Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica

D'Amore B., Godino D.J. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica*. 1, 9-38.

Bruno D'Amore

Dipartimento di Matematica
Università di Bologna

Juan D. Godino

Dipartimento di Didattica della Matematica
Università di Granada

Lavoro eseguito nell'àmbito dei Programmi di Ricerca:

- «*Aspetti metodologici (teorici ed empirici) della formazione iniziale ed in servizio degli insegnanti di matematica di ogni livello scolastico*», ex 60%, Università di Bologna;
- BS2002-02452, y MCYT SEJ2004-00789, Ministerio de Ciencia y Tecnología, Plan Nacional de Investigación Científica, Desarrollo e Innovación Tecnológica. Madrid.

Summary. *The aim of this paper is to outline the basic characteristics of two theoretical frameworks frequently used within research in Mathematics Education, the anthropological and the ontosemiotic, so as to demonstrate analogies and differences between the two and thus prepare the ground for new theoretical developments.*

Resumen. *En este trabajo se presentan las principales características de dos puntos de vista usados como marcos teóricos de referencia en investigaciones realizadas en Didáctica de la Matemática, los denominados antropológico y ontosemiótico. El fin es resaltar analogías y diferencias entre estos dos enfoques y abrir la puerta hacia otros desarrollos teóricos.*

Sunto. *Gli autori di questo lavoro vogliono disegnare i tratti caratteristici di due dei punti di vista usati come cornici teoriche nella ricerca in Didattica della Matematica, quello antropologico e quello ontosemiotico. Lo scopo è quello di evidenziare analogie e differenze tra i due punti di vista, allo scopo di preparare il terreno a nuovi sviluppi teorici.*

Sumário. *Os autores deste trabalho querem presentar as linhas características de dois pontos de vista citados na pesquisa em Educação Matematica, o antropólogico e o ontosemiótico. O fim è de ressaltar analogias e diferenças entre os dois pontos de vista, para abrir a porta para novas evoluções teóricas.*

Resumé. *L'intention des auteurs de ce travail est d'esquisser les traits caractéristiques de deux points de vue cités dans la recherche en Didactique des mathématiques, l'anthropologique et l'ontosémiotique. Le but est de mettre en évidence les analogies et les différences entre ces points de vue, afin de préparer le terrain à de nouveaux développements théoriques.*

Zusammenfassung. *Die Verfasser dieses Artikels möchten die häufigsten Kennzeichnen zweier Gesichtspunkten der Didaktik der Mathematik entwerfen: den anthropologischen und den ontosemiotischen Gesichtspunkt. Das Ziel besteht in einer Hervorhebung der Analogien und der Unterschieden zwischen diesen zwei Gesichtspunkten, sodass die Bedingungen für neuen theoretischen Entwicklungen vorbereitet wird.*

1. Pluralità di punti di vista in Didattica della Matematica

Stabilire una data di nascita, almeno approssimativa, per la Didattica della Matematica (DdM), è, come d'altra parte accade per quasi tutte le discipline al mondo, impresa senza esito certo ed univoco; tuttavia, crediamo che molti concorderanno nell'affermare che, *per come la intendiamo oggi*, la DdM come disciplina nasce negli anni '70.

Quando ha cominciato a delinearsi, c'erano tante interpretazioni di essa quanti erano i ricercatori che dichiaravano di occuparsene; ma, già nel finire degli anni '80, Romberg, accettati parametri "deboli" per la definizione di "scienza consolidata e stabile", dichiarava che la DdM mostrava di potersi considerare tale (Romberg, 1988).

Tuttavia, un articolo di Sierpinska e Lerman del 1996 sulla epistemologia della matematica e sulla educazione matematica mostrava una incredibile varietà di punti di vista teorici messi in atto per affrontare la ricerca in DdM (Sierpinska, Lerman, 1996), punti di vista che sono assolutamente vitali anche oggi, dieci anni dopo.

Da un certo punto di vista, "pluralità di punti di vista" può significare "arricchimento"; tuttavia, per il progresso di una disciplina ed il potenziamento delle sue applicazioni pratiche, ci pare inevitabile dover compiere lo sforzo di identificare pochi concetti e metodi unificatori che, in un immediato futuro, ci portino tutti a condividere un vero e proprio *programma di ricerca* (Lakatos, Musgrave, 1960).

Dobbiamo per prima cosa fare lo sforzo di affrontare i problemi metadisciplinari; a nostro avviso, tra questi, ha necessità di estrema urgenza la chiarificazione delle nozioni teoriche che si vengono

utilizzando in DdM, in particolare le nozioni usate per analizzare i fenomeni apprenditivo e cognitivo.
Su questo tema, manca un consenso perfino all'interno di quella corrente che si suole chiamare "epistemologica" o "didattica fondamentale" (Brousseau, 1989; Gascón, 1998). Per rendersi conto di quanto stiamo affermando, è sufficiente osservare la varietà di nozioni (e di loro interpretazioni) che si usano senza che vi sia stata una previa analisi, un confronto, una chiarificazione, una ripulitura.
Tra i termini a nostro avviso abusati, troviamo: conoscenza, sapere, concezioni, concetti, schemi, invarianti operatori, significato, praxeologia, … Si tratta di nozioni di base, degli strumenti, della ferramenta, ciascuno con potenzialità e limiti, a seconda dell'interpretazione.
Il problema interessante che si è delineato negli ultimi dieci anni e, a nostro avviso, non terminato, è la necessità di un'elaborazione di nuovi costrutti cognitivi che superino eventuali limitazioni di quelli esistenti, utilizzati a volte in modo acritico, partendo da quanto è attualmente a disposizione. Solo così sarà possibile una sana e fondamentale operazione di riconoscimento di concordanze, complementarità, ridondanze, discordanze… tra le diverse posizioni.

L'uso del termine "cognitivo" è in sé stesso conflittuale. Lo si trova spesso ad indicare conoscenze soggettive, ma talvolta anche processi mentali che le persone pongono in atto al momento di affrontare problemi.
Dal punto di vista psicologico della cognizione matematica, tali processi mentali, che hanno luogo nel cervello degli esseri umani, sono gli unici costituenti della conoscenza che si devono considerare. Ma questa affermazione limitativa non tiene conto del fatto che i soggetti dialogano tra loro, trovano o cercano accordi, regolano i modi di espressione e di attuazione di fronte a date classi di problemi; e che da questi "sistemi di pratiche condivise" emergono oggetti istituzionali i quali, a loro volta, condizionano i modi di pensare ed attuare dei membri di tali istituzioni.
Dunque, insieme ed accanto alle conoscenze soggettive che emergono dai modi di pensare e di attuare dei soggetti intesi in modo individuale, è necessario prendere in esame le conoscenze istituzionali, alle quali si deve attribuire un certo grado di oggettività.

Ciò porta immediatamente a distinguere, nella cognizione individuale ed in quella generale, la dualità "cognizione individuale" - "cognizione istituzionale", tra le quali si instaurano relazioni dialettiche complesse.

Cognizione individuale: risultato del pensiero e dell'azione di un soggetto pensato come individuo di fronte ad una certa classe di problemi;
cognizione istituzionale: risultato del dialogo, dell'accordo e della regolazione delle azioni all'interno di un gruppo di individui, di fronte ad una certa classe di problemi.

Una cognizione individuale non necessariamente coincide con una cognizione istituzionale; si può identificare la cognizione personale con il solo termine "cognitivo", come si fa nella psicologia cognitiva; e la cognizione istituzionale con il solo termine "epistemico", dato che si occupa di una conoscenza istituzionale.
Questa distinzione è necessaria per affrontare due punti di vista di ricerca sui quali centreremo la nostra attenzione, il punto di vista *antropologico* (Chevallard, 1992, 1999) ed il punto di vista *ontosemiotico* (Godino, Batanero, 1994; Godino, 2002)

2. Il punto di vista antropologico

2.1. Un punto di partenza: la prospettiva pragmatica della conoscenza matematica

Di fronte alla necessità di far luce sulla natura del significato, si è soliti fare riferimento a due categorie distinte nelle quali le teorie del significato possono essere divise: teorie realiste (o figurative) e teorie pragmatiche, divisione già apparsa in Kutschera (1979). Solo facendo chiarezza sul modo di concepire il *significato*, acquisterà senso parlare di *costruzione del significato* e dunque di conoscenza matematica.
Descriveremo brevemente la macro-distinzione filosofica tra teorie realiste e teorie pragmatiche.[1]

[1] Per approfondimenti critici, storici ed epistemologici su questo tema, si vedano: Godino, Batanero, 1994; D'Amore, 2003.

Nelle teorie realiste il significato è «una relazione convenzionale tra segni ed entità concrete o ideali che esistono indipendentemente dai segni linguistici; di conseguenza suppongono un realismo concettuale» (Godino, Batanero, 1994). Come già asseriva Kutschera (1979, p. 34): «Secondo questa concezione il significato di un'espressione linguistica non dipende dal suo uso in situazioni concrete, bensì avviene che l'uso si regga sul significato, essendo possibile una divisione netta fra semantica e pragmatica».

Nella semantica realista che ne deriva, si attribuiscono alle espressioni linguistiche funzioni puramente semantiche: il significato di un nome proprio (come: 'Bertrand Russell') è l'oggetto che tale nome proprio indica (in tal caso: Bertrand Russell); gli enunciati atomici (come: 'A è un fiume') esprimono fatti che descrivono la realtà (in tal caso: A è il nome di un fiume); i predicati binari (come: 'A legge B') designano attributi, quelli indicati dalla frase che li esprime (in questo caso: la persona A legge la cosa B). Dunque, ogni espressione linguistica è un attributo di certe entità: la relazione nominale che ne deriva è l'unica funzione semantica delle espressioni.

Si riconoscono qui le basi delle posizioni di Frege, di Carnap, del Wittgenstein del *Tractatus*.

Una conseguenza di questa posizione è l'ammissione di una osservazione "scientifica" oggettiva, come potrebbe essere, ad un primo livello, una logica degli enunciati e dei predicati.

Dal punto di vista che a noi qui preme di più, se andiamo ad applicare i supposti ontologici della semantica realista alla Matematica, se ne trae necessariamente una visione platonica degli oggetti matematici: in essa nozioni, strutture eccetera hanno una reale esistenza che non dipende dall'essere umano, in quanto appartengono ad un dominio ideale; "conoscere" da un punto di vista matematico significa "scoprire" enti e loro relazioni in tale dominio. Ed è pure ovvio che tale visione comporta un assolutismo della conoscenza matematica in quanto sistema di verità sicure, eterne, non modificabili dall'esperienza umana, dato che sono ad esse precedenti o, almeno, ad essa estranee e da essa indipendenti.

Posizioni di questo tipo, seppure con diverse sfumature, furono sostenute da Frege, Russell, Cantor, Bernays, Gödel, …; ma trovarono anche violente critiche [il *convenzionalismo* di Wittgentsein ed il *quasi empiricismo* di Lakatos: si vedano Ernest (1991) e Speranza (1997)].

Nelle teorie pragmatiche le espressioni linguistiche hanno significati diversi a seconda del contesto in cui si usano e quindi risulta impossibile ogni osservazione scientifica oggettiva in quanto l'unica analisi possibile è "personale" o soggettiva, comunque circostanziata e non generalizzabile. Non si può far altro che esaminarne i diversi "usi": l'insieme degli "usi" determina infatti il significato degli oggetti.
Si riconoscono qui le posizioni del Wittgenstein delle *Ricerche filosofiche*, quando ammette che la significatività di una parola dipende dalla sua funzione in un "gioco linguistico", dato che in esso ha un modo di 'uso' ed un fine concreto per il quale essa è stata appunto usata: la parola, dunque, non ha di per sé un significato, e tuttavia può essere contestualmente significativa (Wittgenstein, 1953, 1976).
Gli oggetti matematici sono dunque simboli di unità culturali che emergono da un sistema di utilizzazioni che caratterizzano le pragmatiche umane (o, almeno, di gruppi omogenei di individui) e che si modificano continuamente nel tempo, anche a seconda dei bisogni. Di fatto, gli oggetti matematici ed il significato di tali oggetti dipendono dai problemi che in matematica si affrontano e dai processi della loro risoluzione. Insomma, dipendono dalle pratiche umane.

	TEORIE "REALISTE"	**TEORIE "PRAGMATICHE"**
significato	relazione convenzionale tra segni ed entità concrete o ideali, indipendenti dai segni linguistici	dipende dal contesto e dall'uso
semantica vs pragmatica	divisione netta	non divisione o divisione sfumata
obiettività o intersoggettività	totale	mancante o discutibile
semantica	le espressioni linguistiche hanno funzioni puramente semantiche	le espressioni linguistiche e le parole hanno significati "personali", sono significative in opportuni contesti, ma non hanno significati assoluti, di per sé
analisi	possibile e lecita: la logica, per esempio	possibile solo un'analisi "personale" o soggettiva, non generalizzabile, non assoluta
conseguente visione epistemologica	concezione platonica degli oggetti matematici	concezione problematica degli oggetti matematici

conoscere	scoprire	usare in opportuni contesti
conoscenza	è un assoluto	è relativa alla circostanza ed all'uso specifico
esempi	il Wittgenstein del *Tractatus*, Frege, Carnap [Russell, Cantor, Bernays, Gödel]	il Wittgenstein delle *Ricerche Filosofiche* [Lakatos]

È ovvio che i due campi non sono del tutto complementari e nettamente separati, anche se, per motivi di chiarezza, abbiamo preferito dare questa impressione "forte". Su questo punto, torneremo.
Vogliamo anche segnalare come, secondo Bloor (1982), la visione pragmatica raccoglie la "eredità di Wittgenstein".
La scelta di campo pragmatica appare a molti ricercatori come molto vicina alla realtà del processo empirico di cui si occupa la DdM (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2001; D'Amore, 2003).

2.2. Le principali nozioni del punto di vista antropologico in DdM

L'aver costretto il ricercatore a puntare tutta la sua attenzione sulle attività degli esseri umani che hanno a che fare con la matematica (non solo risolvere problemi, ma anche comunicare la matematica), è uno dei meriti del punto di vista antropologico, ispiratore di altri punti di vista, tra i quali quello che oggi si chiama antropologico: la TAD, teoria antropologica della didattica (della matematica) (Chevallard, 1999; p. 221).
Perché questo aggettivo "antropologico"? Esso non è una esclusività dell'approccio creato da Chevallard negli anni '80, come lui stesso dichiara (Chevallard, 1999), ma un «effetto del linguaggio» (p. 222); contraddistingue la teoria, la identifica, ma non le è peculiare in modo univoco.
La TAD si centra quasi esclusivamente sulla dimensione istituzionale della conoscenza matematica, come uno sviluppo del programma di ricerca iniziato con la didattica fondamentale (Brousseau, 1989; Gascón, 1998).
Il punto cruciale è che «la TAD pone l'attività *matematica*, e dunque l'attività *di studio* in matematica, *nell'insieme delle attività umane e delle istituzioni sociali*» (Chevallard, 1999).
Nella direzione pragmatica, ha rilievo la definizione di Chevallard (1991, p. 8) di "oggetto matematico"; un *oggetto matematico* è «un emergente da un sistema di prassi dove sono manipolati oggetti materiali

che si scompongono in differenti registri semiotici: registro orale, delle parole o delle espressioni pronunciate; registro gestuale; dominio delle iscrizioni, ovvero ciò che si scrive o si disegna (grafici, formule, calcoli,…), vale a dire, registro della scrittura»; essendo il "praxema" un oggetto materiale legato alla prassi, l'oggetto è allora un «emergente da un sistema di praxema».

In questa accezione, non ha più molto interesse la nozione realista ingenua di *significato di un oggetto* (di conoscenza, in generale; matematico, in particolare) quanto piuttosto quella di *rapport à l'objet*, rapporto, relazione all'oggetto. Su tale idea poggia la costruzione iniziale che Chevallard fa della sua "teoria della conoscenza", o meglio di una sua "antropologia cognitiva", all'interno della quale si può situare la didattica.

In tutto ciò è centrale la persona (o l'istituzione, come insieme di persone) che si mette in relazione all'oggetto, e non l'oggetto in sé: «Un oggetto esiste dal momento in cui una persona *X* (o una istituzione *I*) riconosce questo oggetto come esistente (per essa). Più esattamente, si dirà che l'oggetto O esiste per *X* (rispettivamente per *I*) se esiste un oggetto, rappresentato da R(*X*,O) (rispettivamente R(*I*,O)) e detto relazione personale da *X* ad O (rispettivamente relazione istituzionale da *I* ad O)» (Chevallard, 1992, p. 9).

Questa posizione ha segnato una svolta interessante all'interno delle cornici teoriche nelle quali si situa ogni ricerca in DdM, tanto più se si sottolineano i successivi studi compiuti da più Autori, per chiarire e rendere operative le nozioni di Chevallard, creando strumenti concettuali adeguati e paragonandoli a quelli messi in campo da altre posizioni al riguardo.

Le nozioni che si propongono come strumenti per descrivere l'attività matematica e gli oggetti istituzionali emergenti di tale attività sono: opera matematica, praxeologia matematica, praxeologia didattica, relazione istituzionale all'oggetto.

Opera matematica: è qualche cosa che sorge come risposta ad un insieme di domande e come mezzo per portare a soluzione, nel seno di una certa istituzione, determinati compiti (problemi) matematici (Gascón, 1998).

Ecco alcuni esempi forniti da Chevallard (1996): «Così, per esempio, possiamo considerare l'opera matematica che risponde, tra altre, a

domande del tipo: “Come ottenere un determinato oggetto al minor prezzo possibile?”, “Come raggiungere il maggiore effetto possibile con un determinato sforzo?”, “Come effettuare il massimo lavoro in un tempo dato?” (…) Si tratta di domande che, in un modo o nell’altro, si pongono nell’istituzione scolare».
Le domande o i compiti o i problemi ai quali dà risposta una opera matematica si cristallizzano in uno o più “tipi di problemi”. Questo concetto ci sarà utile tra breve.

Praxeologia matematica (Chevallard, Bosch, Gascón, 1997): sistemi di pratiche che una istituzione considera appropriati per risolvere (un tipo di) compiti [è l’analogo del significato istituzionale di un oggetto matematico di Godino, Batanero (1994)].
Se si adotta una epistemologia di tipo pragmatista, le praxeologie sono i significati degli oggetti matematici (teorie, contenuti o organizzazioni matematiche).

Praxeologia didattica (Chevallard, 1999): coincide con la praxeologia matematica ma la componente praxemica fa riferimento ai compiti dell’insegnante e dell’allievo, tecniche di studio etc.; contiene riferimenti problematici a quel linguaggio specifico (dialogico) che si instaura tra insegnante e allievo e a quell’oggetto che si chiama “traiettoria didattica” (progettazione didattica) nella quale assume significato specifico il tempo durante il quale si evolve.

Relazione personale all’oggetto: raggruppa tutte le nozioni proposte dalla psicologia (concezione, intuizione, schema, rappresentazione interna,...). È a sua volta un oggetto: R(X,O), definito sopra come relazione personale da X (persona) ad O (oggetto) (Chevallard, 1991).

Relazione istituzionale all’oggetto: è a sua volta un oggetto R(I,O), definito sopra, come relazione istituzionale da I (istituzione) ad O (oggetto) (Chevallard, 1991).

La nozione di *praxeologia* è divenuta, nel tempo, una delle nozioni di base della teoria antropologica. Entriamo maggiormente nel merito, seguendo Chevallard (1999, pp. 224-229).
Sia T un tipo di compiti o di problemi; a T risultano legati:
una *tecnica*: τ

una *tecnologia di* τ: θ
una *teoria di* θ: Θ.
Si chiama praxeologia *puntuale* la quaterna: $[T/\tau/\theta/\Theta]$; puntuale sta per specifica, cioè indica che si tratta di una praxeologia relativa ad un certo tipo dato di problemi, T; si può anche denominare *organizzazione praxeologica*.
In una praxeologia puntuale possiamo distinguere:
un blocco pratico-tecnico: $[T/\tau]$: il "saper fare"
un blocco tecnologico-teorico: $[\theta/\Theta]$: il "sapere".
Spesso si usa designare come "sapere" la praxeologia puntuale completa $[T/\tau/\theta/\Theta]$; ma questo va pensato come una metonimia; in essa si riconosce una implicita tendenza a dare minore importanza al saper fare.

Nella teoria antropologica non si fa alcun riferimento alle tecniche che devono essere considerate come strumento per l'analisi della cognizione del soggetto, ma per la cognizione intesa solo in senso istituzionale. Si tratta dunque di strumenti di tipo epistemico e non cognitivo.
Appare implicito ma sufficientemente chiaro che, come costituenti delle tecnologie e delle teorie, vi sono i concetti, le proposizioni, le dimostrazioni, mediante i quali si riescono a giustificare ed a spiegare le tecniche. Tali nozioni sono implicitamente contenute nelle praxeologie matematiche ed hanno una natura epistemica e dunque istituzionale.

Praxeologia matematica globale: è l'estensione della praxeologia matematica puntuale a tutti i tipi T possibili di problemi, con le variazioni che ne conseguono.

Una interpretazione della Teoria Antropologica di Chevallard
Sierpinska e Lerman (1996) presentano una sintesi ed una interpretazione della "antropologia della conoscenza" elaborata da Chevallard, considerandola come un ampliamento dell'epistemologia. Nella tradizione, infatti, l'oggetto di studio della epistemologia era la produzione della conoscenza scientifica. L'antropologia della conoscenza, invece, si occupa dei meccanismi della produzione della conoscenza scientifica, delle pratiche legate al suo uso o applicazione; tra queste rientrano: il suo insegnamento e la sua trasposizione; in particolare, le relazioni tra la produzione, l'uso e l'insegnamento della

conoscenza scientifica, evidenziano la necessità che questa si adatti per poter "funzionare" in diversi tipi di istituzioni (e la scuola è uno di essi).

Il punto di vista antropologico nasce dagli studi sulla trasposizione didattica, quindi da lì bisogna prendere le mosse.
La nozione di trasposizione didattica fece, ai suoi inizi (Chevallard, 1985, 1990), certe ipotesi più o meno tacite sulla conoscenza matematica che la distinguono fortemente dal costruttivismo epistemologico (Sierpinska, Lerman, 1996). Ammise l'esistenza di qualcosa chiamato "Savoir savant matematico", rispetto al quale il contenuto della matematica insegnata a scuola poteva essere comparato e giudicato come "legittimo" o no. Ciò è completamente estraneo al punto di vista costruttivista, rispetto al quale perfino l'esistenza di una conoscenza fuori dalle menti degli individui è inesplicabile. Nella teoria della trasposizione didattica si ipotizza l'esistenza di uno "stadio di conoscenza" ideale al quale l'insegnamento e l'apprendimento devono convergere. Anche questo assunto è contrario a come i costruttivisti interpretano i processi di insegnamento ed apprendimento.
La teoria della trasposizione didattica è stata criticata, insieme ad altri motivi, proprio a causa della vaghezza della nozione di "Savoir savant matematico" (Freudenthal, 1986). Una risposta a questa critica (Arsac, 1992) mise in evidenza il carattere socioculturale della nozione: la società riconosce l'esistenza di un certo gruppo di professionisti che producono conoscenza la quale, nella cultura, si considera "conoscibile" o "scientifica".
Anche Chevallard si interessa delle relazioni tra la pratica sociale della ricerca in matematica e la pratica sociale dell'insegnamento e apprendimento della matematica nella scuola (Chevallard, 1991).
Centrandosi sulle pratiche sociali, piuttosto che sulla "conoscenza", Chevallard estese questa teoria (trasposizione didattica) alle dimensioni di una antropologia (Sierpinska, Lerman, 1996): ogni conoscenza è conoscenza di una istituzione. La ricerca professionista in matematica è una istituzione, la scuola un'altra, la famiglia un'altra. La matematica "vive" in diverse istituzioni, nell'industria e negli affari; però, per mezzo dei necessari adattamenti, si converte ogni volta in una matematica diversa. Chi si occupa di epistemologia della matematica dovrebbe ricercare le fonti, i modi di controllo ed i meccanismi di crescita della matematica in tutte le "nicchie ecologiche" nelle quali vive.

Questo approccio antropologico costrinse Chevallard ad adattare la nozione di conoscenza dell'individuo; non esistono problemi di strutture o di modelli mentali in questa nozione, bensì un atteggiamento ("rapport"), una relazione alla istituzione e un funzionamento rispetto a quel che una istituzione definisce come "ciò che è conoscenza". Si conosce (o no) solo in relazione all'opinione di una istituzione, non in un senso assoluto (Arsac, 1992). Dunque, non servirebbero studi di psicologia dell'apprendimento o della conoscenza, dal punto di vista antropologico, ma analisi antropologiche rispetto alle istituzioni.
Tra i risultati messi in discussione fin dai primi passi della creazione della trasposizione didattica, c'è la differenza tra i contratti istituzionali dentro i quali la conoscenza nella ricerca matematica (dei ricercatori professionisti) e quella scolare si inseriscono (Sierpinska, Lerman, 1996). Tale differenza determina due atteggiamenti completamente diversi da parte del ricercatore e da parte dello studente che apprende, come ha messo in evidenza Balacheff (1990) a proposito, per esempio, dell'attività del dimostrare.
All'interno di tale distinzione, abbiamo le nozioni di "depersonalizzazione" e di "decontestualizzazione" della conoscenza; chi crea risultati matematici, li depersonalizza e li decontestualizza per comunicarli ai colleghi; al contrario, in un contesto efficace di apprendimento, avviene un processo inverso: l'apprendente deve raggiungere il risultato come fosse proprio, percorrendo un cammino personale per la sua comprensione e inserendolo nel contesto dei problemi sui quali sta lavorando in quel momento. La conoscenza deve insomma convertirsi in conoscenza personale.
Un'altra distinzione utile ottenuta grazie alla teoria della trasposizione didattica è quella tra la conoscenza come sapere da insegnare e conoscenza come sapere del quale gli allievi devono essere resi responsabili (conoscenza come sapere da apprendere).

La proposta e l'affermazione del punto di vista antropologico contribuì, come sempre accade quando si affermano nuove visioni teoriche, a far luce su altre, quando si ha la possibilità di analizzarle criticamente con prospettive diverse.
Interessante ci pare il rapporto con l'interazionismo (Bauersfeld, 1994). Il punto di vista antropologico e l'interazionismo condividono alcuni punti di vista (Sierpinska, Lerman, 1996):

- entrambi vedono l'educazione da prospettive sociali e culturali;
- entrambi danno priorità ai processi di creazione di "dominii di consenso" o di accordo, interpretati come meccanismi che danno conto della relativa stabilità delle culture, nei quali certi elementi della cultura si convertono in "accettati come condivisi" o "che si impongono da sé, trasparenti".

Entrambi i punti di vista sono interessati a certi meccanismi di cambio.
Gli interazionisti sono interessati a guardare l'insegnamento e l'apprendimento ad un livello micro -da dentro l'aula- ed attribuiscono un compito importante ai contributi individuali degli insegnanti e degli studenti: la nozione di "riflessività" e di "emergenza" danno conto del cambio delle culture della classe.
Per Chevallard, che studia "i sistemi didattici" ad un livello macro, la fonte di cambio sta nel lavoro della "noosfera" o nell'interfaccia tra le scuole e la società nel suo insieme, dove si concepiscono l'organizzazione, i contenuti ed il funzionamento del processo cognitivo (Sierpinska, Lerman, 1996).
La noosfera si compone di gruppi di individui come: i matematici, le commissioni ministeriali, i genitori, i direttori scolastici,…; si occupa della "manipolazione" della conoscenza, d'accordo con le priorità che emergono nella società in un dato momento.

2.3. Esempio di ricerca

Il problema del passaggio dalla secondaria all'università

Descriviamo in questo paragrafo la ricerca realizzata da Bosch, Fonseca, Gascón (2004), pubblicata su *Recherches en Didactiques des Mathématiques* con il titolo: Incompletitud de las organizaciones matemáticas escolares en las instituciones escolares (Incompletezza delle organizzazioni matematiche scolastiche nelle istituzioni scolastiche). Questo esempio ci permetterà di mostrare il tipo di spiegazione che fornisce la TAD relativamente al fenomeno dell'elevato insuccesso scolastico degli studenti nel primo corso di studi universitari, fenomeno dovuto soprattutto, secondo gli Autori, alla natura e alla diversità delle organizzazioni matematiche incluse nella educazione secondaria ed in quella universitaria.
La problematica docente che si affronta in questa ricerca viene formulata nei seguenti termini: «Come addolcire o diminuire le enormi difficoltà che incontrano gli allievi quando passano dallo studio della matematica

in Secondaria a quello nella Università? E, in modo complementare, come si potrebbero superare le crescenti difficoltà con le quali si confrontano i professori i matematica del primo ciclo universitario per svolgere il loro lavoro? Queste difficoltà si materializzano con un elevato insuccesso scolastico che, nel primo corso di alcuni studi universitari, è arrivato a superare l'80%. Nel quadro della TAD si assume come ipotesi di base «una *depersonalizzazione della problematica didattica*» ponendo in primo piano lo studio delle «attività matematiche istituzionalizzate»; si postula, contro il punto di vista psicopedagogico dominante, che «il problema del passaggio dalla Secondaria alla Università può essere spiegato a partire dall'analisi delle *pratiche matematiche* che si realizzano nelle istituzioni docenti» (p. 209).
Come conseguenza di questa ipotesi di base, si afferma che la causa dell'insuccesso scolastico nello studio della matematica nei primi corsi universitari sta nelle *contraddizioni e discontinuità*, o cambi bruschi, tra i contratti didattici istituzionali vigenti tra le istituzioni Università e Secondaria. Tali contratti reggono le rispettive organizzazioni matematiche e didattiche, cioè il tipo di pratiche matematiche che possono svilupparsi e la forma in cui dette pratiche possono organizzarsi in ciascuna istituzione. «Postuliamo che lo studio comparato delle organizzazioni che sono presenti in Secondaria e nell'Università ci permetterà di spiegare meglio le discontinuità tra entrambe le istituzioni e gli ostacoli che rendono difficile il passaggio tra loro» (p. 211).
La ricerca si centra nel caratterizzare come sono le organizzazioni matematiche in Secondaria, formulando la seguente ipotesi: «l'attività matematica che si sviluppa in Secondaria è essenzialmente *pratico-tecnica* e raramente raggiunge il *livello tecnologico*. Come conseguenza, le OM [organizzazioni matematiche] che si studiano in S [Secondaria] sono generalmente OM *puntali*, molto *rigide* e *isolate* (o *poco coordinate* tra loro), il che rende *difficile*, e addirittura *impedisce*, che in questa istituzione si ricostruiscano effettivamente OML [organizzazioni matematiche locali] relativamente complete» (p. 211).
Questa ipotesi si prova mediante un test scritto proposto ad un campione di studenti del primo corso di Università, nei loro primi giorni di ingresso, e mediante l'analisi di un campione di libri di testo di secondaria.

Il questionario consta di 31 domande raggruppate attorno a cinque dimensioni:
C1. Dipendenza della nomenclatura associata ad una tecnica.
C2. Applicare una tecnica non comporta interpretare il risultato.
C3. Non esistono due tecniche diverse per realizzare lo stesso compito.
C4. Assenza di tecniche per realizzare un compito "inverso".
C5. Assenza di situazioni aperte di modellizzazione.
Queste dimensioni sono usate anche per elaborare un modello di analisi dei compiti inclusi nei libri di testo.
Gli autori evidenziano che con il questionario scritto applicato agli studenti «*non pretendiamo analizzare le conoscenze matematiche degli studenti*, né individualmente né collettivamente. … Il nostro obiettivo principale consiste nell'utilizzare le risposte degli studenti come *indicatori di alcune caratteristiche delle OM* che si studiano in S ed evidenziare l'esistenza e la natura di determinati ostacoli epistemologici e didattici che rendono difficile lo sviluppo del processo di studio della matematica nel *passaggio dalla Secondaria al primo ciclo dell'Università*» (p. 227).
Gli indici di difficoltà degli items del questionario (percentuali di risposte corrette) e il numero totale di compiti proposti nei libri, che riuniscono certe caratteristiche associate alle dimensioni indicate, sono interpretati congiuntamente per ricavare conclusioni rispetto alle relazioni tra: «i diversi aspetti della *rigidezza* delle OM che si studiano in Secondaria, la *incompletezza relativa* delle OML che si ricostruiscono in detta istituzione, le *restrizioni istituzionali* che pesano sull'attività matematica scolastica e le *discontinuità* tra la Secondaria e l'Università» (p. 238).

Alcuni commenti critici
Sembra ovvio che esistano differenze importanti tra il tipo di matematica che si studia in Secondaria, e su come si studia tale matematica, e il corrispondente del primo corso dell'Università. Introducendo modifiche nei curricoli di matematica di entrambi i livelli e nei modi in cui si sviluppa lo studio o, se si preferisce, cambi nei contratti didattici, si può influire sugli apprendimenti degli studenti. Ebbene, il senso di tale influsso, cioè che l'apprendimento si ottimizzi o no, dipende da come sono i cambi che si introducono nella matematica e nel modo di studiarla.

Non è chiaro se i cambi nelle organizzazioni matematiche e didattiche che si propongono in questa ricerca, basati sui postulati della TAD, vadano a produrre reali miglioramenti negli apprendimenti degli studenti di secondaria. Passare da alcune "organizzazioni matematiche" puntuali, non articolate e rigide, come si fa attualmente in Secondaria, verso alcune organizzazioni matematiche locali relativamente complete (tipo di compiti integrati, con uso di diverse tecniche e criteri per scegliere tra esse, indipendenza dei fattori ostensivi che integrano le tecniche, esistenza di compiti aperti e di tecniche "inverse", interpretazione del risultato da applicare nelle tecniche ecc.), può aiutare, senza dubbio, a diminuire gli indici di insuccesso nella Università, però potrebbe aumentare notevolmente gli indici di insuccesso in Secondaria.
Questo risultato poco ragionevole è una conseguenza del postulato principale della TAD relativo alla depersonalizzazione della problematica didattica: il soggetto si identifica con l'istituzione. Se nella istituzione si configura una matematica di eccellenza, i soggetti di tale istituzione apprenderanno in modo automatico questa matematica eccellente. La depersonalizzazione colpisce anche il professore: le organizzazioni didattiche si definiscono in termini di momenti dell'attività matematica, che si traducono in tipi di compiti e tecniche che si propongono e del discorso tecnologico-teorico che le articola, giustifica e generalizza.
La confusione (o fusione) tra soggetto ed istituzione che si postula nel "punto di vista antropologico della didattica" ha portato in questa ricerca ad un'impostazione metodologica non appropriata per verificare le proprie stesse ipotesi. Un questionario proposto agli studenti valuta gli apprendimenti raggiunti, dunque le conoscenze che essi hanno "acquisito" come conseguenza dello studio realizzato. Sugli apprendimenti, però, influiscono diversi fattori, tra i quali il tipo di matematica che si pretende; non è corretto inferire dalle percentuali di risposte corrette le caratteristiche di tale matematica. Inoltre, non si dovrebbero neppure inferire le caratteristiche dei libri di testo, dato che i significati implementati nelle classi non vengono fissati in modo deterministico attraverso l'uso dei libri di testo.
D'altra parte, il livello di analisi delle organizzazioni matematiche nei termini della quaterna (compiti, tecniche, tecnologie, teorie) non permette un'analisi sufficiente della complessità ontosemiotica delle stesse, il che può essere un fattore esplicativo delle difficoltà di

apprendimento e delle risorse didattiche necessarie per ottenerlo. La distanza tra la Secondaria e l'Università non si può saldare solo "avvicinando" la matematica di Secondaria a quella dell'Università, ma anche avvicinando quest'ultima alle competenze cognitive degli studenti che riceve.

2.4. Limiti del punto di vista antropologico

Le posizioni teoriche delineate dalla ricerca in direzione antropologica, denunciano qualche limite che vogliamo qui riassumere in poche righe.
L'accanimento epistemologico anti "psicologico" a causa del quale non si vuole per nulla dare spazio a spiegazioni del fenomeno didattico a carattere cognitivo, limita, a nostro avviso, l'uso del punto di vista antropologico in aula.
Ci pare limitativo il fatto di voler tutto ricondurre alle istituzioni, senza valorizzare e studiare il singolo. Ci pare che, anche senza enfatizzare eccessivamente gli apporti di una tendenza psicologistica e la funzione dell'individuo, non sia del tutto spiegabile il complesso fenomeno dell'apprendimento della matematica solo in chiave di adesione a scelte istituzionali.
La TAD fornisce strumenti teorici potenti per lo studio delle organizzazioni matematiche, le relazioni ecologiche tra le stesse e le restrizioni istituzionali che condizionano la sua evoluzione e sviluppo. D'altra parte, come abbiamo visto nell'esempio precedente, la "identificazione soggetto-istituzione" le impedisce di poter dar conto delle condizioni sotto le quali avviene l'apprendimento.
Un'altra limitazione che riconosciamo nella TAD si riferisce al livello di analisi che essa permette di realizzare per quanto concerne le "organizzazioni matematiche". L'inclusione del sistema di regole concettuali, proposizionali ed argomentative nel blocco tecnologico-teorico non permette di riconoscere la complessità dei processi di interpretazione, di ritenzione e di capacità di seguire tali regole da parte degli studenti. La ricerca didattica deve centrare la sua attenzione, oltre che sull'ecologia delle organizzazioni matematiche, sui fenomeni cognitivi legati all'apprendimento del sistema di regole che compongo tali organizzazioni.

3. Il punto di vista ontologico e semiotico

3.1. Presupposti di partenza

Abbiamo visto come l'applicazione dei supposti ontologici della semantica realista alla matematica corrisponda ad una visione platonica degli oggetti matematici (concetti, proposizioni, teorie, contesti,…). Secondo questa posizione filosofica, le nozioni e le strutture matematiche hanno un'esistenza reale, indipendente dall'essere umano e dalle sue attività, private o sociali, in un qualche dominio reale non meglio precisato. La conoscenza matematica consiste nello scoprire relazioni preesistenti che collegano tra loro tali oggetti.

Tale concezione implica inoltre una visione assolutista della conoscenza matematica, nel senso che questa è considerata come un sistema di verità sicure ed immutabili.

Con questo presupposto, per esempio, il significato del termine "funzione" sarebbe semplicemente il concetto di funzione dato da una sua definizione matematica.

Dal punto di vista epistemologico, la definizione pragmatica del significato «è molto più soddisfacente che non quella data all'interno della teoria realista: con lo sparire dei concetti e proposizioni come dati indipendenti dalla lingua, si dissipa anche il problema di come possano essere conosciute queste entità, e ci avviciniamo ai fenomeni che giustificano la dipendenza del pensiero e dell'esperienza rispetto al linguaggio» (Kutschera, 1979; p. 148).

Dal nostro punto di vista, i supposti ontologici del costruttivismo sociale come filosofia della matematica (Ernest, 1998) portano anche all'adozione delle teorie pragmatiche del significato. Gli oggetti matematici devono essere considerati come simboli di unità culturali, emergenti da un sistema di usi legati alle attività matematiche che realizzano gruppi di persone e che dunque evolvono con il trascorrere del tempo.

Nella nostra concezione, quel che determina l'emergere progressivo degli "oggetti matematici" è il fatto che, nel seno di certe istituzioni, si realizzino determinati tipi di pratiche e che il "significato" di tali oggetti sia intimamente legato ai problemi affrontati ed alle attività realizzate dagli esseri umani, non potendosi ridurre il significato dell'oggetto matematico alla sua mera definizione matematica.

Facendo seguito a quanto detto fino ad ora, prendiamo in esame le considerazioni di Ullman (1962) che aprono la strada ad una prospettiva

che dichiariamo in apertura: le posizioni realiste e pragmatiste non sono contraddittorie; pertanto, la posizione antropologica non è contraddittoria con quella realista.
In Ullman le teorie realiste sono dette "referenziali" mentre quelle pragmatiche sono dette "operazionali o contestuali"; dal suo punto di vista, le teorie pragmatiche sono un complemento delle teorie realiste: «(…) il significato di una parola si può verificare *solo* studiando il suo uso. Non c'è alcuna scorciatoia verso il significato mediante l'introspezione o qualsiasi altro metodo. Il ricercatore deve dapprima organizzare un campione adeguato di contesti e affrontarli con uno spirito aperto, permettendo che il significato o i significati emergano dai contesti stessi. Una volta che si sia conclusa questa fase, si può passare alla fase "referenziale" e formulare il significato o i significati così evidenziati. La relazione tra i due metodi o, meglio, tra le due fasi dell'indagine, è, in definitiva, la stessa che si ha tra la lingua ed il parlato: la teoria operazionale tratta del significato nel parlato; quella referenziale, del significato nella lingua. Non c'è, assolutamente, necessità di collocare i due modi di accesso in opposizione, uno di fronte all'altro: ciascuno conduce il suo proprio lato del problema e nessuno è completo senza l'altro» (Ullman, 1962, pp. 76-77).
Raccogliendo questa osservazione di Ullman, e tornando al campo che ci interessa, ci pare di poter affermare che il significato degli oggetti matematici comincia come pragmatico, relativo al contesto; ma, tra i tipi di uso relativi a quel significato, ne esistono alcuni che permettono di orientare i processi di insegnamento – apprendimento della matematica. Questi tipi di usi vengono oggettivizzati attraverso il linguaggio e finiscono con il costituire referenti del lessico istituzionale.
Quello qui delineato è il punto di partenza di un'altra visione della DdM che ampia il punto di vista antropologico, ne elimina i limiti denunciati in 2.4., si avvicina alla "pratica" condivisa in aula, supera la supposta dicotomia tra realismo e pragmatismo, così come tra antropologia e psicologia.

3.2. Principali nozioni del punto di vista ontologico e semiotico

3.2.1. Sistemi di pratiche operative e discorsive legate a campi o tipi di problemi

Cominciamo con delle definizioni:

Significato personale / significato istituzionale di un oggetto matematico (Godino, Batanero 1994): sistemi di pratiche operative e discorsive realizzate da una persona / all'interno di una istituzione, per risolvere (un campo di) problemi matematici.
Si considera *pratica matematica*: «qualsiasi azione o espressione (verbale, grafica, comunicativa ecc,) realizzata da un essere umano per risolvere problemi, comunicare la soluzione ottenuta, validarla, generalizzarla ad altri problemi o, più in generale, ad altri contesti» (Godino, Batanero, 1998, p. 192). Più che una pratica particolare di fronte ad un problema concreto, nello studio della matematica interessa considerare i sistemi di pratiche (da tutti i punti di vista: operative e discorsive) usate o evidenziate dagli esseri umani durante la loro messa in atto di fronte a tipi di situazioni problematiche.
Per esempio, alle domande: Che cos'è l'oggetto matematico "media aritmetica"?, Che cosa significa o che cosa rappresenta l'espressione "media aritmetica"?, si propone come risposta: il sistema di pratiche che realizza un essere umano (significato personale), o condivisa nel seno di una istituzione (significato istituzionale) per risolvere un tipo di situazioni-problema nelle quali si chiede di trovare una rappresentante di un insieme di dati.
Le nozioni di "significato istituzionale e personale degli oggetti matematici" hanno comportato quelle di "pratica personale", "sistema di pratiche personali", "oggetto personale (o mentale)", strumenti utili per lo studio della "cognizione matematica individuale" (Godino, Batanero, 1994; 1998). Ciascuna di tali nozioni ha poi un suo versante istituzionale. Fare chiarezza su questi punti è stato necessario per precisare e rendere operative le nozioni di "relazione personale e istituzionale all'oggetto" introdotte da Chevallard (1992).
Da qui si vede bene come il punto di vista ontosemiotico sia molto più attento alle questioni dell'apprendimento individuale, dunque a quegli aspetti psicologici che sono lasciati da parte e non presi in considerazione dal punto di vista antropologico.

3.2.2. Oggetti che intervengono e che emergono dai sistemi di pratiche
Oggetto matematico (Godino, 2002): tutto ciò che è indicato, segnalato, nominato quando si costruisce, si comunica o si apprende matematica; l'idea è tratta da Blumer (1982, p. 8): un oggetto è «tutto quello che può

essere indicato, tutto quel che può essere segnalato o al quale possa farsi riferimento».
Distinti tipi di oggetti matematici di diversi livelli:

- "linguaggio" (termini, espressioni, notazioni, grafici, …) nei vari registri (scritto, orale, gestuale, ….)
- "situazioni" (problemi, applicazioni extramatematiche, esercizi, …)
- "azioni" (operazioni, algoritmi, tecniche di calcolo, procedure, …)
- "concetti" (introdotti mediante definizioni o descrizioni) (retta, punto, numero, media, funzione, …)
- "proprietà o attributi degli oggetti" (enunciati sui concetti, …)
- "argomentazioni" (per esempio, quel che si usa per validare o spiegare gli enunciati, per deduzioni o di altro tipo, …).

A loro volta questi oggetti si organizzano in entità più complesse: sistemi concettuali, teorie,…

3.2.3. Relazioni tra oggetti: funzione semiotica

Adottiamo l'idea di Hjemslev (1943) di *funzione di segno* [descritta da Eco (1979) come *funzione semiotica*] come la dipendenza tra un testo e le sue componenti e di tali componenti tra loro.
Si tratta delle corrispondenze (relazioni di dipendenza o funzione) tra un antecedente (espressione, significante, rappresentante) e un conseguente (contenuto o significato, rappresentato), stabilite da un soggetto (essere umano o istituzione) in accordo con un certo criterio o codice stabilito. [In realtà, in Eco (1979) si nota come questa dipendenza non abbia sempre ordinamenti prefissati e dunque si evidenzia il carattere non assoluto ma relativo di dipendenza] (Font, Godino, D'Amore, 2005).
Tali codici possono essere regole (abitudini, accordi) che informano i soggetti implicati (esseri umani o istituzioni) sui termini che devono essere posti in corrispondenza nelle circostanze determinate.
Per noi, le relazioni di dipendenza tra espressioni e contenuto(i) possono essere di tipo:

- rappresentazionale (un oggetto si pone al posto di un altro per un certo scopo),
- strumentale (un oggetto usa un altro o altri come strumento),
- strutturale (due o più oggetti compongono un sistema dal quale emergono nuovi oggetti).

In tal modo, le funzioni semiotiche e l'ontologia matematica associata tengono in conto la natura essenzialmente relazionale della matematica e generalizzano in modo radicale la nozione di rappresentazione.
Non è esclusività del linguaggio, dunque, il compito di rappresentare. Accettando la semiotica di Peirce e postulando che i distinti tipi di oggetti (situazioni-problema, azioni, concetti, proprietà, argomenti) possono anche essere espressione o contenuto delle funzioni semiotiche, «segno è qualsiasi cosa che ne determina un'altra (il suo interpretante) affinché si riferisca ad un oggetto al quale essa stessa si riferisce (il suo oggetto) nello stesso modo; l'interpretante si converte a sua volta in un segno, e così via all'infinito» (Peirce, 1931-1958).

Funzione semiotica: si dice che si stabilisce tra due oggetti matematici (ostensivi o non ostensivi) una funzione semiotica quando tra i due si determina una dipendenza rappresentazionale o strumentale, cioè uno di essi si può porre al posto dell'altro o uno è usato invece dell'altro.

Con l'idea di funzione semiotica si mette in evidenza la natura essenzialmente relazionale dell'attività matematica e dei processi di diffusione della conoscenza matematica.
Essa permette di:

- formulare in termini semiotici ed in modo generale e flessibile la conoscenza matematica;
- spiegare in termini di conflitti semiotici le difficoltà e gli errori degli studenti.

L'importanza degli "oggetti" e della "funzione semiotica" permette di cogliere la denominazione di "punto di vista onto-semiotico" della DdM.

3.2.4. Configurazioni di oggetti

La nozione di "sistema di pratiche" appare utile per certe analisi di tipo macrodidattico, soprattutto quando si tratta di paragonare la forma particolare che adottano le conoscenze matematiche in diversi contesti istituzionali, contesti di uso o giochi linguistici. Per un'analisi più fine dell'attività matematica, è necessario introdurre i sei tipi di entità primarie:

- situazioni,
- azioni,
- linguaggio,

- concetti,
- proprietà,
- argomenti.

In ciascun caso, questi oggetti saranno relazionati tra sé formando delle "configurazioni" definite come le reti di oggetti che intervengono nei ed emergenti dai sistemi di pratiche e dalle relazioni che si stabiliscono tra gli stessi al momento di risolvere un problema matematico. Queste configurazioni possono essere epistemiche (reti di oggetti istituzionali) o cognitive (reti di oggetti personali). I sistemi di pratiche e le configurazioni si propongono come strumenti teorici per descrivere le conoscenze matematiche nella loro doppia versione, personale ed istituzionale.

3.2.5. Dualità cognitive

La nozione di "gioco linguistico" (Wittgenstein, 1953) acquista un senso importante se viene considerata insieme a quella di istituzione, come gli elementi contestuali che relativizzano i significati degli oggetti matematici ed attribuiscono loro una natura funzionale.

Torniamo ora agli oggetti matematici.
Come abbiamo visto, gli oggetti matematici che intervengono nelle pratiche matematiche e gli emergenti dalle stesse, secondo il gioco linguistico al quale partecipano, possono essere considerati a partire dai seguenti aspetti o dimensioni duali (Godino, 2002):

- personale – istituzionale: come abbiamo già rilevato, se i sistemi di pratiche sono condivisi nel seno di una istituzione, gli oggetti emergenti si considerano "oggetti istituzionali"; mentre se questi sistemi sono specifici di una persona li consideriamo come "oggetti personali";
- ostensivi (grafici, simboli,…) - non ostensivi (quelli che evocano il fare matematica, rappresentati in forma testuale, orale, grafica, gestuale,…);
- estensivo - intensivo: questa dualità risponde alla relazione che si stabilisce tra un oggetto che interviene in un gioco di linguaggio come un caso particolare (un esempio *concreto*, per esempio la funzione $y=2x+1$) e una classe più generale (*astratta*, per esempio la famiglia di funzioni $y=mx+n$);

- elementare – sistemico: in alcune circostanze gli oggetti matematici partecipano come entità unitarie (che si suppone siano conosciute in maniera previa), mentre in altre intervengono come sistemi che vengono scomposti per il loro studio;
- espressione – contenuto: antecedente e conseguente di qualsiasi finzione semiotica.

Questi aspetti si presentano raggruppati in coppie che si complementano in modo duale e dialettico. Si considerano come attributi applicabili ai distinti oggetti primari e secondari, dando luogo a distinte “versioni” di tali oggetti.
In Godino, Batanero, Roa (in stampa) si descrivono i sei tipi di entità primarie ed i cinque tipi di dualità cognitive mediante esempi relativi ad una ricerca nell’àmbito del ragionamento combinatorio.
I tipi di oggetti ivi descritti sono:

- sistemi di pratiche
- entità emergenti
- configurazioni o reti ontosemiotiche
- dualità cognitive o attributi contestuali
- funzione semiotica (intesa come entità relazionale di base);

essi costituiscono una risposta operativa al problema ontologico della rappresentazione e della significazione della conoscenza matematica.

3.2.6. Il punto di vista ontosemiotico comprende quello antropologico ma propone una direzione che tiene conto dell’apprendente

“Sapere”, “conoscere”, “comprendere” si interpretano in termini di *competenza* per risolvere problemi quando teniamo conto della componente pragmatico - antropologica di base nel punto di vista ontosemiotico della cognizione matematica.
Ma l’introduzione degli oggetti emergenti, degli aspetti duali cognitivi e della funzione semiotica, permette di articolare in modo coerente una componente referenziale sulla conoscenza matematica: sapere, conoscere, comprendere un oggetto O (ostensivo o no, concreto o astratto,…) da parte di un soggetto X (essere umano o istituzione) si interpreta in termini di funzioni semiotiche che X può stabilire in circostanze fissate nelle quali si pone in gioco O come funtivo (espressione o contenuto). Ciascuna funzione semiotica implica un atto

di semiotica da parte di un agente interpretante e costituisce una conoscenza.
La particolare insistenza sugli oggetti giustifica la denominazione "ontologica" dato che si punta l'attenzione sull'essenza degli oggetti in sé, senza sottoporli a critica, ma accettandoli come emergenti dalle pratiche.
L'attenzione specifica sugli aspetti semiotici, intesi nel senso più vasto possibile, giustifica la denominazione "semiotica" della teoria.

3.3. Esempi di ricerche in DdM dal punto di vista ontologico e semiotico

Il problema dell'insegnamento e dell'apprendimento della derivata
In questo paragrafo descriviamo la ricerca realizzata nella tesi di dottorato di V. Font, nella cornice teorica del punto di vista ontosemiotico, su questioni aventi a che fare con l'insegnamento e l'apprendimento della derivata con studenti della scuola secondaria (*Bachillerato*) (16-17 anni). Useremo come riferimento l'articolo Contreras, Font, Luque, Ordóñez (in stampa).
In questo lavoro si usa la nozione di "significato istituzionale", inteso come sistema di pratiche, per progettare, implementare ed analizzare un'esperienza di studio della derivata, distinguendo diversi tipi di tali significati sistemici: di riferimento, atteso, implementato e valutato. Si raccoglie anche un'informazione dettagliata circa le pratiche personali degli studenti che permette di caratterizzare i loro significati personali iniziali, finali ed alcuni aspetti della loro costruzione progressiva.
Tra le conclusioni sullo sviluppo ed analisi dell'esperienza di insegnamento, si evidenziano le seguenti.

- La considerazione congiunta della complessità semiotica, i conflitti semiotici potenziali e la necessità di attività che partano dalle conoscenze previe degli allievi, porta a proporre significati attesi che si concretizzano in unità didattiche la cui implementazione necessita di molte risorse temporali. Per questo motivo, risulta difficile amalgamarla con le restrizioni materiali e temporali reali.
- Il significato personale di oggetti che si supponeva che gli allievi avessero studiato previamente (funzione, variazione di una funzione, inclinazione, media della variazione, velocità ecc.) era insufficiente. Da qui si deduce che un modo efficace di assicurarsi che gli allievi

acquisiscano un buon significato personale dell'oggetto "derivata" consiste nel conseguire un buon significato personale di tali oggetti previi.

- La definizione della funzione derivata come limite delle medie di variazione presenta una grande complessità semiotica.
- Il fatto di progettare un significato atteso che incorporava pratiche che permettessero di calcolare l'espressione simbolica di funzioni derivate a partire da grafici (di f(x) *o di* f '(x)), modificò i significati degli oggetti personali "funzioni elementari" degli allievi. Verso la fine del processo di studio, il significato personale della maggioranza degli studenti incorporava pratiche che permettevano di ottenere espressioni simboliche di funzioni elementari a partire dai loro grafici. Dette pratiche non facevano parte del significato dei loro oggetti personali "funzioni elementari" prima del processo di istruzione, né erano state esplicitamente contemplate nel progetto preventivo del significato atteso.

La nozione di funzione semiotica, insieme con le dualità cognitive estensivo-intensivo, espressione-contenuto, sono state usate in modo sistematico in questa ricerca per analizzare la complessità ontosemiotica della definizione di derivata in un punto e di funzione derivata. Questa analisi permette di identificare conflitti semiotici potenziali dei quali si è tenuto conto nella progettazione dell'esperienza e come spiegazione di alcune difficoltà persistenti nella comprensione di dette nozioni.

Altri esempi di ricerche sperimentali realizzate nella cornice teorica del punto di vista ontosemiotico, pubblicati in diverse tesi di dottorato, articoli e monografie, sono accessibili nelle pagine web del Gruppo di Ricerca sulla Teoria dell'Educazione Matematica ed Educazione Statistica dell'Università di Granada:
http://www.ugr.es/local/jgodino http://www.ugr.es/local/batanero

4. Necessità e possibilità di articolazione di cornici teoriche in DdM

Uno dei compiti più urgenti ed importanti che vanno affrontati da parte dei ricercatori in DdM, come abbiamo già suggerito in 1., è la chiarificazione, il paragone e l'articolazione delle cornici teoriche che si

stanno usando attualmente. Il problema è urgente e critico, dato che, poiché la nostra disciplina si trova legata con altre, come l'epistemologia, la psicologia, la pedagogia, la matematica ecc., si stanno usando strumenti e presupposti teorici divergenti, la cui coerenza ed utilità non è affatto ovvia e non può essere data per scontata.
Nell'attuale panorama della Didattica della Matematica osserviamo un certo "autismo" teorico (racchiuso in sé stesso) ed una disarticolazione concettuale e metodologica. Questo problema si osserva non solo tra paradigmi e scuole di pensiero lontane (pragmatismo, realismo, costruttivismo, cognitivismo ecc.), ma perfino dentro le teorie emergenti di livello intermedio che condividono uno stesso paradigma epistemologico di base.
Per esempio, nel caso della TAD, che relazioni esistono con la teoria delle situazioni (Brousseau), dei campi concettuali (Vergnaud), la dialettica strumento-oggetto (Douady)? Che relazioni esistono tra queste teorie e la teoria dei registri di rappresentazione semiotica (Duval), la teoria APOS (Dubinsky) ecc.?
Per poter fare questi paragoni ed articolazioni è necessario costruire un sistema di riferimenti più globale che permetta di situare ciascuna teoria nel panorama complessivo dell'educazione matematica. È necessario tener conto simultaneamente delle distinte dimensioni implicate nei problemi di insegnamento e apprendimento della matematica (dimensione epistemica, cognitiva, istruzionale, politica ecc.) ed i diversi livelli di analisi.
Il punto di vista ontosemiotico (EOS) nacque nel 1994 (Godino, Batanero, 1994) con lo scopo di iniziare questo cammino di riflessione metadidattica, partendo dalla constatazione di alcune limitazioni nel punto di vista antropologico che aveva cominciato a formulare Chevallard (1991, 1992). In particolare, si trattò di rettificare la scelta antipsicologica iniziale, che si è andata accentuando in lavori successivi, e la sua divergenza da altre teorie precedenti, come la teoria delle situazioni o quella dei campi concettuali.
L'obiettivo di progredire nel paragonare ed articolare modelli teorici, ha portato la EOS a formulare alcune "nozioni primitive" con un alto grado di generalità, come sono quelle di pratica matematica, istituzione, oggetto matematico, funzione semiotica e le dualità cognitivo-antropologiche (persona-istituzione, elementare-sistemico, ostensivo-non ostensivo, estensiva-intensiva, espressione-contenuto). Questi

strumenti offrono una piattaforma unificata a partire dalla quale è possibile affrontare i già ricordati compiti di paragone ed articolazione delle cornici teoriche usate in DdM.
Questa affermazione resta, tuttavia, come compito futuro per prossimi lavori.

Riferimenti bibliografici

Arsac G. (1992). The Evolution of a Theory in Didactics: The Example of Didactic Transposition. In: Douady R. Mercier A. (eds.) (1992). *Research in Didactique of Matemamatics. Selected Papers*. Grenoble: La Pensée Sauvage éditions.

Balacheff N. (1990). Beyond a Psychological Approach: The Psychology of Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics.* 10 (3), 2-8.

Bauersfeld H. (1994). Theoretical perspectives on interaction in the mathematics classroom. In: Biehler R., Strässer R., Winkelmann B. (eds.) (1994). *Didactics of mathematics as a scientific discipline*. (133-146). Dordrecht NL: Kluwer Ac. Pb.

Bloor D. (1982). *Wittgenstein. A social theory of knowledge*. London: The Macmillan Press.

Blumer H. (1969). *Symbolic interactionism. Perspective and method.* Englewood Cliffs NJ: Prentice Hall.

Brousseau G. (1989). La tour de Babel. *Études en didactiques des mathématiques*. 2. Irem de Bordeaux.

Chevallard Y. (1985). *Transposition Didactique du Savoir Savant au Savoir Enseigné.* Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions.

Chevallard Y.(1990). On Mathematics Education and Culture: Critical Afterthoughts. *Educational Studies in Mathematics* 21(1): 3-28.

Chevallard Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble.* LSD2, IMAG, Université J. Fourier, Grenoble.

Chevallard Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 12, 1, 73-112.

Chevallard Y. (1996). La fonction professorale: esquisse d'un modèle didactique. In: Noirfalise R., Perrin-Glorian M-J. (eds.) (1996). *Actes de l'École d'Été de Didactique des Mathématiques*. Saint-Sauves d'Auvergne, 1995. 83-122.

Chevallard Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 19, 2, 221-266.

Chevallard Y., Bosch M., Gascón J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE-Horsori.

Contreras A., Font V., Luque L., Ordóñez L. (in stampa). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherches en Didactique des Mathématics*. Accettato. L'articolo è disponibile nel sito: http://www.webpersonal.net/vfont/RDM1.pdf

D'Amore B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2001). Concepts et objets mathématiques. In: Gagatsis A. (ed.) (2001). *Learning in Mathematics and Sciences and Educational Technology*. Vol. 1. Nicosia: Intercollege Press. 111-130.

Eco U. (1979). *Trattato di semiotica generale*. Milano: Bompiani.

Ernest P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London: Falmer Press.

Font V., Godino D. J., D'Amore B. (2005). Ontosemiotic approach of representation in mathematics education. [articolo proposto per la publicazione].

Freudenthal H. (1986). Review of: Y. Chevallard: *Transposition Didactique du Savoir Savant au Savoir Enseigné.* Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions, 1985. *Educational Studies in Mathematics*. 17, 323-327.

Gascón J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 18, 1, 7-33.

Godino J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 22, 2/3, 237-284.

Godino J. D., Batanero C. (1994). Significado istitucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 14, 3, 325-355.
Godino J. D., Batanero C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. In: Sierpinska A., Kilpatrick J. (eds.) (1998). *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*. (177-195). Dordrecht: Kluwer A. P.
Godino J. D., Batanero C., Roa R. (in stampa). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics*. (Accettato).
Hjemslev L. (1943). *Omkring sprogteoriens grundlæggelse*. Ed. originale danese. Traduzione in inglese: *Prolegomena to a Theory of Language*. 1961. Madison: University of Winconsin.
Kutschera F. Von (1979). *Filosofia del lenguaje*. Madrid: Gredos.
Lakatos I., Musgrave A. (eds.) (1960). *Criticism and the growth of knowledge*. Cambridge: Cambridge Univ. Press.
Peirce C. S. 1931-1958. *Collected Papers,* vols. 1-8. Hartshorne C., Weiss P., Burks A. W. (eds.). Cambridge MA: Harvard University Press.
Romberg T. (1988). Necessary ingredients for a theory of mathematics education. In: Steiner H. G., Vermandel A. (eds) (1988). *Foundations and methodology of the discipline Mathematics Education*. Proceedings of the 2nd TME. Bielefeld.
Sierpinska A., Lerman S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. In: Bishop AJ. et al. (eds.) (1996). *International Handbook of Mathematics Education*. (827-876). Dordrecht, HL: Kluwer A. P.
Speranza F. (1997). *Scritti di epistemologia della matematica*. Bologna: Pitagora.
Ullmann S. (1962). *Semántica. Introducción a la ciencia del significado*. Edizione 1978: Madrid: Aguilar.
Wittgenstein L. (1953). *Philosophische Untersuchungen*. Oxford: Basil Blackwell.
Wittgenstein L. (1976). *Observaciones sobre los fundamentos de las matemáticas*. Madrid: Alianza.