Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética:

interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución [1]

D'Amore B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivisticas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Uno*. Barcelona, España. 35, 90-106.

Bruno D'Amore

N.R.D.
Núcleo de Investigación en Didáctica de las Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Universidad de Bolonia

Facultad de Ciencias de la Formación
Universidad Libre de Bolzano
Freie Universität Bozen
Bresanone – Brixen (Bz)

Sumary. Este trabajo se inspira en los estudios en los que ha sido pionero indiscutible Raymond Duval (1993), y se sitúa en la línea de investigación del NRD de Bolonia, que busca localizar y evidenciar las diferentes hipótesis que se hallan en la base de la falta de devolución (Perrin Glorian, 1994), y por lo tanto en la base de la escolarización del saber matemático (D´Amore, 1999a).

Sumary. This study derives inspiration from the original discusions of Raymond Duval (1993), and forms part of the research being done by the NRD of Bologna University. It atempts to draw out and to substabtiate the diferentes

[1] Trabajo desarrollado en el ámbito del Programa de investigación local: *Investigaciones acerca del funcionamiento del sistema alumno-maestro-saber: motivaciones de la falta de devolución*, inscrito en el Proyecto nacional ex-40%: *Desarrollo de conceptos, conocimientos y habilidades básicas en matemáticas en la época de las computadoras: nuevas necesidades y oportunidades de aculturación matemática*, co-financiado por el MURST.

hypotheses that lie at the foundations of unsuccesfull devolution (Perrin Glorian, 1994), and therefore also at the foundations of the schoolong of mathematical awarenes (D'Amore, 1999a).

1. Concepto y conceptualización

¿Que es un "concepto"?

En (D'Amore, 1999b, 193-208) busqué dar las ideas básicas a través de las cuales se podría dar respuesta a esta pregunta aparentemente ingenua; pero, lo que invariablemente se llega a constatar con una certidumbre absoluta es que la "definición" se revela, por muchos motivos, de una complejidad inmensa…

Una de las dificultades, es que en la idea de "concepto" participan muchos factores y tantas causas; para decirlo brevemente, y por tanto en modo incompleto, no parece correcto afirmar por ejemplo que el "concepto de recta" (suponiendo que exista) es aquel que se halla en la mente de los científicos que a este tema han dedicado su vida de estudio y reflexión; en cambio parece más correcto afirmar que existe una fuerte componente por así decirlo "antropológica" que pone en evidencia la importancia de las relaciones entre $R_I(X,O)$ [relación institucional con tal objeto del saber] y $R(X,O)$ [relación personal con tal objeto del saber] (estoy usando símbolos y términos tomados de Chevallard, 1992). Aquí, obviamente, "objeto del saber" se entiende como "objeto *matemático* del saber", el que Chevallard (1991, pág. 8) define:

> "un emergente de un sistema de praxis donde se manipulan objetos materiales que se descomponen en diferentes registros semióticos: registro oral, de las palabras o de las expresiones pronunciadas; registro gestual; dominio de las inscripciones, es decir lo que se escribe o se dibuja (gráficas, fórmulas, cálculos, …), es decir el registro de la escritura".

Por lo que, a la "construcción" de un "concepto" participarían tanto la parte institucional (el Saber) como la parte personal (de cualquiera que tenga acceso a tal Saber, por tanto no solo el científico). Sobre esta posición se han manifestado diferentes Autores; yo aquí me limito a sugerir el trabajo de Godino y

Batanero (1994) porque este artículo es de extraordinaria importancia en el debate en el que estoy tratando de insertarme, dado que trata precisamente de las relaciones entre significados institucionales y personales de los objetos matemáticos.
Pero entonces, distinguir el "concepto" de su construcción no es fácil y, quizás, no es ni posible ni deseable: un concepto se halla, por así decirlo, continuamente en fase de construcción y en esta misma construcción se halla la parte más problemática y por lo tanto más rica de su significado:

concepto

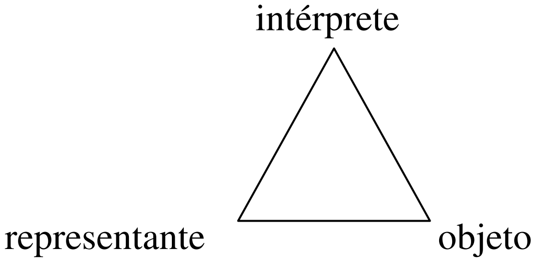
construcción construcción

significado

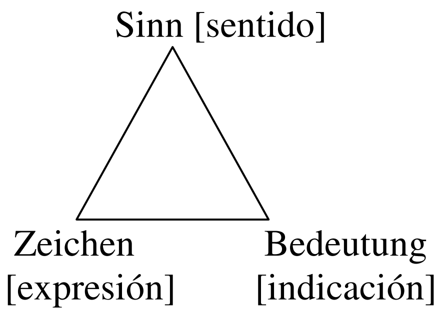
Como hacen otros Autores, podríamos llamar a tal construcción: *conceptualización*, y cuestionarnos que es y como se da. En el intento de dar luz sobre este argumento, muchos estudiosos autorizados han propuesto hipótesis y teorías sobre las cuales no entro en detalles, recomendando, para una rápida recapitulación, a D'Amore (1999b); baste recordar las contribuciones (muchas veces en firme oposición entre ellas) de Vygotskij, de Piaget, de Gal'perin, de Bruner, de Gagné,… solo para limitarme a los más conocidos.
Adentrarse en esta aventura, nos conduce al menos a darnos cuenta de una cosa: que la segunda pregunta (*¿Qué es* o *Cómo se da la conceptualización*?) es fundamentalmente un misterio…
Un paso clarificador muy profundo fue intentado por Vergnaud (1990) que unifica en el concepto su misma componente constructiva; según Vergnaud, el punto decisivo en la conceptualización (y en la Didáctica, pero este es un tema más específico, que deberé retomar y desarrollar en breve) es el pasaje de los *conceptos-como-instrumento* a los *conceptos-como-objeto* y una operación lingüística esencial en esta transformación es la *nominalización*; él entiende con "conceptualización" precisamente

esta apropiación consciente, cuando propone la siguiente definición: un concepto C es la terna (S, I, *S*) donde S es el referente, I el significado y *S* el significante.
La idea de Vergnaud podría ser considerada como una posible conclusión de una línea "clásica", la que pasa a través de los tres famosos "triángulos" (bibliografía específica en: D'Amore, 1999b):

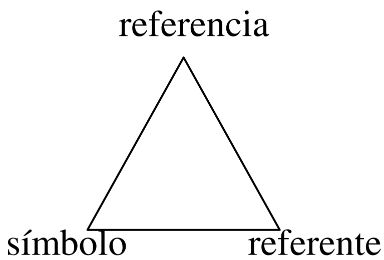
el triángulo de Charles Sanders Peirce [1839-1914], publicado en 1883:



el triángulo de Gotlob Frege [1848-1925], publicado en 1892:



el triángulo de C. K. Ogden e I. A. Richards, que quería ser un compendio de los otros dos, publicado en 1923:



Queda el hecho que de cualquier manera el *apropiarse* de un concepto (independientemente de lo que eso signifique) siempre requiere algo más que *nombrarlo* (la cuestión se origina al menos en la Edad Media)… (D'Amore, 1999b).

Por otro lado, no se trata de intentar una teoría general de estas cosas; pero, ciertamente, el caso de las matemáticas es, en este sector, peculiar; cuando menos por dos motivos:

- todo concepto matemático remite a "no-objetos"; por lo que la conceptualización no es y no se puede basar sobre significados que se apoyen en la realidad concreta; en otras palabras en matemáticas no son posibles reenvíos ostensivos
- todo concepto matemático se ve obligado a servirse de representaciones, dado que no se dispone de "objetos" para exhibir en su lugar; por lo que la conceptualización debe necesariamente pasar a través de registros representativos que, por varios motivos, sobre todo si son de carácter lingüístico, no pueden ser unívocos.

2. El caso de las matemáticas

Me parece que el siguiente esquema es mucho más eficaz que las palabras:

"objeto matemático a ser conceptualizado: no existe como objeto real

1.1.1.1.1.1.1 1.1.1.1.1.1.1 OBJETIVA INACCESIBILIDAD A LA PERCEPCION

(consiguiente necesidad de) representantes semióticos

actividad matemática
sobre los objetos
sobre sus representantes

consiguiente *paradojacognitiva* del pensamiento

Veamos en que consiste esta *paradoja* (Duval, 1993, pág. 38; la traducción es mía, concordada con el Autor):

> "(…) por una parte, el aprendizaje de los objetos matemáticos no puede ser más que un aprendizaje conceptual y, por otra, es sólo por medio de representaciones semióticas que es posible un actividad sobre los objetos matemáticos. Esta paradoja puede constituir un verdadero círculo vicioso para el aprendizaje. ¿Cómo sujetos en fase de aprendizaje no podrían confundir los objetos matemáticos con sus representaciones semióticas si ellos no pueden más que tener relación solo con dichas representaciones? La imposibilidad de un acceso directo a los objetos matemáticos, fuera de toda representación semiótica, vuelve la confusión casi inevitable. Y, al contrario, ¿cómo podrían ellos adquirir el dominio de los tratamientos matemáticos, necesariamente ligados a las representaciones semióticas, si no tienen ya un aprendizaje conceptual de los objetos representados? Esta paradoja es aún más fuerte si se identifica actividad matemática con actividad conceptual y si se consideran las representaciones semióticas como secundarias o extrínsecas".

En esta paradoja, tan bien evidenciada por Raymond Duval, ¿se puede esconder una potencial causa de falta de devoluciones?

Según el maestro, según la noosfera y según el mismo estudiante, el (estudiante) está entrando en contacto con un "objeto" matemático pero, de hecho, y parece ser que ninguno se da cuenta, el estudiante está entrando en contacto solo con una representación semiótica particular de ese "objeto". El estudiante no tiene, no puede tener, acceso directo al "objeto" y el maestro y la noosfera confunden las dos cosas; el estudiante se queda como bloqueado, como inhibido: no puede hacer más que confundir el "objeto" con su representación semiótica porque no se da cuenta, porque no lo

sabe. Y por tanto, frente a una sucesiva necesidad conceptual, que se manifiesta por ejemplo con la necesidad de modificar la representación semiótica del mismo “objeto”, el estudiante no tiene medios críticos ni culturales ni cognitivos; el maestro y la noosfera no entienden el porque y acusan al estudiante, culpándolo de algo que el no entiende.
En realidad: en esta fase paradójica, ninguno entiende más lo que está sucediendo en la medida en la que cada uno de los actores de esta aventura tiene una percepción diferente del problema.
Pero deberé afrontar esta cuestión con mucho más detalle y con mucha más especificidad. Para hacer esto, debo afrontar una larga explicación sobre un adjetivo presente en el título.

3. Aprendizaje, constructivismo, simbolización

¿Porqué en el título puse el adjetivo “constructivistas”?
Para responder a esta pregunta, debo partir de lejos, inspirándome a Moreno Armella (1999).
En la *Crítica de la razón pura*, Kant postula que el conocimiento es el resultado de un contacto entre un sujeto que aprende y un objeto de conocimiento. El recurre a una comparación: así como el líquido adopta la forma del recipiente que lo contiene, las impresiones sensoriales adoptan las formas que se le imponen por parte de las estructuras cognitivas. Pero para que eso suceda, y es la bien conocida hipótesis fuerte de Kant, se necesitan formas innatas de sensibilidad, como espacio, tiempo, causalidad, permanencia del objeto, permanencia y uso de experiencias precedentes etc.
Por lo que el conocimiento no es más una simple representación de la realidad externa; es en cambio el resultado de la interacción entre el sujeto que aprende (sus estructuras cognitivas) y sus “experiencias sensoriales”. Además el sujeto que aprende abandona la típica pasividad (cartesiana o lockiana) y construye, estructura sus experiencias, participando activamente en el proceso de aprendizaje en una verdadera y propia *construcción*. Se trata de una

transformación: un objeto de conocimiento, entrando en contacto con un sujeto que aprende, se transforma, reconstruye, gracias a los instrumentos cognitivos que tiene.
Pero: ¿de dónde provienen precisamente esos instrumentos cognitivos que sirven para transformar las experiencias del sujeto? La epistemología del aprendizaje de Kant, para usar una terminología moderna, se refiere a un aprendiz adulto, por lo que ya se haya dotado de un lenguaje desarrollado, con capacidad de abstracción y de generalización. ¿Es lícito ponerse la siguiente pregunta?: ¿cómo cambia todo esto si hablamos de aprendizaje en ambiente escolar, de aprendices no adultos (niños o adolescentes o jóvenes) a las primeras armas, con lenguajes aún en elaboración?
No es del todo absurdo pensar que la epistemología constructivista se haya originado de la necesidad de dar respuesta precisamente a este problema. Piaget, en1937, se expresaba así:

> "… el conocimiento del mundo exterior comienza por una utilización inmediata de las cosas […] la inteligencia no comienza así ni del conocimiento del yo ni de las cosas en cuanto tales sino de su interacción y, orientándose simultáneamente hacia los dos polos de esta interacción, la inteligencia organiza el mundo, organizándose a sí misma" (Piaget,1937).

Por lo tanto el saber adquirido puede verse como el producto de la elaboración de la experiencia con la cual entra en contacto el sujeto que aprende; y esta elaboración consiste en la interacción entre el individuo y su ambiente y en el modo en el cual el individuo interioriza el mundo externo. Independientemente de las peculiaridades de estas "actividades", el sujeto que aprende debe comprometerse en algo que necesariamente lo lleva a simbolizar. Se trata de una necesidad típicamente humana, ¡la única sobre la cual todos los Autores concuerdan! Se trata de una elaboración (con características internas o sociales o incluso ambas) que se organiza alrededor o en los sistemas semióticos de representación.
Se puede decir más: que el conocimiento "*es*" la intervención y el uso de los signos.

Por lo tanto, el mecanismo de producción y de uso, subjetivo e intersubjetivo, de estos signos y de la representación de los "objetos" de la adquisición conceptual, es crucial para el conocimiento.

En este sentido, acepto y hago mío lo que Moreno Armella (1999) enuncia como "un principio que nos parece esencial respetar: *toda acción cognitiva es una acción mediada por instrumentos materiales o simbólicos*". El conocimiento depende también y precisamente de aquellos instrumentos de mediación que ponemos en acción para su construcción, y del conjunto y del tipo de significaciones que tales instrumentos reciben del entorno social.

Ahora, todo eso había ya sido previsto en el programa de la epistemología constructivista, y expresado de la siguiente manera:

> "[…] la acción no tiene lugar solo como resultado de los impulsos internos […] En su experiencia, las situaciones que el niño encuentra son generadas por su entorno social y los objetos aparecen situados en contextos que les dan el significado especifico. El niño no asimila objetos puros […] asimila las situaciones en las cuales los objetos tienen roles específicos. En la medida en la que su sistema de comunicación se hace más complejo […] eso que podemos llamar experiencia directa de los objetos queda subordinada […] al sistema de interpretaciones suministrado por el entorno social" (Piaget, Garcia, 1982, cap. IX).

No hay duda que el conocimiento, en la escuela, y su aprendizaje como construcción se hallen condicionados por situaciones específicas de la institución. Por lo tanto, el aprender en la escuela ¡no es el aprender *total*! Los problemas del aprendizaje matemático en la escuela, aún antes de ser de orden epistemológico, pertenecen a ese ambiente sociocultural tan específico.[2]

Pero de estas consideraciones que compartimos, nacen algunas reflexiones que se revelan rápidamente necesarias. Si simplemente se transportan, por así decirlo, a la escuela las tesis de la epistemología constructivista, nos hallamos frente a afirmaciones

---

[2] Esta perspectiva sociocultural tan peculiar ha notablemente influenciado los estudios educativos (Wertsch, 1993).

del tipo: “El estudiante construye su propio conocimiento”; o, más radicalmente: “Todo estudiante construye *su propia versión* del conocimiento”. Pero, vista la especificidad del ambiente escuela, nacen preguntas cuya respuesta parece lejana; por ejemplo, ¿cómo podemos verificar que las construcciones del saber del estudiante son compatibles con las de sus compañeros?, ¿con las exigencias de la institución?, ¿con las expectativas del maestro?

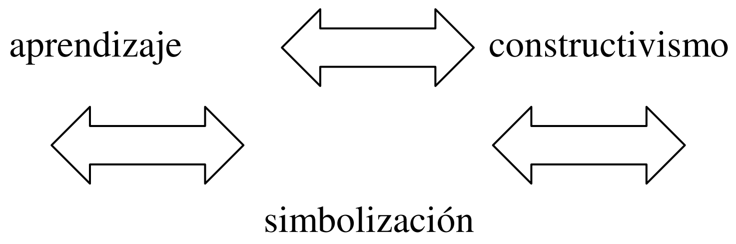
Si es verdad, como es verdad, que todo conocimiento (matemático, en particular) refleja al mismo tiempo una dimensión social y una personal, la escuela no es una excepción, sino incluso el lugar donde se institucionaliza esta doble naturaleza.

Durante el aprendizaje de las matemáticas, se introduce a los estudiantes en un mundo nuevo, tanto conceptual como simbólico (sobre todo representativo). Este mundo no es el fruto de una construcción solitaria, sino el fruto de una verdadera y compleja interacción con los miembros de la microsociedad de la cual el sujeto que aprende forma parte: los propios compañeros y los maestros (y la noosfera, a veces borrosa, a veces evidente) (Chevallard, 1992). Es gracias a un continuo debate social que el sujeto que aprende toma consciencia del conflicto entre “conceptos espontáneos” y “conceptos científicos”; enseñar no consiste solo en el intento de generalizar, amplificar, volver más crítico el “sentido común” de los estudiantes; se trata de una acción más bien compleja, como nos ha enseñado Vygotskij en *Pensamiento y Lenguaje* (1962):

> “Como sabemos gracias a las investigaciones sobre el proceso de formación de los conceptos, un concepto es algo más que la suma de ciertos vínculos asociativos formados por la memoria […] es un auténtico y complejo acto de pensamiento que no se puede enseñar mediante la ejercitación y al cual se puede llegar solo cuando el desarrollo mental del niño ha alcanzado el nivel requerido […] El desarrollo de los conceptos, o significados de las palabras, presupone el desarrollo de muchas funciones intelectuales (atención, memoria lógica, abstracción, capacidad de comparación y diferenciación). También la experiencia demuestra que la enseñanza directa de

los conceptos es imposible y estéril. Un maestro que intenta hacer esto, normalmente no logrará nada, si no un vacío verbalismo".

Por lo que **Aprender** parece ser una **construcción** sujeta a la necesidad de "socializar", lo que se da obviamente gracias a un medio de comunicación (que puede ser el lenguaje) y que en las matemáticas cada vez más será condicionado por la elección del mediador **simbólico**, es decir, por el registro de representación preseleccionado (o impuesto, de diversas formas, incluso solo por las circunstancias). [Lo que explica finalmente el título de este párrafo].



4. Semiótica y noética en el aprendizaje de las matemáticas

En matemáticas, la adquisición conceptual de un objeto pasa necesariamente a través de la adquisición de una o más representaciones semióticas. Lo dicen Chevallard (1991), Duval (1993, 1995), Godino y Batanero (1994).
Por lo que, tomando prestado Duval: **no existe noética sin semiótica.**

Solo por claridad terminológica, pero sin ninguna pretensión de completez, dado que no siempre estos términos se usan en el mismo sentido prefiero explicitar los significados de los que me sirvo:

semiótica $=_{df}$ adquisición de una representación semiótica
noética $=_{df}$ adquisición conceptual de un objeto[3]

Entenderé, de ahora en adelante:
r^m $=_{df}$ registro semiótico (m = 1, 2, 3, …)
$R^m{}_i(A)$ $=_{df}$ representación semiótica i-ésima (i = 1, 2, 3, …) de un contenido A en el registro semiótico r^m

Se puede notar que, en base a estas elecciones, no solo cambia el registro semiótico también cambia necesariamente la representación semiótica, mientras no se garantiza el viceversa; es decir puede cambiar la representación semiótica manteniéndose el mismo registro semiótico.

Una vez más, uso una gráfica para ilustrar la cuestión, porque me parece más incisiva y eficaz:[4]

características de la cognitivas **semiótica**	*representación* *tratamiento* *conversión*	estas tres son actividades diferentes

contenido A por representar

elección de las características distintivas de A

REPRESENTACIÓN $R^m{}_i(A)$ en un dado registro semiótico r^m

[3] Para Platón, la noética es el acto de concebir a través del pensamiento; para Aristóteles, es el acto mismo de comprensión conceptual.
[4] Me refiero una vez más a Duval (1993).

transformación de representación ——— *TRATAMIENTO*

nueva representación (los≠j) $R^{m}{}_{j}(A)$ en el *mismo* registro semiótico r^{m}

transformación de registro ——— *CONVERSION*

nueva representación (h≠los, h≠j) $R^{n}{}_{h}(A)$ en *otro* registro semiótico r^{n} (n≠m)

(m, n, los, j, h = 1, 2, 3, …)

Características de la noética

La adquisición conceptual de un objeto matemático se basa en dos de sus características “fuertes” (Duval, 1993):

1. el uso de más registros de representación semiótica es típica del pensamiento humano
2. la creación y el desarrollo de sistemas semióticos nuevos es símbolo (histórico) de progreso del conocimiento.

Estas consideraciones muestran la interdependencia estrecha entre noética y semiótica, como se pasa de una a otra: por lo que no solo no existe noética sin semiótica, sino que la semiótica se adopta como característica necesaria para garantizar el primer paso hacia la noética.

5. Construcción del conocimiento matemático y registros de representación semiótica: un intento de “definición” de *construcción*

Por lo tanto, la construcción de los conceptos matemáticos depende estrechamente de la capacidad de usar *más* registros de representaciones semióticas de esos conceptos:

❶ de *representarlos* en un dado registro
❷ de *tratar* tales representaciones al interior de un mismo registro
❸ de *convertir* tales representaciones de un dado registro a otro

El conjunto de estos tres elementos y las consideraciones de los precedentes párrafos **2** y **3**, evidencian la profunda relación que existe entre noética y constructivismo: ¿qué cosa quiere decir "construcción del conocimiento en matemáticas" si no precisamente la unión de esas tres "acciones" sobre los conceptos, es decir la expresión misma de la capacidad de *representar* los conceptos, de *tratar* las representaciones obtenidas al interior de un registro establecido y de *convertir* las representaciones de un registro a un otro?
Es como si se estuvieran especificando las operaciones-base que, en su conjunto, definen esa "construcción" que, de otra manera, queda un término misterioso y ambiguo, disponible a cualquier tipo de interpretación, incluso metafísica.[5]

6. Escolarización y falta de noética

La renuncia del estudiante a la devolución (obviamente inconsciente), la incapacidad del estudiante para implicarse (como consecuencia de resultados negativos en los diferentes intentos), asumiéndose la carga directa y personal de la responsabilidad de la construcción del conocimiento, en el ambiente escolar, se hallan ligadas a la incapacidad (a veces solo supuesta) o de representar, o de tratar o de convertir, por falta de una didáctica específica. El maestro podría en efecto no preocuparse de los componentes individuales de la construcción a causa de una supuesta identidad entre semiótica y noética (Duval, 1993) (identidad que se halla bastante difundida en el pensamiento de los maestros,

[5] Naturalmente esta observación, todo el párrafo, pero incluso todo este artículo, son específicos para la matemática; no se valorar cuanto se puedan extender a una teoría de los conceptos o, incluso, a una gnoseología.

particularmente en aquellos que no tienen jamás la oportunidad de reflexionar sobre esta cuestión, o que la consideran superflua).[6] Eso podría llevar a la elección de la renuncia por parte del estudiante y por lo tanto a la escolarización de los saberes (D'Amore, 1999a).[7]

En cambio, es necesario reflexionar sobre el hecho que en el aprendizaje conceptual no puede existir noética si no existe semiótica en cuanto la adquisición de un concepto matemático C es de hecho la adquisición de una representación semiótica $R^m{}_i(C)$ en un dado registro semiótico r^m; en efecto, solo a través de C se "manifiesta" y se vuelve disponible para la construcción del aprendizaje en el sentido señalado.[8]
Pero hay más: cualquiera que sea $R^m{}_i(C)$ en r^m, eso no da todas las referencias (semióticas) de C en r^m (la representación semiótica de un concepto no es unívoca jamás); existirán otras representaciones semióticas $R^m{}_h(C)$ (h≠los) de C en r^m. (Se pasa de una a otra con una transformación de tratamiento).
Se puede entonces hablar de C^m: concepto C representado en r^m, "limitado" es decir a su aspecto "relativo" al registro semiótico r^m.

---

[6] Lo que nos reconduce a una discusión mucho más general, aquella sobre las creencias implícitas del maestro, afrontado de manera profunda, sistemática y recurrente, en (Speranza, 1997).

[7] "Con el término "escolarización del saber" pienso referirme aquí al acto en larga medida inconsciente, a través del cual el alumno, en un cierto punto de su vida social y escolar (pero casi siempre durante la escuela elemental), delega a la escuela (como institución) y al maestro de la escuela (como representante de la institución) la tarea de *seleccionar para él los saberes significativos* (aquellos que lo son socialmente, por status reconocido y legitimado por la noosfera), renunciando a hacerse cargo directamente de su elección en base a cualquier forma de criterio personal (gusto, interés, motivación,…). Dado que esta escolarización comporta el reconocimiento del maestro como depositario de los saberes que cuentan socialmente, es también obvio que existe, más o menos contemporáneamente, una escolarización de las relaciones interpersonales (entre estudiante y maestro y entre estudiante y compañeros) y de la relación entre el estudiante y el saber: es lo que (…) se llama "escolarización de las relaciones"." (D'Amore, 1999a).

[8] Desde mi punto de vista, este es un punto esencial por tratar en los cursos para la formación de los maestros, enriqueciéndolo con ejemplos significativos.

C^m se puede "aprender" en r^m pero lo que se obtiene es por lo tanto solo una aproximación parcial a C, digamos: una "construcción" parcial.
Para alcanzar la comprensión de C se necesita apoderarse de la conversión que lleva de $R^m{}_i(C^m)$ en r^m a $R^n{}_j(C^n)$ en r^n, para toda m y n: eso vuelve posible la elección de un registro en lugar de otro frente a cualquier situación relativa a C.
Eso parece reforzar la frase muchas veces recurrente y que constituye el perno fundamental de todo el aparato que estoy describiendo: **no existe noética sin semiótica**.
Para reforzar el "juego de las ternas" (representación, tratamiento, conversión), se puede ver el resultado de la investigación descrita en D'Amore (1998). En ella el mismo mensaje, relativo a una situación que tiene que ver con un simple ejemplo de relación binaria (se daban nombres de ciudades y nombres de países y la relación binaria era: "está en"), se proponía a alumnos de varios niveles escolares en diferentes registros semióticos y con diferentes representaciones semióticas, con la solicitud de reconocer que se trataba, precisamente, del *mismo mensaje*, de la *misma información*.
El resultado de la investigación muestra precisamente las enormes dificultades que tienen los estudiantes

- para llegar a partir de una representación al contenido representado
- para verificar que entre dos representaciones en un dado registro semiótico se ha llevado a cabo simplemente una transformación de representación de tipo tratamiento
- para verificar que entre dos representaciones semióticas en dos diferentes registros semióticos se ha dado una transformación de representación de tipo conversión.

Ante la ausencia de claves de lectura y ante la dificultad en el "leer" las situaciones, los estudiantes dan "sentido" al mensaje creando informaciones de diferentes tipo (a las que en algunos casos he llamado "informaciones parásitas") incluso lejanas de cualquier intención comunicativa del autor; y buscan asideros de tratamiento o conversión en aspectos del todo marginales, como; la forma de los gráficos, el tipo de figuras casualmente presentes, etc. que para el adulto son insignificantes.

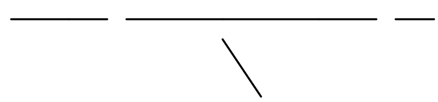
7. Ejemplos

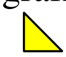
concepto C

registro semiótico r^1: la lengua común
 representación semiótica R^1_1: un medio
 representación semiótica R^1_2: la mitad
 etc.

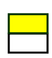
registro semiótico r^2: el lenguaje aritmético
 representación semiótica R^2_1: ½ (escritura fraccionaria)
 representación semiótica R^2_2: 0.5 (escritura decimal)
 representación semiótica R^2_3: $5 \cdot 10^{-1}$ (escritura exponencial)
 etc.

registro semiótico r^3: el lenguaje algebraico:
 representación semiótica R^3_1: $\{x \in Q^+ / \ 2x-1=0\}$ (escritura de la teoría de conjuntos)
 representación semiótica R^3_2: $y=f(x)$: $x \rightarrow x/2$ (escritura funcional)
 etc.

registro semiótico r^4: el lenguaje figural
 representación semiótica R^4_1: 
 etc. 0 1

registro semiótico r^5: esquemas pictográficos
 representación semiótica R^5_1: 

 representación semiótica R^5_2: 

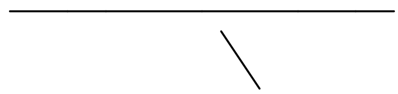
 representación semiótica R^5_3: 
 etc.

etc.

½ | transformación de tratamiento en r^2 | 0.5

0.5 | transformación de tratamiento en r^2 | $5 \cdot 10^{-1}$

etc.

½ ⇒ | transformación de conversión de r^2 a r^4 | ⇒ 

0 1

etc.

Otros ejemplos pueden tomarse de la teoría ingenua o elemental de los conjuntos, en la cual el mismo conjunto puede ser representado en varios registros semióticos y, al interior de cada uno de ellos, usando varias representaciones semióticas.

8. La falta de devolución, la interrupción de la implicación

En caso de fracaso en la administración de esta enorme masa de representaciones y transformaciones es demasiado trivial y simplista el limitarse a la sola constatación, como parece ser que muchas veces hace el maestro desilusionado de la falta de aprendizaje de sus alumnos. ¿Dónde se anida el *motivo* de tal fracaso? Ya este aspecto es mucho más interesante y un análisis de los diferentes fracasos podría revelar mucho.

Pero aquí me interesa la problemática de la falta de devolución, de la interrupción de una implicación personal.

Tengo en mente la figura de un estudiante incluso bueno, consciente, sensible, que se limita, quizás precisamente por esa sensibilidad no satisfecha o por incapacidad introspectiva de la cual no tiene la culpa, a observar y constatar su proprio fracaso en el intento de hacer frente a la complejidad de la llamada en causa de la terna “representación, tratamiento, conversión”. El estudiante podría decidir (aunque de manera del todo inconsciente) de… limitar los daños aceptando el formalismo, la superficie de cuanto se le pide, adecuándose a escolarizar su proprio saber y su proprio comportamiento, es decir aceptando la total mediación del maestro hacia el objeto del saber, aceptando sus elecciones y también sus gustos (D’Amore, 1999a). Un análisis muy apretado de las varias componentes, es decir la capacidad de puntualizar los varios aspectos en los que se configura la construcción del conocimiento (en nuestro caso específico, en el ejemplo dado en **7**., ese concepto que tiene como uno de sus tantos representantes ½), podría ayudar al maestro a entender cual fue el momento exacto de la rendición, de la falta de devolución, de la interrupción de la implicación personal del estudiante en tal construcción.
Existe una enorme diferencia entre la institucionalización del conocimiento por parte del maestro como representante de la institución que ha decidido cual es el saber que cuenta; y la escolarización, la aceptación servil de las elecciones del maestro.

- En el primer caso el maestro funge de mediador entre alumno y saber y hace que el primero sea activo: consagra las elecciones y los “descubrimientos” del alumno reconociéndole un estatuto institucional de consumo y un permiso oficial de uso; el fundamento de todo esto se haya en el hecho que fue el alumno el que construyó.
- En el segundo caso el maestro funge de mediador totalitario y hace que el alumno sea un sujeto pasivo: le pide fe ciega, fe ciega en la institución en cambio de promesas acerca de capacidades y habilidades futuras que nadie garantiza que lleguen algún día o que no podrían jamás ser consumidas. El alumno cesa de construir, es decir cesa de aprender.

Yo creo que el estudio preciso de la terna (representación, tratamiento, conversión) puede aplicarse al análisis de las situaciones de renuncia a la implicación personal, para evidenciar el motivo que desencadena la renuncia, el motivo de la escolarización.

Apéndice: Relatividad de los registros

Una duda de naturaleza teórica asalta a quien estudia este tipo de problemas: ¿un registro de representación semiótica es un absoluto o no?
Es decir: si yo veo un signo, un dibujo, una fórmula, una escritura,... como representación semiótica $R^x{}_y(C)$ de un cierto "objeto" o concepto C, ¿puedo establecer con certeza a que registro semiótico r^x pertenece? Es decir: ¿existen en absoluto registros de representación semiótica deducibles a partir de la *forma* de una representación especifica singular?
Desde mi punto de vista, la respuesta es *negativa*: la característica específica de un registro semiótico depende estrechamente del objeto que se quiere representar; por lo tanto para "entender" el mensaje propuesto se necesita tener ya indicaciones preliminares acerca del objeto.
Lo mostraré recurriendo a dos ejemplos.

Ejemplo 1. Si el objeto C es "cálculo numérico en Q", el registro semiótico r^1 "escritura decimal" y el registro semiótico r^2 "escritura fraccionaria" son dos registros semióticos *diversos* porque las 3 actividades cognitivas fundamentales ligadas a la semiótica (representación, tratamiento, conversión) son diferentes (como se demuestra en Duval, 1993, pag. 41-42); y además el pasaje de uno a otro es una transformación de conversión (misma ref. bib.).

Ejemplo 2. Si el objeto C es "valor de un dado elemento de Q" (por ejemplo el representado, entre otros, por ½), el registro semiótico "escritura decimal" y el registro semiótico "escritura fraccionaria" se pueden pensar como idénticos al interior del registro semiótico r[1] "escrituras en forma aritmética" (el pasaje de uno a otro es en efecto una transformación de tratamiento).

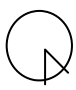
Daré ahora algunos ejemplos de representaciones semióticas cuyo aspecto puramente figural se presta a diferentes interpretaciones, debidas al registro en el que se piensa que se pueden interpretar:

$\square$	"cuadrado": en el registro geométrico figural "es necesario que": en el registro escritura formal de la lógica modal

$<$	"menor": en el registro escritura de la aritmética "ángulo": en el registro figural geométrico

$\vert\ \vert$	"valor absoluto": en el registro escritura algebraica "pareja de rectas paralelas": en el registro simbólico geométrico elemental

$\wedge$	"ángulo": en el registro figural geométrico "et": en el registro escritura formal de la lógica enunciativa

	"1/8": en el registro esquemático pictográfico referido a fracciones "45°": en el registro figural geométrico sintético "sector circular": en el registro figural geométrico sintético

$+$	"más": en el registro escritura aritmética "ejes cartesianos no orientados": en el registro figural geométrico analítico "rectas perpendiculares": en el registro figural geométrico sintético

$\times$	"por": en el registro escritura aritmética

	“rectas incidentes”: en el registro figural geométrico sintético

→	“vector”: en el registro álgebra lineal o física o geometría “indicador”: en un registro esquema “implicación material”: en el registro lógica formal o matemáticas

∅	“vacío”: en el registro escritura de conjuntos “cero”: en el registro escritura numérica de los informáticos “½”: en el registro esquemático pictográfico escritura fraccionaria

etc.

Por lo tanto, una representación semiótica en sí no es un mensaje en absoluto, a menos que no se especifique de alguna manera el registro de representación; es decir, él depende del objeto que se quiere representar, en una especie de círculo vicioso. En otras palabras, una representación semiótica constituye un significante diferente según sea el significado del que es significante.

Bibliografía

Chevallard Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l’acitivité mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l’Informatique de Grenoble*. LSD2, IMAG, Université J. Fourier, Grenoble.

Chevallard Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche antropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12, 1, 73-112.

D’Amore B. (1998). Oggetti relazionali e diversi registri rappresentativi: difficoltà cognitive ed ostacoli. *L’educazione matematica*, 1, 7-28 [testo bilingue, italiano ed inglese]. In lingua spagnola: *Uno*, 15, 1998, 63-76.

D’Amore B. (1999a). Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull’apprendimento della matematica. *L’insegnamento della Matematica e delle scienze integrate*. 22A, 3, 247-276.

D'Amore B. (1999b). *Elementi di Didattica della Matematica*. Bologna, Pitagora.

Duval R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, ULP, IREM Strasbourg. 5, 37-65.

Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne, Peter Lang.

Godino J.D. & Batanero C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3, 325-355.

Moreno Armella L. (1999). Epistemologia ed Educazione Matematica. *La matematica e la sua didattica*, 1, 43-59.

Perrin Glorian M.-J. (1994). Théorie des situations didactiques: naissance, développement, perspectives. In: Artigue M., Gras R., Laborde C. & Tavignot P. (eds.) (1994), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud*. Grenoble, La Pensée Sauvage. 97-148.

Piaget J. (1937). *La construction du réel chez l'enfant.* Neuchâtel, Delachaux et Niestlé.

Piaget J. & Garcia R. (1983). *Psychogenèse et histoire des sciences*. Paris, Flammarion.

Speranza F. (1997). *Scritti di Epistemologia della Matematica*. Bologna, Pitagora.

Vergnaud G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19, 133-169.

Vygotskij L. (1962). *Thought and Language*. Cambridge, MIT Press.

Wertsch J. (1993). *Voces de la mente*. Madrid, Visor.