del capitano (IREM de Grenoble, 1980):
Su una nave ci sono 26 montoni e 10 capre; quanti anni ha il capitano?
I bambini della scuola primaria per lo più rispondono alla domanda, scegliendo in genere fra le operazioni note quelle la cui applicazione porta a risultati verosimili.
L'interpretazione di questi fenomeni è complessa, e mette in gioco diversi fattori che interagiscono: gli stereotipi dei problemi verbali standard, le norme implicite ed esplicite che regolano l'attività matematica in classe (il cosiddetto *contratto didattico*), le convinzioni che i bambini costruiscono interpretando l'attività con i problemi.
Qui però affrontiamo il problema da un altro punto di vista, anch'esso messo in evidenza dalla ricerca internazionale e dall'esperienza personale di ogni insegnante: in molti casi sembra che l'allievo non abbia *compreso* il problema, per cui risulta difficile per l'insegnante capire se ci sono difficoltà o meno anche a livello di processi risolutivi. In altre parole le difficoltà degli allievi spesso sembrano legate alla fase di *rappresentazione* più che a quella di *soluzione*.
Il processo di comprensione di un problema è un processo estremamente articolato e complesso, che mette in gioco competenze linguistiche ma non solo, e che spesso è ostacolato dalla struttura tipica dei problemi: un contesto che rappresenta una situazione famigliare e concreta spesso nella forma di una breve storia (cioè di un evento che si svolge nel tempo e che ha come protagonisti dei personaggi animati), accompagnato da una domanda. In genere il legame fra contesto e domanda si riduce al fatto che per rispondere alla domanda bisogna utilizzare i dati presenti nel contesto. In un lavoro precedente (Zan, 2012) ho analizzato le difficoltà che a mio parere nascono da questo legame stereotipato e poco significativo, e più in generale da una scarsa attenzione a quella che ho chiamato la *dimensione narrativa* del problema, cioè alle caratteristiche della storia in cui il problema matematico è contestualizzato. Qui affronterò invece il problema soprattutto dal punto di vista della comprensione del *testo*, comprensione che ovviamente mette in gioco essenzialmente competenze linguistiche, ma che, come vedremo, coinvolge anche aspetti di altra natura.

2. Dizionario di base.

Un primo livello di conoscenze linguistiche che viene richiesto all'allievo è quello che riguarda il significato delle parole presenti nel testo, anche se in realtà un lettore esperto in molti casi è in grado di inferire dal contesto il significato di parole non conosciute.
Vediamo un esempio (*La popolarità del Presidente*), tratto dalle prove di matematica OCSE PISA. Dopo aver dato alcune informazioni sui sondaggi effettuati da 4 giornali per determinare il livello di popolarità del Presidente in vista delle elezioni, viene posta la domanda:
"Quale giornale è più attendibile per prevedere il livello di popolarità del Presidente, se le elezioni si svolgono il 25 gennaio?
Scrivi due motivi che giustifichino la tua risposta".
In una tesi che ho seguito abbiamo predisposto un questionario rivolto a studenti quindicenni, finalizzato a indagare sulla conoscenza di alcuni termini presenti nelle prove PISA. Alcune domande riguardavano proprio le parole 'attendibile' e 'popolarità'. È emerso che per alcuni studenti *attendibile* significa *'che esce regolarmente (ad esempio tutti i giorni, o una volta alla settimana, o una volta al mese …)'*, mentre *popolare* vuol dire '*Che fa parte del popolo*'. Non stupiscono allora i risultati degli studenti italiani a tale quesito: solo il 35,6% di risposte corrette, e soprattutto ben il 29,2% di risposte omesse.

3. I legami fra le varie parti del testo.

La comprensione di un testo richiede anche al lettore di riconoscere le relazioni fra i suoi diversi elementi: fra le parole all'interno di una frase, e fra le frasi all'interno di un discorso complesso. Spesso tale relazioni, che garantiscono la *coesione* del testo, non sono esplicite, ma sono segnalate attraverso meccanismi linguistici.
Ad esempio in un testo articolato è usuale richiamare (addirittura in più parti) quanto è già stato detto all'inizio, o comunque in una parte precedente.
Il meccanismo linguistico tipico del richiamo del già detto è l'*anafora*. Nei casi più semplici un termine (detto *antecedente*) viene richiamato più avanti attraverso la ripetizione esplicita, altrimenti attraverso sinonimi o pronomi.
È il caso del seguente esempio:[2]

La scala
La strega Pasticcia ordina ai suoi gattini Buffetto e Sandogatt di lucidare tutta la lunga scala che porta alla torre più alta del castello.
Buffetto lucida 20 scalini.
Sandogatt ne lucida solo 3.
La strega ne lucida 7 più di lui.
Quanti scalini ha quella scala?
Spiega il tuo ragionamento.

Qui in realtà abbiamo più anafore, riferite ai termini 'scalini' e 'Sandogatt'.
Per il termine 'scalini' riconosciamo due riprese anaforiche, realizzate sostituendo al termine stesso il pronome 'ne'. La seconda anafora è quella che si riferisce al termine Sandogatt:
Sandogatt ne lucida solo 3.
La strega ne lucida 7 più di lui.
ed è realizzata sostituendo al nome proprio 'Sandogatt' il pronome 'lui'. Si sottintende che 'lui' si riferisca all'ultimo personaggio di cui si parla, e non ad altri (ad esempio Buffetto). Quindi in una frase che presenta un nodo concettuale delicato e noto in letteratura, e cioè la comprensione della relazione 'più di', ci sono ben due riprese anaforiche.

4. La conoscenza enciclopedica.

La comprensione di un testo richiede a chi legge continui processi inferenziali per collegare logicamente tra loro le varie parti del discorso e le varie informazioni date. Tali processi mettono in gioco non solo la conoscenza che l'allievo ha della lingua, ma anche la sua conoscenza delle cose del mondo, quella che alcuni studiosi indicano con 'enciclopedia' o 'conoscenza enciclopedica'. Vediamo come esempio il seguente problema:

"Leggi attentamente il testo del seguente problema e, <u>senza risolverlo</u>, individua i dati mancanti o superflui:

Un allevatore possiede 47 mucche e 10 cavalli. Una mucca produce in media 15 litri di latte al giorno. Quanto latte viene prodotto ogni giorno nell'allevamento?

Nel problema c'è un dato: ☐ superfluo ☐ mancante
Quale?……"

Un bambino (5ª primaria) risponde così:
Nel problema c'è un dato: ☐ mancante.
Quale? *Non sappiamo quanto latte producono i cavalli ogni giorno.*

[2] L'esempio è tratto dal testo *Gatto più gatto meno, 1* (di Maria Luisa Bigiaretti, Nicola Milano Editore, Bologna): i problemi proposti raccontano le avventure e le disavventure di dodici gattini che vivono in un vecchio castello con una strega (Pasticcia) buona e pasticciona, e quindi sono molto attenti agli aspetti affettivi e motivazionali.

Potremmo dire che non fa parte della conoscenza del mondo di quel bambino il fatto che quando si parla di 'produzione' si fa riferimento all'utilizzazione del latte per la vendita e non per l'allattamento dei piccoli: e questa conoscenza, necessaria per poter affrontare il problema, rimane implicita nel testo.

5. Impliciti e non detto.

Come abbiamo visto la comprensione di un testo richiede al lettore di fare inferenze a partire dalla sua conoscenza delle cose del mondo: un testo infatti è intessuto di 'non detto'. Ma il non-detto non è necessariamente implicito. Ad esempio se leggo che Mario è salito sulla sua macchina, è implicito, a meno che non sia detto esplicitamente il contrario, che la macchina abbia un motore e 4 ruote, mentre non è implicito (anche se altrettanto non detto) che la macchina sia rossa. Finché non venga detto o venga fatto intuire qualcosa in merito - ammesso che ciò accada - posso immaginarla di qualsiasi colore.
Nel caso dei problemi a mio parere questa distinzione fra implicito e non detto spesso non viene colta dall'insegnante o dall'autore stesso, e non è di consolazione il fatto che non necessariamente venga colta dall'allievo.
Consideriamo ad esempio il testo del seguente problema (De Corte et al., 1985), rivolto a bambini della prima classe della scuola primaria:
"Ann e Tom insieme hanno 8 libri. Ann ha 5 libri. Quanti libri ha Tom?".
De Corte e i suoi colleghi osservano che nel testo è implicito che i 5 libri di Ann sono parte degli 8 che Ann e Tom hanno insieme. Se il bambino non recupera questa informazione, cruciale per la soluzione, non potrà risolvere il problema. Quindi i ricercatori ipotizzano che alcuni bambini non risolvano il problema perché si bloccano nel processo di rappresentazione. Per avere conferma di questa ipotesi riformulano allora il testo in questo modo:
"Ann e Tom insieme hanno 8 libri. 5 di questi libri sono di Ann. Quanti libri ha Tom?"
cioè rendono esplicita l'informazione che prima era implicita. In questa formulazione in effetti aumentano le risposte corrette.
La mia opinione è che quello che de Corte et al. definiscono come 'implicito' sia piuttosto un caso di 'non detto'. Possiamo infatti immaginarci uno scenario in cui la condizione considerata implicita (5 di questi libri sono di Ann) in realtà non sia verificata. Ad esempio:
"Ann e Tom sono fratelli. Ognuno di loro ha una piccola collezione di libri: Ann ne ha 5, Tom ne ha 7. Poi *insieme* hanno 8 libri, che sono stati regalati a entrambi, e che tengono nella libreria in sala".
L'informazione '5 di questi libri sono di Ann' non fa parte quindi della conoscenza delle cose del mondo richiamata dal testo. Il motivo per cui tale informazione viene considerata implicita fa riferimento piuttosto ad un altro tipo di conoscenza: quella delle 'regole del gioco' dei problemi, che assume che in un problema sia sempre possibile fornire la risposta alla domanda, utilizzando i dati presenti nel testo. Queste regole del gioco rappresentano in realtà veri e propri stereotipi, che sono responsabili di quel processo di apparente sospensione di senso che abbiamo richiamato nell'introduzione.
Se vogliamo prevenire la dissociazione fra problemi reali e problemi scolastici che è alla base di tanti comportamenti 'patologici', dobbiamo quindi evitare di dare per scontate proprio quelle caratteristiche dei problemi che sono responsabili di tale dissociazione.
Non è semplice mantenere questo spirito vigile e critico, perché la tradizione di problemi stereotipati è fortissima, tanto che noi adulti tendiamo a non cogliere alcuna ambiguità nel testo di Ann e Tom: la nostra interpretazione quasi automatica è basata sull'assunzione (stereotipata) che ci debba essere per forza una soluzione, e una sola.
Si può obiettare che in mancanza di questa informazione il testo del problema è ambiguo e non permette una risposta certa alla domanda. Ma per un insegnante che cerca di costruire pensiero piuttosto che inseguire risposte corrette le diverse interpretazioni fornite dagli allievi sono una risorsa incredibile, perché dal loro confronto scaturisce la consapevolezza dell'ambiguità del testo, e dell'eventuale necessità di scioglierla.

6. La lettura selettiva del testo.

Le considerazioni che abbiamo fatto sui possibili ostacoli che un allievo può incontrare quando legge il testo di un problema partono dall'ipotesi che l'allievo *legga* tale testo, e cerchi di comprenderlo.

In realtà quello che succede è che di fronte al testo di un problema molti allievi attivano una modalità di lettura selettiva, basata sull'individuazione dei dati numerici e su alcune regole che suggeriscono qual è l'operazione giusta per 'combinare' i numeri presenti nel testo. In altre parole molti allievi inferiscono direttamente dal testo le operazioni da fare, invece che rappresentarsi la situazione descritta e su tale rappresentazione costruire il processo risolutivo.
Questo modo di affrontare il testo viene incoraggiato da una pratica scolastica che insiste spesso esplicitamente sull'individuazione dei dati *numerici* e delle parole chiave.
Un'obiezione frequente che viene rivolta in attività di formazione quando si critica tale pratica è: "Ma questi suggerimenti li diamo per aiutare i bambini che altrimenti non riuscirebbero a rispondere!".
Tale obiezione ha senso solo se condividiamo una particolare accezione della parola 'aiutare': aiutare a dare la risposta corretta (senza preoccuparci di un'effettiva comprensione del perché tale risposta è corretta) a problemi addomesticati, cioè che si prestano a questa 'strategia'. Si tratta al più di un aiuto circoscritto nel tempo e nello spazio (che impedisce invece risultati positivi in problemi non standard quali quelli proposti nelle prove INVALSI e PISA), e soprattutto di un aiuto che veicola un'idea distorta di successo in matematica, dato che lo identifica con la produzione di una risposta 'giusta', e non con l'attivazione di processi di pensiero significativi (Zan, 2007).

7. Conclusioni.

Ho cercato di mettere in evidenza la complessità del processo di comprensione di un problema.
Le osservazioni fatte non implicano che si debbano eliminare le difficoltà di comprensione nei testi dei problemi, soprattutto se, come ritengo necessario, i problemi non vengono utilizzati per *valutare* competenze ma per *costruirle*.
Ma se il problema è usato per valutare, l'autore del problema, o comunque chi lo usa, dovrebbe essere molto attento a controllare gli ostacoli di natura linguistica: in caso contrario il giudizio sulle competenze matematiche risulta poco attendibile.
Dalle osservazioni fatte è emersa anche la responsabilità della struttura stereotipata del problema e di certe pratiche didattiche nel favorire una lettura inadeguata del testo, basata sulla ricerca dei dati numerici e delle operazioni con cui combinarle. Anche in questo caso il ruolo dell'insegnante è cruciale: nel vigilare contro gli stereotipi, prima di tutto i propri, e nel non assecondare le scorciatoie di pensiero che gli stereotipi permettono.

Bibliografia.

De Corte E., Verschaffel L, De Win L. (1985). Influence of rewording verbal problems on children's problem representations and solutions. *Journal of Educational Psychology*. 77 (4), 460-470.

IREM de Grenoble (1980). *Bulletin de l'Association des professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public*. 323, 235-243.

Zan R. (2007). *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire.* Milano: Springer.

Zan R. (2012). La dimensione narrativa di un problema: il modello C&D per l'analisi e la (ri)formulazione del testo. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 35, 2, 3.

Seminari

Giorgio Bolondi (NRD, Università di Bologna)

Dalle Indicazioni Nazionali alla pratica d'aula. 1- Gli obiettivi e i traguardi. 2- Le criticità degli apprendimenti. 3- La progettazione dei percorsi.

1. La formazione di un curricolo: radici, condizioni di contesto, scelte.

Un curricolo, un insieme di indicazioni per un percorso scolastico, un piano di programmazione, un "programma", non è mai un oggetto *neutro*. Questa affermazione può sembrare ovvia, se si parla di curricoli di storia, o di letteratura, o di filosofia. Si potrebbe essere invece portati a pensare che il curricolo di matematica sia, in qualche modo, obbligato, univocamente determinato dalla "necessità" degli oggetti matematici da conoscere. Che altro si potrebbe fare con i bambini piccoli, se non "insegnare a far di conto"? E come altrimenti si può imparare a far di conto, se non imparando a eseguire le operazioni? *Oggi, alla scuola, voglio subito imparare a leggere: domani poi imparerò a scrivere e domani l'altro imparerò a fare i numer*i, dice Pinocchio discorrendo da sé solo...
In realtà, nessun curricolo è mai neutro, neppure un curricolo di matematica. Come per tutte le discipline, a monte della scrittura di un curricolo ci sono sempre una particolare idea di *bambino/ragazzo,* una particolare idea di *scuola,* una particolare idea di *famiglia*, di *società*, di *cittadinanza,* che influenzano le scelte compiute dagli estensori (esperti, insegnanti, politici ecc.) in merito alla disciplina. C'è anche, nel nostro caso specifico, una particolare idea di *matematica* (Bolondi, 2003).
Se guardiamo alla scuola primaria, quella che un tempo si chiamava scuola elementare, pensare alla matematica del *fanciullo artista* è ben diverso dal pensare a quella del *bambino futuro cittadino*. Possiamo volere una *matematica uguale per tutti (no one left behind)* o una matematica grazie a cui le potenzialità del singolo vengono esaltate e le diversità utilizzate per costituire classi differenziate. Ogni curricolo deve posizionarsi in qualche modo rispetto a diverse scale di valori.
Nel corso del ventesimo secolo abbiamo visto anche diversi modi di vedere la matematica che si sono contesi il predominio, a livello epistemologico (Ernest, 1994), e che hanno marcato il dibattito tra i matematici su cosa è la matematica e cosa vuol dire *fare matematica*. Questo dibattito ha avuto ricadute dirette anche sull'insegnamento della disciplina, anche sull'insegnamento rivolto ai bambini piccoli e molto piccoli. La stagione dell'*insiemistica*, e il susseguente riflusso, non sono altro che un fenomeno conseguente all'affermarsi e al declinare di determinati paradigmi tra i matematici militanti: nella fattispecie, l'avvento del *bourbakismo* e la reazione che ne è seguita (Bolondi, 2007). La discussione sull'*insegnamento della matematica moderna* contrapposto all'*insegnamento moderno della matematica* ha visto confrontarsi, anche molto aspramente, alcuni dei più grandi matematici del secolo: Jean Dieudonné, André Lichnerowicz, René Thom, Hans Freudenthal... (OECD, 1961; Freudenthal, 1963; 1970; Stewart, 1975; Thom, 1970). Per un resoconto del clima di quegli anni, si veda Furinghetti (2007).

2. Il quadro di riferimento dell'insegnante.

Queste condizioni al contorno, questi fattori che agiscono sulla formazione del curricolo, richiedono *scelte*. Ciò è vero in particolare per i curricoli proposti a livello nazionale, in cui queste scelte sono spesso esplicitate nelle introduzioni generali ai documenti.
È vero, però, anche per i curricoli predisposti nelle programmazioni degli istituti scolastici, o nei percorsi organizzati dal singolo insegnante. Ognuno di noi insegna - e lavora sull'apprendimento dei suoi allievi – all'interno di un quadro di riferimento personale, in cui sono presenti gerarchie di valori, obiettivi; un quadro in cui c'è *la nostra* idea di matematica, un'idea che ci siamo costruiti passo dopo passo, fin dai primi momenti, quando nella scuola primaria eravamo noi gli studenti.
Il punto è che questo quadro di riferimento è spesso *implicito* e ha caratteristiche di cui non siamo del tutto consapevoli. Queste specificità si manifestano, ad esempio, nel peso che ogni insegnante attribuisce, nella prassi didattica, alle diverse parti del curricolo.
Un caso classico è l'introduzione di elementi di *matematica dell'incertezza* (probabilità e statistica) nel primo ciclo di istruzione. È presente esplicitamente nei "programmi ministeriali" fin dalla fine degli anni Settanta, ma di fatto la sua presenza nei curricoli reali è marginale, quando non insignificante. Perché? Solo per mancanza di formazione o di materiali *ad hoc*? Questi ovviamente sono fattori importanti, ma non

bastano a spiegare la difficoltà degli insegnanti nel modificare i propri percorsi di insegnamento. Quand'anche questo ambito di contenuti compare nei libri di testo e nell'insegnamento, e ad esso sono dedicate alcune ore di tempo-aula, molto raramente diventa un elemento importante della valutazione degli studenti. Diversi comportamenti comuni sembrano di fatto indicare che molti insegnanti *non ritengono importanti* questi argomenti; per meglio dire, non li ritengono importanti come quelli tradizionali, come ad esempio l'aritmetica o la geometria.
È molto difficile cambiare le gerarchie di importanza attribuite ai diversi temi e contenuti della matematica; in questo senso l'insegnamento è molto *viscoso*. Molti insegnanti condividono il bisogno di introdurre nuovi argomenti o nuovi problemi, ma ritengono quasi impossibile rinunciare a contenuti tradizionalmente inseriti nei percorsi. Non ci si spiega, altrimenti, il permanere di nuclei oggettivamente sovradimensionati, come ad esempio le tecniche e le proprietà delle proporzioni nella scuola secondaria di primo grado ... anche se siamo tutti consapevoli della necessità di non inchiodare i nostri studenti in queste trincee, ci riesce molto difficile liberarcene.
Il quadro di riferimento di ogni insegnante comprende spesso anche una gerarchia tra le diverse componenti dell'apprendimento della matematica: il punto di equilibrio tra componenti *concettuali* e *abilità procedurali*, ad esempio, è molto variabile da docente a docente. Il ruolo attribuito alle procedure (algoritmi, costruzioni geometriche, tecniche di calcolo ecc.) nella costruzione dell'apprendimento cambia molto da docente a docente, ed è un elemento importante della *filosofia implicita* che sta dietro all'azione di un insegnante di matematica e in qualche modo la determina.
Nel quadro di riferimento personale entra anche il peso che viene attribuito alla capacità degli allievi di esprimersi e di comunicare la matematica. Apparentemente questo è meno importante degli aspetti precedenti (contenuti da apprendere, valutazione, processi mentali coinvolti), ma di fatto ha un impatto decisivo sullo *stile* di insegnamento e, in definitiva, sulle *pratiche d'aula*.
Ogni insegnante di matematica ha dunque ha un proprio quadro di riferimento in parte esplicito e in parte implicito in cui ha una grande importanza l'idea di matematica che l'insegnante stesso ha costruito, prima come studente e poi come docente. Questo quadro di riferimento dell'insegnante influenza i percorsi di insegnamento, lo "stile" proprio del docente, e ha conseguenze anche sul clima di lavoro in classe e gli atteggiamenti nei confronti della matematica degli allievi.
Nonostante quello che superficialmente si potrebbe pensare - e che molti pensano, tra i genitori, gli studenti e talvolta gli insegnanti -, se c'è una disciplina il cui insegnamento non si può standardizzare, questa è proprio la matematica. Le "buone pratiche", in matematica, spesso si rivelano disastrose quando vengono trasferite da un contesto all'altro e, soprattutto, da un insegnante all'altro. Non solo, la matematica è forse la disciplina in cui il successo (o simmetricamente il fallimento) dipende maggiormente dal rapporto che si stabilisce tra insegnante e allievo, tra lo stile dell'insegnante e il clima della classe e gli atteggiamenti dello studente. Questo stile e questo clima non dipendono solo dalle caratteristiche personali del docente, ma anche - molto più di quanto si potrebbe pensare - dal suo modo di vedere la matematica e di concepirne l'insegnamento e l'apprendimento.
Per questo esplicitare le proprie convinzioni riguardo alla matematica e acquisire consapevolezza delle caratteristiche del proprio modo di insegnarla sono elementi importanti per la realizzazione dell'autonomia di ogni insegnante.

3. Il quadro di riferimento di sistema e le sue radici.

È possibile interfacciare le Indicazioni Nazionali con altri quadri, dal punto di vista dell'inquadramento epistemologico, sia in orizzontale che in verticale.
In orizzontale, li possiamo porre in relazione con il quadro di riferimento degli *Assi culturali* per l'obbligo di istruzione e con il Quadro di Riferimento per la matematica del *Servizio Nazionale di Valutazione* dell'Invalsi. In verticale (temporalmente) possiamo collegarle all'evoluzione delle disposizioni di legge degli ultimi quarant'anni e (strutturalmente) alle Linee Guida per l'Istruzione tecnica e Professionale e con le Indicazioni Nazionali per il sistema dei Licei.
Tra questi diversi documenti ci sono un'evidente coerenza di fondo e una comune radice.
Il momento di svolta, per i curricoli di matematica in Italia, è rappresentato dall'emanazione dei "Nuovi Programmi" per la Scuola Media del 1979. In essi si abbandona la tradizionale scansione sequenziale dei contenuti a favore di un'articolazione per temi; si introducono nuovi temi ("la matematica del certo e del probabile"); si sottolinea il ruolo dell'attività dei ragazzi e della classe; si parla esplicitamente di

"matematizzazione come interpretazione matematica della realtà nei suoi vari aspetti". Programmi culturalmente rivoluzionari, indicazioni probabilmente troppo avanzate per i tempi in cui furono emanate. Recepivano comunque i primi frutti del rinnovato interesse per l'insegnamento della matematica, cresciuto in Italia nel dopoguerra a partire dall'azione di Emma Castelnuovo e che si stava coagulando attorno ai nuclei di ricerca didattica, legati al nome di Giovanni Prodi.
Di lì a breve, arrivano i programmi del 1985 per la scuola elementare. L'obiettivo che questi pongono per l'educazione matematica è rimasto più o meno esplicitamente presente in tutte i curricoli che, da quel momento in poi, si sono succeduti nella scuola italiana:
Essa [l'educazione matematica] *tende a sviluppare, in modo specifico, concetti, metodi e atteggiamenti utili a produrre le capacità di ordinare, quantificare e misurare fatti e fenomeni della realtà e a formare le abilità necessarie per interpretarla criticamente e per intervenire consapevolmente su di essa*. (MPI, 1985)
Questi programmi presentavano una certa confusione organizzativa: temi come "aritmetica" o "geometria" venivano messi in parallelo a temi qualitativamente diversi (e trasversali) come "problemi" o come "logica"; nondimeno, hanno rappresentato per tutta una generazione di insegnanti l'occasione per effettuare un ripensamento in profondità dell'insegnamento della matematica. Su di essi sono state sperimentate e validate metodologie, innovazioni tecnologiche e di materiali; per essi si è mossa una variegata e frammentaria, ma pur sempre importante, azione di formazione.
Sia nella scuola elementare, sia nella scuola media si è andato così accumulando un vasto patrimonio di esperienze, idee, risultati, talvolta anche frustrazioni. Parallelamente, la ricerca in didattica della matematica ricavava stimoli e materiali da tutto questo fermento messo in moto dai nuovi programmi. Si arriva così a un importante momento di sistemazione dell'esperienza: il progetto *Matematica per il cittadino* dell'Unione Matematica Italiana.
Il 2000 era stato proclamato dall'Unesco "Anno Mondiale per la Matematica". L'Unione Matematica Italiana insediò una commissione, presieduta da Ferdinando Arzarello (uno dei più autorevoli studiosi al mondo nel campo della didattica della matematica e, al tempo stesso, profondo conoscitore della scuola italiana), per studiare e elaborare un curricolo di matematica per la scuola primaria e secondaria, adeguato ai bisogni della società del nuovo millennio. Questo curricolo doveva essere in qualche modo indipendente dall'architettura particolare del sistema scolastico. Si trattava di individuare *un corpus di conoscenze e abilità fondamentali, necessarie a tutti coloro che entrano nell'attuale società*: questa è, in fin dei conti, la definizione oggi condivisa di *matematica per il cittadino*.[3]
Abbiamo visto come ottimi curricoli possano restare sulla carta; in essi, possono essere operate scelte anche rivoluzionarie, di cui però sfuggono i motivi e i significati. Il progetto dell'UMI riuscì invece ad avere un'influenza effettiva sul mondo della scuola e diede un imprinting importante a tutte le Indicazioni per i curricoli di matematica che sarebbero uscite dal Ministero negli anni a venire (tre, negli anni tra il 2003 e il 2012...). Di fatto, per la matematica, non sono presenti differenze radicali tra le indicazioni della riforma "Moratti-Bertagna" del 2003 e quelle della riforma "Fioroni-Ceruti" del 2007- differenze invece fortissime per altre discipline.
La sistemazione effettuata di recente con l'armonizzazione del novembre 2012 ha portato poi a limitati riassestamenti e riscritture. Il motivo, probabilmente, va ricercato nella matrice comune di tutti questi documenti: il lavoro fatto congiuntamente da moltissimi insegnanti e ricercatori per la *matematica per il cittadino* dell'UMI, che ha definito un quadro sostanzialmente condiviso.
La mossa vincente della commissione coordinata da Ferdinando Arzarello e Lucia Ciarrapico fu quella di *esemplificare concretamente* i curricoli. Un gruppo di 40 esperti (ispettori, docenti universitari, insegnanti di scuola) lavorarono in un seminario residenziale per produrre esempi di attività didattiche, suggerimenti per prove di valutazione, approfondimenti, che fossero coerenti con gli obiettivi del curricolo. Vengono poi sviluppati alcuni temi più specifici che ancora adesso sono al centro della discussione degli insegnanti: l'approccio didattico, i contesti di apprendimento, la discussione matematica in classe (quindi il ruolo della comunicazione), la valutazione, il ruolo delle tecnologie.
Questi percorsi curricolari, che sono arrivati a coprire anche la scuola secondaria di secondo grado, rappresentano la matrice comunque di tutte le indicazioni disciplinari che si sono succedute in Italia negli ultimi anni e hanno costituito un importante riferimento culturale anche per la costruzione delle *Prove Invalsi*. A sua volta, la *matematica per il cittadino* si inquadra nel filone internazionale che fa capo, principalmente, al pensiero e all'azione di Hans Freudenthal.

[3] Tutta l'articolata documentazione del lavoro, nonché una storia dello stesso, si trova nella pagina web della Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica dell'Unione Matematica Italiana, http://www.umi-ciim.it/

La matematica che si insegna deve essere utile, ma questo non si ottiene semplicemente insegnando la *matematica utile*, perché ciò significa inevitabilmente limitare i contesti in cui la matematica può essere utile (in particolare, risulterebbe un mero addestramento all'uso di qualcosa di preconfezionato). Deve essere utile per un cittadino consapevole, per una persona responsabile, critica, creativa e autonoma, non per un esecutore. Di fronte all'idea di insegnare matematica astratta e poi di mostrarne le applicazioni, Freudenthal diceva che si stava sbagliando l'ordine. La formalizzazione, la sistemazione teorica in un sistema logico deduttivo, è il *punto d'arrivo* del lavoro del matematico, non il *punto di partenza* del lavoro dell'insegnante. La parola chiave diventa allora *matematizzazione*: non si tratta di insegnare la matematica utile, o di applicare la matematica. Il punto fondamentale è che la matematica è un'*attività umana*. *Fare matematica*, dal punto di vista educativo, è molto più importante che *trasmettere e ricevere contenuti matematici* (Freudenthal, 1969).
Vengono così affermati principi che oggi sono largamente condivisi: l'attività matematica dei discenti deve partire da contesti reali, ricchi e significativi (nel senso di "portatori di significato" matematico); le situazioni di apprendimento sono molto più importanti dell'ingegneria didattica delle lezioni; la comunicazione tra gli allievi e tra allievi e docente svolge un ruolo decisivo. Una usa frase spesso citata è: *si può imparare molto di più da una sola situazione paradigmatica che da centinaia di casi irrilevanti- questa è un'opportunità di cui si deve approfittare*.
Ogni insegnante sa per esperienza che un'attività in classe attraverso la quale si costruisce il significato e si comprende il funzionamento di un oggetto matematico vale molto di più di centinaia esercizi ripetitivi trovati sul libro di testo e svolti più o meno malamente a casa.
L'impatto del pensiero di Freudenthal è stato notevolissimo e ha influenzato, in particolare, l'impostazione delle grandi indagini internazionali sull'apprendimento della matematica. Sul piano internazionale, i termini di confronto sono principalmente il *Framework* dell'indagine OCSE-Pisa[4] e quello dell'indagine IEA-TIMSS (IEA, 2009). Un importante elemento di sfondo è poi il *Quadro europeo delle qualifiche*.[5] Il *Framework* di OCSE-Pisa, in particolare, è costruito esplicitamente sull'impostazione di Freudenthal, e in esso il *ciclo della matematizzazione* è al centro di tutta la dinamica dell'attività matematica. Modellizzare e matematizzare non sono esclusività dei matematici professionisti o caratteristiche dell'*advanced mathematical thinking*: le Indicazioni Nazionali mostrano come questo possa avvenire sin dalla scuola secondaria di primo grado come risultato di un lavoro iniziato *già dai primi anni della scuola primaria.*

Bibliografia.

Bolondi G. (2003). Visioni della matematica e curricoli. *L'Educatore*. LI (24), 14-17.

Bolondi G. (2006a). I mille significati della locuzione "Laboratorio di Matematica". In: D'Amore B., Sbaragli S. (Eds.) (2006). *Il Convegno del Ventennale*. Bologna: Pitagora. 147-150.

Bolondi G. (2006b). Metodologia e didattica: Il laboratorio. In: D'Amore B. (Ed.) (2006). *Rassegna*, *numero speciale dedicato alla Didattica della Matematica*. 29, 59-63.

Bolondi G. (2007). La Francia del Novecento: Il fenomeno Bourbaki. In: Bartocci C., Odifreddi P. G. (Eds.) (2007). *La matematica. I luoghi e i tempi*. Torino: Einaudi. 625-650.

Castelnuovo E. (1963). *Didattica della matematica.* Firenze: La Nuova Italia Editrice.

D'Amore B. (2007). *Matematica dappertutto. Percorsi matematici inusuali e curiosi.* Bologna: Pitagora.

Dematté A. (a cura di) (2006). *Fare matematica con i documenti storici. Una raccolta per la scuola secondaria di primo e secondo grado*. Trento: Provincia Autonoma di Trento-IPRASE del Trentino.

Enriques F. (1936). *Il significato della storia nel pensiero scientifico*. Bologna: Zanichelli.

Ernest P. (Ed.) (1994). *Constructing mathematical dnowledge: Epistemology and mathematics education*. London: The Falmer Press.

Freudenthal H. (1963). Enseignement des mathématiques modernes ou enseignement modernes des mathématiques? *L'Enseignement Mathématique*. 2 (9), 28-44.

Freudenthal H. (1969). Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics*. 1, 3-8.

Freudenthal H. (1970). Allocution du premier congrès international de l'enseignement mathématique, Lyon 24-31 août 1969. *Educational Studies in Mathematics*. 2, 135-138.

[4] Si veda la documentazione, in evoluzione, nella pagina http://www.oecd.org/pisa/.
[5] Il Quadro Europeo dei Titoli e delle Qualifiche è reperibile all'indirizzo http://ec.europa.eu/education/pub/pdf/general/eqf/broch_it.pdf.

Freudenthal H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Kluwer.
Furinghetti F. (2007). Snapshots from the 1960's: Tensions and synergies in the emerging of new trends in mathematics education. *The Montana Mathematics Enthusiast*. 3, 57-70.
IEA, International Association for the Evaluation of Educational Achievement (2009). *TIMSS 2011 Assessment Frameworks*. Amsterdam: IEA.
Ministero della Pubblica Istruzione/MPI (1979). *I Programmi della Scuola Media. D.M. 9 febbraio 1979.* Roma: Ministero della Pubblica Istruzione.
Ministero della Pubblica Istruzione/MPI (1985). *I Programmi della Scuola Elementare. D.P.R. n. 104, 12 febbraio 1985.* Roma: Ministero della Pubblica Istruzione.
Organisation for Economic Co-operation and Development/OECD (1961). *New thinking in school mathematics.* Paris: OECD Publications.
Stewart I. (1975). *Concepts of modern mathematics*. Harmondsworth: Penguin Books.
Thom R. (1970). Les mathématiques modernes: une erreur pédagogique et philosophique? *L'Age de la Science*. III (3), 225-242.
Zan R. (2007). *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire.* Berlin, Heidelberg, New York: Springer.

Bruno D'Amore (DIE, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotà)

Insegnamento/Apprendimento significativo della matematica nella scuola dell'infanzia.

1. Una premessa.

Alla parola "matematica" molte persone associano stereotipi scolastici: espressioni, formule, figure, teoremi da imparare a memoria, equazioni da risolvere, calcoli, ... In queste condizioni, se si nominano accanto i termini "matematica" e "scuola dell'infanzia", la reazione più tipica (per esempio di alcuni colleghi insegnanti universitari di matematica) è di stupore o di derisione.
Una conferma a questo atteggiamento potrebbe sembrare legata alla scelta degli *Orientamenti 1991* (cioè del testo del Ministero Italiano della Pubblica Istruzione, che descrive gli scopi educativi e cognitivi della Scuola dell'Infanzia), nei quali i campi di esperienza riflettono sì le discipline scolastiche, ma senza nominarle.
Si potrebbe leggere ciò in due modi diametralmente opposti:

- quella disciplina che appare delineata nel campo di esperienza "spazio, ordine, misura" è sì matematica, ma è meglio non dirlo;
- quella non è ancora matematica.

Gli studi di didattica della matematica degli ultimi vent'anni hanno messo a fuoco la delicatissima funzione mediatrice che ha l'insegnante di matematica nella storia cognitiva di un individuo. Ma gli studi solitamente riguardano la scuola primaria e la scuola secondaria, talvolta l'università. È veramente difficile trovare studi significativi sulla fascia d'età della scuola dell'infanzia.

Ciò mi costringe a precisare meglio la mia posizione.

È ormai attività corrente di tutti i maestri di scuola primaria compiere una ricognizione per stabilire quali siano le competenze matematiche dei bambini in ingresso in prima. Non solo: nel tema "Aritmetica" dei programmi ministeriali per la scuola elementare si insiste giustamente sul fatto che il bambino possiede già sui numeri diverse competenze sulle quali è bene fondare la successiva didattica, evitando di considerarle nulle. A ben vedere, i bambini hanno già numerose intuizioni sul numero come ordinale, cardinale, sul numero-valore del denaro, sul numero nell'uso relativo al tempo, sul numero come espressione di una misurazione, addirittura sul numero da un punto di vista ricorsivo, anche se certamente il numero più presente (quello che emerge in modo spontaneo) è il cosiddetto numero-etichetta.
Certo, attività intelligenti nella scuola dell'infanzia rafforzano e stimolano (con giochi opportuni, ma anche spesso con giochi liberi: filastrocche numeriche, cantilene ecc...), ma non creano, perché un'immagine del numero c'è già.
Per esempio, quali immagini si fanno i bambini del numero o, meglio, dei particolari numeri? Quali immagini si fanno dei predicati legati al numeri? Insomma, che cosa significa, per esempio, che un numero è "grande"?
In un'esperienza effettuata nella scuola comunale dell'infanzia di Ozzano Emilia (Bologna), ho giocato con bambini di 5 anni, intervistandoli in modo collettivo. Le risposte alle domande, come sempre accade, apparivano lì per lì poco consone alle domande poste. Ma, consapevole di questa possibilità, avevo predisposto una registrazione con videocassette che ho poi rianalizzato con calma ed attenzione. Ne emergeva chiaramente che per molti bambini un numero è grande se il suo nome in lingua italiana è lungo e ricco di consonanti (meglio ancora: un misto non ben definito fra le due cose), almeno da un certo punto in poi. Insomma: da 1 a circa 20 mi è sembrato che i bambini dominassero un ordine naturale corretto; poi si passava a cento, mille e poi a numeri ... "foneticamente ricchi", come duecentotrentasette, quattrocentoventidue ecc.

C'è un misto di consapevolezza adulta, in qualche modo appresa da esperienza ed imitazione (i due cardini dell'apprendimento spontaneo...), poi scattano modelli autonomi costruiti, imposti da taluni (i leader) e fatti propri da altri bambini.

Voglio dire: può darsi benissimo che il modello dei numeri di un bambino A si fermasse al venti (prendo questo numero come esempio, ma come esempio significativo perché mi è sembrato ricorrente) e che quindi, oltre tali "colonne d'Ercole" ci fosse il caos. Questo non sarebbe del tutto incredibile, specie se si vanno a vedere le competenze numeriche formali di moltissime tribù, anche oggi. Se si pensa che in francese "molto" si può dire *très*, che ha evidentemente la stessa radice di *trois*, si capisce subito che non deve stupire che vi fossero popolazioni che avevano nomi per i numeri uno e due, ma rendevano linguisticamente *tre* con *moltitudine*. Popolazioni più evolute arrivavano a dare nomi di numeri significativi e distinti fino a quattro, altre fino a dieci, altre fino a cento.
Quel bambino A arrivava a dominare linguisticamente e attraverso opportuni modelli mentali fino al venti, dopo di che, forse, il nome più adatto sarebbe stato "moltitudine" sia per ventuno, sia per quarantacinque... Il modello mentale può non aiutare, da un certo punto in poi. Ma questo non significa affatto che il bambino non abbia nomi di numeri a disposizione oltre il venti. Avrà un'immagine (almeno linguistica) del numero 200, per esempio se percorre una strada in auto con i genitori; oppure l'immagine di 63 se gioca a Tombola o al Gioco dell'Oca. D'altra parte, anche il membro della tribù che conta fino a dieci e poi dice sempre *molti* da undici in poi, non è vero che non abbia qualche forma di esperienza numerica: saprà ben distinguere due raccolti di banane, uno di undici e uno di venticinque frutti, per esempio!
Ma se un bambino B impone il modello linguistico fonetico secondo il quale tanto più lungo e ricco di consonanti è il nome del numero, tanto più grande è il numero in oggetto, il bambino A può esserne convinto, proprio perché manca, lì per lì, di un altro modello più adeguato.
In questo modo, A ha appreso un po' di matematica: l'ordine dei numeri naturali. L'ha appreso in modo spontaneo, semplicemente accettando un suggerimento implicito in una risposta di un compagno di scuola verso il quale egli prova fiducia.
Anche così possono dunque nascere modelli mentali. Conoscerli, sarebbe di straordinaria importanza, per una didattica più efficace e circostanziata della matematica; ma è incredibilmente difficile.
Le interviste effettuate ai bambini possono produrre conoscenza in questo campo, se sono condotte magistralmente e se l'intervistatore tiene presente che il soggetto risponderà non alla domanda posta, ma alla domanda che lui (il soggetto stesso) ha desunto, ricavato, creato per sé stesso, semmai sollecitato dalla domanda dell'intervistatore: per assonanza, per sollecitazione di un'immagine o grazie all'evocazione di un ricordo... Non tener conto di questa realtà può produrre errori di interpretazione ridicoli o addirittura gravi.

Da alcuni anni, mentre le sollecitazioni didattiche proposte dal gruppo di Bologna negli anni passati proseguono nella loro autonoma, lenta diffusione, noi stiamo lavorando ad una nuova impresa che, chissà, potrebbe portare a conclusioni didattiche diverse. Stiamo studiando soprattutto l'apprendimento spontaneo della matematica, per il quale meglio si adatta il termine "ingenuo". Ciò sia ai livelli di scuola superiore, media ed elementare, sia nella scuola dell'infanzia.
Per esempio: se si dà come sollecitazione ad un gruppo di bambini di 4 anni il testo di un problema aritmetico di prima elementare, come reagisce il bambino spontaneamente? Il maestro di scuola elementare dà per scontato che l'attività del suo allievo sarà tutta tesa verso la risoluzione del problema proposto. Ma ciò accade perché, in modo più o meno implicito, è già scattata una norma sociale di interrelazione alunno-insegnante al cui rispetto tutto spinge: c'è già un contratto didattico in vigore. Nella scuola dell'infanzia, intesa nel suo senso più genuino, seppure vi siano molti contratti (soprattutto legati alla socialità), non c'è ancora quello legato alla soluzione dei problemi. È dunque curioso ma tutto sommato ovvio come il comportamento dei bambini si differenzi e, se pure vi sono dei bambini che tentano una risoluzione (con modalità spontanee, non preconfezionate dall'insegnante), ve ne sono molti altri che non sentono il testo-stimolo come una sollecitazione a trovare una soluzione, ma come una narrazione, comportandosi di conseguenza.

Questo capitolo è solo un preludio ai successivi resoconti dell'esperienza di ricerca degli ultimi anni, alla quale hanno partecipato membri del Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica di Bologna e tanti insegnanti di Scuola dell'Infanzia di varie zone d'Italia (ai quali, da alcuni anni, si sono aggiunti colleghi spagnoli).

2. Qualche esempio.

Spazio, *Ordine*, *Misura*, ovvero: parole-chiave per indicare la Matematica non come disciplina a sé stante, avulsa da un contesto reale, ma come campo di esperienza. La Matematica è una forma di conoscenza che si può rintracciare e scoprire in molte attività dell'uomo, pratiche o anche solo linguistiche.
Qualche esempio non potrà che giovare.

Esempio 1: Giochiamo a "Rubamazzo"?
- Mi piace giocare a carte, ma non so come si fa quel gioco.
- Te lo spiego io.
E qui inizia un'avventura linguistica che ci piace prendere come paradigma significativo di attività matematica. Spiegare a parole le regole di un gioco richiede un'organizzazione razionale dell'apparato linguistico di alto livello, non posseduta da tutti. Ascoltare un bambino che spiega ad un altro le regole di un gioco è un'attività di grande interesse e fornisce moltissime informazioni sulle capacità "logiche" di organizzazione linguistica. Attivare situazioni nelle quali ciò avvenga è di straordinaria importanza.

Esempio 2: Gioco delle costruzioni, libero o strutturato.
È un'attività profondamente matematica, legata ad accostamenti di pezzi, a progettazione preliminare (con dichiarazione esplicita) di quel che si vuole ottenere. Ma l'apparato linguistico messo in moto non è meno interessante e formativo delle azioni concrete. "Metto il tetto rosso sopra al quadrato blu" non contiene solo le parole "matematiche": "tetto" (che sta per triangolo) e "quadrato", ma molte altre:
- sopra
- tetto-rosso, che distingue da tetti-di-altro-colore
- idem per quadrato-blu
- sequenzialità: c'è un implicito ordine nel quale far avvenire la costruzione; per mettere A su B, occorre già in qualche modo aver situato B. La parola "sopra", insieme a tante altre della lingua italiana, è assai più ricca di profondi sensi matematici di quanto appaia, a prima vista. Essa assume diversi significati a seconda dei contesti e delle situazioni; e la cosa si fa interessante se si analizza la coppia di termini in opposizione sopra-sotto, perché allora si capisce bene il senso relazionale: A è sopra rispetto a B; e dunque B è sotto A; ma se cambio la situazione, A può andare sotto ... Come allenamento si possono facilmente ideare situazioni concrete che realizzino queste esperienze.

In definitiva: molte parole della lingua italiana possiedono, nella loro semantica, forti valenze matematiche che vanno esplorate.

Esempio 3: Giocare è, in molti casi, già fare matematica.
In grande misura ed in moltissimi esempi giocare è l'esplicitazione di un'attività razionale. Specie nei giochi di strategia, il comportamento dell'individuo deve seguire regole (e dunque l'individuo deve saper distinguere se la mossa che intende eseguire rientra o no tra quelle ammesse: dal generale al particolare); ma deve anche perseguire un obiettivo e dunque programmare le proprie scelte in modo consapevole, coerente e consono allo scopo; il giocatore che gioca ad un gioco di strategia, per esempio al Rubamazzo detto sopra, deve cercare di vincere, deve quindi tener conto delle possibili scelte dell'avversario. Tutto ciò è matematica di alto livello, almeno come atteggiamento.

Esempio 4: Il racconto di un'esperienza, sia con linguaggio verbale, sia con altre forme linguistiche non verbali.
Questo tipo di attività sembra spontaneo e naturale ma, in realtà, comporta l'organizzazione di una sequenza, la scelta di elementi-chiave (significativi) della narrazione; ed in esso è adombrata la capacità di astrarre dal contesto reale, per estraniarsi come soggetto, vedersi con gli occhi dell'ascoltatore, scegliere per lui quegli elementi-chiave, riorganizzarli, proporli (contiene: sequenza, causa-effetto, ordine e forse altro,...).

Esempio 5: Simbolizzazione.
In moltissime scuole dell'infanzia italiane e straniere è d'uso ormai normale che ogni bambino abbia un simbolo che lo rappresenti, disegnato su un cartellino. A volte c'è addirittura il nome scritto del bambino in oggetto; altre volte c'è una figura che ha a che vedere con il bambino.
Per esempio, Marco può essere rappresentato da una stella o da un cavallo, indifferentemente, basta mettersi d'accordo. Dietro questa accettazione del simbolo che sta ad indicare un bambino c'è un po' di matematica; intanto c'è la necessità di accettare questo accordo (e questo ricorda molto quel che avviene con simboli

matematici veri e propri, introdotti solo per convenzione, per semplice patto reciproco, ma esplicito). E poi c'è l'accordo: Marco potrebbe preferire come simbolo una sedia; ma anche se l'insegnante lo accontenta, Marco ha capito che sarebbe la stessa cosa, da un punto di vista simbolico, essere rappresentato da stella, cavallo o sedia? La sedia potrebbe proporla l'insegnante perché Marco è sempre stanco e si vuol sempre sedere ... Ma allora il simbolismo cambia totalmente aspetto.
Perché una corona circolare rossa in campo bianco significa: "divieto di transito nei due sensi di marcia", mentre la figura di un trenino nero in campo triangolare bianco significa: "attenzione: passaggio a livello incustodito"?
Si vede bene che i due simboli sono profondamente diversi. In matematica, perché "+" significa "addizione"? Per puro accordo; in passato (neppure tanto tempo fa), per indicare la somma di 4 e 5 si scriveva 4 *plus* 5: il simbolo, in questo caso, riassume l'espressione linguistica del concetto in esame. Oggi si scrive 4 × 5, laddove una volta si scriveva 4 *fia* 5 per dire "quattro volte cinque", cioè quattro per cinque. Accettare e poi usare a propria volta simboli che non sono "scheletri" di parole conosciute, allusioni a quel che si intende dire, ma puri accordi, è profondamente matematico, come atteggiamento.
Perché "+" dovrebbe rappresentare meglio l'addizione che non il simbolo "×" usato invece per la moltiplicazione? Perché in Italia usiamo ":" per la divisione, mentre in molti altri Paesi del mondo si scrive "÷"? Si tratta, come si vede, di puri accordi che devono essere espliciti proprio per la loro natura; ancora un esempio, l'uso di virgola e punto; noi scriviamo 7,5 per dire sette e mezzo (come numero e non come ora), laddove molti Paesi scrivono 7.5; noi scriviamo 1.000.000 per scrivere un milione, laddove molti Paesi scrivono 1,000,000. Se uno non sa queste cose, rischia ... cantonate colossali.

Esempio 6: Intervenire nell'ambiente per modificarlo e dunque progettare, eseguire, verificare, discutere.
Gli esempi, in questo campo, possono essere molteplici e tra loro diversissimi; per esempio, la riorganizzazione dei mobili di una sala, per esempio della classe:
- Quell'armadio lo spostiamo laggiù.
- Ma lì c'è il tavolo.
- Bene, allora dove possiamo mettere il tavolo?
Tutto ciò prima di eseguire davvero gli spostamenti, solo per pianificare il lavoro. Ecco un altro esempio di argomentazioni:
-Credo che questo tappo galleggi. Perché?
- Perché è leggero.
- Sono le cose leggere che galleggiano?
- Sì.
- Allora questo sassolino galleggia perché è leggero; e questo piattone affonderà perché è molto più pesante del sassolino.
- Sì.
- Bene, proviamo.
Provare, verificare, sono parole magiche. Abbiamo sentito e letto più e più volte che il criterio per il galleggiamento è la leggerezza. Eppure basta prendere una pietra anche piccola e leggera e confrontarla con una nave da carico, per capire che il criterio è del tutto errato! Provare, sperimentare, verificare, sono parole d'ordine di una didattica consapevole ed intelligente.

Esempio 7: Descrizione, comunicazione.
Due bambini si trovano da parti opposte di un paravento ma fanno parte della stessa squadra; uno dei due ha in mano un oggetto e deve descriverlo all'altro a parole; il primo vincerà un punto se la sua descrizione sarà stata così buona da far giungere il secondo a capire di che cosa si tratta (ovviamente il primo bambino non può dire il nome dell'oggetto, altrimenti perde il punto). A questo punto una coppia di bambini della squadra avversaria deve fare la stessa cosa.
Bambini ed insegnanti assistono al gioco. Sembra facile descrivere un oggetto a parole... D'altra parte, a che cosa serve una competenza linguistica, se non a comunicare?
Un bel gioco è quello di far descrivere a parole un disegno per far sì che un bambino lo ri-disegni. In dettaglio:
il bambino A esce dall'aula e i suoi compagni rimasti in aula inventano un disegno, per esempio:

Ora A viene richiamato in classe e va alla lavagna. I bambini in coro o uno alla volta devono descrivere la figura a parole, dando ordini verbali per farla ridisegnare.
Se ne vedranno delle belle. (E questo non solo nella scuola dell'infanzia e nella scuola elementare; ho provato a fare questo gioco anche nella scuola media superiore, con un risultato interessante: i ragazzi hanno perfettamente capito alla fine dell'esperienza come funziona e a che cosa serve il linguaggio della matematica, così preciso e specifico).

Esempio 8: Giochi su numeri come parole, come simboli o altro.
Entreremo più in dettaglio su questo tipo di giochi nei capitoli seguenti; qui mi serve solo per concludere questa lunga catena di esempi.
Non è vero che i bambini siano tabula rasa, quanto a competenze aritmetiche, anzi.
Ma in questi casi si parla sempre di numeri orali, detti a voce. Interessanti esperienze sono state fatte sulla produzione spontanea scritta dei numeri, con risultati inattesi: dal bambino che disegna una mano per indicare cinque, al bambino che sa già che cinque si scrive 5, ma che poi lo scrive simmetrico; al bambino che sa che deve esistere un simbolo per indicare cinque, ma non sa qual è, e allora se lo inventa; al bambino che sa che esiste un segno grafico per il cinque, ma lo trae dal mondo delle lettere e scrive: P.

3. Modelli mentali che si formano spontaneamente.

Il mondo della matematica scolastico è spesso fatto di stereotipi. La maggior parte delle attività (a qualsiasi livello scolastico) è una massa di meccanismi all'apparenza inutili che sembrano non aver capo né coda. Perché nella scuola media, per esempio, insegnanti ed allievi (e dunque: società) debbano perdere tempo (e dunque: denaro pubblico) ad effettuare calcoli inutili e ripetitivi come nel caso delle espressioni, è un bel mistero!
Lo stereotipo è annidato dovunque:

- nei modi di dire
- nei modi di fare (e questo fatto è stato da me e da altri più e più volte denunciato, con infiniti esempi);

ma, quel che è peggio

- nei modi di pensare.

Un giochetto banale e all'apparenza disarmante è utile. Si tratta di un problemino semplice semplice che invitiamo il lettore a risolvere:

Un autobus parte dal capolinea con 3 passeggeri a bordo. Alla prima fermata salgono altri 3 passeggeri. Alla fermata successiva scende 1 passeggero e ne salgono 4. Alla fermata dopo scendono 2 passeggeri e ne salgono 5. Alla fermata dopo scende 1 passeggero e ne salgono 3. Alla fermata dopo non scende alcun passeggero e ne salgono 4.
...

Al posto dei puntini c'è la domanda. Quale domanda si aspetta il lettore? Quella proposta da noi è:
Quante fermate ha fatto l'autobus?
Se il gioco è presentato sotto forma orale, il 100% dei presenti ammette di aver contato i passeggeri e di aver ignorato il numero delle fermate. Perché? Ma è ovvio: di fronte a numeri occorre calcolare.
È ben noto il risultato che molti bambini di scuola elementare danno al seguente problema:
Un pastore ha 4 pecore grigie, 6 bianche, 3 nere e 5 capre. Quanti anni ha il pastore?
Risposta: 18, somma dei dati numerici presenti nel testo.
Questo tipo di atteggiamento è stato ampiamente studiato prima da psicologi ed ora anche da matematici interessati alle difficoltà degli allievi nel risolvere problemi, e quindi è ben noto.

Eppure l'attività matematica è esattamente il contrario dello stereotipo. Perché dunque se ne dà una simile immagine? Quando si comincia? Perché?
La risposta all'ultima domanda è quella più facile: il perché è da ricercarsi nell'ignoranza matematica di chi insegna matematica.
Chi insegna, non conoscendo, deve, per forza di cose, ripetere, imporre, e non creare ed accettare creazioni che poi non saprebbe gestire; nel caso della matematica, riproporrà più o meno quel che ricorda di sé stesso come allievo, spesso in modo storpiato, con minime personali reinterpretazioni. Non c'è nulla da fare.

Detto ciò, veniamo al titolo di questo paragrafo.
Bisogna stare attenti: mentre molte altre materie scolastiche si apprendono in famiglia, per la strada, per caso, come la lingua italiana o straniera, la geografia o sue porzioni, la storia o sue porzioni, per la matematica è assai più raro che ciò avvenga, nel senso che la stragrande maggioranza della matematica si apprende solo nelle aule scolastiche.
Non che la strada non insegni matematica, anzi. Ma mentre la lingua imparata per la strada o in famiglia uno se la porta a scuola, perché quello è il suo bagaglio e quello usa, la matematica imparata a casa o per la strada sembra sempre stridere o addirittura opporsi a quella scolastica.
Per cui si formano due apprendimenti:

- uno *profondo*, al quale contribuisce ogni ambiente;
- uno *epidermico*, che spesso ha come fonte la scuola.

Nel profondo, l'allievo si fa modelli suoi personali delle cose e della cultura, dunque anche della matematica; e questi modelli profondi sono creati sia dalla scuola sia dall'extra-scuola. Ma poi egli impara ad usare, per il tempo strettamente necessario, altri modelli, quelli epidermici, che non sono profondamente suoi, sono quelli appiccicati per un pelo, e pronti a cadere.
Vi sono dunque modelli formati nel profondo, quelli che contano davvero, e modelli solo epidermici, che non incidono sulla cultura reale, sulle capacità reali, fintantoché non diventino profondi. Il bambino deve organizzare logicamente suoi propri modelli tutto quel che lo circonda e che gli accade: dunque modelli che in larga parte hanno a che fare con il mondo della matematica si formano spontaneamente.

4. Aiutare il formarsi di modelli corretti.

Nel campo della matematica (o, se si preferisce, nel campo di esperienza Spazio-Ordine-Misura) sembra essere assai più importante il formarsi di solidi modelli mentali profondi corretti, anche se generali, piuttosto che apprendimenti formali che non sfociano in vere e proprie costruzioni.
La domanda è: ci sono attività matematiche che si compiono normalmente nella scuola dell'infanzia (non voglio imporre attività diverse dalle usuali, o suggerirne più di quelle che in questi ultimi trent'anni ho suggerito e che in molti luoghi sono ormai diffusissime) adatte a favorire la formazione di corretti modelli mentali nel mondo-della-matematica?

La risposta è ovviamente positiva. Mi limiterò qui ad una raccolta di esempi.

Esempio 1: Il gioco della caccia al "numero".
Bambini ed insegnante escono a fare una passeggiata ma, questa volta, c'è uno scopo ben preciso: man mano che proseguono, devono indicare ai compagni tutti i numeri scritti che vedono.
Un'attività all'apparenza banale e che attira invece moltissimo i bambini. Essi vedranno numeri sulle targhe delle auto, sui cartelloni pubblicitari, accanto alle porte delle case, sul telefono del bar eccetera; vedranno cifre di forma diversa, di colore diverso, di grandezza diversa... Arrivati a scuola, potranno proseguire il gioco: ciascuno deve disegnare i numeri che ricorda. Non solo, ma il gioco prosegue a casa: ogni bambino deve farsi aiutare dai genitori a rintracciare numeri sulle riviste, biglietti dei cinema, etichette di bottiglia ecc. Si farà poi un gran cartellone con i numeri raccolti. Il mondo è pieno di numeri!

Esempio 2: Il numero nel calendario.
Nel corso del triennio fra i 3 ed i 6 anni, il calendario acquista importanza sempre maggiore. Curioso il fatto che, mentre in mille altre attività numeriche la numerazione prosegue indisturbata (l'unica difficoltà è

conoscere i nomi dei numeri), nel caso del calendario la numerazione ha un massimo: 31 (e talvolta neppure quello). Non esiste il 32 gennaio; eppure, bambini della scuola elementare, si confondono; alla richiesta:
Giovanni inizia le vacanze di Pasqua il 27 marzo e sta a casa 6 giorni; che giorno ritorna a scuola?
Moltissimi bambini rispondono "il 33 marzo". La struttura numerica della conta dei numeri naturali dipende dunque dall'àmbito.

Esempio 3: Il gioco del numero più grande.
Ne ho già parlato nel primo capitolo e quindi non mi ripeterò. Insegnanti diversi faranno prove in ambienti diversi ottenendo risposte diverse. Sarebbe bene che poi i bambini ne discutessero fra loro.

Esempio 4: I numeri della probabilità.
Da anni suggerisco giochi nel campo della probabilità che, a mio avviso, è un campo di esperienza di forte presa emotiva.
L'"attesa" di un risultato condiziona fortemente la capacità razionale di ragionare su quel che è lecito attendersi.
Uno dei principali obiettivi è linguistico. Si ritiene normalmente che i bambini anche piccoli sappiano ben distinguere tra evento "certo", "impossibile", "possibile", ma nella realtà non è così. La lingua, poi, non aiuta affatto. "Certo", a volte, vuol dire: "razionalmente possibile ma, in base alla mia fortuna, senza discussione".
Non ci si deve limitare a prendere per buone le risposte orali dei bambini, tanto più se nell'àmbito solo di una discussione; si deve fare il gioco davvero e, soprattutto, osservare i comportamenti. Attività ben congegnate in questo campo sono formidabili veicoli di modelli mentali acuti e profondi, di grande presa emotiva. Si può arrivare, come testimoniano moltissime esperienze condotte nell'àmbito del Nucleo di Ricerca Didattica di Bologna, a far apprezzare sensibilmente che esistono vari "gradi", vari "livelli" di probabilità. Per esempio, dopo opportuna esperienza concreta, se ad un bambino di 5 anni viene presentato un dado che ha 4 facce rosse e 2 verdi e gli si chiede di "puntare" (in forma adeguata) su rosso o su verde, si può stare sicuri che egli punterà sul rosso (questo è solo un esempio, ma ne ho a disposizione molti altri).
A mio avviso il campo della probabilità qualitativa (senza calcoli, se non paragoni) offre spunti notevolissimi per la formazione di competenze profonde.

Esempio 5: Organizzazione dello spazio.
In larga misura ciò significa: orientamento, padronanza di sistemi di rappresentazione. Si tratta, per esempio, di giocare al Gioco degli automi.
Un bambino funge da automa: egli è senza volontà ed esegue automaticamente quel che un altro bambino gli ordina di fare (ma poi i ruoli si scambiano). Con ordini opportuni, l'automa deve compiere certi percorsi. Di solito, tendiamo a far privilegiare sistemi di tipo polare, nei quali si danno indicazioni nelle quali appare un polo, una direzione ed una distanza, del tipo:
- Ruota verso la finestra e avanza di sei passi.
Il bambino-automa gira su sé stesso fino a vedere davanti a sé la finestra e, a questo punto, avanza di 6 passi. Ora riceverà nuovi ordini. Fatto il gioco concretamente, si può passare (cosa che sempre proponiamo nella scuola elementare) a plastici e dunque ad attività sempre concrete, ma su modelli. Per esempio c'è una battaglia in corso e si danno ordini al cannone:
- Ruota verso la finestra e spara di tre palmi.
Nella scuola elementare l'ordine analogo è:
- Ruota di 60 gradi e spara di 350 metri.
Questo dopo aver stabilito di comune accordo il verso antiorario e di far uso di una certa scala; uso di goniometro e scala rendono molto ricca, da un punto di vista matematico, l'attività.
Ma accettare una forma di controllo razionale-linguistico dello spazio, tanto da arrivare ad organizzarlo sotto forma di coordinate, è un'attività di grandissimo livello. Essa forma modelli mentali ampi e di grande rilievo: *Lo spazio è fuori di me, ma io ne faccio parte*; le cose sono organizzate nello spazio e rispondono a domande del tipo: dove?: *Lo spazio è misurabile ed io posso misurarlo*.

Esempio 6: Attività logiche.
Non è bene aggiungere né l'aggettivo "matematiche" (la logica matematica è una disciplina universitaria), né "formali" (la "logica formale" è fuori dalla portata dei bambini). Si potrebbe dire: uso razionale della lingua, con la conseguente consapevolezza che la lingua si gestisce in modi diversi.

Per esempio, due giochi si possono pensare l'uno come l'opposto dell'altro:

- data una raccolta di oggetti vari, si stabilisce una proprietà e si raccolgono quegli oggetti della raccolta che hanno quella data proprietà.
- data una raccolta (piccola) di oggetti prelevati da un'altra raccolta (grande), cercare di capire qual è la proprietà, il criterio in base al quale è stata selezionata.

È un gioco molto praticato che però va proposto in un contesto opportuno, perché non si trasformi in un esercizio noioso, sterile e stupido, cioè senza uno scopo significativo.
Si tratta di un'attività formidabile, ma su questi concetti sorvoliamo. Che tipo di consapevolezza si dà? Che: cambiando la proprietà, pur conservando la raccolta (grande), si cambia la raccolta (piccola) che ne deriva.
Dunque, la lingua è uno strumento: le parole selezionano l'ambiente. Ciascuno di noi può essere l'artefice del risultato; le parole non si possono usare a vanvera, ma vanno predisposte all'uso. È un vero e proprio progetto logico/linguistico. Un modello formidabile di come funziona la lingua.

Esempio 7: Esperienze di misura.
Nel campo della geometria ci sono idee-base ciascuna delle quali è adatta a fungere da esempio per la costruzione di opportuni modelli. Così, nel campo della misura. Mettendo insieme le due cose, un esempio convincente è il seguente: arrivare a far capire nel profondo che il numero che esprime la misura di qualche cosa dipende dall'unità di misurazione. La caraffa dell'acqua misura 10 se si usa il bicchiere come unità, ma misura 25 se, come unità, si usa la tazzina.
La misura è la stessa, ma il numero che la esprime no.

In tutto ciò, però, ci sono due difetti:

- Questi sono tutti modelli particolari su qualcosa di specifico. Sarebbe bene trovare una teoria generale, un modo di comportarsi in generale da parte dell'educatore, per sapere come fare in generale, non nei singoli casi specifici, per favorire una buona costruzione di singoli modelli adeguati alle circostanze.
- Non c'è consapevolezza nel bambino di quel che succede. Perché non può esserci, o perché non abbiamo ancora esplorato abbastanza questa questione?

5. Caratteri generali dei processi di insegnamento – apprendimento della matematica nella scuola dell'infanzia.

Nel paragrafo precedente mi sono limitato a fornire solo alcuni esempi, da ciascuno dei quali ho tratto una frase che dà qualche indicazione significativa sulla formazione di convincimento che il bambino può radicare nel profondo e che si possono così riassumere:

- Il mondo è pieno di numeri (e quindi non è vero che i numeri investono solo il mondo della scuola; essi fanno parte a pieno e di diritto dell'esperienza quotidiana).
- La struttura della conta numerica dipende dal contesto nel quale la si usa (l'aritmetica è al mio servizio e si adegua ai miei bisogni, posso e devo dominarla; esempi del calendario e del danaro).
- I numeri hanno tutti un nome, ma non dipendono dal loro nome (per esempio: sei ha tre lettere, ma è più grande di quattro che ha sette lettere e cose del genere; rapporti: numeri-lingua e più in generale, rapporti: matematica-lingua).
- Non posso condizionare il mondo ed i suoi avvenimenti con la forza del mio desiderio (mi riferisco alla probabilità di un evento, ma su questo ci sarebbe tanto da dire).
- Lo spazio è misurabile, organizzabile razionalmente (ed io posso fare tutto ciò).
- L'uso della lingua risponde ad un progetto (posso dire quel che voglio esprimere, purché organizzi razionalmente l'uso della lingua; la lingua ha una forte componente logica o, se si preferisce, razionale).
- La misura delle cose dipende dalle cose, ma la sua espressione numerica dipende dalle mie scelte.

Tutti risultati parziali, anche se significativi. Ma qual è l'atteggiamento razionale che l'educatore deve assumere su questa strada? Quello del favorire una buona costruzione di modelli mentali adeguati alle singole circostanze? Nel bambino c'è o no consapevolezza? Se non c'è, è perché non può esserci? O ci sono altri motivi?

Dagli esempi proposti risulta che l'atteggiamento generale dell'educatore in matematica, specie (ma non solo) nell'àmbito della scuola dell'infanzia, è principalmente un atteggiamento di disponibilità a mettere in

discussione le proprie convinzioni, accettando di prendere in esame seriamente e senza prosopopea le proposte razionali del bambino. Farsi un modello mentale è una cosa, ma produrlo all'esterno, cioè mostrarlo a qualcuno, è tutt'altro. Occorre saper sfruttare l'esperienza, saper fare uso di un ampio bagaglio linguistico, almeno in parte essere consapevoli dell'esistenza di quella che gli psicologi chiamano k-tacita (*conoscenza tacita*) che, spesso, è difficile da esprimere a parole; occorre (e questo punto, a mio avviso, ingloba tutti gli altri) saper "tradurre" una sensazione (il modello interno) in una produzione esterna che gli altri possano comprendere.

Con questo, non sapremo ancora com'è fatto un tale modello interno, ma almeno vedremo la sua esteriorizzazione, la quale ci fornirà qualche idea sulla coppia: modello interno – sua traduzione, tanto migliore quanto più approfondita è la conoscenza che avremo del bambino in questione.

Dicevo del ruolo e più ancora dell'atteggiamento dell'insegnante; mi pare che il paradigma al quale fare riferimento pedagogico sia quello della R.-A. (= ricerca-azione), perché ci deve essere la disponibilità a rimettere continuamente in discussione tutto da capo: conoscenze e convinzioni, sulla base delle nuove acquisizioni ottenute nel rapporto con il bambino, con ogni singolo bambino.
Per dirlo in modo esplicito, gli esempi forniti erano solo esempi, ma scelti in modo oculato perché ciascuno di essi può dare adito ad interessanti attività alle quali ogni bambino potrà rispondere in modo molto personale e l'insegnante vedrà atteggiamenti diversi dei diversi bambini nei singoli casi. Infatti quasi ogni bambino accetterà che il mondo è pieno di numeri, ma al momento dell'uso della conta numerica nel calendario proporrà soluzioni molto personali, diversissime, pur con gli stessi stimoli.
L'atteggiamento generale sarà quello di accettare il modello esterno proposto, proprio per metterlo in discussione in modo costruttivo, allo scopo di favorire in futuro la consapevolezza (indotta) del fatto che la verità è solo un momento di passaggio verso un'altra più comprensiva.

Come diceva il grande matematico e studioso di *Problem Solving*, George Polya, l'atteggiamento dell'insegnante di matematica di fronte all'errore non deve essere quello (ahimè, il più diffuso) di chi dice sempre: "No, hai sbagliato, non va bene", ma anzi quello che (proprio per le peculiarità della disciplina) afferma: "Sì, va bene; e se tu provassi a...".

Poiché nella scuola dell'infanzia le attività si fanno e non ci si può limitare a lezioni tenute dalla cattedra, ciò sembra ancor più facilmente ottenibile in corso d'opera: basterebbe sempre attivare meccanismi di descrizione del progetto, delle attese, di quel che si fa, di immediata verifica di quel che si è appena fatto, di ri-progettazione, e così via, arrivando a fornire, come atteggiamento generale, quel che s'è detto sopra: la consapevolezza del fatto che ogni immagine che mi sono fatta non è definitiva, ma è lì, pronta, disponibile a compiere un passo avanti, a... fagocitare nuove situazioni che sembrerebbero sfuggire all'immagine precedente.
Apprendere vuol dire avere questa disponibilità-capacità ad ampliare l'immagine. (Attenzione. Ampliare vuol dire: rompere, includere un fatto nuovo, richiudere lasciando socchiusa la feritoia; la rottura può, ma non necessariamente deve, essere traumatica).
Insegnare vuol dire: rendere possibile e naturale questo processo.

Si tratta non solo di trovare gli esempi opportuni (che potrebbero essere i sette precedenti o altri; o tutti quelli indicati negli Orientamenti; o tutti quelli da me esaminati in dettaglio nel corso degli anni in molti libri ed articoli, ben noti e diffusi), ma di saper cogliere al volo ogni situazione. Avendo ben compreso che cos'è questa benedetta matematica e dove sta, coglierla, esplicitarla, situarla, decontestualizzarla, sfruttarla per avviare questo tipo di processo di apprendimento.
Ho sempre sostenuto la necessità di un curricolo nella scuola dell'infanzia perché temo lo spontaneismo e l'improvvisazione, ma ho indicato sempre un ampio spettro di curricoli possibili, all'interno di una vasta varietà di obiettivi-contenuti; nel senso che il curricolo mi pare possa anche solo consistere in un esempio di programmazione possibile, pedagogicamente supportata da un elenco di contenuti possibili che possono anche essere puramente indicativi.

Mi sono anche posto il problema della consapevolezza, e la cosa è assai delicata.

Uno dei pilastri dell'attuale ricerca in didattica si basa sulla necessità della metacognizione: avere consapevolezza di quel che so. E, si può aggiungere, di quel che so fare.
Qualunque educatore sensibile comprende bene che la riflessione su quel che so, rafforza quel che so, perché me lo fa vedere dall'esterno, in modo critico; e rafforza quel che so fare, perché lo vedo non solo in atto, ma pure in potenza. So di sapere qualche cosa e questo, in certa misura, mi dà anche indicazioni su quel che non so (riferimenti a Socrate sono voluti): una bella forma di conoscenza. So che cosa so fare, e vale un discorso analogo su quel che so di non saper fare.

Saper descrivere la propria conoscenza è un obiettivo di altissimo livello, metacognitivo.
Esempio 1. Per descrivere le regole di un gioco si fa così e così...
Esempio 2. Per disegnare un oggetto si fa così e così...
Esempio 3. Per calcolare il giorno di rientro a scuola dopo le vacanze di Pasqua si fa così e così...
È molto di più che descrivere le regole del Rubamazzo, che disegnare una mela, che calcolare che giorno viene dopo il 31 marzo, ...

Nella pratica matematica c'è sempre un mescolamento di livelli: per dimostrare un teorema occorre anche sapere che cosa vuol dire dimostrare; per dare una definizione, occorre anche sapere che cosa vuol dire definire. Ora, si dirà che i bambini della scuola dell'infanzia e del primo ciclo della scuola elementare non sono matematici e che quindi il paragone non tiene.

- *È vero*. Ma questo testo è destinato ad educatori ed è bene che essi abbiano perfetta consapevolezza del fatto che la matematica è disciplina in continua evoluzione; tanto più se essi hanno accettato il carattere generale delineato sopra, che li vede attivi come educatori e non passivi ripetitori più o meno smaliziati.
- *È falso*. Il paragone tiene benissimo. Proprio a causa della sua ingenuità (o, meglio, per mancanza di remore che verranno, poi, indotte dalla scuola), nel bambino piccolo c'è un continuo salto di livello: dal fare al come si fa. Per esempio, basta vedere come il bambino costruisce la lingua parlata: mentre la fa (per imitazione, essenzialmente) la costruisce (per riflessione sul processo in base al quale l'ha costruita; l'esempio tipico italiano è: io vado, tu vai, egli va, noi vadiamo,.... oppure: io ando, tu andi, egli anda, noi andiamo,...).

Matematica e lingua, come il lettore avrà notato, sono sempre campi di esperienza molto vicini. Nel programma di italiano per la scuola primaria si parla esplicitamente di "riflessione sulla lingua".

6. Conoscenze alla base delle strategie ingenue messe in atto nel fare matematica.

Anche se altrove ho cercato di definire in maniera abbastanza precisa (per quanto è possibile in questo campo) l'aggettivo "ingenue" riferito a "strategie", qui userò lo stesso aggettivo in modo... ingenuo, cioè intendendo quel che il termine suggerisce intuitivamente.
In base alle proprie conoscenze poco o punto formali, le strategie messe in atto dai bambini di 3-6 anni nel fare matematica non possono che essere ingenue; e lo permangono fin tanto che non vi sia la consapevolezza della quale ho parlato nel capitolo precedente. Dopo di che l'aggettivo "ingenue" non calza più, anche se séguita a non essere sviluppato un apparato formale (ma su quel che significa "formale" sarebbe interessante discutere).
Farò ora la proposta di alcuni esempi su competenze che il bambino di 3-7 anni possiede, in campo matematico, e che dunque costituiscono la riserva della quale fa uso nell'elaborare le proprie strategie.

Esempio 1: Il bambino sa contare.
Intendiamoci bene. Mi pare di poter sostenere che "contare" significhi un complesso di tre cose:

- avere consapevolezza del fatto che c'è un primo numero (uno)
- che dopo l'uno c'è il due e che si possa sempre così proseguire: dopo un numero ce n'è un altro (e solo uno) che è il suo successivo, in un processo che prosegue (senza fine?)
- conoscere i nomi dei numeri che si susseguono nella conta; questo punto merita un approfondimento; nelle lingue moderne, di solito vi sono dieci nomi distinti per i numeri da 1 a 10 e poi si costruiscono i nomi dei numeri successivi utilizzando i nomi precedenti, combinati in varie forme; in italiano undici è una riduzione di uno-dieci; dodici di due-dieci; tredici di tre-dieci; quattordici di quattro-dieci; quindici di cinque-dieci; sedici di sei-dieci; poi c'è una rottura di regola e diciassette è dieci-sette, con inversione dei

due nomi (nelle altre lingue vicine all'italiano l'inversione può apparire in altri punti; per esempio in castigliano avviene al sedici); dopo di che diciotto è dieci-otto; diciannove è dieci-nove; e finalmente venti fa iniziare una regola facile che si trascina poi avanti ed avanti senza più grandi rotture. Costruire i nomi dei numeri non è banale.
Ebbene, mi sembra di poter sostenere che un bambino che conti a voce in questo modo: "uno-due-tre-quattro-sette-nove-sei-..." e così via non è che non sappia contare, perché dimostra di aver capito le prime due parti di quel che significa contare; quel che non sa è qualche nome di numero. O, meglio, i nomi li sa, ma non ha ancora la consapevolezza di dove mettere quei nomi, a che punto della successione.
Sostengo quindi che il bambino, di solito, sa contare, anche se presenta qualche incertezza linguistica (e non matematica in senso stretto).

Esempio 2: Il bambino sa che i numeri hanno funzioni anche molto diverse fra loro.
Il numero può servire per contare, per indicare quantità, misure, per indicare un posto, o altro. Non c'è stupore per questa varietà di usi, anzi naturalezza. Quel che succede, semmai, è una variazione di modalità d'uso a seconda della funzione. Gérard Vergnaud fa notare come un bambino che conti non per il contare in sé, ma per indicare quantità, arrivato all'ultimo naturale-ordinale, quello che indica anche la cardinalità della raccolta contata, metta un'enfasi diversa nel pronunciare proprio quel numero, o perché lo ripete (1, 2, 3, 4, 5, ...5!) o perché lo pronuncia con tono diverso (1, 2, 3, 4, **5**). In questo atteggiamento (ed in altri analoghi) si vede bene come il bambino abbia consapevolezza della variazione d'uso del numero. Nessun bambino direbbe che un foglio di album che misura 6 matite viene dopo di un autocarro che misura 5 matite... Anche se in forma inconsapevole, si capisce che quel 6 non è il successivo di 5, almeno in un tale contesto. Nessun bambino si stupisce del fatto che il posto n. 2 sia per una sola persona e non per due. E così via.

Esempio 3: Il bambino sa organizzare strategie.
A Pinerolo (Torino), Francesco Aglì ed Aurelia Martini hanno raccolto in un voluminoso dossier documenti relativi a giochi di strategia eseguiti dai bambini, con protocolli autentici. Una vera miniera. Certo, giocare a scacchi, per un bambino di 3 anni, vuol dire mettere i pezzi-soldatini in piedi e poi farli cadere. Ma un bambino di 5 anni è del tutto in grado di giocare a Gale, o a Tris, o a Germogli,... e di spiegare che cosa sta facendo.

Esempio 4: Il bambino sa rappresentare situazioni.
A bambini di Bologna, Valeggio sul Mincio (Verona) e Imola (Bologna) abbiamo proposto un esercizio di aritmetica tratto da un libretto di matematica del primo ciclo. Uno dei testi era:
Pierino va al mercato e compra 6 uova. Nel tornare a casa ne rompe 2. Quante ne consegna alla mamma?
Le risposte sono state le più disparate. C'è chi ha scritto un 4 nei modi più vari possibili (si veda la parte finale del capitolo 2). C'è chi ha disegnato una mamma con un braccione, pronta a sculacciare lo sbadato Pierino. C'è chi ha disegnato un sasso, causa dell'inciampo che è costato due uova a Pierino. C'è chi ha disegnato uova. Chi una casa con il sole. Chi ha tentato di trascrivere a modo suo il testo... La casistica sembra enorme; ma si potrebbe ridurre a:

- risposte che ineriscono al contesto del problema, in qualche modo
    - risposte formali o presunte tali
    - risposte figurali
- risposte che risultano estranee al contesto.

Attenzione, però: le distinzioni non sono affatto banali o evidenti. La risposta del bambino che ha disegnato il sasso, senza intervista personale, sarebbe stata classificata tra quelle che risultano estranee al contesto, e invece va classificata fra le risposte che ineriscono al contesto, tra le figurali. Dunque, ogni risposta va accuratamente vagliata e va accompagnata da un colloquio diretto immediato con l'autore.
Di fatto, lo stesso problema, dato in prima elementare (maggio), produce risultati diversissimi; anche se rimane qualche risposta inerente al contesto, figurale (queste permangono fino alla seconda media, come ho visto in molte esperienze), spariscono le risposte estranee al contesto. La stragrande maggioranza delle risposte sono formali (o presunte tali). Troppo presto. I bambini non sono in grado di dominare quel tipo di simbolismo, l'apparato formale che gli insegnanti introducono subito, finendo con l'appesantire di inutili formalismi qualche cosa che di per sé sarebbe naturale, e perdendo di vista il lato concettuale.

Esempio 5: Il bambino ha varie idee sulla misura e sul processo di misurazione, in vari contesti

Barlumi abbastanza buoni di uso del denaro (o, almeno, di quel che significa, da un punto di vista matematico, anche se talvolta tende a dare maggior valore alle monete più grandi o a mucchi più numerosi di monete). Idee piuttosto buone su misure di lunghezza, larghezza e profondità. Poca o nessuna dimestichezza con il concetto di estensione superficiale, ma idee abbastanza fondate di equiestensione (specie se ha giocato con il tangram ed ha accostato piastrelle o se ha piegato carta per il gioco della simmetria).

Esempio 6: Il bambino ha discrete competenze su varie questioni di natura topologica.

Esempio 7: Il bambino ha una discreta competenza sul fatto che vi siano regole nella formazione delle frasi e delle singole parole.
Questo lo porta a costruzioni sintattiche delle frasi.

È ovvio che si potrebbe continuare a lungo, con chissà quanti altri esempi, oppure raffinando notevolmente gli esempi precedenti (gli esempi 5 e 6 potrebbero fornire ampi spunti per indagini). Non si può non tenere conto di queste competenze di base già acquisite, né nella didattica all'interno della scuola dell'infanzia, né nel momento del passaggio alla scuola elementare.
L'assurda stupidaggine del bambino-tabula-rasa è morta e sepolta. Così come sembra ribaltata la tendenza a valutare fasi o stadi su quel che Pierino non sa fare: Pierino sa e sa fare molto. Ed è assai più produttivo, per i futuri processi di apprendimento/insegnamento, che l'educatore sappia riconoscere e sfruttare, in positivo, le capacità di Pierino.

Bibliografia.

Angeli A., D'Amore B., Di Nunzio M., Fascinelli E. (2011). *La matematica dalla scuola dell'infanzia alla scuola primaria*. Progetto: *Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere*. Vol. 5. Bologna: Pitagora.

Benedetto Di Paola (G.R.I.M., Università di Palermo)

I libri di matematica che circolano nella scuola italiana e non: ricadute nella pratica d'aula

***Capire ed intervenire*: classi multiculturali e processi cognitivi, cosa possiamo imparare dagli "altri"?**

Molte ricerche internazionali sulle competenze matematiche discutono le performance degli studenti dei diversi gradi scolastici in relazione al contesto nel quale il fenomeno di insegnamento/apprendimento si sviluppa e quindi in connessione con il contesto sociale/culturale, le scelte curricolari, i libri di testo in adozione etc. (Love, Pimm, 1996). In sintesi, in accordo con molti ricercatori, potremmo dire che tutto il complesso sistema sociale ed educativo collabora alla formazione globale degli alunni e allo sviluppo specifico della disciplina in oggetto.

Discutere questa problematica in modo globale e quanto più non eurocentrico (necessità posta dalla natura stessa delle classi in cui oggi gli insegnanti si trovano a lavorare) è complesso e richiede diversi strumenti di osservazione e di analisi che fanno capo ai valori generali di riferimento, alle tradizioni e ai modelli culturali di un determinato Paese.

Se ci riflettiamo, il curricolo di Matematica, che ha il compito di tramandare il patrimonio culturale in relazione a questa disciplina è strutturato in modo da integrare tutte queste prospettive. *Ma oggi, in presenza di studenti provenienti da culture diverse, inseriti nelle nostre classi, quale curricolo proporre?*

La domanda provocatoria sottolinea uno dei problemi che pian piano la Scuola sta cercando di affrontare e cioè la presenza in classe di studenti non italiani, di differente cultura quindi che, nella maggior parte dei casi, provengono da contesti scolastici precedenti molto diversi dal nostro, che quindi veicolano esplicitamente o implicitamente tradizioni ed approcci culturali diversi che intervengono nell'apprendimento della Matematica del singolo soggetto interessato ma anche, in modo implicito, nella vita dell'intera classe in cui il soggetto apprendente è inserito.

In poche battute potremmo dire che uno dei problemi chiave dell'insegnamento/apprendimento della Matematica in situazione di multiculturalità è certamente quello di affrontare lo studio della disciplina e delle problematiche riferite al suo processo di insegnamento/apprendimento attraverso considerazioni di carattere sociale, culturale, antropologico, geografico etc., trattando in maniera diretta non soltanto la complessità dei contenuti disciplinari ma anche quelli che in molti casi possono definirsi come gli aspetti storico-epistemologici della disciplina discussa in aula con gli allievi.

La ricerca nazionale ed internazionale in Didattica della Matematica, negli ultimi anni si è sempre più interessata a questo tema; gli studi condotti in Italia e all'estero hanno posto l'accento sulla necessità di riflettere sulle questioni riguardanti le *Matematiche Elementari* in una visione quanto più ampia possibile, alla luce di una Scuola sempre più "diversificata", multiculturale e globalizzata.

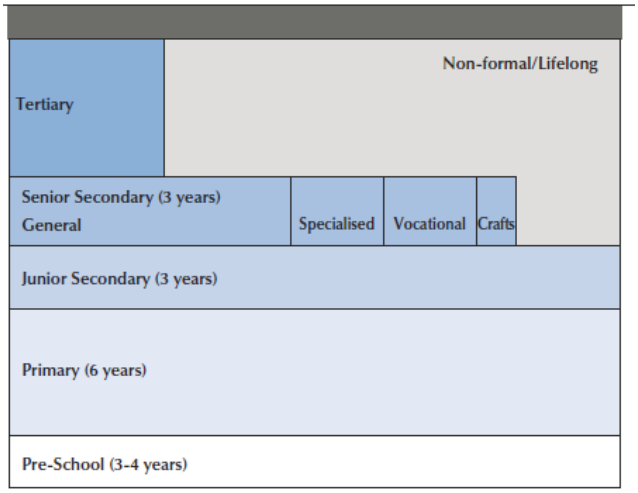
Quale didattica disciplinare nella classe del terzo millennio? *Quale formazione matematica*? *Quali saperi*? E quindi … *Quale matematica trasmettere agli allievi*? *Quali contenuti ritenere più utili per un apprendimento condiviso*? *Come relazionare questi alle culture presenti in classe*?

Come detto prima, queste domande sottolineano la complessità della tematica trattata e la necessità di restringere l'ambito di analisi per facilitare una possibile riflessione su alcune considerazioni di Didattica della Matematica in ambiti multiculturali per, come recita il titolo di questo corso/seminario, *capire e intervenire* in modo consapevole come insegnanti e come ricercatori.

Il mio intervento vuole proporre una riflessione su questo tema, a partire da possibili analisi di tipo semiotico/culturale di uno degli strumenti più utilizzati dagli insegnanti in classe: il libro di testo. L'approccio utilizzato sarà di tipo non eurocentrico e prenderà in considerazione, come controparte di alcuni libri di testo italiani, quelli cinesi (principalmente di Scuola Primaria) analizzandone analogie e differenze in reazione ad un possibile studio epistemologico delle culture sottese: filosofia, logica, lingua, storia dello sviluppo del pensiero matematico etc.

Volendo schematizzare, potremmo riassumere il framework culturale preso in esame per studiare la struttura dei libri di testo e parallelamente il sistema scolastico dei due paesi e il curriculo didattico relativo, riferendoci da un lato alla terna Confucio/Tao/Buddha e dall'altro a Socrate/Platone/Aristotele.

Per quanto riguarda il sistema scolastico cinese, la figura sottostante evidenza la strutturazione dei cicli scolastici e il programma di studio della scuola primaria.



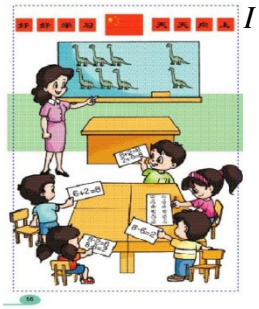
Discipline	Numero di ore[5] settimanali					
	1° anno	2° anno	3° anno	4° anno	5° anno	6° anno
Ideologia e morale	1	1	1	1	1	1
Lingua cinese	10	10	9	8	7	7
Matematica	4	5	5	5	5	5
Società	-	-	-	2	2	2
Natura	1	1	1	1	2	2
Ed. fisica	2	2	3	3	3	3
Ed. musicale	3	3	2	2	2	2
Pittura	2	2	2	2	2	2
Lavoro	-	-	1	1	1	1
Attività di gruppo	1	1	1	1	1	1
Scienza, tecnologia e attività culturali	4	4	4	4	4	4
Subtotale	**28**	**29**	**29**	**30**	**30**	**30**
Variazioni locali di programma	2	2	3	3	3	3
Totale	**30**	**31**	**33**	**33**	**33**	**33**

Fig. Cicli scolastici e programma di studio della Scuola Primaria in Cina

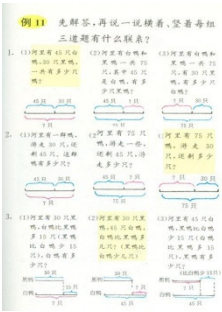
Il programma di studio nel corso della vita scolastica cinese prevede da 25 a 30 ore di lezione settimanali, a seconda della classe, più 5 ore di attività extracurricolari non sempre previste. Ogni ora di lezione comprende 45 minuti di insegnamento e dieci minuti di pausa. Nelle scuole a tempo pieno, le lezioni iniziano alle 8:00 e riprendono alle 13:30 (inverno) o 14:00 (estate), dopo la pausa per il pranzo. Agli studenti vengono generalmente assegnati compiti a casa.

I libri di testo: i problemi con variazione e i problemi a parole nella tradizione italiana e cinese.

Per quanto attiene ai libri di testo, uno degli aspetti più interessanti che saranno oggetto di discussione durante il corso/seminario e che sottolineano le differenze di approccio fra i libri di testo che circolano in Italia e in Cina, fa riferimento ai *problemi con variazione*, tipici della Didattica della Matematica cinese. L'attenzione sarà rivolta particolarmente ai problemi a parole.
La scelta di porre attenzione proprio a questo aspetto e quindi all'analisi semiotica di presentazione proposta da diversi autori di libri di testo cinesi è dettata dalla possibilità di rileggere, attraverso i manuali utilizzati dagli insegnati in classe, alcuni aspetti relativi alle performance degli allievi cinesi di scuola primaria e non solo sul pensiero aritmetico e pre-algebrico, messi in evidenza da molti degli insegnanti che hanno in classe allievi di cultura cinese (alcune interviste saranno mostrate durante il corso/seminario).
In accordo con Xuhua Sun (2011), la prospettiva cinese della variazione connota il loro sistema educativo. (Sun, 2011). Per rendersi conto dei diversi contesti in cui è utilizzata sin dai primi giorni della scuola primaria è sufficiente osservare le due immagini riportate di seguito tratte da due differenti libri di testo di matematica della Rep. Pop. Cinese.



I classe primaria



II classe primaria

Fig. Libri di testo cinesi di Scuola Primaria

In esse troviamo l'approccio per variazione ai problemi additivi in contesti differenti e formulati in modalità differente (lettura d'immagine a sinistra; problema a parole a destra). Se comparate con le situazioni problematiche ed i problemi a parole rintracciabili nei libri di testo della scuola primaria italiana (Zan, Poli, 2010), si nota che in questi ultimi non si riscontra l'interazione di un problema, più soluzioni o più problemi con una soluzione tipico della didattica cinese (Sun, 2011). Essi infatti sono costruiti per la maggior parte con problemi a parole con addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni e divisioni, in una prospettiva di sviluppo progressivo, ma fortemente segmentato e scisso. La variazione non si limita ai problemi additivi, ma è riscontrabile anche nei problemi moltiplicativi (Sun, 2011). Questi elementi, a nostro avviso, evidenziano lo scarto rispetto alla pratica didattica tipica italiana che seppur in una prima approssimazione si può ricondurre a quella espressa nel documento standard NCTM del 2000. La tabella sottotante evidenzia le differenze di approccio che possono riscontrasi in modo esplicito o implicito nel curriculo didattico dei due Paesi.

USA - standard NCTM (2000)	**Cina - programmi MOE (2004)**
Attività prevalentemente individuali o di **piccolo gruppo**	Attività prevalentemente individuali o di grande gruppo (**classe**)
Apprendimento per scoperta	Apprendimento per **imitazione** (insegnamento diretto)
Uso continuo dei materiali (anche nelle scuole secondarie)	Uso dei materiali solo nei primi anni della scuola primaria come accesso all'astrazione
Importanza limitata del calcolo mentale	Grande importanza del calcolo mentale
Importanza limitata di schemi e formule	**Enfasi sull'insegnamento di schemi risolutivi di situazioni problematiche**

Fig. Comparazione NCTM e MOE

Tralasciando opportunamente l'evoluzione storica dei libri di testo italiani, nota ai più, è interessante invece ricordare come nel 1949, dopo la fondazione della repubblica popolare cinese, il ministero dell'istruzione iniziò a interessarsi della pubblicazione dei libri di testo che portò dal 1950 al 1986 alla comparsa di un'unica serie di testi scolastici, usati nello stesso tempo, in tutte le scuole del Paese. Oggi in Cina esistono pochi libri di testo pubblicati da autori diversi e esaminati in modo diretto in termini di qualità e rigore da una commissione ministeriale che ne studia la conformità con il MOE. Questo aspetto può destare qualche perplessità in termini di autonomia e libertà scolastica degli insegnanti ma ha anche molte ricadute positive sulla formazione e sul valore dei libri di testo utilizzati in classe.
I libri cinesi che si esamineranno durante il corso/semiario, confrontandoli ad alcuni testi in circolazione nella Scuola primaria italiana, sono tra i più diffusi in Cina e fanno parte della collezione intitolata *Shuxue* e identificabili con il codice ISBN 7- 107-14632-7/G, 7-107-15032-4/G, 7-107-15696-9/G, 7-107-16205-5/G.
Le immagini sotto riportate vengono qui proposte come stimolo che permetterà, durante il corso/seminario in oggetto, di osservare alcuni aspetti tipici della variazione cinese nelle operazioni di addizione e sottrazione, tra loro fortemente connesse fin dai primi anni di scuola. Questo approccio che si ritrova in tutti i testi cinesi in circolazione sottolinea, in prima battuta, una possibile differenza con l'approccio tipico occidentale che ad esempio si ritrova nella scelta editoriale della casa Editrice Erickson, che pubblica due testi separati per

affrontare lo studio dell'addizione e della sottrazione nei quaderni operativi numero 4 e numero 5. Sebbene i quaderni presentino delle analogie, poiché fanno parte della stessa collana, sono presenti numerose differenze dovute al fatto che sono stati redatti da due autrici diverse coordinate da Clotilde Pontecorvo. In Cina questo sarebbe impossibile!

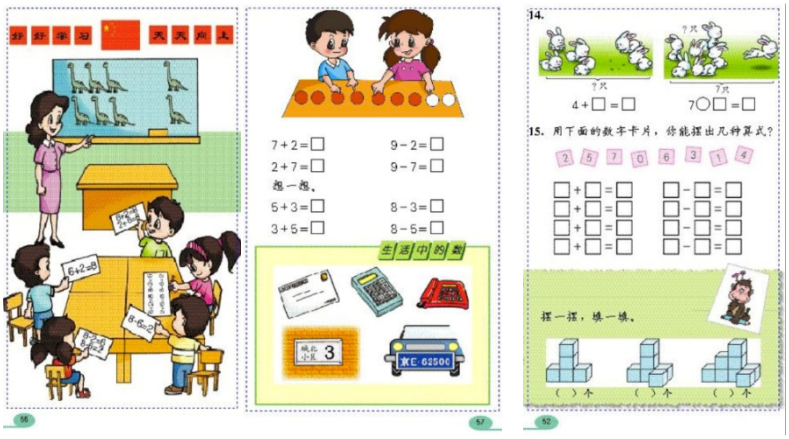


Fig. L'uso della variazione nei libri di testo di Scuola Primaria cinese

L'approccio alla variazione si ritrova in Cina già dalla Scuola dell'Infanzia: l'immagine sotto riportata si riferisce ad una pagina di un testo cinese per bambini di 3, 4 e 5 anni.

Fig. L'uso della variazione nei libri di testo di Scuola dell'infanzia cinese

Altro aspetto interessante in fase di comparazione tra i libri di testo in circolazione in Italia e in Cina è il peso che nei libri di testo di cultura orientale viene data all'uso delle immagini e degli artefatti (come le bacchette da calcolo) e quindi alla struttura semiotica relativa ai diversi registri utilizzati nelle rappresentazioni che si ritrovano nei testi (*lingua-figura-artefatto*):

Fig. L'uso di artefatti in un testo di Scuola Primaria cinese

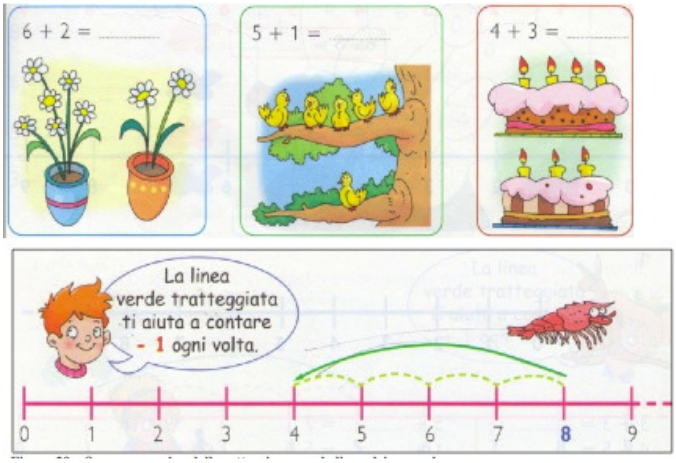


Fig. Problemi con elementi figurali disgiunti in un testo di scuola Primaria italiano

I libri di testo come strumento per ripensare la formazione degli insegnati di Matematica in un'ottica interculturale.

Ripensare alla formazione degli insegnati significa anche interrogarsi sulle nuove problematiche che oggi la Scuola pone. Il problema scientifico che si "nasconde" dietro la formazione degli insegnati di Matematica in un'ottica interculturale ha, come detto, chiaramente proporzioni molto ampie che coinvolgono aspetti relativi alla conoscenza matematica, alla Pedagogia, alle didattiche disciplinari e alle competenze culturali in generale. Ciò che io, durante il corso/seminario, cercherò di affrontare, partendo dalle analisi discusse in precedenza sui libri di testo, sarà una riflessione sulle analogie e le differenze di processi cognitivi che possono riscontrarsi in alunni di cultura differente da quella italiana (cinese, nello specifico) ripensando in modo critico al proprio modo di fare didattica della Matematica in classe con il libro di testo in adozione e favorendo possibilmente delle contaminazioni che vengono da lontano (Jullien, 2008).

Principali riferimenti bibliografici.

Cai J., Nie B. (2007). Problem solving in Chinese mathematics education: research and practice. *ZDM the International Journal on Mathematics Education*. 39, 459-473.

D'Ambrosio U. (2002). *Etnomatematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica.* Pitagora: Bologna.

D'Amore B. (2011). Alcune riflessioni su didattica, concetto, competenza, schema, situazione. *Bollettino dei docenti di matematica*. [Bellinzona, Svizzera]. 63, 19-26.

D'Amore B., Frabboni, F. (1996). *Didattica generale e didattiche disciplinari*. Milano: Angeli.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2001). Concepts et objets mathématiques. In: Gagatsis A. (ed.) (2001). *Learning in Mathematics and Sciences and Educational Technology. Vol. 1.* Nicosia: Intercollege Press. 111-130.

D'Amore B, Fandiño Pinilla M.I., Gabellini G., Marazzani I., Masi F., Sbaragli S. (2004). *Infanzia e matematica. Didattica della matematica nella scuola dell'infanzia*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (2011). Frasi illuminanti di studenti e di docenti in 40 anni di ricerca. In: D'Amore B., Sbaragli S. (Eds.) (2011). *Un quarto di secolo al servizio della didattica della matematica.* Atti del Convegno "Incontri con la matematica", n. 25, Castel San Pietro Terme (Bo). Bologna: Pitagora. 15-20.

Di Paola B., Spagnolo F. (2010). European and Chinese Cognitive Styles and their impact on Teaching/Learning Mathematics. *Journal of Mathematics Education*, 3, 2, 139-153.

Di Paola B., Spagnolo F. (2011). Quali le coordinate culturali e quali gli usi nell'insegnamento/apprendimento delle Matematiche nella relazione Cina-Europa. *Lettera Pristem.*

Fandiño Pinilla M. I. (2008). *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica*. Trento: Erickson. [Versione in lingua spagnola, 2010, Bogotà: Magisterio).

Leung F.K.S., Graf K.-D., Lopez-Real F.J. (Eds.), (2006). *Mathematics Education in Different Cultural Traditions: A Comparative Study of East Asia and the West*. Berlin: Springer.

Needham J. (1981). *Scienza e Civiltà in Cina*. Torino: Einaudi. (Original title: *Science and Civilisation in China*, Cambridge: Cambrige University Press, 1959).

Nisbett R.E (2003). *The Geography of Thought*. London: Nicholas Brealey Pbl.

Nisbett R.E., Peng K., Choi I., Norenzayan A. (2001). Culture and Systems of Thought. *Psychological Review*. 108, 291.

Ramploud A., Di Paola B. (2013). Taking a look at Chinese pedagogy in shuxue [mathematics]: a dialogue between cultures to approach arithmetic at first and second Italian primary classes. *CERME Proceedings*. (In corso di stampa).

Spagnolo F. (1986). Sull'impostazione di certi metodi risolutivi dei problemi nella tradizione cinese. *L'insegnamento della Matematica*. 9, 8, 81-91.

Spagnolo F., Di Paola B. (2010). *European and Chinese Cognitive Styles and their impact on Teaching Mathematics*. Berlin: Springer.

Spagnolo F. (2011). Come mi sono interessato alle questioni cinesi? *Lettera Pristem*.

Jullien F. (2006). *Si parler va sans dire. Du logos et d'autres resources*. Paris: Edition du Seuil.

Sun X. (2011). "Variation problems" and their roles in the topic of fraction division in Chinese mathematics textbook examples. *Educational Studies in Mathematics*. 76, 1, 65-85.

Zan R., Poli, P. (2010). Winning beliefs in mathematical problem solving. *Mathematics Education*. 1, 2, 97.

Martha Isabel Fandiño Pinilla (NRD, Università di Bologna)

Diverse componenti dell'apprendimento della matematica.

1. Premessa.

Quando uno studente fallisce in matematica è troppo sbrigativo dire che non ha raggiunto gli obiettivi attesi; in realtà, in che cosa ha fallito? Non ha capito i concetti? Li ha capiti ma non sa usarli per risolvere problemi? Non sa effettuare i calcoli, o li sa effettuare ma non sa a che scopo? Ha costruito i concetti ma non li sa comunicare? Ha risolto un problema ma non sa dire come? Non sa gestire i cambi di rappresentazione semiotica che sempre la matematica richiede fin dai suoi primi passi? In generale, la presenza di *errori* sistematici e ripetuti al termine di un percorso di apprendimento è ovviamente un segno del fatto che l'apprendimento non è avvenuto come avrebbe dovuto, e l'insegnante è posto di fronte al problema del *recupero*.
Cosa fare? Si parte naturalmente esaminando quel che succede in aula durante le ore di matematica, provando a porci le domande precedenti, chiedendoci: come aiutare a risolvere il problema della valutazione in matematica, di una valutazione specifica, che sia d'aiuto a tutti, che permetta di intervenire sulle cause del fallimento? Dire di uno studente: «Bruno non risponde in matematica come io mi aspetterei di sentirmi rispondere», cioè: «Bruno sbaglia», è troppo banale. E adesso, come rimedio alle cause che hanno portato Bruno a sbagliare?
Ma come si fa ad intervenire per *recuperare*, se non si sa determinare con precisione la *causa* dell'errore? Uno stesso errore può avere cause molto diverse, ovviamente, e dipendere da problemi distinti e specifici dell'apprendimento.
Il problema per l'insegnante è quindi quello di "analizzare" (nel senso di "guardare in maniera analitica") l'apprendimento degli allievi; di disporre di categorie che gli permettano di "scomporre" i diversi fenomeni dell'apprendimento della matematica, che rimane ovviamente un fatto sostanzialmente unitario.
La nostra esperienza ci dice che gli atteggiamenti errati degli studenti possono riguardare fallimenti nell'acquisizione dei concetti, incapacità nella gestione degli algoritmi, mancanza di strategia nella risoluzione dei problemi (uno studente può aver concettualizzato, saper eseguire algoritmi, ma impantanarsi di fronte ad un problema da risolvere; è un caso piuttosto diffuso), non adeguata comunicazione (è il caso dello studente che sa ma che non sa come comunicare quel che sa) o infine una fallimentare gestione dei registri semiotici (forse il fallimento più diffuso, soprattutto nella scuola secondaria). Vi possono essere due di questa cause contemporaneamente o anche tre, ma difficilmente vi sono tutti e cinque i fallimenti contemporaneamente …
Si può così dividere l'apprendimento della matematica virtualmente in 5 componenti, studiandole una per una come fossero tra loro separate e dando per ciascuna suggerimenti sulla valutazione specifica.
È ovvio che la matematica è una e che l'apprendimento è uno solo, lo ribadiremo più volte, e che dunque questa suddivisione in componenti è puramente di comodo, è solo uno strumento per cercare di rimediare alle cause degli errori e uno strumento per valutare in modo specifico.
Ma la nostra esperienza mostra come questo metodo funzioni e quanto sia pratico; l'abbiamo proposto in molte situazioni di formazione, soprattutto in servizio, e si è rivelato eccellente.

L'apprendimento della matematica, forse il più studiato fra gli apprendimenti disciplinari, si presenta come un fattore multiplo, ricco di mille aspetti: è sotto gli occhi di tutti gli insegnanti il fatto che un apprendimento riuscito in matematica è da considerarsi un'ottimale combinazione di apprendimenti specifici e distinti. In matematica, infatti, non basta aver *costruito* un concetto, ma occorre saperlo *usare* per effettuare calcoli o dare risposta ad esercizi, combinarlo con altri e con strategie opportune per *risolvere* problemi, occorre saper *spiegare* a sé stessi ed agli altri il concetto costruito e la strategia seguita, occorre saper far uso sapiente delle trasformazioni semiotiche che permettono di *passare* da una rappresentazione ad un'altra.
Queste considerazioni ci mostrano la complessità ma anche la radicale specificità del tema, e ci fanno vedere la necessità di progettare una valutazione che tenga conto di queste articolazioni.
A scanso di equivoci, ripetiamo che queste "componenti" dell'apprendimento non sono né indipendenti, né separabili, né ad intersezione vuota tra loro; il risultato positivo nell'apprendimento si raggiunge solo grazie ad una serie di concause, ad un insieme olistico di componenti: però dobbiamo tenerne conto in ogni

momento del nostro lavoro di classe, per evitare che- senza quasi che ce ne accorgiamo, passando per contratto didattico dal nostro agire a quello degli allievi- una prenda il sopravvento sulle altre, vanificando molta dell'efficacia del nostro lavoro. Pensiamo ad esempio all'enfasi che un tempo si poneva sul *far di conto*; o, per altri aspetti, alle prassi valutative basate esclusivamente su test a risposta chiusa, o al non considerare importante che un allievo sappia anche *spiegare* quello che fa: tutti comportamenti che, alla lunga, portano a un apprendimento "zoppo" della matematica.

Lo sforzo dell'insegnante deve essere quindi quello di condurre un'analisi fine e specifica degli apprendimenti, trattandoli sia in maniera indipendente, che nel loro intreccio. Di fronte allo stesso *errore* di due studenti diversi l'insegnante va dunque alla ricerca della *causa* che ha prodotto quell'errore, e questo significa ricercare quale è stato il malfunzionamento cognitivo, e in definitiva che cosa non ha funzionato nel processo di insegnamento – apprendimento.

Riassumendo, l'apprendimento della matematica comprende almeno 5 tipologie di apprendimenti distinti, anche se non del tutto privi di sovrapposizioni e intrecci, riconducibili a diversi àmbiti cognitivi:

- apprendimento concettuale (noetica);
- apprendimento algoritmico (calcolare, operare,…);
- apprendimento di strategie (risolvere, congetturare,…);
- apprendimento comunicativo (dire, argomentare, validare, dimostrare,…);
- apprendimento e gestione delle trasformazioni semiotiche (di trattamento e di conversione).

Questa partizione non va presa alla lettera, dato che queste componenti si intrecciano e si rafforzano l'un l'altra; tuttavia essa offre una indubbia comodità di analisi e di lettura interpretativa degli errori, cioè di quelle manifestazioni di malessere cognitivo alle quali sarebbe bene voler porre rimedio con successo, in modo efficace. Non è nemmeno detto che la loro unione riesca a comprendere tutte le componenti dell'apprendimento matematico e che dunque un'analisi più fine non riveli altre componenti necessarie.
Quello che è certo, è che ognuno di questi apprendimenti ha bisogno di specifici modelli di valutazione e richiede specifiche pratiche di rinforzo e recupero nei casi difficoltà. Appoggiare su queste categorie l'azione di ingegneria didattica può aiutare l'insegnante a organizzare meglio il proprio lavoro, coordinando l'insegnamento con gli obiettivi di apprendimento.
Solo a mo' di esempio, abbiamo usato insieme a docenti di scuola primaria una lettura specifica di ciascuna delle componenti della matematica di quel livello; se, come si usava dire allora, pochi anni fa, la matematica è l'insieme di componenti disciplinari come numeri, figure, dati, misura e pensiero razionale (trasversale), allora ciascuna di tali componenti disciplinari può essere analizzata attraverso le cinque componenti di prima e fornire utili indicazioni su come operare didatticamente e come rimediare a situazioni di fallimento apprenditivo.

2. Apprendere la matematica e valutare tale apprendimento è una sfida complessa.

Oggi tutti concordiamo sul carattere "costruttivo" dell'apprendimento: apprendere un concetto matematico, apprendere a fare uso di un algoritmo, a comportarsi in modo strategico, a comunicare matematica, sono tutti atteggiamenti *costruttivi*; ma non si può costruire se non c'è un impegno personale, un mettersi in gioco che impegna sé stessi. Il primo attento interprete della costruzione di un apprendimento è colui che costruisce, dunque una delle prime azioni didattiche consiste nell'insegnare strategie, nello spingere a riflettere sulle proprie strategie personali, per percepirle come proprie, per valutarle. L'apprendente è l'autore principale della costruzione di apprendimento e della valutazione di esso.
Ma la valutazione non riguarda solo lo studente.
Una delle funzioni che più caratterizzano l'azione dell'insegnante in aula è la costante "valutazione" della propria azione didattica, del segmento curricolare scelto e del processo di apprendimento dei propri allievi. Rispetto a questo ultimo aspetto, il termine "valutazione" si intende come l'insieme delle azioni mediante le quali si riconoscono le caratteristiche apprenditive degli studenti e si determinano gli aspetti nei quali si deve centrare l'aiuto che permette di garantire al meglio questo apprendimento. In questa cornice di azioni, l'insegnante deve prestare attenzione agli strumenti attraverso i quali misura il giudizio su ciascun individuo, in relazione con l'apprendimento della matematica. Non si può e non si deve pensare ad un unico strumento per questa valutazione perché la ricerca ha messo in evidenza la *necessità* di far uso di vari e diversificati

strumenti. Il portfolio[6] è solo *uno* degli strumenti; esso offre una grande varietà di possibilità dato che, al suo interno, si può evidenziare ciascuno degli aspetti che fanno parte dell'apprendimento della matematica:
apprendimento concettuale,
algoritmico,
strategico,
comunicativo,
semiotico.
Per ciascuno di questi quattro aspetti, fornirò esempi di uso del portfolio. Si tratta, ripeto, *solo* di esempi che l'insegnante potrà usare per creare a sua volta occasioni per i propri allievi, adatte alla classe ed in conformità con la sua "storia di classe". Gli esempi sono scelti a vari livelli, per classi distinte; sta all'insegnante, una volta capito lo spirito, adattarli, modificarli, sceglierne altri, più efficaci.
I successivi suggerimenti concreti servono a ridare al portfolio la sua funzione di strumento di valutazione, anzi di strumento che permette di collaborare alla propria autovalutazione; il portfolio non è dunque riducibile, come in certi contesti appare, ad una raccolta di schede di valutazione preconfezionate; è strumento attivo e costruttivo, di forte impatto cognitivo.

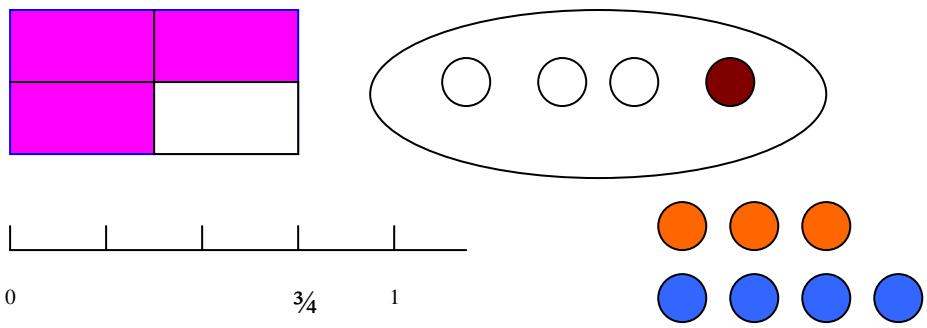
3. Apprendimento concettuale.

Appare evidente il fatto che in matematica si costruiscono concetti. Un concetto si considera costruito quando l'allievo è in grado di identificare proprietà del concetto, di rappresentarlo, di trasformare tale rappresentazione, di usarla in modo opportuno. Ecco quindi che risulta interessante, per il portfolio, creare occasioni nelle quali gli studenti abbiano la possibilità di mostrare di aver costruito concetti. Si può usare la tecnica del TEP (una sigla tedesca, molto usata in didattica, per identificare "testi scritti di matematica prodotti in modo autonomo"). L'insegnante deve creare gli stimoli giusti.

Tu sei un allievo che sta iniziando la II superiore; mentre vai a scuola, una mattina, incontri un compagno più giovane, che sta iniziando la I; egli è spaventato perché qualcuno gli ha detto che in I dovrà studiare le equazioni; siccome questo tema tu l'hai già studiato, proprio in I, lo tranquillizzi dicendogli che non c'è nulla che deve spaventarlo, dato che si tratta di un tema facile e ti offri di anticipargli le cose più importanti sopra questo tema per iscritto. Questo è lo scritto che gli proponi: ...

Abbiamo appena terminato la unità "operazioni con i numeri razionali"; adesso, per organizzare quel che ho appreso, faccio una mappa concettuale (cioè uno schema con delle frecce) che include le parole chiave e le relazioni tra loro.

Spiega ad un bambino di I media che cos'è una frazione.
Osserva le seguenti figure. Quale di esse rappresenta meglio secondo te la frazione ¾?
Perché?



[6] L'autrice di questo articolo ha lunga esperienza di uso del portfolio nel suo Paese di origine, dove è stato introdotto nel 1992 soprattutto nella scuola secondaria superiore e dove fa ora parte integrante degli strumenti di valutazione. Proprio la lunga consuetudine le permette di essere critica (in senso costruttivo) rispetto all'uso di questo strumento, il sui senso appare a volte storpiato.

Maria e Giovanni hanno ciascuno una certa quantità di euro; Maria spende 1/3 dei propri soldi e Giovanni ½ dei propri. È possibile che Maria abbia speso più di Giovanni? Giustifica la tua risposta e fa degli esempi.

Molto utile per verificare apprendimenti concettuali è il ricorso alla storia della matematica, sempre più diffusa nelle scuole italiane dei vari livelli. La storia è molto adatta a considerazioni personali, a riflessioni, a ripassi, a discussioni, insomma: al portfolio.
Scegli l'affermazione con la quale concordi e giustificala:
I numeri usati dai Romani erano:

- molto interessanti perché usavano lettere
- inappropriati perché non si potevano fare le operazioni a mano come facciamo noi
- importanti, dato che ancora oggi si usano
- interessanti perché erano in base dieci.

Il sistema numerico dei Maya fu:

- importante perché era un sistema a base venti con solo 3 simboli
- molto importante perché comprendeva un uso perfetto dello zero
- per nulla interessante perché rimase isolato e non arrivò in Europa
- inappropriato perché la scrittura dei numeri grandi era troppo complicata.

4. Apprendimento algoritmico.

È in relazione con l'abilità nel dare la risposta alle operazioni, al calcolo, all'applicare formule o al disegno di figure usando strumenti opportuni.

Trova il procedimento più efficace per risolvere ciascuna di queste situazioni e giustifica la tua risposta; puoi scegliere tra calcolatrice, calcolo mentale, calcolo a mano, altra tecnica (in tal caso, descrivila):

- qual è il resto della divisione 4567:230?
- se una matita costa 0,75€, quanto costano 10 matite?
- qual è la radice quadrata di 576?
- trova la somma dei primi cento numeri naturali a partire da 1
- esegui: 2356-1356
- esegui: 300+450+200

Sai che 35-20=15; quanto fa 35-19? Uno in più o uno in meno di 15? Perché?

5. Apprendimento strategico.

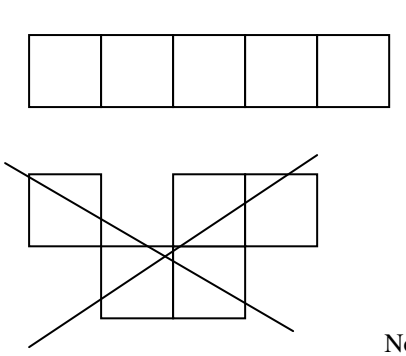
Si cerca di potenziare e di dare importanza a procedimenti e strategie che si usano quando si risolve un problema. Bisogna arrivare a convincere tutti gli studenti che quel che conta sono i processi e non i prodotti.

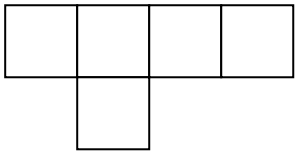
L'insegnante può disegnare, per ciascun allievo, una tabella che contenga i diversi aspetti del processo di risoluzione di un problema: comprensione del problema, trasformazione o traduzione dell'enunciato in una forma algebrica, scelta e uso delle strategie, validazione della risposta.
Per esempio:

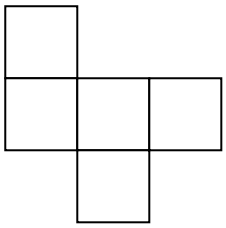
Aspetti da valutare	**Sì**	**No**	**In parte**	**Osservazioni**
Comprende il problema				
Presenta diverse strategie				
Spiega la(le) strategia(e) usata(e)				
Sviluppa coerentemente la strategia				
Presenta una soluzione				
Verifica la soluzione				
Difende la soluzione data (validazione)				
…				

Con una calcolatrice, trova tre numeri il cui prodotto sia 2431. Annota passo per passo quel che fai per trovare la risposta.

Un utile strumento, molto adatto ad attività sui poligoni, sono i pentamini, cioè figure formate da 5 quadratini tutti identici che devono essere accostati lato a lato. Ecco alcuni esempi:







Non è un pentamino, dato che due quadratini sono uniti per un vertice e non per un lato.

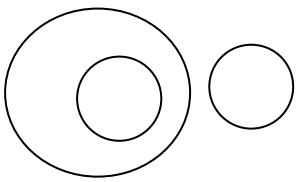
Attraverso questi "giochi", gli allievi mettono in moto strategie anche complesse (e discussioni).
Quanti sono i possibili pentamini? Quali di essi possono essere usati per ricoprire un pavimento? È possibile formare con dei pentamini un rettangolo 12×5? Tutti i pentamini hanno la stessa area? E lo stesso perimetro? Che cosa puoi dire sui pentamini? Fa tu stesso qualche scoperta.

6. Apprendimento comunicativo.

Questo aspetto dell'apprendimento matematico, troppo spesso dimenticato o sottaciuto, cerca di mettere in evidenza la capacità di esprimere idee matematiche o, più in generale, logiche, giustificando, argomentando, dimostrando (in forme adatte allo studente, sia per orale che per iscritto) e rappresentando in modo visivo con figure.

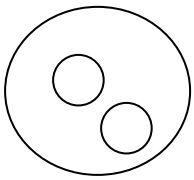
Gli Egizi e la matematica.
La tua attività consiste nel raccontare ai compagni gli apporti matematici di questa civiltà, tanto in geometria come in aritmetica ed in architettura; puoi fa uso di informazioni prese da libri di storia o di matematica, da Internet o da Enciclopedie. Illustra il tuo lavoro con disegni, i quali posso essere realizzati da te stesso o presi direttamente dalle fonti di consultazione. Cerca di introdurre nel tuo lavoro una descrizione sulla organizzazione sociale, politica ed economica degli Egizi, stabilendo una relazione con la matematica che essi usavano.[7]

Il seguente schema

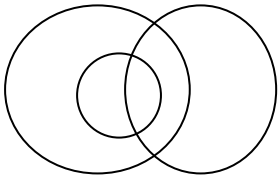
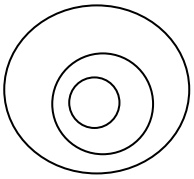
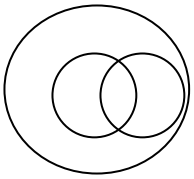
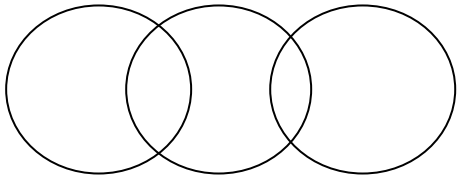
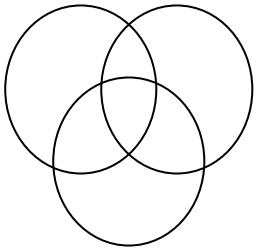


si può interpretare così:
tutti i canarini sono uccelli
nessun gatto è un uccello.
Come si può interpretare il seguente schema:

[7] Esattamente questo tema è stato utilizzato nell'ambito del Progetto Nazionale di Ricerca MIUR "Lauree scientifiche" a Bologna, nell'anno accademico 2005-06, con inaspettato successo.



usando i termini: libri, quotidiani, oggetti stampati?
Se l'insegnante lo ritiene opportuno, può dare altri schemi analoghi, come i seguenti:

suggerendo sostantivi adatti alle diverse situazioni:
Romani, Italiani, Europei
donne, medici, persone con gli occhi azzurri
Italiani, scienziati, persone
musicisti, artisti, calciatori professionisti
rane, anfibi, cavalli
numeri dispari, numeri primi, numeri naturali
triangoli, quadrilateri, poligoni
e ponendo domande come le seguenti:

- Scegli lo schema che ti sembra più adeguato a ciascuna situazione descritta
- Spiega la scelta che hai fatto
- Proponi altri esempi che possano essere rappresentati con ciascuno schema.

Questa attività didattica, molto praticata in vari Paesi del mondo, costringe alla discussione, al dialogo, dunque alla comunicazione.

7. Conclusione.

L'apprendimento della matematica è complesso, visto che è formato da varie componenti, almeno le quattro qui descritte.
Dunque, al momento della valutazione, è importante distinguere almeno queste, arrivando a concepire, per ogni allievo, una tabella siffatta:

Nome:	**Prova 1, data**	**Prova 2, data**	**…**	**Portfolio**	**Totali**
Apprendimento concettuale					
Apprendimento algoritmico					
Apprendimento strategico					
Apprendimento comunicativo					
Note					

Bibliografia.

D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.
D'Amore B., Godino JD., Arrigo G., Fandiño Pinilla MI. (2003). *Competenze in matematica*. Bologna: Pitagora.
Fandiño Pinilla M.I. (2002). *Curricolo e valutazione in matematica*. Bologna: Pitagora.
Radford L., Demers S. (2006). *Comunicazione e apprendimento. Riferimenti concettuali e pratici per le ore di matematica*. Bologna: Pitagora.
Fandiño Pinilla M.I. (2006). L'apprendimento della matematica e la sua valutazione: una sfida complessa. *Riforma & Didattica*. 4, vol. 10. 49-53. Editore: Falzea, Reggio Calabria.
Fandiño Pinilla M.I. (2008). *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica*. Prefazione di Giorgio Bolondi. Trento:Erickson.

Annarita Monaco (Roma, RDDDM Bologna)

Mondi matematici in aula: tra creazione, comunicazione e discussione

1. La matematica in aula.

Gran parte del tempo, nelle ore di insegnamento della matematica della scuola primaria, è dedicato alle classiche attività di sempre: hanno un grande spazio le spiegazioni di noi docenti che prevedono, a seconda delle convinzioni personali, un coinvolgimento più o meno attivo degli allievi. Si eseguono frequentemente calcoli scritti e mentali; si studiano le caratteristiche delle figure geometriche; si calcolano di esse l'area e il perimetro; si producono colonnine per la rappresentazione di dati statistici; si risolvono problemi che, nella maggior parte dei casi, sono esercizi; si fa molto altro. I libri di testo sono il riferimento essenziale dei docenti. L'obiettivo è quello di far costruire conoscenze, in riferimento alle Indicazioni ministeriali.
Negli ultimi anni, si sta curando molto di più la costruzione di prove che permettano di misurare se ci sia stato effettivo apprendimento da parte degli alunni. Si sta diffondendo, maggiormente, la cultura della valutazione. Si creano, spesso, prove ad uso interno degli istituti scolastici, ma ciò avviene con estrema difficoltà, perché si tratta di un lavoro scientificamente complesso, che quasi sempre i docenti non riescono da soli ad affrontare. Molti docenti "subiscono" le prove InVALsi, vivendole con tensione, e il timore di veder crollare il loro mondo di certezze professionali. Anche le gare di giochi matematici, proposte da varie Università, mettono in crisi allievi e docenti: i quesiti si rivelano essere molto diversi dalle esercitazioni d'aula. Molti alunni "bravi" cadono. Ma un insegnante, avvezzo a mettere in discussione continuamente il suo lavoro, dovrebbe innanzitutto chiedersi: "Che tipo di apprendimento attivo io in aula? Quali tipi di apprendimento richiedono i giochi matematici? E le prove InVALsi?". Essere a conoscenza delle diverse componenti dell'apprendimento matematico (algoritmico, strategico, concettuale, semiotico, comunicativo) (Fandiño Pinilla, 2008) dovrebbe poi condurre il docente a scegliere di effettuare un'analisi critica del proprio lavoro. Se l'alunno ha fallito, perché ciò è accaduto? Non ha capito i concetti? Li ha capiti ma non sa usarli per risolvere problemi? Non sa effettuare i calcoli, o li sa effettuare e non sa a che scopo? Ha risolto un problema ma non sa dire come ha fatto? Non sa gestire i cambi di rappresentazione semiotica che spesso la matematica richiede? (Ibidem). Se un docente vuole comprendere quali sono le motivazioni di un insuccesso, deve effettuare un'attenta analisi per arrivare a determinare la causa dell'errore (Zan, 2007).
Un docente che ha approfondito questi argomenti utilizza in modo attivo e critico gli strumenti di lavoro che ha a sua disposizione: le guide didattiche, i libri di testo, le proposte acquisite nei corsi di formazione in servizio.
È sicuramente opportuno, in ogni caso, che i bambini siano chiamati ad affrontare diverse "sfide" matematiche; l'importante è che si tratti di prove ben costruite. Non può che essere utile al docente, il ricercare, ogni volta, quali possano essere i motivi di eventuali impasse degli alunni, se vuole effettivamente curare, nelle pratiche d'aula, tutte le componenti dell'apprendimento matematico.

2. Una matematica di senso.

La matematica che si fa in aula può non bastare a giustificare sé stessa. Si deve confrontare, inevitabilmente, con quella che si riscontra e che vive esterna all'aula, che spesso è rappresentata e proposta in modo diverso.
Sempre di più, in questi ultimi anni, si sente parlare del "senso da dare alla matematica". Per l'anno 2014, per esempio, la redazione di *Euclide*, un giornale di matematica per i giovani, ha proposto come tema di concorso agli allievi, dalla quarta primaria all'ultimo anno della scuola secondaria, il tema: *Come sarebbe la nostra vita senza la matematica*. Lo scopo è quello di sensibilizzare gli allievi alle numerose applicazioni dirette e indirette che la matematica può avere nella vita quotidiana… La matematica si incontra dappertutto; è nelle espressioni della natura, così come è nelle creazioni culturali umane (D'Amore, 2007).
Come docente, da tempo mi chiedo: "A cosa serve quel che propongo in aula? Qual è il senso del lavoro che svolgo? Come mai gli alunni si mostrano più o meno coinvolti? Ha qualche relazione ciò con il senso (o il non senso) dato da me alle diverse attività e il senso (o non senso) percepito dai miei alunni?". Sappiamo, certamente, a che cosa serva il saper eseguire calcoli, il conoscere ed utilizzare i diversi sistemi di misura... Ma la questione è da porre, a mio avviso, in altri termini: i modi di pensare, di rappresentare, di comunicare

la matematica è diverso nei vari contesti di esperienza. È quasi come se mondi matematici si sviluppassero in parallelo, incontrandosi solo occasionalmente.
Nel progettare il nostro lavoro per l'aula, seguiamo delle regole e dei canoni abbastanza fissi e "sicuri" per noi, ma in questo modo rischiamo di lasciare inesplorata tutta quella matematica che è nel mondo fuori dell'aula, e nei mondi dei bambini. Rischiamo di tralasciare risorse e occasioni che potrebbero arricchire la didattica in aula e coinvolgere le classi in attività nuove e dotate di senso.

3. Creare in aula.

Spesso in aula si percepisce un adultocentrismo esagerato; come insegnante, mi interrogo spesso: "Quanto spazio riservo all'espressione delle idee dei bambini? Ai loro pensieri e alle loro riflessioni? E alle loro culture?". Nei loro disegni, nelle storie immaginate, nei loro giochi elettronici, nei sogni, ci sono mondi che io non conosco. È utile senz'altro usare le pagine dei libri di testo, le storie e le situazioni in esse contenute; ma questo spesso non mi dà modo di sentire e parlare con i bambini, per fare emergere quel che di unico e nuovo è nella loro immaginazione e nei loro vissuti. Anche la matematica c'entra con tutto questo. Se mi pongo in una situazione di osservazione e riservo del tempo all'ascolto, posso entrare in questi mondi, aiutare i miei allievi a farli emergere e ad esprimerli. Successivamente, sarà più significativo per loro incontrare il mio mondo di docente e adulto, e anche i mondi di altri, piccoli o adulti che siano (per esempio, gli autori dei libri di testo).
Esemplifico. Presento a bambini di prima classe la seguente proposta di lavoro: "Pensa alla matematica che è intorno a te e rappresentala nel modo che vuoi: con il disegno, con le parole, con i gesti; come vuoi... Poi, insieme, capiremo di che matematica si tratta".
Luca, classe prima primaria, mi mostra un disegno, corredato dal seguente testo: L'uovo persona. Luca ha realizzato un uovo di Pasqua a forma di persona: Annarita (*è la sua maestra*). Lei ha un jeans bluette. Sulla gamba sinistra ci sono: 5 fiori e una tasca, sulla gamba destra altri 5 fiori e un'altra tasca. La cintura ha 4 passanti e una fibbia; la camicetta è rosa e ha 4 bottoni viola al centro. Intorno al collo ha una collana con 17 perle e un ciondolo.

Uno dei disegni matematici

Quanti disegni ho visto in questi trent'anni; eppure, prima di pochi anni fa, non avevo mai pensato di valorizzare un disegno per fare matematica. L'idea di Luca, allora, la rilancio ai compagni di classe: "Che ne dite di produrre altri disegni matematici, sull'idea che Luca ha seguito, ma di diverso contenuto?".

I risultati sono sorprendenti: disegni e testi, ricchi di numeri, e dei loro significati diversi; di figure, di misure; in essi si evidenzia un uso spontaneo di rappresentazioni varie in registri semiotici diversi, e molto altro. C'è tanta matematica: da ricercare, analizzare, capire. E siamo solo in prima classe.
Lavorare in piccoli gruppi, per produrre storie matematiche, è un'altra esperienza avvincente, ad ogni livello di classe; nascono situazioni in cui si tratta di misurare, calcolare, risolvere problemi, applicare frazioni, effettuare equivalenze. Anche le storie sono espressioni dei mondi dei bambini, rappresentano i loro vissuti, sono ispirate dalla vita reale, rimandano a situazioni vere e non fittizie. È bello anche leggere testi letterari classici, scoprire la matematica presente in essi oppure proprio rielaborarne, in chiave matematica, alcune parti. Ma ecco che siamo entrati già nell'altro aspetto: quello della comunicazione; spesso le creazioni sono più ricche se sono il frutto di un lavoro di comunicazione tra più bambini.

4. Comunicare in aula e oltre l'aula.

Così come gli autori adulti sentono l'esigenza, a un certo punto, di comunicare ad altri le loro creazioni, anche in aula può nascere lo stesso desiderio, se i bambini percepiscono che anche questa può essere un'attività dotata di senso.
Facciamo anche qui un esempio. L'insegnante propone in classe seconda: "Vi piacerebbe creare una storia matematica, da disegnare, scrivere, sceneggiare e rappresentare a bambini di scuola dell'infanzia?". I bambini si attivano e producono diverse storie ma, in seguito a un discussione collettiva, solo due sembrano essere più adatte e coinvolgenti.
E in classe terza l'insegnante propone: "Ora che siete esperti di progettazione e di scrittura, potremmo pensare a giochi matematici da ideare, costruire, sperimentare con bambini di altre classi". I bambini progettano giochi di percorso, che poi diventano anche giochi da tavolo, adattati appositamente nel formato e nelle regole.
La proposta dell'insegnante viene accolta con entusiasmo, a tal punto da coinvolgere anche i genitori, per un aiuto concreto, e i fratelli, per provare l'efficacia dell'oggetto in costruzione. Nascono diversi giochi, da presentare e sistemare. Tali prodotti arrivano in aula e in essa sono sottoposti a revisione critica nel corso di una discussione collettiva: se ci sono delle regole che non convincono, se alcuni passaggi sembrano monotoni o farraginosi, si effettuano alcuni cambiamenti. E infine i giochi sono supervisionati dall'insegnante, che può anche analizzare il gioco da un punto di vista un po' più "dotto". Il gioco "Pietruzze e numeri", per esempio, nato per i bambini della scuola dell'infanzia, inizialmente prevede l'uso di cartelli dove i numeri sono rappresentati solo con le cifre arabe. L'insegnante sollecita i bambini in questo senso:" Possiamo rappresentare i numeri in modi diversi?". Accade così che gli autori-costruttori realizzano nuovamente i cartelli rappresentando i numeri anche con parole e disegni. Dal punto di vista semiotico, il gioco sarà più ricco e stimolante pei i suoi fruitori!

Il gioco" Pietruzze e numeri" di Riccardo e Andrea

In classe quarta, l'insegnante propone: "Abbiamo studiato i sistemi di numerazione di diverse culture. Ve la sentite di preparare una lezione? Con essa potete cercare di spiegare l'argomento ad alunni di un'altra classe e magari di appassionarli all'argomento".
In classe quinta, l'insegnante domanda: "Ma quali sono i problemi matematici che i vostri genitori, nella loro vita quotidiana, si trovano ad affrontare? (Bolondi, 2005). Fate loro un'intervista: per capire meglio".
Un possibile problema che può nascere in famiglia può essere il seguente. Ci si trova nelle condizioni di dover organizzare una cena per 8 persone. Si hanno a disposizione 90 euro. Il compito è di pensare a cosa si vuole preparare da mangiare. La famiglia consulta le offerte di un Supermercato alimentare e cerca di organizzare la cenetta più allettante possibile, non spendendo un euro in più della somma a disposizione. Ma si tratta solo di un esempio. In ogni famiglia ne può sorgere uno diverso; può essere affrontato a casa, e poi raccontato in aula, oppure risolto in aula, da piccoli gruppi, per poi essere narrato a casa.
In questo gioco di ideazione, realizzazione comune, comunicazione, rilancio di nuove idee, l'aula e il "mondo fuori dell'aula" non sono più estranei; non si guardano con sospetto, ma sembrano essere, naturalmente, assolutamente, in continuità.
Aprire l'aula alla realtà, e portare nella realtà l'aula, fa scattare meccanismi nuovi nel processo di insegnamento-apprendimento. Il nostro diventa un ruolo di regia; le metodologie scelte facilitano l'espressione e il coinvolgimento dei bambini, che cooperano con i pari, fanno da tutor ai più piccoli, impegnati in esperienze che coinvolgono attori interni o esterni alla vita scolastica. Ciò che maggiormente fa da sfondo prezioso è la realizzazione di un clima di dialogo, di ascolto, di confronto, di costruzione di prodotti a più mani e a più voci.
Vivere esperienze in contesti diversi dall'aula può spiazzare un po', ma sicuramente motiva gli alunni a mettersi in gioco completamente, a impegnarsi con la mente, l'anima e il corpo. Quando si tratta di raccontare una favola matematica ai piccoli, sono da mettere in campo tutti i registri di comunicazione; le parole devono essere quelle giuste, i tempi adeguati, la comunicazione affettiva indispensabile.
E i piccoli, al contrario, devono "mettere in mostra" tutto il loro repertorio linguistico, sbloccare la loro emotività… e tutto questo ha molto a che vedere con la capacità di comunicare la matematica vissuta o appresa.
I bambini vivono la maggior parte della loro vita fuori della scuola e, in questi ambienti extrascolastici, sperimentano tantissima matematica; ma quasi sempre non c'è chi li affianca nel leggere, interpretare, interiorizzare le situazioni vissute. C'è in qualche caso chi ha l'idea, l'intuizione, realizza autonomamente l'aggancio o trova la soluzione, ma noi dobbiamo pensare a tutti gli altri, pur facendo tesoro di ciò che osserviamo in alcuni.
Spesso i genitori sono visti dai docenti come un ostacolo, come adulti che stanno lì a giudicare, o a interferire, sulla base di esperienze desuete e remote, nel nostro lavoro di insegnanti "innovativi" e "sperimentatori". Ma chiediamoci quanto noi abbiamo cercato di coinvolgerli nel nostro progetto, quanto noi stessi siamo convinti che il nostro progetto riesca a incidere nella formazione e nella "vita vera" dei nostri alunni.

5. La narrazione matematica.

La narrazione è un processo cognitivo attraverso il quale mettiamo ordine nel mondo e nella nostra esperienza; ci permette di avere uno sguardo particolare che va in fondo alle cose, ne coglie il significato profondo, il senso più pieno, l'essenzialità.
La memoria, il ricordo, l'evocazione, sono strumenti potenti di comunicazione. Ritroviamo quel che abbiamo vissuto e lo fermiamo con diversi mezzi, tra cui la scrittura. Ricapitoliamo quel che abbiamo visto, ascoltato, inventato, prodotto nel corso delle nostre esperienze; ciò che ci ha impegnato mentalmente ed affettivamente (Giusti, Batini, Del Sarto, 2007). L'assunzione di una consapevolezza personale, ma anche costruita collettivamente, può essere l'occasione per realizzare un prodotto comune, fatto di parole, di immagini, mediante l'uso di spazi e di tempi, inventati appositamente per comunicare agli altri ciò che si è realizzato. Gli attori stessi assumono, nello stesso tempo, una consapevolezza ancora maggiore. E allora possiamo pensare a una mostra didattica: che non sia la solita, fatta solo di cartelloni e didascalie (D'Amore, Giovannoni, 1997). Oppure a un dossier illustrato, o anche a una presentazione in power point. In questo modo una classe esce finalmente "dall'aula" per presentare il lavoro "dell'aula"; nello stesso tempo è ancora più motivata a restare "in aula": essa è diventata un luogo di progettazione privilegiata, di raccolta delle idee,

di confronto e di discussione, dove necessariamente si deve pervenire ad una composizione delle divergenze, in quanto dovrà essere prodotta una comunicazione per chi in aula non è stato. Questa prassi, che può essere comune a percorsi disciplinari di ogni tipo, è particolarmente interessante per la matematica, nella quale troppo poco spazio è stato dato, ed è tuttora dato, alle parole, alla comunicazione, all'argomentazione.

Bibliografia

Bolondi G. (2005). *La matematica quotidiana.* Milano: Mimesis.

D'Amore B. (2007). *Matematica dappertutto*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I., Iori M. (2013). *Primi elementi di semiotica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B., Giovannoni L. (1997). Coinvolgere gli allievi nella costruzione del sapere matematico. Un'esperienza didattica nella scuola media. *La matematica e la sua didattica*. 4, 360-399.

Fandiño Pinilla M. I. (2008). *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica.* Trento: Erickson.

Giusti S., Batini F., Del Sarto G.(2007). *Narrazione e invenzione*. Trento: Erickson.

Zan R. (2007), *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire. Milano: Springer-Verlag Italia*

Sitografia

http://www.euclide-scuola.org/

Rosetta Zan (Università di Pisa)

Difficoltà in matematica; 1ª puntata: Osservare; 2ª: Interpretare; 3ª: Intervenire.

1. Premessa.

In questo seminario farò riferimento all'intervento che ogni insegnante di matematica mette in atto per rimuovere difficoltà ed errori dei suoi studenti: un intervento che è quindi, nel mio modo di vedere, parte integrante della pratica didattica quotidiana, anche se a volte assume la forma di un corso specifico al di fuori dell'orario curriculare con un numero ristretto di studenti.
In altre parole ogni insegnante quotidianamente 'recupera', o cerca di recuperare: tanto che l'intervento diventa quasi automatico, e risulta quindi difficile individuare le scelte che lo caratterizzano.
In particolare spesso l'intervento di recupero è fallimentare. Ma questo fallimento viene a volte accettato con rassegnazione dall'insegnante, quasi fosse un evento incontrollabile, o comunque non dipendente dal particolare percorso seguito. Le cause del fallimento vengono infatti cercate altrove: le condizioni in cui si lavora (orari, programmi, classi numerose), o addirittura i destinatari stessi dell'intervento. Anche se l'influenza di questi aspetti è innegabile, qui vogliamo sottolineare l'importanza di analizzare quelle eventuali cause del fallimento che dipendono dalle scelte didattiche fatte e che sono quindi sotto il controllo dell'insegnante: senza questa analisi c'è il rischio di accettare il fallimento come inevitabile.
Viene in mente l'ultima scena del colloquio immaginario descritto nel libro *L'insegnamento come attività sovversiva* di Postman e Weingartnern (1974), in cui gli autori, attraverso varie tipologie di medici, descrivono in realtà altrettante tipologie di insegnanti. L'intero colloquio è molto bello, ma sono proprio le ultime battute che fanno riferimento al problema che qui ci interessa:

Il dottor Gillupsie ha chiamato molti dei suoi chirurghi interni del Blear General Hospital. Essi stanno per cominciare la loro relazione settimanale sulle varie operazioni compiute negli ultimi quattro giorni …
GILLUPSIE: E lei, Carstairs, come le vanno le cose?
CARSTAIRS: Temo di essere stato sfortunato, dottor Gillupsie. Niente operazioni questa settimana, ma solo tre pazienti morti.
GILLUPSIE: Bene; dovremmo parlarne un po', non le pare? Di che cosa sono morti?
CARSTAIRS: Non lo so con certezza, dottor Gillupsie, ma comunque ho dato a ciascuno di loro un bel po' di penicillina.
GILLUPSIE: Ah! Il sistema tradizionale della cura "buona di per se stessa", eh, Carstairs?
CARSTAIRS: Beh, non esattamente, capo. Pensavo solo che la penicillina li avrebbe fatti stare meglio.
GILLUPSIE: Per che cosa li stava curando?
CARSTAIRS: Insomma, stavano proprio male, capo, e io so che la penicillina fa star meglio gli ammalati.
GILLUPSIE: Certamente, Carstairs. Penso che lei abbia fatto bene.
CARSTAIRS: E i morti, capo?
GILLUPSIE: Cattivi, figlio mio, cattivi pazienti. E non c'è niente che possa fare un buon dottore quando si trova di fronte dei cattivi pazienti. E nessuna medicina può farci nulla, Carstairs.
CARSTAIRS: Eppure mi è rimasta ancora la seccante impressione che forse non avevano bisogno di penicillina, che servisse qualcos'altro.
GILLUPSIE: Sciocchezze! La penicillina non fa mai cilecca su dei buoni pazienti. Lo sanno tutti.
Al suo posto non mi preoccuperei troppo, Carstairs.

L'intervento di recupero è spesso usato come la penicillina: è comunque in genere un intervento 'locale', nel senso che cercheremo di spiegare. E cercheremo di spiegare anche perché a nostro parere da questa sua caratteristica discenda spesso l'esito fallimentare che ben conosciamo.

2. L'intervento di recupero tradizionale.

In generale, l'intervento tradizionale di recupero parte dall'osservazione di un errore o comunque di un processo risolutivo inadeguato.[8] L'errore viene considerato un segnale che c'è qualcosa che non va, ma non solo: il contesto in cui l'errore si è verificato diventa in modo naturale il contesto in cui ha luogo l'intervento di recupero.
Ma facciamo qualche esempio.

Esempio1. Alice, prima liceo classico, è alle prese con le equazioni.
$x^2=3x-2$
Procede così:
$x^2+3x+2=0$
e trova quindi le due soluzioni.

Esempio 2. Azzurra, scuola media, deve trovare il perimetro di un rettangolo che ha le basi di 12 cm e 8 cm.
La ragazza moltiplica 12 per 8.
L'insegnante la corregge: 'Ma perché moltiplichi? Devi trovare il perimetro …'.
E Azzurra: 'Divido?'

Esempio3. Nicola, terza liceo scientifico, deve risolvere la disequazione:[9]

$$-7x^2 < \sqrt{7}$$

Moltiplica ambo i membri per –1/7, ottenendo:

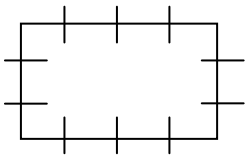
$$x^2 > -\frac{\sqrt{7}}{7}$$

Poi moltiplica per 7 e porta tutto al primo membro:

$$7x^2 + \sqrt{7} > 0$$

A questo punto si ferma.

Esempio 4. Alessandra, seconda liceo pedagogico, è alle prese con un problema di geometria: trovare l'area di un rettangolo, sapendo che il perimetro è 126 cm, e l'altezza è i ¾ della base.
Alessandra abbozza correttamente un disegno:



ma poi non conclude.

Come dicevamo all'inizio, l'intervento tradizionale di recupero parte dall'osservazione di un errore o comunque di un processo risolutivo inadeguato. Tale errore, o processo risolutivo inadeguato, è considerato segnale non solo del fatto che qualcosa non va, ma anche del fatto che qualcosa non va *proprio in quel contesto in cui l'errore (o il processo risolutivo inadeguato) si è verificato*. Tale contesto diventa quindi in modo naturale quello in cui ha luogo l'intervento di recupero, basato in genere sulla ripetizione degli argomenti ritenuti necessari per poter rispondere in modo corretto. Con Azzurra si riprenderà la geometria, con Alice le equazioni, con Nicola le disequazioni. Se la risposta corretta coinvolge conoscenze e abilità che appartengono a contesti diversi saranno possibili in genere diverse interpretazioni su qual è il contesto 'responsabile' di tale blocco: così nel caso di Alessandra si può ipotizzare che i suoi problemi derivino dalle

[8] Sia nella pratica didattica che nella ricerca, il termine 'errore' viene usato con molte accezioni diverse, che qui non importa esplicitare.
[9] Tale disequazione, utilizzata [redacted] Malara et al.(2000), si è rivelata molto efficace nell'evidenziare una varietà di processi risolutiv

frazioni, oppure dalla conoscenza delle formule di geometria. A seconda del caso l'intervento di recupero riguarderà un lavoro sulle frazioni, o sulle formule di geometria, o magari tutti e due, in tempi diversi.
Ma più probabilmente in un primo momento l'insegnante non riterrà necessario riprendere questi contesti: interverrà *solo* su quegli argomenti specifici che, in quanto esperto, riconosce come essenziali per rispondere in modo corretto. Con Azzurra si tratta di riprendere il concetto di perimetro, e forse di chiarire la differenza fra perimetro e area. Con Alice ci si impegnerà a farle capire che il 'portare' da un membro all'altro un termine appoggia su alcune proprietà delle equazioni, che forse si ripeteranno. Con Nicola in fondo non ci sono regole da ripetere: si tratterà di fargli osservare che $-7x^2$ è un numero negativo, in quanto prodotto del numero negativo –7 per un quadrato, e che un numero negativo è sempre minore di un numero positivo, qual è $\sqrt{7}$. Nel caso di Alessandra si farà vedere qual è il processo risolutivo corretto e si riproporrà quindi lo stesso tipo di esercizio, senza preoccuparsi di isolare e di affrontare separatamente le diverse conoscenze e abilità coinvolte.
Certo, se poi questi interventi non ottengono l'effetto sperato, e gli errori si ripetono, allora forse l'intervento si allargherà, e magari gli si dedicherà uno spazio specifico (qualche ora o qualche settimana): con Azzurra si riprenderà la geometria, con Alice le equazioni, con Nicola le disequazioni, con Alessandra le frazioni o la geometria, o forse tutti e due.

Tutto questo appare legittimo e sensato. C'è un piccolo particolare: che 'tutto questo' in genere non funziona. Gli insegnanti conoscono bene il senso di frustrazione e di impotenza che deriva dall'aver impegnato risorse in attività di recupero, per poi ritrovarsi davanti sempre alle stesse difficoltà, agli stessi errori. 'Spiegare' di nuovo, e ancora, correggere gli errori, spiegare perché sono errori, far vedere qual è il modo corretto di procedere … sono tutti comportamenti che costano all'insegnante una gran fatica, in termini di energie e di tempo, ma raramente portano ad un risultato proporzionato a tale fatica: gli errori si ripetono, le difficoltà sembrano sempre le stesse.
L'ipotesi che proponiamo è che l'eventuale fallimento di questi interventi risiede proprio nel fatto che sono 'locali', circoscritti al contesto in cui l'errore o il fallimento si presentano, e addirittura spesso agli argomenti necessari per produrre una risposta corretta. C'è un passaggio implicito in questa scelta, più precisamente c'è una fase spesso sottovalutata fra il processo di osservazione (quello in cui si prende atto delle difficoltà) e quello dell'intervento: è la fase di *interpretazione*. Il passare direttamente dagli errori che fa Azzurra nei problemi di geometria che hanno a che fare con perimetri ed aree a spiegazioni sui perimetri ed aree poggia su un'ipotesi di lavoro implicita: che Azzurra sbaglia perché non 'sa' abbastanza di perimetri e aree. Se sapesse … non sbaglierebbe. Appare allora del tutto naturale che lo sforzo dell'insegnante sia diretto a prendere di petto *quell*'errore, *quel* problema, *quell*'argomento.[10]
Non ci sarebbe niente da eccepire su questa catena di ragionamenti. Ma trattandosi di un'ipotesi di lavoro, non importa che sia ragionevole o condivisibile: importa che funzioni. Se non funziona, è necessario cercare ipotesi di lavoro alternative.

Un aiuto in questa direzione ci viene dalla ricerca sul problem solving, o più semplicemente attività di soluzione di problemi, non necessariamente matematico. Nel problem solving il comportamento automatico che risulta vincente in situazioni di routine si rivela invece inadeguato. Per definizione di problema[11] infatti un individuo si trova in quel caso a non avere procedure disponibili per raggiungere l'obiettivo: il comportamento automatico deve lasciare il posto ad un comportamento strategico, in cui hanno un ruolo cruciale le *decisioni* che il soggetto prende. L'eventuale fallimento nel risolvere un problema (inteso come mancato raggiungimento dell'obiettivo) si può vedere quindi come l'esito di processi decisionali fallimentari. La ricerca ha messo in evidenza che oltre alle abilità cognitive ed alle conoscenze relative al contesto del problema, altri fattori, in particolare quelli metacognitivi e affettivi, influenzano tali processi decisionali, e sono quindi importanti per interpretare il fallimento.

[10] Il ruolo dell'errore a volte viene talmente enfatizzato che la mancanza di errori finisce col diventare un obiettivo prioritario dell'insegnamento: il raggiungimento di tale obiettivo tranquillizza insegnante ed allievi che tutto va bene, che tutto ha funzionato. È quello che Gardner (1993) chiama 'il compromesso delle risposte corrette': *"Insegnanti e studenti (...) non sono disposti ad assumersi i rischi del comprendere e si accontentano dei più sicuri 'compromessi delle risposte corrette'. In virtù di tali compromessi, insegnanti e studenti considerano che l'educazione abbia avuto successo quando gli studenti sono in grado di fornire le risposte accettate come corrette."*

[11] Ad esempio: Un problema sorge quando un essere vivente ha una meta ma non sa come raggiungerla (Duncker,1935).

Fra questi fattori appaiono particolarmente cruciali le *convinzioni*, attraverso le quali si realizza la profonda interazione fra aspetti cognitivi, metacognitivi e affettivi che caratterizza l'attività di soluzione di problemi e più in generale il processo d'apprendimento.
Prima di riprendere gli esempi fatti, proponendo ipotesi interpretative alternative e considerando le implicazioni di tale ipotesi interpretative sul percorso di recupero, è opportuno quindi premettere alcune considerazioni su tale costrutto.

3. Le convinzioni.

Il concetto di convinzione assume un ruolo centrale nella teoria *costruttivista* dell'apprendimento, secondo la quale il discente non è un contenitore vuoto da riempire di conoscenza, ma un soggetto attivo che interpreta la realtà, che mette in relazione i fatti osservati con le esperienze precedenti, che costruisce schemi interpretativi alla luce dei quali anticipa le esperienze future (Gardner, 1993). Le *convinzioni* (o *credenze*) sono il frutto di questo continuo processo di interpretazione.
Ognuno di noi possiede/costruisce continuamente convinzioni su ogni aspetto della realtà: in base ad esse si avvicina al mondo, e da questa continua interazione le convinzioni possono venire consolidate o messe in discussione.
Nel campo delle difficoltà d'apprendimento in matematica le convinzioni più significative sono quelle che un allievo ha sulla matematica, sull'apprendimento (in particolare, sull'apprendimento della matematica), su di sé (Zan, 2000b).
Nella nascita e nel consolidamento delle convinzioni i fattori cognitivi e quelli affettivi interagiscono in modo talmente stretto e profondo da rendere impossibile ogni tentativo di distinguerli. Pur tuttavia possiamo riconoscere che alcune convinzioni sono più legate alla sfera cognitiva e metacognitiva (ad esempio quelle, specifiche o generali, sulla matematica), mentre altre sono di natura più propriamente affettiva (ad esempio quelle relative al concetto che uno ha di sé).
Le *convinzioni* scorrette (dette anche *misconcetti*: Zan, 2000a) su specifici contenuti matematici sono responsabili di *errori* sistematici, che si presentano in forme diverse e in contesti diversi. Si tratta spesso di convinzioni implicite, di cui cioè l'allievo non è consapevole, e per questo agiscono in modo ancora più subdolo e sottile.
Ad esempio una convinzione molto forte e diffusa è:
"Se moltiplico due numeri il risultato è maggiore di entrambi."
Questa, e la convinzione "simmetrica" sul risultato di una divisione (che deve essere più piccolo del dividendo) produce gravi conseguenze in molti contesti. Tipico il caso dei problemi di proporzionalità, nei quali la presenza di numeri decimali minori di 1 "blocca" strategie utilizzate in modo naturale con numeri naturali (Fischbein, 1992).
A livello superiore una convinzione implicita molto forte e diffusa è:
"Un numero è negativo se e solo se nella sua rappresentazione simbolica compare esplicitamente il segno - ."
Alcune conseguenze di tale convinzione:
- la confusione fra integrale e area;
- log (-x) non è mai definito;
- un punto generico del terzo quadrante è (-x, -y), con $x, y \in R$.

Anche le *convinzioni* sulla matematica come disciplina nel suo complesso giocano un ruolo determinante nella utilizzazione delle risorse cognitive e ancora prima sulla decisione di utilizzarle, nonostante sia meno immediato che nel caso precedente il nesso con gli errori. L'importanza di tali convinzioni sta nel fatto che esse influenzano i processi decisionali di un individuo, inibendo in certi casi l'utilizzazione delle conoscenze possedute. Ad esempio se un allievo è convinto che i problemi scolastici siano un rito formale, completamente avulso dalla realtà, molto probabilmente censurerà a priori certi comportamenti adottati invece nella risoluzione di problemi reali (nel caso di allievi della scuola elementare si veda Zan, 1998).
Esempi di convinzioni di questo tipo molto diffuse e spesso implicite sono:
- Solo pochi fortunati possono riuscire in matematica. Da cui può seguire la convinzione: l'impegno in matematica conta fino ad un certo punto.
- Le regole matematiche (ad esempio gli algoritmi della moltiplicazione e divisione, o le proprietà delle potenze) si devono imparare ma non serve capirle.
- Per fare gli esercizi di matematica non serve studiare la teoria.

- Un problema o lo capisci subito o non lo capisci più.

Infine fra le convinzioni con una forte componente affettiva riconosciamo quelle relative alla percezione che un soggetto ha di sé. Anche queste convinzioni possono essere determinanti nell'inibire l'utilizzazione di conoscenze possedute. Ad esempio molti studenti con difficoltà costruiscono, dall'interpretazione delle proprie esperienze scolastiche, in particolare dei propri fallimenti, convinzioni su di sé talmente negative da determinare la rinuncia a priori perfino di *provare* a pensare, a risolvere problemi:
"Io ero convinta di non capirci nulla, e con questa convinzione, non cercavo di sforzarmi a capire e a migliorare, e pensavo che gli altri, siccome arrivavano alla soluzione prima di me, fossero dei geni, quindi aspettavo che fossero sempre loro a darmi la soluzione." [Valeria, 3ª media]

In definitiva se alcune convinzioni possono essere circoscritte ad argomenti e fatti specifici (anche se la loro influenza esce poi dall'ambito in cui sono state costruite), altre si presentano con carattere di maggiore generalità. Ma un aspetto cruciale da tener presente è che le convinzioni interagiscono profondamente, ed è tale interazione che guida i processi decisionali di un individuo. Una singola convinzione può infatti portare a comportamenti anche estremamente diversi, a seconda del 'sistema' di convinzioni in cui è inserita. Ad esempio la convinzione 'Per riuscire in matematica bisogna essere portati' è probabilmente condivisa non solo da studenti (o ex-studenti) con difficoltà, ma anche da studenti (o ex-studenti) che riescono. Ma nei due casi cambia probabilmente la convinzione su di sé cui è associata: in un caso 'E io non sono portato', nell'altro 'E io sono portato'. In questa rete di connessione fra convinzioni appaiono particolarmente importanti, anche per le conseguenze che hanno a livello emozionale, le convinzioni su di sé, ed in particolare la convinzione 'di potercela fare', cioè il cosiddetto senso di auto-efficacia: tale convinzione è fortemente legata ad un contesto (nel nostro caso: l'apprendimento della matematica).

Diventa quindi importante studiare le convinzioni non singolarmente, ma nella loro reciproca interazione: in altre parole diventa importante studiare i 'sistemi' di convinzioni di un singolo soggetto. La struttura di tali sistemi (Green, 1971) permette anche di affrontare in modo indiretto un problema teorico importante e delicato, che è quello della differenza fra convinzioni e conoscenza: i sistemi di convinzioni infatti presentano alcune caratteristiche che li differenziano dai sistemi di conoscenze (Törner, Pehkonen, 1996).
Ad esempio:
1. La struttura quasi –logica.
Le convinzioni sono organizzate in relazione a come il soggetto vede le connessioni fra esse. In altre parole, ogni persona ha nel suo sistema di convinzioni una struttura che possiamo definire quasi-logica, con alcune convinzioni *primarie* ed altre che derivano 'logicamente' da queste, che vengono chiamate *derivate*. Inoltre questo ordine quasi-logico è unico per ogni persona.
Ad esempio un insegnante può ritenere che "è importante presentare la matematica in modo chiaro" (convinzione primaria) e per questo (convinzioni derivate): a] ritiene importante preparare bene le lezioni in modo da offrire una presentazione chiara e sequenziale; b] ritiene importante essere pronto a rispondere ad eventuali domande degli studenti.
A causa della mancanza di una vera e propria struttura logica in senso matematico, però, alcune convinzioni possono anche essere in contraddizione con altre.[12] Viceversa, un'importante caratteristica dei sistemi di conoscenza è che non devono contenere contraddizioni.
2. La 'centralità psicologica'.
Ha a che fare con la 'forza' psicologica delle convinzioni, cioè il 'grado' di convinzione che le caratterizza. In questo senso si possono distinguere convinzioni *centrali* (quelle con maggior 'forza' psicologica e quindi più consolidate) e convinzioni *periferiche*. Anche questa dimensione è assente nei sistemi di conoscenza. Non si può dire che qualcuno conosce un certo argomento 'intensamente'.

[12] Osserva a questo proposito Gardner: "I bambini portano nella propria coscienza un gran numero di copioni, stereotipi, modelli e credenze. Questi schemi concettuali, se esaminati analiticamente, possono celare molte contraddizioni interne (…) Queste contraddizioni, però, vengono notate solo raramente, e anche quando lo sono, raramente turbano il bambino. Va aggiunto, poi, che gli adulti portano con sé analoghi complessi di enunciati e sentimenti conflittuali (per esempio, nella sfera politica), la cui natura contraddittoria raramente diventa motivo di turbamento nella vita di ogni giorno. Dovrebbe essere evidente, però, che l'esistenza di prospettive contraddittorie può interferire con l'apprendimento formale. Tali prospettive, infatti, oltre che essere contraddittorie tra di loro, possono essere in contrasto, in tutto o in parte, con conclusioni consolidate di una disciplina." (Gardner, 1993, pag. 111)

Le due dimensioni precedenti sono ortogonali: una convinzione può essere centrale, ma non primaria, e viceversa. E in ogni caso il fatto che sia o meno primaria / centrale dipende *non* dalla convinzione di per sé, ma da come è organizzata nel sistema di convinzioni di *quel* particolare individuo.
3. La struttura 'a grappolo'.
Le convinzioni sono strutturate in settori relativamente isolati: questo isolamento fa sì che un individuo possa avere contemporaneamente convinzioni apparentemente contraddittorie.

La struttura in cui si organizzano le convinzioni è importante per affrontare due problemi cruciali per il recupero:
l'individuazione delle convinzioni che influiscono maggiormente sui processi decisionali, ed in particolare su quelli che conducono al fallimento;
la modifica di tali convinzioni.

Se è importante riuscire a portare alla luce le convinzioni che dirigono i processi decisionali, occorre privilegiare situazioni in cui tali processi decisionali sono valorizzati, quali ad esempio l'attività di risoluzione di problemi, piuttosto che la compilazione di un questionario, in cui emergono piuttosto le convinzioni che un soggetto dichiara.[13]
D'altra parte lo studio delle convinzioni nella loro organizzazione in sistemi appare cruciale anche per affrontare il problema del cambiamento delle convinzioni, problema centrale nell'ottica del recupero. Per modificare una convinzione secondaria appare più efficace intervenire sulla convinzione primaria da cui deriva. Quindi, individuate le convinzioni centrali, per pianificare interventi è opportuno cercare di modificare, e quindi ancora prima individuare, quelle *primarie* da cui (eventualmente) derivano. Il problema è che l'organizzazione delle convinzioni è personale: la stessa convinzione può essere primaria per un soggetto, derivata per un altro, centrale per uno, periferica per un altro. Questo significa che lo studio delle convinzioni deve essere individualizzato. In questo senso può essere importante conoscere la 'storia' di un allievo (ad esempio attraverso temi, diari, ecc.), perché ci dice qualcosa su come si sono formate le convinzioni, in particolare su quali possono essere quelle primarie.

4. Applicazione agli esempi.

Abbiamo ora gli strumenti teorici per ritornare agli esempi fatti all'inizio, proporre ipotesi interpretative alternative, e analizzare le implicazioni di tali ipotesi a livello di intervento di recupero.

Esempio 1: Alice
Come già detto all'inizio, pare naturale in questo caso un intervento che riprenda le proprietà delle equazioni. In realtà è proprio in occasione di questo tipo di intervento che Alice commenta:
"Non sarò certo io a contestare una regola che tutti accettano! Mi adeguo senz'altro. Ma nessuno mi potrà mai convincere che se aggiungo la stessa quantità ai due membri di un'equazione, *non cambia niente*!"
Il commento di Alice suggerisce di cercare in un altro contesto l'origine dei suoi errori, e precisamente nel significato da lei attribuito al segno '='.
Numerose ricerche suggeriscono che il segno '=' viene interpretato, anche da molti ragazzi di scuola superiore, come "comando" di esecuzione di operazioni (Kieran, 1981).
Ad esempio nel risolvere il problema: "In un bosco vengono piantati 425 alberi nuovi. Qualche anno dopo, vengono abbattuti i 217 alberi più vecchi. Nel bosco ci sono quindi 1063 alberi. Quanti alberi c'erano prima che venissero piantati quelli nuovi?" molti studenti scrivono:
1063 + 217 = 1280 – 425 = 855.

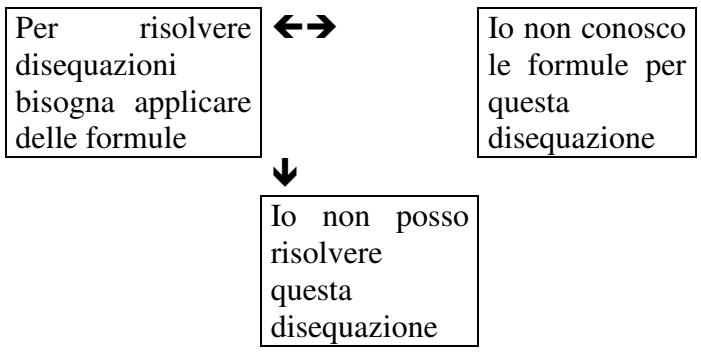
[13] Molti ricercatori hanno messo in evidenza che le convinzioni che un soggetto 'dichiara' (ad esempio quando risponde ad un questionario appositamente preparato) sono in contraddizione con quelle che invece 'pratica', cioè quelle che sembrano guidare i suoi processi decisionali. Ad esempio Schoenfeld (1989), nel commentare i dati relativi ad un questionario finalizzato a studiare le relazioni fra le convinzioni sulla matematica di 230 studenti di scuola superiore e il loro rendimento, riconosce la presenza di convinzioni apparentemente "promettenti" e di emozioni positive: in realtà poi il comportamento degli studenti durante l'attività matematica sembra guidato più da altre convinzioni maturate nelle esperienze precedenti che dalle convinzioni professate.

Bambini più piccoli, davanti a espressioni quali "4 + 5 = 3 + 6" reagiscono dicendo che dopo il segno '=' ci dev'essere la risposta, e non un altro problema! Trasformano quindi l'espressione iniziale nelle due espressioni "4 + 5 = 9" e "3 + 6 = 9".
Questa interpretazione del segno '=', che potremmo chiamare misconcetto, può essere responsabile di non poche difficoltà in contesto algebrico, dove è richiesta invece la comprensione della valenza relazionale del simbolo.
In mancanza di tale interpretazione, il fatto che aggiungendo ai due membri di un'equazione la stessa quantità si ottiene un'equazione equivalente può apparire incomprensibile, perché l'attenzione del soggetto è centrata sul primo membro dell'equazione, che in effetti cambia dopo l'aggiunta di tale quantità. In presenza di questo misconcetto allora le proprietà delle equazioni diventeranno regole prive di senso da memorizzare: lo studente può solo accettarle e adeguarsi, proprio come Alice.

Esempio 2: Azzurra
L'intervento che appare naturale nel caso di Azzurra coinvolge il contesto della geometria, più precisamente i concetti di perimetro e area.
Ma se interpretiamo l'errore di Azzurra *'Divido?'* come frutto di una risposta data a caso, un intervento finalizzato a rimuovere tale errore dovrebbe modificare non *quella* specifica risposta, ma il fatto di averla data a caso.
D'altra parte per riuscire a modificare l'abitudine di rispondere a caso è importante riconoscere quali sono le cause di questo comportamento: ci servono per questo strumenti di osservazione alternativi. Azzurra ha fatto il tema 'Io e la matematica: il mio rapporto con la matematica, dalle elementari ad oggi', e racconta così la propria esperienza:
"Alle elementari non ero una grossa cima in matematica, quindi in 3^a elementare vidi che non ero brava e chiusi così la mia testa, dicendo che questa non faceva per me." [Azzurra, 1^a media]
Emerge da questo stralcio uno scarso senso di auto-efficacia, cioè la convinzione di non potercela fare. Da tale convinzione discende la percezione che la matematica è incontrollabile, e quindi la rinuncia a produrre processi di pensiero significativi.

Esempio 3: Nicola
Il processo risolutivo di Nicola avviene in una situazione atipica: si tratta di un'intervista condotta da una studentessa di Matematica all'interno di un lavoro sulle difficoltà.
Riportiamo la parte conclusiva e più significativa di tale intervista:
I.: *'Perché invece di ricordarti cosa devi fare, non provi a risolverla da solo?'*
N.: *'La matematica è fatta di regole ben precise che vanno seguite, non ci si può inventare nulla. I problemi si risolvono seguendo quelle regole e io, ora, non mi ricordo come si risolvono le disequazioni.'*

Nicola esplicita chiaramente le convinzioni che sono alla base del suo comportamento: 'Per risolvere disequazioni bisogna applicare delle formule', e 'Io non conosco tali formule'. Più precisamente è l'interazione fra queste due convinzioni che genera la percezione di incontrollabilità della situazione, e la conseguente rinuncia a provare:

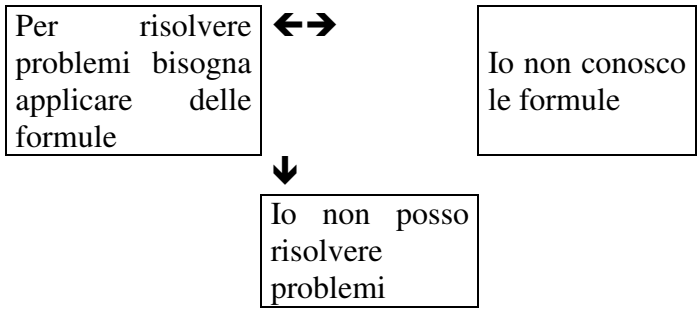


Possiamo ipotizzare che la ripetizione di esperienze percepite come incontrollabili nel contesto della matematica genererà in Nicola la percezione dell'incontrollabilità della disciplina stessa, e la conseguente rinuncia generalizzata a 'provare'.

Esempio 4: Alessandra
Anche nel caso di Alessandra abbiamo a disposizione altre informazioni, oltre al disegno appena abbozzato. La ragazza infatti ha aggiunto un commento:
"a questo punto non so, cioè non mi ricordo bene la formula".
Il commento di Alessandra, inusuale in una verifica standard, era stato sollecitato esplicitamente: il problema faceva parte di un test preliminare alla programmazione di un intervento di recupero in una seconda liceo pedagogico. Tale intervento (Zan, 1996) era nato dall'insuccesso di interventi tradizionali precedenti basati esclusivamente sulla ripetizione degli argomenti in cui gli studenti avevano evidenziato difficoltà ed errori. La ricerca di interpretazioni alternative del fallimento degli studenti ci aveva spinto quindi a utilizzare strumenti di diagnosi più fini.
Uno di questi strumenti consisteva in un gruppo di 4 problemi, dati con la seguente consegna:

Qui di seguito ci sono 4 problemi, che tu devi cercare di risolvere.
IMPORTANTE!!!
Cerca di scrivere tutti i tuoi pensieri, tutti i ragionamenti che fai, le impressioni e le emozioni che provi, le difficoltà che incontri.
È quello che pensi e che provi che ci interessa, non il risultato!

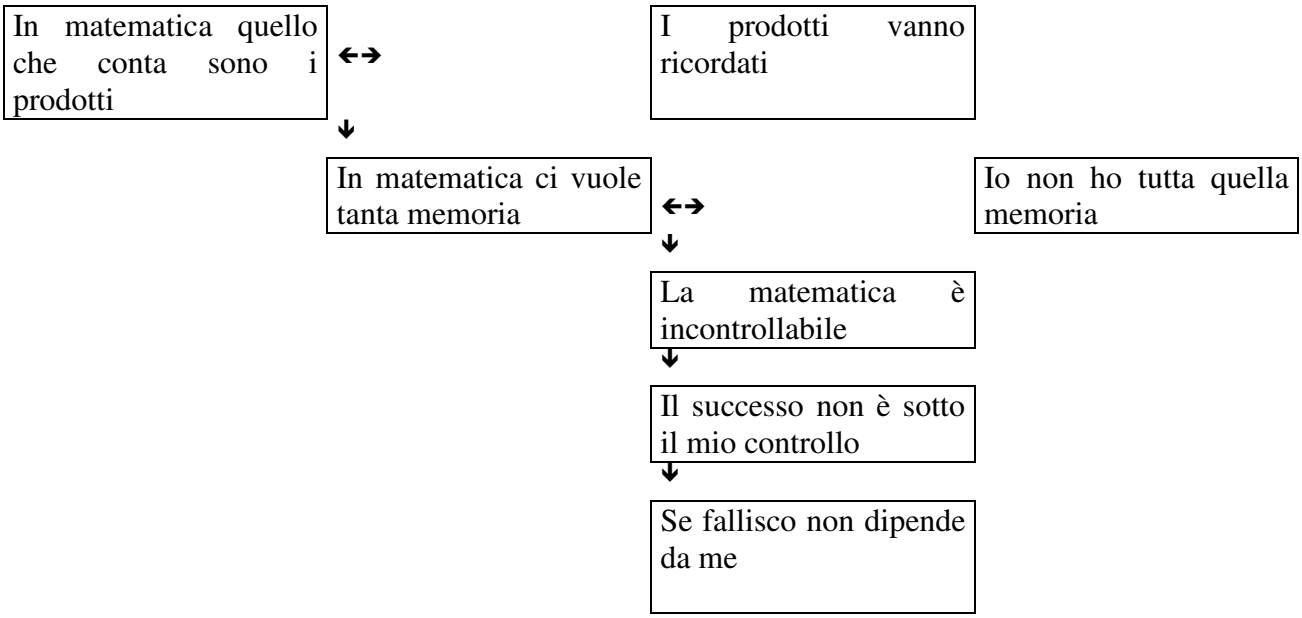
Nonostante la diversità degli errori di Alessandra e Nicola, addirittura la diversità dei contesti in cui si sono presentati (geometria / algebra), i commenti di Alessandra e Nicola ci suggeriscono interpretazioni simili: suggerimenti che non avremmo avuto con gli strumenti tradizionali di osservazione.
Possiamo ipotizzare anche in questo caso che la rinuncia ad andare avanti (cioè il comportamento responsabile del fallimento) sia l'effetto dell'interazione di due tipi di convinzioni: sui problemi di matematica ('Per risolvere i problemi bisogna conoscere una serie di formule da applicare di volta in volta') e su di sé ('E io non le so').



Assumere questa come ipotesi di lavoro significa mirare l'intervento di recupero *non* ad un lavoro esplicito sui problemi di geometria o sulle disequazioni (eventualmente analoghi a quello su cui c'è stato fallimento), ma alla rimozione delle convinzioni da cui deriva la rinuncia a provare.
Siccome si tratta di fatto di spezzare l'influenza dell'interazione di due convinzioni ('Per risolvere problemi bisogna applicare delle formule', e 'Io non conosco le formule'), la scelta della convinzione da rimuovere è frutto di una decisione dell'insegnante, in cui interviene in modo decisivo la visione della matematica che l'insegnante ha, oltre che la conoscenza dell'allievo. Se l'insegnante stesso vede l'attività matematica come caratterizzata dall'applicazione di formule da ricordare, il suo intervento potrà essere finalizzato a modificare la convinzione 'Io non conosco le formule', o più semplicemente (se l'insegnante condivide la convinzione dell'allievo) alla conoscenza di tali formule.

Le convinzioni 'Per risolvere problemi bisogna applicare le formule', e 'Per risolvere disequazioni bisogna applicare le formule', si possono vedere come derivate da una convinzione sulla matematica più generale:
In matematica quello che conta sono i prodotti [e non i processi].

Da tale convinzione deriva quella che 'In matematica bisogna memorizzare tutti i prodotti', che interagendo con convinzioni quali 'E io non li ho memorizzati', (eventualmente associata alla convinzione 'Ed è impossibile memorizzarli tutti'), genera la convinzione di non poter controllare la disciplina.
In altre parole le convinzioni di Nicola e Alessandra appaiono inserite in un sistema di convinzioni caratterizzato da una visione distorta della matematica:



La percezione di incontrollabilità della matematica può essere legata quindi ad uno scarso senso di auto-efficacia (Azzurra) o ad una visione distorta della matematica (Nicola e Alessandra).
In realtà naturalmente le cose non sono così schematiche: spesso la visione della matematica come disciplina di per sé incontrollabile è accompagnata *anche* da uno scarso senso di auto-efficacia. Quello che varia è il 'peso' di ognuna di queste convinzioni.

Le interpretazioni alternative proposte per Alice, Azzurra, Nicola e Alessandra sono semplicemente ipotesi interpretative, cioè ipotesi di lavoro su cui basare l'intervento di recupero. Un'ipotesi di lavoro non è né giusta né sbagliata: funziona o non funziona. In questo senso abbiamo parlato di interpretazioni 'alternative': intendendo alternative a ipotesi più semplici, quali quelle che, spesso implicitamente, sono all'origine degli interventi tradizionali di recupero. E proprio il fallimento così frequente di tale tipo di intervento ci ha spinto a mettere in discussione l'ipotesi di lavoro da cui nasceva, e ci ha sollecitato a cercare ipotesi di lavoro alternative: quando l'intervento tradizionale funziona, tanto meglio!

Le implicazioni di tali ipotesi interpretative a livello di recupero sono notevoli.
Con Alice sembra opportuno un lavoro sull'aritmetica, e in particolare sul segno di uguale, che permetta di portare alla luce e quindi sradicare i misconcetti ipotizzati.
Nei casi di Azzurra, Nicola e Alessandra, l'obiettivo che segue dalle ipotesi interpretative proposte è quello di scardinare la convinzione che la matematica è una disciplina incontrollabile.
Come abbiamo osservato però (anche questa è un'ipotesi di lavoro, tutta da verificare) probabilmente questa convinzione è derivata da convinzioni diverse: da uno scarso senso di auto-efficacia nel caso di Azzurra, da una visione distorta della matematica nel caso di Nicola e Alessandra.
Questo suggerisce un percorso diverso nei due casi: nel primo caso finalizzato soprattutto a convincere Azzurra di avere le risorse necessarie per riuscire; nel secondo caso, finalizzato a convincere Nicola e Alessandra che la matematica non è un'accozzaglia di prodotti scollegati fra loro.
In ogni caso per l'intervento di recupero può essere utile tentare di ricostruire da quali convinzioni derivano e a quali convinzioni sono associate le convinzioni che si vogliono sradicare: la rimozione della convinzione può passare attraverso percorsi diversi, che richiedono all'insegnante una valutazione piuttosto complessa, in cui in particolare giocano un ruolo cruciale la conoscenza della storia dell'allievo da una parte, e dall'altra il fatto di essere esperto della disciplina.

5. Conclusioni.

L'analisi degli esempi proposta suggerisce che di fronte a fallimenti nello stesso contesto matematico possono essere necessari tipi di intervento diversi, in particolare calati in contesti diversi. Viceversa, fallimenti in contesti apparentemente distanti (equazioni, geometria) possono richiedere un intervento simile, in particolare calato in uno stesso contesto, che non è necessariamente né l'uno né l'altro. Ad esempio la percezione di incontrollabilità della matematica che abbiamo ipotizzato causa dei comportamenti fallimentari di Alessandra e Nicola può rendere opportuno un percorso finalizzato a chiarire che in matematica ci sono diversi tipi di *perché*, e che per capire questi diversi *perché* è necessario fare riferimento ad argomentazioni diverse. Può essere significativo allora riprendere ad un maggior livello di consapevolezza e di critica alcune 'regole' che alla scuola superiore si assumono note (l'algoritmo della moltiplicazione, la regola dei segni, le potenze con esponente intero o razionale …) ed indagare cosa c'è dietro queste regole. Un intervento di questo tipo, apparentemente circoscritto al contesto dell'algebra o addirittura dell'aritmetica, potrebbe avere effetti sulla visione della disciplina, contribuendo a mettere in crisi la percezione di incontrollabilità della matematica, e riuscendo a modificare quindi i comportamenti perdenti che ne seguono in ogni altro contesto.

Ma le considerazioni fatte hanno notevoli implicazioni anche a livello di osservazione, cioè di diagnosi della difficoltà, ancora prima che a livello d'intervento. Appaiono cruciali infatti nei casi esaminati le informazioni che ci hanno permesso di ipotizzare le cause dei processi decisionali che hanno condotto Azzurra, Alice, Alessandra e Nicola all'errore o al fallimento. Tali informazioni hanno richiesto modalità diverse di osservazione (nel caso di Azzurra e Alessandra), o comunque modalità diverse di comunicazione allievo / insegnante (nei casi di Alice e Nicola). Si tratta quindi di integrare con altri strumenti gli strumenti tradizionalmente usati per diagnosticare situazioni che richiedono interventi di recupero. Negli esempi fatti abbiamo visto alcune possibilità: temi, diari, descrizioni di processi risolutivi che fanno riferimento anche ad aspetti emozionali. Ma oltre a modalità di osservazione diverse è necessario stabilire una comunicazione diversa fra insegnante e allievi. L'approccio descritto, enfatizzando la necessità di fare ipotesi alternative nel caso che un intervento di recupero fallisca, sottolinea anche che le interpretazioni avanzate dall'insegnante vanno viste come ipotesi di lavoro, suscettibili di cambiamenti anche radicali: ne discende la necessità della collaborazione continua e attiva dell'allievo al proprio percorso formativo. Tale collaborazione non solo rende possibile un intervento mirato di recupero, e prima ancora un lavoro di prevenzione efficace, ma sdrammatizza anche eventuali fallimenti dell'insegnante. Questo sottolinea l'importanza di altri aspetti, che possono diventare oggetto esplicito di un lavoro di prevenzione ad ampio respiro: perché la collaborazione allievo / insegnante sia possibile bisogna avere canali di comunicazione che permettano all'allievo di esprimere senza censura i propri pensieri, ma anche i propri sentimenti e bisogni, e d'altra parte perché tale comunicazione sia produttiva è importante che l'allievo sia abituato a riflettere sui propri processi di pensiero, e a descriverli. L'importanza degli aspetti metacognitivi, affettivi e comunicativi incornicia quindi tutto l'intervento di prevenzione e recupero.

Dalle osservazioni fatte emerge anche che il lavoro di prevenzione dell'insegnante può prescindere dai fallimenti dei singoli allievi, ed avere una prospettiva autonoma più ampia. La possibilità di prevenire le difficoltà infatti passa anche attraverso scelte didattiche mirate ad evitare la costruzione di convinzioni perdenti: è chiaro infatti che l'insegnamento ha un ruolo importante nella costruzione delle convinzioni dell'allievo.
Nella formazione delle convinzioni di un allievo su di sé hanno un grosso peso un insegnamento poco incoraggiante, la tendenza ad estendere la valutazione dal compito alla persona, la difficoltà a rivedere i giudizi inizialmente dati:[14] sono tutti elementi che favoriscono nello studente in difficoltà un'immagine di sé come individuo poco capace, piuttosto che come individuo che ha bisogno di un impegno mirato per recuperare.
Anche le convinzioni epistemologicamente scorrette sulla matematica non nascono con l'allievo: sono il frutto dell'interpretazione dell'esperienza, ed in tale esperienza gioca un ruolo cruciale ancora l'insegnante. Così la convinzione che la matematica è fatta di prodotti più che di processi è spesso il risultato di un insegnamento che privilegia prodotti a processi, in cui si fanno memorizzare molte formule (ad esempio in

[14] L'influenza delle aspettative dell'insegnante sul rendimento dell'allievo è un fenomeno documentato in psicologia, noto come 'effetto Pigmalione' (Rosenthal, Jacobson, 1991).

trigonometria) e più in generale si frammenta un fenomeno in tanti casi particolari (ognuno con il suo nome!) senza far cogliere la logica sottostante, in cui si evitano domande difficili, in cui si privilegiano esercizi a problemi. L'attività di soluzione di problemi che usualmente si propone richiede in realtà l'applicazione di algoritmi noti, dato che in genere è l'insegnante ad illustrare 'come' si deve procedere. Inoltre tale attività é fortemente condizionata da vincoli di vario tipo (relativi alla struttura dei problemi stessi, ma anche alle modalità di risoluzione) che assumendo nel tempo la caratteristica di veri e propri stereotipi, contribuiscono alla formazione di convinzioni, quali:
- i problemi di matematica hanno sempre una e una sola soluzione;
- un problema si può risolvere in 10 minuti;
- nei problemi vanno applicate le conoscenze appena studiate.

In particolare l'attenzione in genere viene focalizzata sui *prodotti* dell'attività di soluzione, piuttosto che sui *processi* che la caratterizzano. Tali processi invece sono *di per sé*, indipendentemente cioè dai prodotti che generano, estremamente significativi per l'apprendimento: in particolare le *decisioni* che il soggetto prende durante la risoluzione si configurano come strategie di regolazione e coinvolgono la consapevolezza delle proprie risorse (Schoenfeld,1983).
In questo senso il problem solving rappresenta quindi un ambiente favorevole allo sviluppo delle capacità metacognitive. Inoltre il fatto di essere continuamente impegnato a prendere decisioni stimola il soggetto solutore ad assumersi la responsabilità delle proprie scelte, e più in generale favorisce il passaggio della responsabilità dell'apprendimento dall'insegnante all'allievo (Zan, 1996). Infine il problem solving rappresenta un contesto ideale per favorire nell'allievo la nascita di emozioni positive, e per insegnargli a gestire eventuali emozioni negative (Di Martino, 2001).
D'altra parte le decisioni prese durante l'attività di soluzione di problemi sono influenzate dalle convinzioni che un soggetto ha, sulla matematica ma anche sulle proprie capacità: attraverso il problem solving è quindi possibile portare alla luce convinzioni scorrette o comunque debilitanti sulla matematica e su di sé come solutore di problemi, favorendone quindi la rimozione.

Ma anche alcune scelte a livello di contenuti possono favorire una visione della matematica come disciplina incontrollabile. Come abbiamo già osservato in genere nella scuola superiore non si insiste sulla sistemazione rigorosa delle prime conoscenze aritmetiche, le "basi" su cui poggia l'intero edificio matematico. L'aritmetica viene presentata nella scuola dell'obbligo come un insieme di fatti e di procedure. Alle scuole superiori, quando finalmente lo studente sarebbe in grado di capire i processi che stanno alla base di tali fatti e procedure, l'aritmetica viene sacrificata ad argomenti considerati più "utili" (la geometria analitica, la trigonometria, l'analisi). Questa scelta ha molte conseguenze negative: impedisce di sfruttare una enorme potenzialità di incuriosire e divertire con problemi significativi gli studenti meno motivati alla matematica ma magari più fantasiosi (Scimemi, 1986); aumenta le difficoltà, già consistenti, dell'approccio all'algebra (Malara, 1997); ma soprattutto favorisce una visione distorta proprio delle *basi* della matematica, che continuano ad essere viste come prodotti, quasi magici, e non come processi. In particolare non si esplicitano i processi sottostanti certe procedure e certe regole, e non si sottolinea che tali processi possono essere profondamente diversi, motivando tutto genericamente e nello stesso modo. Non si esplicita che ci sono diversi *perché*: il *perché* $5^2 \cdot 5^4 = 5^6$ è diverso dal *perché* $5^0 = 1$ e ancora diverso dal *perché* $4 + 2 \times 3 = 10$, mentre $(4+2) \times 3 = 18$.
L'eventuale sforzo di uno studente di "capire" tutte queste uguaglianze nello stesso modo sarà destinato al fallimento. Lo studente potrà convincersi che in realtà in matematica non c'è niente da capire (oppure che *lui* non è in grado di capire), che la matematica è un'accozzaglia di regole convenzionali indipendenti l'una dall'altra:
"Vorrei proprio sapere i motivi, le cause, perché così mi sembrano tutte regole astratte e appiccicate qui e là." [Giacomo, 1ª media]
L'edificio matematico poggerà allora su basi estremamente precarie:
"Le persone 'portate' hanno una base su cui appoggiarsi. Le persone 'negate' hanno una base che però è pericolosa può cadere da un momento all'altro." [Pierpaolo, 1ª ITC]

In conclusione le considerazioni fatte suggeriscono che il fallimento dell'intervento tradizionale di recupero può derivare dal fatto che tale intervento è in genere locale, circoscritto al contesto in cui si presentano l'errore o il processo risolutivo inadeguato, se non addirittura a quelle conoscenze che l'insegnante come esperto riconosce essenziali per produrre una risposta corretta. La pianificazione dell'intervento, in particolare la scelta del contesto in cui lavorare, è invece conseguenza dell'interpretazione dell'errore o del processo risolutivo. Come abbiamo visto questo cambiamento di prospettiva richiede nuovi strumenti di

osservazione, nuove modalità di comunicazione, e la consapevolezza che le scelte didattiche dell'insegnante hanno un ruolo cruciale nella costruzione delle convinzioni dell'allievo (Zan, 2000c): richiede in definitiva un cambiamento delle convinzioni dell'insegnante che stanno alla base delle scelte didattiche che caratterizzano l'intervento di recupero tradizionale. L'importanza che abbiamo attribuito alle convinzioni nell'interpretazione dei processi decisionali degli allievi porta infatti in modo naturale a sottolineare il ruolo che hanno le convinzioni *dell'insegnante* nelle sue scelte didattiche (Thompson, 1992). Alcune di queste convinzioni, in genere implicite, possono impedire all'insegnante di investire nell'intervento di recupero tutte le risorse necessarie, e in particolare di cercare ipotesi interpretative alternative:

- le lacune di base ad una certa età non sono recuperabili;
- il successo in matematica è dovuto all'intelligenza;
- l'intelligenza è una dote naturale non modificabile.[15]

Il superamento dell'intervento tradizionale di recupero può allora rendere necessario un lavoro da parte dell'insegnante sulle *proprie* convinzioni: un lavoro che richiede un percorso di riflessione e di consapevolezza. Questo lavoro può produrre nell'insegnante un cambiamento di atteggiamento nei confronti del problema delle difficoltà e del recupero, caratterizzato da uno spostamento dell'attenzione dagli errori fatti dall'allievo all'allievo che fa gli errori.
L'uso indiscriminato della penicillina lascia il posto all'osservazione del paziente:

Intanto, al Blear General Hospital, il dottor Gillupsie si rivolge all'ultimo dottore, il dottor Thinking…
GILLUPSIE: E i suoi pazienti, Thinking, come vanno?
THINKING: Bene, dottore. In via di guarigione.
GILLUPSIE: Fantastico, Thinking. [Rivolto a tutti] Come vedete, con i bravi pazienti la penicillina funziona!
THINKING: A dir la verità, dottore, non gli ho dato la penicillina. Si ricorda di quel paziente che aveva da anni quei dolori tremendi alle gambe?
GILLUPSIE: Ah, quello! Avevo consigliato di tagliargli le gambe, mi pare.
THINKING: Beh, invece è guarito. Pensi che tutto il suo problema derivava dalle scarpe correttive che gli avevano detto di portare!
GILLUPSIE: Incredibile, Thinking! E da quali valori delle analisi se ne è accorto?
THINKING: A dir la verità, dottore, non me ne sono accorto dalle analisi. L'ho guardato camminare …
GILLUPSIE: Lei è proprio un originale, Thinking! E l'ha dimesso?
THINKING: Beh, ora deve fare un po' di riabilitazione, ma è contento.
GILLUPSIE: La riabilitazione costa, Thinking. Era meglio se gli tagliava le gambe. Comunque, mi dica dell'altro paziente …
THINKING: Bene. Quello l'abbiamo dimesso. Si ricorda quelle crisi spaventose di allergia?
GILLUPSIE: Già. Secondo me di origine alimentare: avevo suggerito che non mangiasse.
THINKING: Invece ho scoperto la causa. Ho ricostruito tutta la sua storia, ho analizzato le informazioni, e ho trovato la causa della allergia!
GILLUPSIE: Incredibile, Thinking! Lei non finisce mai di stupirmi! E come ha fatto ad avere tutte queste informazioni? Quale macchinario nuovo ha usato? Ce lo dica, lo compriamo subito. E poi ci serve la tabella delle medie, della deviazione standard, quartili e tutte queste cose qui: mica improvvisiamo, noi. Conosciamo bene il valore dei numeri.
THINKING: A dir la verità, dottor Gillupsie, non ho usato un nuovo macchinario.
GILLUPSIE: Ma benedetto figliolo, non faccia il misterioso! Come ha scoperto tutte quelle cose sul suo paziente? Chi gliele ha dette?
THINKING: *Lui*, dottor Gillupsie. Quando gliele ho chieste.

Bibliografia.

Baldini I., Santini S. (1997). Le teorie del successo degli insegnanti di matematica. In Aschieri I., Pertichino M., Sandri P., Vighi P. (Eds.). *Matematica e affettività. Chi ha paura della matematica?* Bologna: Pitagora.

[15] Queste convinzioni sono emerse da un'indagine sulle teorie del successo degli insegnanti, condotta attraverso un questionario (Baldini, Santini, 1997).

Borasi R. (1996). *Reconceiving Mathematics Instruction: a Focus on Errors.* Norwood: Ablex Publishing Corporation.
Di Martino P. (2001). Emozioni e problem solving: un confronto fra bravi e cattivi solutori. In: Livorni L., Meloni G., Pesci A. (Eds.). *Le difficoltà in matematica: da problemi di pochi a risorsa per tutti.* Atti del X Convegno nazionale su Matematica e difficoltà, a cura del G.R.I.M.E.D.
Duncker K. (1935). *Psychologie des produktiven Denkens*. Berlino: Springer. (Trad. it.: *La psicologia del pensiero produttivo*, Firenze: Giunti-Barbera, 1969).
Fischbein E. (1992). Modelli taciti e ragionamento matematico. In: Fischbein E., Vergnaud G. [D'Amore B. (Ed.)]. *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*. Bologna: Pitagora.
Gardner H. (1993). *Educare al comprendere. Stereotipi infantili e apprendimento scolastico*. Milano: Feltrinelli.
Green T. (1971). *The activities of teaching*. New York: McGraw-Hill.
Kieran C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*. 12, 317-326.
Malara N. (1997). Problemi di insegnamento-apprendimento nel passaggio dall'aritmetica all'algebra. In: Jannamorelli B., Strizzi A. (Eds.). *La ricerca in didattica della matematica: da ipotesi teoriche ad esperienze didattiche.* Torre dei Nolfi: Edizioni Qualevita.
Malara N., Brandoli M.T., Fiori C. (2000). Comportamenti di studenti in ingresso all'università di fronte allo studio di equazioni. *La matematica e la sua didattica*. 2, 208-226.
Postman N., Weingartner C. (1974). *L'insegnamento come attività sovversiva*. Bologna: Zanichelli.
Rosenthal R., Jacobson L. (1991). *Pigmalione in classe.* Milano: Franco Angeli.
Schoenfeld A. H. (1983). Beyond the purely cognitive: Belief systems, social cognitions, and metacognitions as driving forces in intellectual performance. *Cognitive Science*. 7, 4, 329–363.
Schoenfeld, A.H. (1989). Explorations of students' mathematical beliefs and behavior. *Journal for Research in Mathematics Education*. 20, 4, 338-355.
Scimemi B. (1986). Attualità e validità dell'aritmetica. Atti del X Convegno sull'insegnamento della matematica. *Notiz. U.M.I.*, suppl. al n. 7.
Thompson A. (1992). Teachers' Beliefs and Conceptions: a Synthesis of the Research. In: Grows D. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: McMillan Publishing Company.
Törner G., Pekhonen E. (1996). On the structure of mathematical belief systems. *ZDM*. 28.
Zan R.: 1996, 'Difficoltà d'apprendimento e problem solving: proposte per un'attività di recupero', *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, vol.19B, 28, 4, 109-112.
Zan R. (1998). *Problemi e convinzioni.* Bologna: Pitagora.
Zan R. (2000a). Misconceptions e difficoltà in matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 23A, 1, 45-68.
Zan R. (2000b). Le convinzioni. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 23, 2, 161-197.
Zan R. (2000c). L'insegnante come solutore di problemi. *La matematica e la sua didattica*. 1, 48-71.
Zan R. (2007). *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire*. Milano: Springer.