Otros hallazgos sobre los obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de algunos teoremas de Georg Cantor [1]

Gianfranco Arrigo[2] – Bruno D'Amore[3]

Núcleo de Investigación en Didáctica de la Matemática (N.R.D.)
Departamento de Matemáticas, Universidad de Bolonia, Italia

Articulo publicado en: ***Educación Matemática*. (México DF, México). 16, 2, 5-20.**

Resumen. *En este artículo estudiamos los obstáculos epistemológicos y didácticos encontrados en estudiantes italianos y suizos (de edad comprendida entre 17 y 19 años) en el estudio del teorema de Cantor que afirma el hecho que la infinidad de los números reales comprendidos entre 0 y 1 es mayor a la infinidad del conjunto de los números racionales. El enfoque está centrado en los obstáculos didácticos, creados casi siempre por los mismos profesores en los niveles escolares precedentes, cuando presentan modelos intuitivos que crean falsas concepciones, a veces insuperables.*

Abstract. *In this article we study the epistemological and didactic obstacles encountered by Italian and Swiss students (aged 17-19) in understanding Cantor's theorem asserting that there is a larger infinite number of real numbers between 0 and 1 than the infinite number of natural or rational numbers. Particular attention is paid to didactic obstacles, created at the start by the same teachers in previous years, of intuitive models that then become transformed into misconceptions that sometimes become insuperable.*

1. Nota introductiva

En un trabajo precedente (Arrigo y D'Amore 1999) habíamos puesto en evidencia las enormes dificultades que hacen casi imposible aceptar, a un gran número de estudiantes de los últimos dos años de la escuela secundaria superior (entre los 17 y los 19 años), el célebre teorema de Georg Cantor

---

[1] Trabajo desarrollado en el ámbito del Programa de Investigación de la Unidad de Bologna: "*Investigaciones sobre el funcionamiento del sistema: alumno-maestro-saber: motivaciones para la falta de devolución*", inserto dentro del Programa de Investigación Nacional: "*Dificultades en matemáticas; instrumentos para observar, interpretar, intervenir*", cofinanciado con fondos del MIUR.

[2] Departamento de Educación Cultura y Deporte del Cantón Ticino, Bellinzona, Suiza (gianfranco.arrigo@span.ch). ASP (Alta Scuola Pedagogica), Locarno.

[3] Departamento de Matemáticas de la Universidad de Bologna, Italia (damore@dm.unibo.it).

según el cual, para decirlo de la manera más simple posible, existen tantos puntos en un cuadrado como en uno de sus lados.[4]
En dicho trabajo, más de la mitad de los estudiantes observados parecía no comprender el sentido mismo del enunciado; una minoría significativa ha declarado de haber entendido, pero con oportunas entrevistas habíamos reconocido que no se trataba de una verdadera y propia comprensión.
Esta revelación nos condujo a investigar nuevamente, en particular sobre *cómo* el estudiante está dispuesto a aceptar el hecho de que existen diversas cardinalidades infinitas, hecho que nos llevó a proponer otros teoremas de Georg Cantor que tienen que ver con la cardinalidad[5]

2. Apuntes históricos sobre la evolución del concepto de infinito matemático y notas críticas

Los contenidos matemáticos, relacionados con esta nueva investigación, han constituido por más de dos milenios un difícil y fascinante terreno de investigaciones y de grandes discusiones en el cual han trabajado importantes pensadores, desde los filósofos griegos (en particular Aristóteles) hasta Cantor y Dedekin, pasando por las reflexiones de Giovanni Duns Scoto, Galileo Galilei y Bernhard Bolzano (pensadores a los cuales les reconocemos incluso aportes didácticos).
Con los estudiantes que intervienen en las pruebas nos centramos básicamente en dos aspectos fundamentales:

- la numerabilidad del conjunto de los números racionales **Q** y la no numerabilidad del conjunto de los números reales **R** y
- la equipotencia de segmentos y rectas (entendidos como conjuntos de puntos).

3. Descripción del cuadro teórico de referencia

La complejidad del aprendizaje del infinito está ampliamente demostrada y documentada en el contexto internacional, por una vasta literatura, testimoniada por ejemplo en D'Amore (1996).
Para no repetir aquí las consideraciones ya hechas ni el cuadro teórico descrito en Arrigo y D'Amore (1999) que cubre ampliamente el presente

---

[4] Para informaciones histórico - críticas sobre este teorema y para una formulación más adecuada a la realidad histórica, remitimos a Arrigo, D'Amore (1999).
[5] El reporte en extenso de esta investigación aparece en Arrigo y D'Amore 2002.

trabajo, nos limitamos a recordar sólo aquellos textos que constituyen una estrecha referencia con la actual investigación.
Tratándose de una correspondencia biunívoca entre entes geométricos, y en particular entre segmentos, es fundamental el clásico trabajo de Tall (1980) que evidencia el fenómeno que nosotros hemos llamado *dependencia* en base al cual existen más puntos en un segmento largo (al límite en una recta), respecto a uno más corto.
En este trabajo, la demostración (por reducción al absurdo) de hechos ligados a la cardinalidad se sustenta, como se evidenciará, sobre las formas de escribir los números, es decir sobre las formas de escritura de los números reales. Esto desencadena la problemática denominada *deslizamiento*, evidenciada en una cierta perspectiva (básicamente lingüística) por Duval (1995) y ampliada por nosotros en Arrigo y D'Amore (1999), según la cual, el estudiante acepta con reticencia o, de hecho, no acepta, una demostración en la cual se pasa de un objeto de discurso a otro; por ejemplo, se habla de hechos geométricos y se pasa a consideraciones aritméticas (como en el caso de la demostración objeto de nuestro trabajo de 1999), o también si se está hablando de una lista de números en una sucesión y se pasa a consideraciones sobre las modalidades de escribir los mismos números (como sucederá en el presente caso).
También en este trabajo se busca mayor claridad, en particular, sobre el fenómeno de *aplanamiento*, nombre que habíamos dado a lo ya evidenciado en los clásicos trabajos de varios autores, entre los cuales señalamos Waldegg (1993) y a algunas otras contribuciones de la escuela de Tel Aviv, con particular referencia a Efraim Fischbein y sus alumnos. Se trata del fenómeno, ya recordado líneas arriba, sobre la base del cual el estudiante que, impulsado por la solicitud del profesor o del investigador, acepta que algunos conjuntos infinitos sean entre ellos equipotentes (como **N** y **Z**), lo hace porque piensa que esto esta ligado con el hecho de ser infinitos y por tanto, como generalización, todos los conjuntos infinitos son equipotentes. Esta falsa concepción es el resultado de un avance positivo de una primera concepción en la cual (para decirlo con palabras sugeridas por un estudiante) «En **Z** existe el doble de elementos de **N**, es obvio», a una segunda concepción en la cual, después de haber aceptado la demostración que **N** es por el contrario equipotente a **Z**, «todos los conjuntos infinitos son equipotentes entre ellos, dado que son infinitos». La segunda falsa concepción es, en un cierto sentido, un "mejoramiento" respecto de la precedente, una "escalada" lenta y gradual hacia la construcción de un concepto final correcto, que podríamos llamar "modelo de infinito".
Dependencia y *aplanamiento* son fenómenos, para nosotros, difíciles de distinguir, son como dos caras de una misma moneda. Esto no sólo en este trabajo en el cual

- *dependencia*: se dan para comparar el intervalo abierto (0, 1) en **R** y todo $\mathbf{Q_a}$ (los racionales absolutos, 0 incluido); es obvio que, como imagen visual, parece que el primer "segmento" pudiera estar incluido en el segundo
- *aplanamiento*: los dos conjuntos a comparar son ambos infinitos

se pueden pensar como dos aspectos de un mismo *error*, como lo demostraremos más adelante, que consiste en intentar *aplicar a conjuntos infinitos procesos propios de aquellos finitos,* intento ya ampliamente evidenciado en la literatura (Shama & Movshovitz Hadar, 1994) pero revelado por nosotros en forma explícita, en particular, en las discusiones y en las entrevistas.
Nos parece oportuno anticipar aquí una conclusión que veremos más adelante, ésta es: se convierte en modelo intuitivo del concepto de equipolencia aquel que (correctamente) está en el campo finito y que, aún pudiéndose y debiéndose extender en el infinito, provoca traumas cognitivos. Si "infinito" es un número natural, y si existen diversos conjuntos con tal cardinalidad, entonces todos pueden ser puestos en correspondencia biunívoca entre ellos. El origen de esta falsa concepción (que sin embargo tiene las características de un obstáculo epistemológico, claramente evidenciadas por la historia de la matemática y por un sinnúmero de investigaciones) es de naturaleza básicamente didáctica, el alumno, mediante conteo y mediante correspondencias biunívocas, se apropia con seguridad de tales conceptos. Por otra parte, el obstáculo no es en sí mismo asimilable a un error; el obstáculo es una idea que, en el momento de la formación de un concepto, fue eficaz para afrontar problemas precedentes (incluso solo cognitivos), pero que se revela ineficaz cuando se intenta aplicarla a una nueva situación. Visto el suceso obtenido (es más: a mayor razón a causa de este suceso), se intenta conservar la idea ya adquirida y comprobada y, a pesar del fracaso, se busca salvarla; pero este hecho termina con ser una barrera hacia sucesivos aprendizajes.
Esta observación y los resultados de la actual investigación nos impulsan a tomar en examen la posibilidad – necesidad de volver a estudiar los contenidos de carácter disciplinar que se deberían proponer en el curso de la formación inicial de los profesores, incluso de profesores de la escuela primaria; no tanto para que modifiquen los contenidos de su acción didáctica, sino para que eviten la formación en sus alumnos de aquellos modelos intuitivos que serán después causa de situaciones de malestar cognitivo.

Volvamos al cuadro teórico.
Todas las precedentes consideraciones involucran otros dos fenómenos interesantes:

- la dificultad que parece tener el estudiante al tratar con el infinito actual, más que con el infinito potencial, ya revelada en múltiples trabajos, y que sólo marginalmente toca el nuestro [por lo tanto remitimos al cuadro teórico expuesto en Arrigo y D'Amore (1999)]; sin embargo señalamos Tsamir (2000) en el cual se evidencia como este tipo de dificultad no se encuentra solo entre estudiantes, sino también entre profesores (en formación), lo que refuerza la necesidad de tomar siempre más en examen los obstáculos didácticos y los contenidos disciplinares de la formación;
- la dificultad que encuentra el estudiante para darse cuenta cuando dos afirmaciones están en contradicción; y aún más, la casi total indiferencia que demuestra si se da cuenta de dicha contradicción. También sobre este punto recordamos solo dos clásicos (Stavy & Berkovitz, 1980; Hart, 1981), remitimos a nuestro trabajo precedente para una bibliografía más amplia.

4. Problemas que han estimulado la investigación

P1. Siguiendo un recorrido didáctico, ¿es posible hacer que los estudiantes de los dos últimos cursos de la escuela superior lleguen a comprender el sentido de las afirmaciones puestas como tesis en los teoremas objetos de este trabajo?.

P2. En caso negativo, ¿por qué no?, ¿cuáles son los motivos?. Los obstáculos epistemológicos son evidentes, la misma historia de la matemática nos los ilustra; pero ¿existen también obstáculos didácticos?.

P3. En caso positivo, ¿qué será del *aplanamiento*?. Es decir: si aquellos estudiantes que inicialmente cayeron en la trampa del aplanamiento (por ejemplo entre **N** y **Z**) durante el recorrido didáctico comprenderán el teorema que establece la no numerabilidad de **R**, ¿cómo reaccionarán ante la evidente contradicción?.

P4. ¿Hasta qué punto esta consolidado el aprendizaje de los estudiantes que responden correctamente al test?. En otras palabras ¿lo cree porque lo ve o lo cree porque esta realmente convencido?.

5. Hipótesis de la investigación

Las hipótesis se apoyan sobre algunos elementos probados por la precedente investigación; en particular se consolidada la intención de recurrir a coloquios y entrevistas clínicas con los alumnos que responden el test, dado que las respuestas escritas no revelan en su totalidad la calidad del aprendizaje.

H1. Incluso si las demostraciones de los nuevos teoremas en examen aparecen, a los ojos de matemáticos expertos, como muy elementales, hipotetizamos que serían pocos los estudiantes en grado de comprenderlos verdaderamente. dado que en cada teorema es necesario distinguir entre:

- el significado de la tesis
- la demostración de dicha tesis.

Era nuestra convicción que algunos estudiantes se hubieran ilusionado de comprender tanto la tesis como la demostración pero, una vez puestos en situación de defender verbalmente la verdadera naturaleza del sentido de la tesis, habrían mostrado más de una duda o tal vez un rechazo. La literatura internacional evidencia claramente que una de las cláusulas del contrato didáctico lleva precisamente a aceptar tesis de teoremas por confianza en el profesor como representante de la institución y como depositario del Saber. Consideramos además importante examinar las reservas de los estudiantes y la modalidad de sus expresiones.

H2. En caso de la no aceptación de la tesis de los teoremas, hipotitezábamos que, además de los obstáculos epistemológicos, era posible revelar obstáculos didácticos. Dos de estos tienen que ver con la naturaleza de la densidad y de la continuidad, por demás confusas incluso en la mente de los estudiantes que conocen un poco el Análisis (el conjunto **R**, la continuidad etc.) pero que no siempre tienen *construido* tal concepto en modo correcto. La pregunta central es: *¿cuáles* obstáculos didácticos están influenciando la no comprensión de las tesis de los teoremas que estamos examinando?. Nuestra atención se ha dirigido, en los últimos años, al "modelo del collar" que viene explícitamente indicado, desde la Escuela Elemental, como modelización para representar mentalmente los puntos sobre la recta y que parece resistir a cada "ataque" sucesivamente. Por ejemplo, cuando se ubican los llamados números fraccionarios sobre la "recta racional" r_Q, el modelo – collar resiste y la densidad queda como un hecho cognitivo potencial y no natural. Para muchos estudiantes la densidad aparece ya como… "relleno" de la recta y por tanto no entienden que diferencia existe entre r_Q y r. Ni les ayuda mucho, pocos años después, el estudio de **R** y la definición de continuidad… Nuestra hipótesis, en sustancia, era que habríamos encontrado obstáculos didácticos asociados a modelos del todo elementales.

H3. La respuesta al tercer problema nos parecía la más interesante. Estábamos convencidos que, durante un adecuado recorrido didáctico, los estudiantes más maduros habrían aceptado que, contrariamente a la intuición, **N** y **Z** son entre ellos equipotentes, y aquí pensábamos que más de un estudiante (verbalmente) habría hecho referencia al *aplanamiento*. En el momento en el cual el nuevo teorema habría mostrado que, al contrario, existen conjuntos infinitos entre ellos no equipotentes, habríamos podido apreciar la reacción de los estudiantes más motivados de frente a una situación de contradicción explícita.

H4. Ya en el curso de la investigación precedente habíamos quedado perplejos con las razones reales que han llevado a los estudiantes a responder de un cierto modo. Básicamente, nuestras objeciones estaban referidas a la fiabilidad de los resultados del test individual. Este test nos muestra indudablemente lo que el estudiante responde, pero no nos dice nada sobre el *por qué* responde de dicha forma. Nos parecía marcada la confianza que el estudiante coloca en aquello que el maestro expone. Además, impulsando al límite la reflexión, se podría incluso hipotetizar que ciertas respuestas correctas tienen como base falsas concepciones, como ya lo habíamos anticipado. Por último, también estamos interesados en el grado de convicción que el estudiante demuestra tener cuando debe confrontar aquello que ha aprendido. La particular problemática relativa a los conjuntos infinitos impide al alumno verificar la credibilidad de las informaciones que recibe por medio de sus sentidos, obligándolo, en el mejor de los casos, a modificar las propias imágenes mentales y a trasformarlas en modelos cognitivos. Pero en realidad, ¿este proceso, se presenta siempre?, y si no es así, ¿en qué medida?.
Para hacer frente a esta delicada problemática, pensamos efectuar coloquios individuales con la intención de establecer tanto las verdaderas motivaciones que se esconden en las respuestas de los estudiantes, así como el grado de convencimiento que el estudiante demuestra en relación con las afirmaciones que declara haber hecho propias.

6. Metodología de la investigación

Con todos los estudiantes se desarrollo un recorrido didáctico, organizado por el profesor de la clase, sobre la base de un material de aprendizaje

preparado por los autores de la investigación. Al final del proceso de estudio, se asignaba a cada estudiante un cuestionario.[6]
Fueron partícipes de la actividad de aprendizaje y después del test 189 estudiantes de escuela superior, 90 suizos y 99 italianos; de estos, 68 fueron entrevistados (36 suizos y 32 italianos).

7. Descripción de los resultados y verificación de las hipótesis presentadas en 5

Las **preguntas 1a, 1b** e **2a** sondean elementos de comprensión (sobre cómo contar los elementos de un conjunto) que habrían podido hacer no creíbles los resultados de la investigación: los resultados fueron para nosotros tranquilizadores.
En la **pregunta 2b** el estudiante debe expresarse sobre el hecho que son tantos múltiplos de 997 (997 *k*) como números naturales (*k*). De una parte, la mayoría de los estudiantes entendió la demostración (existencia de una correspondencia biunívoca entre los dos conjuntos), de otra parte, recorriendo los números naturales, "ve" que para construir el primer conjunto se excluyen muchos números, lo que les impide (en un 27% aproximadamente) "creer" verdaderamente en el resultado teórico. Es un primer ejemplo de tratamiento del infinito actual con procesos del finito. El estudiante puede sacar la conclusión que la matemática sea algo completamente fuera de la realidad (ver D'Amore y Fandiño Pinilla, 2001).
La **pregunta 2c** enfrenta al estudiante con la equipotencia entre **N** y el conjunto de los cuadrados (alcanzada en un 80%), la **pregunta 2d** lo enfrenta con la equipotencia entre $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}^{+}$ y $\mathbf{Z}^{-}$ (alcanzada en un 50%). Esta última pregunta, dada en modo intrigante («Alguien sostiene que el cardinal de **Z** es el doble del cardinal de $\mathbf{Z}^{+}$»), puso en ansia principalmente a los estudiantes suizos, más "escolarizados" (40% de respuestas correctas) que no a los italianos (60% de respuestas correctas).

También la **Pregunta 3** es en parte desorientadora: hace notar al estudiante la densidad de **Q**, para después pedirle si confirma aún que **Q** es numerable, resultado obtenido en la demostración estudiada. En general, los estudiantes italianos tuvieron un mayor éxito que sus compañeros suizos: el 82% de ellos afirma creer que son tantos números racionales como números naturales, contra el 58% de los suizos. Pero si se analizan las razones adoptadas, desciende bruscamente el porcentaje de italianos que cree en

[6] Estos documentos, así como los resultados del test, están publicados en su totalidad en Arrigo, D'Amore (2002).

virtud del fenómeno de aplanamiento (67% contra el 30% de los suizos). De otra parte los suizos no desmienten lo observado en el curso de la pregunta 2, dado que el 28% de ellos cree en la equipotencia entre **Q** y **N** puesto que «han visto en una clase una demostración clara y convincente».

En la **pregunta 4a** se pide si en (0,1) hay más racionales o más reales (éxito: 60%); la **pregunta 4b** lleva a confrontar los reales en (0,1) y la totalidad del conjunto **Q** (éxito: 35%); la **pregunta 4c** propone la comparación entre **R** y **Q** (éxito: 54%). Los estudiantes suizos dan globalmente el 75% de respuestas exactas contra el 45%. Cierto, no existe más el "sentido común" que pueda ayudar: quien tiene más confianza en lo que se hace en la escuela, tiene más probabilidad de responder correctamente.
La **pregunta 4d** pide si son más puntos en un segmento largo 2 cm o en toda la recta (éxito: 52%).
Entre las respuestas surgen los efectos de la *dependencia* de la cardinalidad de la "magnitud" del conjunto y del *aplanamiento* (este último puede incluso haber inducido respuestas "correctas").

8. Descripción de los resultados de los coloquios y verificación de las hipótesis presentadas en 5

Se concentró la atención principalmente en las preguntas 2b, 2d, 3, 4b y 4d. El objetivo principal del coloquio era el de buscar, dentro de lo posible, entender las razones que se esconden detrás de las respuestas. El investigador trató de poner en dificultad a los estudiantes entrevistados, con el fin de ver hasta que punto habían realmente construido en forma personal su aprendizaje. (**I** = estudiantes italianos; **CH** = estudiantes suizos).

Pregunta 2b *(¿Existen tantos múltiplos de 997 como números naturales?)*
CH. Cambio de opinión: 5 de 36 (14%). 2 estudiantes rechazaron la respuesta correcta dada en el test, 3 estudiantes la corrigieron oportunamente.
I. Cambio de opinión: 7 de 32 (22%). 4 estudiantes pasan de la respuesta correcta "del todo convencido" a la respuesta "para nada convencido"; 3 estudiantes pasan de la respuesta "suficientemente convencido" a la respuesta "para nada convencido". Todos los cambios de opinión son, por tanto, al negativo: el aprendizaje de estos estudiantes no era el resultado ni de una construcción ni de una competencia.
Pregunta 2d *(relativa a la equipotencia entre Z, Z^+ y Z^-)*

CH. Cambio de opinión: 9 de 36 (25%). 6 alumnos de 36 rechazaron la respuesta correcta dada en el test. 3 alumnos al contrario mejoraron el propio aprendizaje alcanzando total conciencia al respecto.
I. Cambio de opinión: 8 de 32 (25%). 4 estudiantes rechazaron la respuesta correcta dada en el test; 3 estudiantes, aún cambiando la respuesta permanecen en el error; 1 estudiantes admite de no saber que decir ni que pensar.
Resulta evidente que para los estudiantes no es hipotetizable un orden de los elementos de **Z** que no sea aquel "natural": la imagen de la recta numérica invade otras medidas. Además es evidente que quien responde correctamente lo hace no tanto porque esta convencido de la demostración vista, sino por motivos de *aplanamiento.*

Pregunta 3 *(Visto que **Q** es denso, ¿crees aún que es numerable?)*
CH. Cambio de opinión: 12 de 36 (33%). 8 estudiantes rechazaron la respuesta correcta dada en el test. Los otros 4 que en el test habían dado la respuesta correcta pero impulsados por razones ligadas al *aplanamiento*; en el coloquio todos los 4 se inclinaron hacia la *dependencia.*
I. Cambio de opinión: 11 de 32 (34%). 8 estudiantes pasaron de la respuesta «Existen tantos racionales como naturales porque lo habíamos demostrado» a la respuesta negativa «Existen más elementos en **Q**» (de nuevo por *aplanamiento*). 3 estudiantes pasan de la respuesta correcta, pero dada por *aplanamiento*, a la respuesta negativa; la causa de esto es la *dependencia*.
Se mezclan aquí: uno de los axiomas euclidianos (*El todo es mayor que las partes*) que juega bien en la praxis didáctica, y el frecuente y más veces denunciado intento de prolongar la aplicabilidad de modelos intuitivos que funcionan en el finito, al infinito, falsa concepción de origen didáctica.

Pregunta 4b (*comparación entre la cardinalidad del intervalo real (0,1) y **Q***)
CH. Cambio de opinión: 11 de 36 (31%). De estos, solo 1 había dado la respuesta correcta en el test y después del coloquio se decide por «no se puede decir». De los otros, 4 estudiantes se refugian en el «no se puede decir», 4 eligen la opción de la misma cardinalidad, impulsados por el *aplanamiento*, 2 estudiantes cambian de opinión bajo el efecto de la *dependencia*.
I. Cambio de opinión: 10 de 32 (31%). 7 estudiantes cambian eligiendo la respuesta «existen más racionales», 5 estudiantes desplazan su convicción sobre «los dos conjuntos tienen la misma cardinalidad»; 1 solo de los estudiantes corrige oportunamente la respuesta.
Tuvimos la impresión que un atento examen del verdadero significado de las preguntas pone en crisis a los estudiantes, no solo quien basa su respuesta positiva sobre el contrato cede ante el primer análisis crítico, sino

incluso, quien aparentemente ha construido el conocimiento parece haberlo hecho en forma débil y poco fundado.
Pregunta 4d. *(¿Existen más puntos en un segmento de 2 cm o en toda la recta?)*
CH. Cambio de opinión: 8 de 36 (28%). De los 8 estudiantes que han cambiado de idea durante el coloquio, 5 habían dado la respuesta correcta en el test; 4 de ellos corrigieron en «no se puede decir», 2 estudiante optaron por «más puntos sobre la recta» (en ambos casos por el efecto *dependencia*). Por último un estudiante que había dado como respuesta «más puntos en el segmento» dice de haberse equivocado al indicar la respuesta y corrige en «misma cardinalidad» pero, justificándose, se alinea entre las víctimas del *aplanamiento*.
I. Cambio de opinión: 9 sobre 32 (28%). 6 estudiantes han rechazado la respuesta correcta dada en el test (3 eligen «más puntos sobre la recta», 3 «no se puede decir»). 2 estudiantes corrigen oportunamente su respuesta. 1 estudiante pasa de la respuesta «más puntos sobre el segmento» a la respuesta «no se puede decir». También aquí se hacen presentes los efectos del *aplanamiento* y de la *dependencia*.

9. Respuestas a las preguntas presentadas en 4

Estamos finalmente en grado de responder a las preguntas de investigación.

P1. Nos parece poder afirmar que el sentido de estos teoremas y sus demostraciones se revelan ampliamente más allá de la capacidad de comprensión de los estudiantes de los últimos años de la escuela superior, por cuanto maduros ellos sean. El sentido de los teoremas escapa a la comprensión de la mayoría; aún si las demostraciones han sido calificadas al momento de estudiarla como: «fáciles», «yo las entendí» e incluso «bellas», cuando se entrevista al estudiante, se evidencia que estas no inciden, no se asimilan, no se interiorizan, en fin no alcanzan a hacer parte del equipaje cognitivo de un estudiante de dicha edad (en particular el teorema que establece la no numerabilidad de **R**).

P2. Resulta evidente de la investigación que, además de los obstáculos epistemológicos ya señalados, existen fuertes obstáculos didácticos. Estos tienen que ver básicamente con el … misterio que crea la escuela, en los niveles precedentes, en todo lo concerniente al infinito que no viene tratado para nada, o viene reducido banalmente a un extensión del finito. Esta es la causa de modelos intuitivos que constituyen verdaderas y propias falsas concepciones. Por ejemplo, el "ser subconjunto" que implica el "tener menos elementos”: verdadero en el finito, pero no en el infinito; la recta como “collar” de puntos, que hace compleja o tal vez de hecho imposible la idea de densidad y que colabora a hacer imposible la idea de continuidad; el modelo “natural” del orden de **Z** que se revela después único e insuperable. Incluso, *aplanamiento* y *dependencia*, ya puestos bajo acusa en Arrigo y D'Amore (1999), se confirman culpables de múltiples falsas concepciones.

P3. Existen por tanto diversos y evidentes obstáculos didácticos. En particular, el *aplanamiento* y la *dependencia* nos aparecen como caras de una misma moneda, ramas de una misma raíz: la extensión de procesos de conjuntos finitos directamente a conjuntos infinitos.

P4. De los coloquios se evidenció claramente como la comprensión de este argumento es bastante superficial, generalmente basada sobre la confianza acrítica de lo que viene propuesto en clase o bien sobre los dos errores más frecuentes: *aplanamiento* y *dependencia*. Estos resultados inducen la necesidad de intervenir sobre el plano didáctico para hacer que el estudiante pueda afrontar el estudio del Análisis teniendo ya adquirida una buena competencia sobre los conjuntos infinitos.

10. Observaciones conclusivas

Anteponemos que, para nosotros, la educación matemática actual no puede prescindir de algunas competencias fundamentales sobre los conjuntos infinitos.
El manejo de las problemáticas concernientes al infinito actual exige el desarrollo de modelos intuitivos diversos y en algunos casos contradictorios respecto a aquellos que se usan en el finito. Se deriva la necesidad de desarrollar una acción didáctica ya a partir de la escuela de base tanto en el campo numérico como en el campo geométrico.
En el campo numérico, se requiere básicamente convencerse de la caída del axioma euclidiano *el todo es mayor que las partes*, del hecho que un conjunto teniendo infinitos elementos puede ser puesto en correspondencia biunívoca con un subconjunto propio, de las aparentes “rarezas” que se obtienen cuando se aplican las operaciones aritméticas a los números transfinitos.
En el campo geométrico, es urgente trabajar sobre la topología de la recta: los conceptos de densidad y de continuidad no son para nada comprendidos, además la imagen ingenua de la recta como collar de perlas (en la cual cada perla representa un punto geométrico) es para muchos el único fundamento de la teoría.

Trabajar con cuidado los conceptos relativos a los conjuntos infinitos desde la escuela de base no debe ser leído en el sentido de una introducción en los programas de nuevos contenidos. Por el contrario, de esta forma no se haría más que repetir los errores que de años se están haciendo con la enseñanza del Análisis, donde generalmente se presenta una teoría demasiado formalizada a estudiantes que no están en grado de entenderla a causa de una no suficiente experiencia y competencia. Significa por el contrario ofrecer a los estudiantes una serie de actividades, cuyo objetivo sea el de acercar al alumno a la delicada pero fascinante problemática relacionada con el infinito, que le ayuden en la formación de imágenes que le permitan llegar al modelo mental del infinito lo más correcto posible.

Por lo que concierne al análisis de los errores, validamos que, para nosotros, las dos formas patológicas *aplanamiento* y *dependencia* tienen un origen común: **la aplicación incondicional a los conjuntos infinitos los procesos propios de los conjuntos finitos.** Esta actitud es resultado de una evidente falsa concepción, generada de años de aplicación de determinados procesos siempre y únicamente en el ámbito finito, procesos que con el tiempo se convierten en verdaderos y propios modelos universales.

Por último, no podemos dejar inadvertido el problema de la no confiabilidad (relativa) de los test escritos. En este sentido, los resultados obtenidos en los coloquios son claramente indicativos. Puestos en la estrechez de los coloquios, los estudiantes cambian de opinión y modifican las propias respuestas dadas en el test. Algunos pasan de una respuesta correcta dada en el test, a una errada, dada con convicción. Otros pasan de una respuesta errada a otra también errada. Otros, por el contrario pasan de una respuesta errada a una correcta que parece ser el fruto de un aprendizaje que se adquiere precisamente durante el curso de la entrevista.

Bibliografía

Arrigo G. y D'Amore B. (1999). "Lo veo, pero no lo creo". Obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de un teorema de Georg Cantor que involucra al infinito actual. *Educación matemática*. México. 11, 1, 5-24].

Arrigo G. e D'Amore B. (2002). "Lo vedo ma non ci credo…", seconda parte. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor. *La Matematica e la sua didattica*. 1, 4-57.

D'Amore B. (1996). El infinito: una historia de conflictos, de sorpresas, de dudas. *Epsilon*. España. 36, 341-360.

D'Amore B. y Fandiño Pinilla M.I. (2001). La "matemática de la cotidianidad". *Paradigma*. Venezuela. 1, 59-72.

Duval R. (1995). *Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques*? Actes de l'École d'été 1995.

Fischbein E. (1985). Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari. En: Chini Artusi L. (ed.). *Numeri e operazioni nella scuola di base*. Bologna: Zanichelli-UMI. 122-132.

Shama G. and Movshovitz Hadar N. (1994). Is Infinity a whole number? Actas del XVIII PME. Lisboa 1994. 265-272.

Stavy R. and Berkovitz B. (1980). Cognitive conflict as a basic for teaching qualitative aspects of the concept of temperature. *Science Education*. 28, 305-313.

Tall D. (1980). The notion of infinity measuring number and its relevance in the intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematicas*. 11, 271-284.

Tsamir P. (2000). La comprensione dell'infinito attuale nei futuri insegnanti. *La matematica e la sua didattica*. 2, 167-207.

Waldegg G. (1993). La comparaison des ensembles infinis: un cas de résistance à l'instruction. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. 5, 19-36.