Appunti delle lezioni di

Complementi di analisi matematica

Versione 12/06/2025

Revisione a cura di Andrea Buffoni

Indice

1 Parte prima

1.1 Cenni di teoria della misura

In questa sezione introduciamo la nozione di misura e richiamiamo i principali risultati, per una trattazione completa si vedano ad esempio [1], [3], [6].

Sia X un insieme e $A \subseteq X$. Denotiamo con $A^c = X \setminus A$ il **complementare** di A; inoltre indichiamo con $\mathcal{P}(X)$ l'**insieme delle parti** di X, cioè la famiglia di tutti i sottoinsiemi di X,

$$\mathcal{P}(X) = \{A \text{ t.c. } A \subseteq X\}.$$

Definizione 1.1. *(Misura esterna)*
Sia X un insieme. Una funzione

$$\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$$

*si dice **misura esterna** su X, se:*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$*;*

(ii) se $A \subseteq B \subseteq X$ *allora* $\mu(A) \leq \mu(B)$ *(Monotonia)*;

(iii) se $A_k \subseteq X,\ k \in \mathbb{N}$*, allora*

$$\mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k) \qquad \textit{(Subadditività).}$$

Definizione 1.2. *(σ-algebra)*
*Sia X un insieme. Una famiglia $\mathcal{A}(X) \subseteq \mathcal{P}(X)$ si dice **σ-algebra** su X, se:*

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}(X)$*;*

(ii) se $A \in \mathcal{A}(X)$ *allora* $A^c \in \mathcal{A}(X)$*,*

(iii) se $A_k \in \mathcal{A}(X),\ \forall\, k \in \mathbb{N}$*, allora* $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}(X)$*.*

Definizione 1.3. *(Misura)*
Siano X un insieme e $\mathcal{A}(X)$ una σ-algebra su X. Una funzione

$$\mu\,:\,\mathcal{A}(X) \to [0, +\infty]$$

*si dice **misura** su X, se:*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) siano $A_k \in \mathcal{A}(X)$, tali che $A_k \cap A_j = \emptyset$, con $k \neq j$, $k, j \in \mathbb{N}$, allora

$$\mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k).$$

Definizione 1.4. *(Insieme misurabile)*
*Siano X un insieme e μ una misura esterna su X. Un insieme $A \subseteq X$ si dice μ-**misurabile**, se*

$$\mu(E) \,=\, \mu(A \cap E) + \mu(A^c \cap E), \quad \forall\, E \subseteq X$$

Denotiamo con $\mathcal{M}_\mu(X)$ la famiglia degli insiemi μ-misurabili.

Vale il seguente risultato (si veda [1], [3]).

Teorema 1.1. *(Primo teorema di Caratheodory)*
Siano X un insieme e μ una misura esterna su X. Allora $\mathcal{M}_\mu(X)$ è una σ-algebra, detta dei misurabili. Inoltre μ ristretta a $\mathcal{M}_\mu(X)$ è una misura; in particolare valgono le seguenti proprietà:

(i) siano $A_k \in \mathcal{M}_\mu(X)$, tali che $A_k \subseteq A_{k+1}$, per ogni $k \in \mathbb{N}$, allora

$$\mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big) = \lim_{k\to+\infty} \mu(A_k);$$

(ii) siano $A_k \in \mathcal{M}_\mu(X)$, tali che $A_{k+1} \subseteq A_k$, per ogni $k \in \mathbb{N}$, con $\mu(A_1) < +\infty$, allora

$$\mu\Big(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big) = \lim_{k\to+\infty} \mu(A_k).$$

Definizione 1.5. *(σ-algebra di Borel)*
*Sia X uno spazio topologico. La σ-**algebra di Borel** è la più piccola σ-algebra su X che contiene tutti gli aperti (o chiusi) di X.*
*Gli elementi di una σ-algebra di Borel si chiamano **boreliani**.*
*Una misura esterna μ su X si dice **misura di Borel** se ogni boreliano è μ-misurabile.*

Sia ora (X, d) uno spazio metrico munito di distanza d. Dati $A, B \subseteq X$ due insiemi non vuoti, denotiamo con $\text{dist}(A, B)$ la distanza tra A e B, data da

$$\text{dist}(A, B) = \inf \big\{d(x, y),\ x \in A,\ y \in B\big\}.$$

Definizione 1.6. *(Misura metrica)*
*Siano (X, d) uno spazio metrico e μ una misura esterna su X. Si dice che μ è una **misura metrica** se per ogni $A, B \subseteq X$, tali che $dist(A, B) > 0$, si ha*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Teorema 1.2. *(Secondo teorema di Caratheodory)*
Siano (X, d) uno spazio metrico e μ una misura metrica su X. Allora ogni sottoinsieme chiuso (o aperto) è μ-misurabile. In particolare μ è una misura di Borel.

Esempio 1.1. *(Misura di Lebesgue)*
Consideriamo lo spazio Euclideo $(\mathbb{R}^n, d)$, dove d è la distanza Euclidea.
Un intervallo compatto di $\mathbb{R}^n$ è un insieme del tipo

$$I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n],$$

con $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ tali che $a_j \leq b_j$, per $j = 1, \ldots, n$; inoltre chiamiamo misura di I il numero reale non negativo

$$mis(I) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j).$$

Dato $A \subseteq \mathbb{R}^n$, un ricoprimento Lebesguiano (RL) di A è una famiglia finita o numerabile di intervalli compatti $\{I_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$, tale che $A \subseteq \bigcup_{k \in \mathcal{I}} I_k$, con $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{N}$.
*Denotiamo con $\mathcal{L}^n$ la **misura esterna di Lebesgue** su $\mathbb{R}^n$, definita nel seguente modo: per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^n$, poniamo $\mathcal{L}^n(A)$ il numero reale esteso*

$$\mathcal{L}^n(A) \ = \ \inf \Big\{ \sum_{k \in \mathcal{I}} mis(I_k),\ con\ \{I_k\}\ RL\ di\ A \Big\}.$$

Si ha che $\mathcal{L}^n$ è una misura metrica; in particolare è una misura di Borel.

1.2 Introduzione alla misura di Hausdorff

Consideriamo lo spazio Euclideo $(\mathbb{R}^n, d)$, dove d è la distanza Euclidea.
Diamo le seguenti definizioni.

Definizione 1.7. *(Diametro, raggio)*
*Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Chiamiamo **diametro** di A, il seguente numero reale esteso*

$$\operatorname{diam}(A) \;=\; \sup\big\{\|x-y\|,\;\; x,y \in A\big\},$$

dove la norma Euclidea è data da

$$\|x-y\| = d(x,y)\ .$$

*Inoltre, chiamiamo **raggio** di A*

$$r(A) \;=\; \frac{\operatorname{diam}(A)}{2}.$$

Definizione 1.8. *(ω_s, m_s)*
*Consideriamo la funzione **Gamma di Eulero***

$$\Gamma : (0,+\infty) \to \mathbb{R}, \qquad \Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\; t^{s-1} dt.$$

Definiamo, per ogni $s \in [0,+\infty)$,

$$\omega_s = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}.$$

Inoltre, poniamo $m_s(\emptyset) = 0$, e per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$,

$$m_s(A) = \omega_s \cdot (r(A))^s\ .$$

Osservazione 1.1. *Se $n \in \mathbb{N}$, allora il valore ω_n coincide con la misura di Lebesgue della palla di raggio unitario in $\mathbb{R}^n$; (si veda l'Appendice A.5).*
In particolare, dati $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, consideriamo la palla aperta in $\mathbb{R}^n$, di centro x_0 e raggio r

$$B_r^n(x_0) = \big\{x \in \mathbb{R}^n,\; \|x-x_0\| < r\big\}.$$

Allora

$$\omega_n = \mathcal{L}^n\big(B_1^n(x_0)\big) = \int_{B_1^n(x_0)} 1\; dx,$$

$$m_n\big(B_r^n(x_0)\big) = \omega_n r^n = \mathcal{L}^n\big(B_r^n(x_0)\big) = \int_{B_r^n(x_0)} 1\; dx.$$

Definizione 1.9. *(δ-ricoprimento, $\mathcal{H}^s_\delta$, $\mathcal{H}^s$)*
*Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ e $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. Una famiglia di insiemi $\{A_k\}_{k\in\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{R}^n$, si dice δ-**ricoprimento** di A, se:*

1. *$\mathcal{A}$ è finito o numerabile,*
2. *$diam(A_k) \leq \delta$, $\forall\, k \in \mathcal{A}$,*
3. *$A \subseteq \bigcup\limits_{k\in\mathcal{A}} A_k$.*

Poniamo, per ogni $s \in [0, +\infty)$, il seguente numero reale esteso

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) := \inf\Big\{ \sum_{k\in\mathcal{A}} m_s(A_k), \quad \text{con } \{A_k\}_{k\in\mathcal{A}} \ \delta\text{-ricoprimento di } A \Big\}.$$

Inoltre, definiamo

$$\mathcal{H}^s(A) := \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^s_\delta(A) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta\,.$$

Osservazione 1.2. *L'ultima uguaglianza è giustificata dal fatto che la funzione*

$$\mathcal{H}^s_{(\cdot)}(A) : (0, +\infty) \to [0, +\infty]$$

è monotona decrescente. Infatti, se $\delta_1 < \delta_2$, allora ogni δ_1-ricoprimento di A, è anche un δ_2-ricoprimento di A, quindi

$$\mathcal{H}^s_{\delta_1}(A) \geq \mathcal{H}^s_{\delta_2}(A).$$

Vale il seguente risultato, si veda ad esempio [6].

Teorema 1.3. *(Misura di Hausdorff)*
Per ogni $s \in [0, +\infty)$ e $\delta > 0$, si ha che $\mathcal{H}^s_\delta$ e $\mathcal{H}^s$ sono misure su $\mathbb{R}^n$. Inoltre $\mathcal{H}^s$ è una misura metrica su $\mathbb{R}^n$, rispetto alla distanza Euclidea.
*La funzione $\mathcal{H}^s$ si chiama **misura di Hausdorff** s-dimensionale.*

Osservazione 1.3. *$\mathcal{H}^0$ è la misura discreta "che conta", cioè se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è un insieme finito o numerabile, allora*

$$\mathcal{H}^0(A) = card(A)\,.$$

Infatti, osserviamo preliminarmente che $\omega_0 = 1$. Sia ora $A = \{a\}$, con $a \in \mathbb{R}^n$, allora $\mathcal{H}^0(\{a\}) = 1$. Dalla additività numerabile della misura segue la tesi.

Osservazione 1.4. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, allora*

$$\mathcal{H}^s(A) = 0,\ \forall\, s > n\ .$$

Infatti, consideriamo un cubo $Q \subseteq \mathbb{R}^n$, di lato unitario. Dato $k \in \mathbb{N}$, poiché Q può essere decomposto in k^n cubi di lato $\frac{1}{k}$ e diametro pari a $\frac{\sqrt{n}}{k}$, in particolare si ha

$$\mathcal{H}^s_{\frac{\sqrt{n}}{k}}(Q) \le \sum_{j=1}^{k^n} \omega_s \Big(\frac{\sqrt{n}}{2k}\Big)^s = \omega_s n^{\frac{s}{2}} 2^{-s} k^{n-s}.$$

Ora, se $s > n$, l'ultimo termine è infinitesimo, per $k \to \infty$. Data l'arbitrarietà dei δ-ricoprimenti, si ottiene la tesi.

Proposizione 1.1. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, allora*

$$\mathcal{H}^1(A) = \mathcal{L}^1(A)$$

Dimostrazione. Osserviamo che $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, quindi $\omega_1 = 2$. Siano ora $A \subseteq \mathbb{R}$ e $\delta > 0$, allora ricordando l'Esempio 1.1 si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^1(A) &= \inf\Big\{\sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{diam}(A_k),\ \text{con } \{A_k\}\ \mathit{RL} \text{ di } A\Big\}\\ &\le \inf\Big\{\sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{diam}(A_k),\quad \textit{con}\ \ \{A_k\}\ \ \delta\textit{-ricoprimento di } A\Big\}\\ &= \mathcal{H}^1_\delta(A).\end{aligned}$$

Quindi $\mathcal{L}^1(A) \le \mathcal{H}^1_\delta(A)$, $\forall\, \delta > 0$. Per provare la disuguaglianza opposta poniamo

$$I_j := [j\delta, (j+1)\delta], \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Si ha che $\mathrm{diam}(A_k \cap I_j) \le \delta$, per ogni $A_k \subseteq \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Allora

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mathrm{diam}(A_k \cap I_j) \le \mathrm{diam}(A_k).$$

In questo modo

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^1(A) &= \inf\Big\{\sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{diam}\, A_k,\ \text{con } \{A_k\}\ \mathit{RL} \text{ di } A\Big\}\\ &\ge \inf\Big\{\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mathrm{diam}\,(A_k \cap I_j),\ \text{con } \{A_k\}\ \mathit{RL} \text{ di } A\Big\}\\ &\ge \mathcal{H}^1_\delta(A).\end{aligned}$$

Quindi $\mathcal{L}^1(A) \ge \mathcal{H}^1_\delta(A)$, $\forall\, \delta > 0$. Quindi $\mathcal{L}^1(A) = \mathcal{H}^1(A)$. □

Usando la **disuguaglianza isodiametrica** [1] è possibile generalizzare la precedente Proposizione 1.1, si veda ad esempio [5].

Teorema 1.4. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, allora*

$$\mathcal{H}^n(A) = \mathcal{L}^n(A).$$

Per enunciare le prossime proprietà della misura di Hausdorff, richiamiamo la seguente definizione.

Definizione 1.10. *(Funzione Lipschitziana)*
Siano $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\varphi : D \to \mathbb{R}^m$. Si dice che φ è una ***funzione Lipschitziana****, se esiste una costante $L > 0$, tale che*

$$\|\varphi(u) - \varphi(v)\|_{\mathbb{R}^m} \leq L\|u - v\|_{\mathbb{R}^n}, \quad \forall\, u, v \in D.$$

In questo caso L si chiama costante di Lipschitz di φ.

Vale la seguente proprietà.

Lemma 1.1. *Siano $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\varphi : D \to \mathbb{R}^m$ una funzione Lipschitziana, con costante di Lipschitz L. Poniamo $A = \varphi(D)$. Allora, per ogni $s \geq 0$, si ha*

$$\mathcal{H}^s(A) \leq L^s \mathcal{H}^s(D).$$

Dimostrazione. Siano $\varepsilon > 0$ e $\{D_k\}$ un δ-ricoprimento di D tale che:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \omega_s (r(D_k))^s \leq \mathcal{H}^s_\delta(D) + \varepsilon\,.$$

Si ha, per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{diam}(\varphi(D_k)) &= \sup\big\{\|\varphi(u) - \varphi(v)\|_{\mathbb{R}^m},\, u, v \in D_k\big\} \\
&\leq L \sup\big\{\|u - v\|_{\mathbb{R}^n},\, u, v \in D_k\big\} \\
&= L \operatorname{diam}(D_k).
\end{aligned}$$

Quindi, poiché $\{A_k\} = \{\varphi(D_k)\}$ è un $L\delta$-ricoprimento di A, si ha:

$$\mathcal{H}^s_{L\delta}(A) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \omega_s (r(A_k))^s \leq L^s \sum_{k=1}^{+\infty} \omega_s (r(D_k))^s \leq L^s \big(\mathcal{H}^s_\delta(D) + \varepsilon\big).$$

Passando al limite per $\delta \to 0^+$, per l'arbitrarietà di ε, si ottiene la tesi. $\square$

[1] Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, allora la disuguaglianza isodiametrica afferma che (si veda ad esempio [3])

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \omega_n \,(r(A))^n\,.$$

Inoltre, se nella precedente disuguaglianza vale l'uguaglianza, allora A è una palla, a meno di insiemi di misura di Lebesgue nulla.

In particolare vale il seguente

Lemma 1.2. *Siano $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\varphi : D \to \mathbb{R}^m$ una funzione Lipschitziana. Se $\mathcal{L}^n(D) = 0$, allora $\mathcal{H}^n\big(\varphi(D)\big) = 0$.*

Dimostrazione. Segue direttamente dal Lemma 1.1 e dal Teorema 1.4. □

Vediamo alcune particolari funzione Lipschitziane

Definizione 1.11. *(Dilatazione)*
Sia $\lambda > 0$. Una ***dilatazione*** *in $\mathbb{R}^n$, di ampiezza λ, è una funzione*

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad \varphi(u) = \lambda u.$$

In particolare φ è Lipschitziana, con costante di Lipschitz λ. Inoltre, se $A \subseteq \mathbb{R}^n$, poniamo

$$\lambda A = \big\{\lambda u,\ u \in A\big\}.$$

Definizione 1.12. *(Isometria)*
Una ***isometria*** *in $\mathbb{R}^n$ è una funzione*

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \ \ t.c. \ \ \|\varphi(u) - \varphi(v)\| = \|u - v\|, \quad \forall\, u, v \in \mathbb{R}^n.$$

In particolare φ è Lipschitziana, con costante di Lipschitz uguale ad 1.

Valgono le seguenti proprietà.

Proposizione 1.2. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora, per ogni $s \geq 0$, si ha:*

(i) $\mathcal{H}^s(\lambda A) = \lambda^s \mathcal{H}^s(A), \forall\, \lambda > 0$;

(ii) $\mathcal{H}^s(\varphi(A)) = \mathcal{H}^s(A)$, *con φ isometria in $\mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione. Dimostriamo il punto (i). Poiché la funzione $\varphi(u) = \lambda u$ è Lipschitziana con costante di Lipschitz λ, dal lemma 1.1, si ha

$$\mathcal{H}^s(\lambda A) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s(A) = \lambda^s \mathcal{H}^s\Big(\frac{\lambda A}{\lambda}\Big) \leq \frac{\lambda^s}{\lambda^s} \mathcal{H}^s(\lambda A) = \mathcal{H}^s(\lambda A).$$

Per il punto (ii), se φ è un'isometria in $\mathbb{R}^n$, allora è invertibile e anche φ^{-1} è un'isometria in $\mathbb{R}^n$; poiché entrambe hanno costante di Lipschitz uguale ad 1, dal lemma 1.1, si ha

$$\mathcal{H}^s(\varphi(A)) \leq \mathcal{H}^s(A) = \mathcal{H}^s(\varphi^{-1}(\varphi(A))) \leq \mathcal{H}^s(\varphi(A)).$$

□

Definizione 1.13. *(Jacobiano)*
*Siano $n, m \in \mathbb{N}$, con $n \leq m$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile. Chiamiamo **Jacobiano** di φ, in $u \in \Omega$, il seguente valore non negativo*

$$J_\varphi(u) = \sqrt{\det\Big((\mathrm{Jac}\varphi(u))^T\ \mathrm{Jac}\varphi(u)\Big)},$$

dove $\mathrm{Jac}\varphi$ *denota la matrice Jacobiana di φ.*

Per il calcolo dello Jacobiano, ricordiamo il seguente utile risultato, il quale è un caso particolare della formula di Cauchy-Binet.

Proposizione 1.3. *Siano $n, m \in \mathbb{N}$, con $n \leq m$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile. Allora, per ogni $u \in \Omega$, vale*

$$\big(J_\varphi(u)\big)^2 = \sum_M \big(\det(M)\big)^2,$$

dove la somma è fatta su tutti i possibili minori M, di ordine $n \times n$, della matrice $\mathrm{Jac}\varphi(u)$.

Vale il seguente risultato, si veda ad esempio [1], [3], [6].

Teorema 1.5. *(Formula dell'area)*
Siano $n, m \in \mathbb{N}$, con $n \leq m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme $\mathcal{L}^n$-misurabile e $\varphi : D \to \mathbb{R}^m$ una funzione Lipschitziana e iniettiva. Poniamo $A = \varphi(D)$. Allora A è $\mathcal{H}^n$-misurabile e vale

$$\mathcal{H}^n(A) = \int_D J_\varphi(u)du\ , \tag{1}$$

dove l'integrale a destra è inteso nel senso di Lebesgue.

Osservazione 1.5. *La formula (1) nel precedente teorema è ben posta in virtù del Lemma 1.2 e del Teorema di Rademacher [1]; inoltre ricordiamo che le derivate parziali di una funzione differenziabile sono funzioni misurabili (secondo Lebesgue).*

Osservazione 1.6. *Notiamo esplicitamente che nelle ipotesi del precedente Teorema 1.5, non viene richiesta nessuna condizione di rango sulla matrice* $\mathrm{Jac}\varphi$*; ad esempio per funzioni di classe C^1 si tenga in considerazione il Lemma di Sard [2], insieme al Lemma 1.2.*

[1] Siano $n, m \in \mathbb{N}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ Lipschitziana (anche localmente). Il Teorema di Rademacher afferma che φ è differenziabile quasi ovunque rispetto alla misura di Lebesgue; si veda ad esempio [3].

[2] Siano $n, m \in \mathbb{N}$, con $n \leq m$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $\varphi \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Il Lemma di Sard afferma che (si veda ad esempio [6])

$$\mathcal{H}^n(\varphi(Crit_\varphi)) = 0,$$

dove

$$Crit_\varphi = \big\{u \in \Omega,\ \ \text{t.c.}\ \ J_\varphi(u) = 0\big\}.$$

Esempio 1.2. *(Lunghezza di una curva)*
Siano $m \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Sia $D = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ e $\gamma : D \to \mathbb{R}^m$ una funzione Lipschitziana e iniettiva. Poniamo $A = \gamma(D)$. Allora A è $\mathcal{H}^1$-misurabile e vale

$$\mathcal{H}^1(A) = \int_D J_\gamma(t)dt = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|dt \; . \tag{2}$$

Concludiamo questa sezione introducendo la nozione di dimensione di Hausdorff; dimostriamo preliminarmente alcuni risultati.

Lemma 1.3. *Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $0 \leq s < t < \infty$. Allora si ha:*

(i) $\mathcal{H}^s(A) < +\infty \implies \mathcal{H}^t(A) = 0$.

(ii) $\mathcal{H}^t(A) > 0 \implies \mathcal{H}^s(A) = +\infty$.

Dimostrazione. Proviamo (i). Supponiamo $\mathcal{H}^s(A) < +\infty$. Sia $\varepsilon > 0$, allora esiste un δ-ricoprimento $\{A_k\}$, per cui

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \omega_s(r(A_k))^s \leq \mathcal{H}^s_\delta(A) + \varepsilon \leq \mathcal{H}^s(A) + \varepsilon.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^t_\delta(A) &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \omega_t(r(A_k))^t \\
&= \frac{\omega_t}{\omega_s} 2^{s-t} \sum_{k=1}^{+\infty} \omega_s(r(A_k))^s(\mathrm{diam}(A_k))^{t-s} \\
&\leq \frac{\omega_t}{\omega_s} 2^{s-t} \delta^{t-s}(\mathcal{H}^s(A) + \varepsilon).
\end{aligned}$$

Passando al limite per $\delta \to 0$, si ha che $\mathcal{H}^t(A) = 0$.
Il punto (ii) è ora una diretta conseguenza di (i), ragionando per assurdo. □

Il precedente Lemma giustifica la seguente definizione.

Definizione 1.14. *(Dimensione di Hausdorff)*
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Chiamiamo ***dimensione di Hausdorff*** *di A, il seguente valore*

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) := \inf\big\{s \geq 0, \;\; t.c. \;\; \mathcal{H}^s(A) = 0\big\} = \sup\big\{s \geq 0, \;\; t.c. \;\; \mathcal{H}^s(A) = +\infty\big\}.$$

Osservazione 1.7. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Dall'Osservazione 1.4, si ottiene che $\dim_{\mathcal{H}}(A) \leq n$.*
Sia $s = \dim_{\mathcal{H}}(A)$; allora dal Lemma 1.3, $\mathcal{H}^t(A) = 0$, per ogni $t > s$, mentre $\mathcal{H}^t(A) = +\infty$, per ogni $t < s$.
Notiamo esplicitamente che $\mathcal{H}^s(A)$ può comunque assumere qualsiasi valore tra 0 e $+\infty$ inclusi.

Osservazione 1.8. *Esistono insiemi non vuoti che hanno dimensione di Hausdorff non intera: per una trattazione esaustiva sull'argomento si veda ad esempio [2].*

Esempio 1.3. *(Insieme di Cantor)*
Un esempio di insieme avente dimensione di Hausdorff non intera è l'insieme di Cantor, definito nel modo seguente. Consideriamo una successione di unione di intervalli chiusi $\{C_k\}_{k\geq 0} \subseteq \mathbb{R}$, definita per ricorrenza come segue:

- $C_0 = [0, 1]$;
- $C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, *ottenuto rimuovendo da C_0 l'intervallo aperto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$;*
- $C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$, *ottenuto rimuovendo dal centro di ognuno dei due intervalli che compongono C_1, un intervallo aperto di lunghezza $\left(\frac{1}{3}\right)^2$;*
- *iterando, C_{k+1} si ottiene rimuovendo dal centro di ogni intervallo che compone C_k, un intervallo aperto di lunghezza $(\frac{1}{3})^{k+1}$.*

*Definiamo l'**insieme di Cantor**, $C \subseteq \mathbb{R}$, come $C = \bigcap_{k\geq 0} C_k$.*
Notiamo esplicitamente che C è non vuoto. Infatti, tutti gli estremi degli intervalli che compongono un qualsiasi insieme C_k, appartengono a C.
L'insieme di Cantor è un esempio di insieme frattale auto-simile, cioè un insieme dotato di omotetia interna: intuitivamente, la forma dell'insieme resta invariata a scale diverse. Per l'insieme di Cantor, il fattore di scala dell'omotetia è $\frac{1}{3}$.
Inoltre, l'insieme di Cantor ha misura di Lebesgue nulla, cioè $\mathcal{L}^1(C) = 0$. Infatti, osserviamo che ogni insieme C_k è composto da un'unione disgiunta di 2^k intervalli chiusi, ognuno di lunghezza $\left(\frac{1}{3}\right)^k$. Quindi

$$\mathcal{L}^1(C_k) = \left(\frac{2}{3}\right)^k, \quad \forall\, k \geq 0.$$

La misura di Lebesgue di C allora è

$$\mathcal{L}^1(C) = \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 0.$$

D'altra parte, l'insieme di Cantor ha misura di Hausdorff non intera, in particolare si ha (si veda ad esempio [2])

$$\dim_{\mathcal{H}}(C) = \frac{\log 2}{\log 3} =: s, \quad \mathcal{H}^s(C) = \frac{\omega_s}{2^s}\ .$$

1.3 Richiami sulle varietà

In questa sezione richiamiamo le definizioni e le principali proprietà delle sottovarietà degli spazi Euclidei; per una trattazione completa si vedano ad esempio [4], [5].

Poniamo $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Definizione 1.15. *(Varietà)*
Siano $n, m \in \mathbb{N}$, con $n \leq m$, $k \in \overline{\mathbb{N}}$. Un insieme $M \subseteq \mathbb{R}^m$, si dice ***varietà*** *(o sottovarietà di $\mathbb{R}^m$) di dimensione n e di classe C^k, se per ogni $x_0 \in M$, esistono un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^m$ contenente x_0 ed una funzione $F \in C^k(U; \mathbb{R}^{m-n})$, tale che:*

(i) $M \cap U = \{x \in U, \ \ t.c. \ \ F(x) = 0\}$;

(ii) $\mathrm{rg}\big(\mathrm{Jac}F(x)\big) = m - n, \ \forall\, x \in M \cap U$ *(rango massimo).*

In questo caso F si dice una funzione definente ed $F = 0$ è detta equazione locale, per M.

Esempio 1.4. *Sia $R \in \mathbb{R}$, $R > 0$. Consideriamo*

$$S^n = \big\{x \in \mathbb{R}^{n+1}, \ \ t.c. \ \ \|x\| = R\big\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$

Allora S^n è una varietà di dimensione n e di classe C^∞. In particolare

$$F(x) = \|x\|^2 - R^2 = 0,$$

è un'equazione locale (globale).

Esempio 1.5. *Consideriamo*

$$M = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \ t.c. \ \ x^2 = y\big\} \cup \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \ t.c. \ \ y = -5\big\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Allora M è una varietà di dimensione 1 e di classe C^∞. In particolare

$$F(x,y) = x^2 - y = 0, \qquad G(x,y) = y + 5 = 0,$$

sono equazioni locali.

Esempio 1.6. *(Grafici)*
Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $g \in C^k(\Omega; \mathbb{R}^{m-n})$. Consideriamo

$$M = \big\{(u,v) \in \Omega \times \mathbb{R}^{m-n}, \quad t.c. \quad v = g(u)\big\} = \big\{\big(u, g(u)\big) \in \mathbb{R}^m, \ u \in \Omega\big\} \subseteq \mathbb{R}^m.$$

Allora M è una varietà di dimensione n e di classe C^k. Infatti, siano

$$U = \Omega \times \mathbb{R}^{m-n}, \quad F(u,v) = v - g(u).$$

Si ha $F \in C^k(U; \mathbb{R}^{m-n})$ e

$$M = M \cap U = \{(u,v) \in U, \quad t.c. \quad F(u,v) = 0\}.$$

Inoltre, poiché

$$\mathrm{Jac}F(u,v) = \Big(-\mathrm{Jac}g(u), I_{m-n}\Big), \ \forall\, (u,v) \in U,$$

si ha

$$\mathrm{rg}\big(\mathrm{Jac}F(u,v)\big) = m - n, \ \forall\, (u,v) \in M.$$

Osservazione 1.9. *(Grafici locali)*
Come corollario del Teorema delle funzioni implicite si ha che, per una varietà, la proprietà (globale) dei grafici espressa nell'Esempio 1.6 è sempre vera localmente. Cioè, sia $M \subseteq \mathbb{R}^m$, allora M è una varietà di dimensione n e di classe C^k, se e solo se per ogni $x_0 \in M$, esistono un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^m$ contenente x_0, un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ed una funzione $g \in C^k(\Omega; \mathbb{R}^{m-n})$, tale che:

$$M \cap U = \big\{\big(u, g(u)\big) \in \mathbb{R}^m, \ u \in \Omega\big\}.$$

In questo caso, l'equazione locale è data da

$$F(u,v) = v - g(u) = 0.$$

Definizione 1.16. *(Parametrizzazione)*
Siano $n, m \in \mathbb{N}$, con $n \leq m$, $k \in \overline{\mathbb{N}}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $M \subseteq \mathbb{R}^m$. Una funzione $\varphi \in C^k(\Omega; \mathbb{R}^m)$, iniettiva, si dice ***parametrizzazione*** *di M, di classe C^k, se*

(i) $M = \varphi(\Omega)$;

(ii) $\mathrm{rg}\big(\mathrm{Jac}\varphi(u)\big) = n, \ \forall\, u \in \Omega$ *(rango massimo).*

Esempio 1.7. *(Parametrizzazione cartesiana)*
Siano $n \in \mathbb{N}$, $k \in \overline{\mathbb{N}}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $g \in C^k(\Omega;\mathbb{R})$. Allora la funzione $\varphi \in C^k(\Omega;\mathbb{R}^{n+1})$ definita da

$$\varphi(u) = \big(u, g(u)\big),$$

*si chiama **parametrizzazione cartesiana** di $\varphi(\Omega)$, di classe C^k. Notiamo esplicitamente che φ è iniettiva ed inoltre vale, per ogni $u \in \Omega$ (si veda la proposizione 1.3)*

$$\mathrm{Jac}\varphi(u) = \begin{pmatrix} I_n \\ \nabla g(u) \end{pmatrix}, \qquad J_\varphi(u) = \sqrt{1 + \|\nabla g(u)\|^2}\ .$$

Vale il seguente risultato, conseguenza del Teorema di invertibilità locale.

Teorema 1.6. *Siano $n, m \in \mathbb{N}$, con $n \leq m$, $k \in \overline{\mathbb{N}}$. Un insieme $M \subseteq \mathbb{R}^m$ è una varietà di dimensione n e di classe C^k, se e solo se per ogni $x_0 \in M$, esistono un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^m$ contenente x_0, un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\varphi \in C^k(\Omega;\mathbb{R}^m)$, parametrizzazione di $M \cap U$, tale che φ sia un omeomorfismo sull'immagine, cioé $\varphi^{-1} \in C(M \cap U;\Omega)$.*
In questo caso la coppia $(M \cap U, \varphi^{-1})$ si chiama carta locale.

Proposizione 1.4. *Siano $n, m \in \mathbb{N}$, con $n \leq m$, $k \in \overline{\mathbb{N}}$ ed $M \subseteq \mathbb{R}^m$ una varietà di dimensione n e di classe C^k. Dato $x_0 \in M$, siano $U, V \subseteq \mathbb{R}^m$ aperti contenenti x_0 e $\Omega, \Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ aperti. Consideriamo $\varphi \in C^k(\Omega;\mathbb{R}^m)$ parametrizzazione di $M \cap U$ e $\psi \in C^k(\Lambda;\mathbb{R}^m)$ parametrizzazione di $M \cap V$. Allora la funzione*

$$\psi^{-1}\varphi : \varphi^{-1}\big(M \cap (U \cap V)\big) \to \psi^{-1}\big(M \cap (U \cap V)\big)$$

è un diffeomorfismo locale, di classe C^k.

Osservazione 1.10. *Siano $n, m \in \mathbb{N}$, con $n \leq m$, $k \in \overline{\mathbb{N}}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $\varphi \in C^k(\Omega;\mathbb{R}^m)$ parametrizzazione di $\varphi(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^m$. Allora, per ogni $u_0 \in \Omega$, esiste un aperto $\Lambda \subseteq \Omega$ contenente u_0, tale che $\varphi(\Lambda) \subseteq \mathbb{R}^m$ è una varietà di dimensione n e di classe C^k.*

Esempio 1.8. *Sia $I = \big(0, \frac{3}{2}\pi\big) \subseteq \mathbb{R}$. Consideriamo la seguente funzione*

$$\varphi : I \to \mathbb{R}^2, \qquad \varphi(t) = \big(\cos(t), \cos(t)\sin(t)\big)\ .$$

Si ha $\varphi \in C^\infty(I;\mathbb{R}^2)$, iniettiva, con

$$\varphi'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ 1 - 2\sin^2(t) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall\, t \in I\ .$$

Quindi φ è una parametrizzazione di $M = \varphi(I)$, di classe C^∞. Notiamo esplicitamente che M non è una varietà; comunque, per ogni $t_0 \in I$, esiste un aperto $J \subseteq I$ contenente t_0, tale che $\varphi(J)$ è una varietà di dimensione 1 e di classe C^∞.

Osservazione 1.11. *Siano* $n, m \in \mathbb{N}$, *con* $n \leq m$, $k \in \overline{\mathbb{N}}$ *ed* $M \subseteq \mathbb{R}^m$ *una varietà compatta di dimensione* n *e di classe* C^k. *Allora è possibile determinare un suo ricoprimento aperto finito* $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$, $I = \{1, \ldots, q\}$, $q \in \mathbb{N}$, *con aperti* $\Omega_i \subseteq \mathbb{R}^n$ *e parametrizzazioni* $\varphi_i \in C^k(\Omega_i; \mathbb{R}^m)$, *tali che la famiglia* $\{\varphi_i(\Omega_i)\}_{i \in I}$ *sia un ricoprimento finito di* M, *dove* $\varphi_i(\Omega_i) = A_i \cap M$.

Definizione 1.17. *(Spazio tangente)*
Siano $n, m \in \mathbb{N}$, *con* $n \leq m$, $k \in \overline{\mathbb{N}}$ *ed* $M \subseteq \mathbb{R}^m$ *una varietà di dimensione* n *e di classe* C^k. *Dato* $x_0 \in M$, *allora un elemento* $\tau \in \mathbb{R}^m$, *si dice* ***vettore tangente*** *ad* M, *nel punto* x_0, *se esistono* $\varepsilon > 0$, *ed una funzione* $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^m$, *differenziabile in* $t_0 = 0$, *tale che:*

(i) $\gamma(t) \in M, \quad \forall\, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$;

(ii) $\gamma(0) = x_0$;

(iii) $\gamma'(0) = \tau$.

L'insieme di tutti i vettori tangenti ad M, *nel punto* x_0, *si chiama* ***spazio tangente*** *ad* M, *in* x_0, *e si denota con* $T_{x_0}M$.

La terminologia di "spazio" è giustificata dal seguente risultato.

Proposizione 1.5. *Siano* $n, m \in \mathbb{N}$, *con* $n \leq m$, $k \in \overline{\mathbb{N}}$ *ed* $M \subseteq \mathbb{R}^m$ *una varietà di dimensione* n *e di classe* C^k. *Dati* $x_0 \in M$ *ed* $F = 0$ *un'equazione locale, allora lo spazio tangente ad* M, *in* x_0, *è dato da*

$$T_{x_0}M = \ker\left(d_{x_0}F\right) = \left\{\tau \in \mathbb{R}^m, \ \ t.c. \ \ d_{x_0}F(\tau) = 0\right\}.$$

In particolare $T_{x_0}M$ *è un sottospazio vettoriale di dimensione* n.

Osservazione 1.12. *Siano* $n, m \in \mathbb{N}$, *con* $n \leq m$, $k \in \overline{\mathbb{N}}$ *ed* $M \subseteq \mathbb{R}^m$ *una varietà di dimensione* n *e di classe* C^k. *Dato* $x_0 \in M$, *consideriamo* $\varphi \in C^k(\Omega; \mathbb{R}^m)$ *parametrizzazione di* $M \cap U$, *dove* $U \subseteq \mathbb{R}^m$ *è un aperto contenente* x_0 *e* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *aperto. Poniamo* $x_0 = \varphi(u_0)$, *allora* $T_{x_0}M$ *è generato dalle colonne della matrice*

$$\mathrm{Jac}\varphi(u_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}(u_0) & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u_n}(u_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial u_1}(u_0) & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial u_n}(u_0) \end{pmatrix},$$

cioè

$$T_{x_0}M = span\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}(u_0), \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial u_n}(u_0)\right\} ,$$

dove abbiamo posto

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_j}(u) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u_j}(u) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial u_j}(u) \end{pmatrix}, \quad j = i, \dots, n ,$$

con

$$u = (u_1, \dots, u_n), \quad \varphi(u_1, \dots, u_n) = \big(\varphi_1(u), \dots, \varphi_n(u)\big) .$$

Definizione 1.18. *(Spazio normale)*
Siano $n, m \in \mathbb{N}$, con $n \leq m$, $k \in \overline{\mathbb{N}}$ ed $M \subseteq \mathbb{R}^m$ una varietà di dimensione n e di classe C^k. Dato $x_0 \in M$, lo ***spazio normale*** *ad M, in x_0, è dato da*

$$N_{x_0}M = \big(T_{x_0}M\big)^{\perp} = \big\{v \in \mathbb{R}^m, \ \ t.c. \ \ \langle v, \tau\rangle = 0, \ \forall\, \tau \in T_{x_0}M\big\} .$$

In particolare $N_{x_0}M$ è un sottospazio vettoriale di dimensione $(m-n)$.

Osservazione 1.13. *Siano $n, m \in \mathbb{N}$, con $n \leq m$, $k \in \overline{\mathbb{N}}$ ed $M \subseteq \mathbb{R}^m$ una varietà di dimensione n e di classe C^k. Dati $x_0 \in M$ ed $F = 0$ un'equazione locale, allora lo spazio normale ad M, in x_0, è generato dalle righe della matrice $\mathrm{Jac}F(x_0)$, cioè se la funzione definente si scrive $F = (F_1, \dots, F_{m-n})$, allora*

$$N_{x_0}M = span\big\{\nabla F_1(x_0), \dots, \nabla F_{m-n}(x_0)\big\} .$$

1.4 Integrale di Hausdorff

Ricordando la Formula dell'area, Teorema 1.5, diamo la seguente definizione.

Definizione 1.19. *(Integrale di Hausdorff)*
*Siano $n, m \in \mathbb{N}$, con $n \leq m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme $\mathcal{L}^n$-misurabile e $\varphi : D \to \mathbb{R}^m$ una funzione Lipschitziana e iniettiva. Sia ora $f \in C(A; \mathbb{R})$, dove $A = \varphi(D)$, allora definiamo l'**integrale di Hausdorff** di f su A, il seguente valore reale esteso*

$$\int_A f \, dH^n = \int_D f(\varphi(u)) J_\varphi(u) du \; ,$$

In particolare, se $f \equiv 1$, si ritrova

$$\int_A dH^n = \int_D J_\varphi(u) du = \mathcal{H}^n(A) \; .$$

Osservazione 1.14. *Se $n = m$, la precedente formula estende il teorema del cambiamento di variabile.*

Osservazione 1.15. *Tenendo in considerazione l'Osservazione 1.3, possiamo definire l'integrale di Hausdorff "che valuta" rispetto alla misura $\mathcal{H}^0$ discreta "che conta". Cioè, se $A = \bigcup_{k \in \mathcal{I}} \{a_k\} \subseteq \mathbb{R}^m$, con $\mathcal{I}$ finito o numerabile e $f : A \to \mathbb{R}$, allora poniamo*

$$\int_A f \, dH^0 = \sum_{k \in \mathcal{I}} f(a_k) \; ,$$

In particolare, se $f \equiv 1$, si ritrova

$$\int_A dH^0 = \mathcal{H}^0(A) = card(A) \; .$$

Esempio 1.9. *(Sfera)*
Sia $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Consideriamo

$$S^2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad t.c. \quad \|(x, y, z)\| = r \right\} \subseteq \mathbb{R}^3 \; .$$

Si ha che

$$\mathcal{H}^2(S^2) = 4\pi r^2 \; .$$

Infatti, consideriamo la funzione $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^3)$, data da

$$\varphi(\theta,\alpha) = \big(r\cos(\alpha)\cos(\theta), r\cos(\alpha)\sin(\theta), r\sin(\alpha)\big) \ .$$

Poniamo ora

$$\Omega = \big(0, 2\pi\big) \times \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big) \subseteq \mathbb{R}^2 \ .$$

Si ha $S^2 = \varphi\big(\overline{\Omega}\big)$; inoltre, poiché $\mathcal{L}^2\big(\mathrm{Fr}(\Omega)\big) = 0$, dal Lemma 1.2 si ha $\mathcal{H}^2\big(\varphi(\mathrm{Fr}(\Omega))\big) = 0$. Quindi, visto che

$$S^2 = \varphi\big(\Omega\big) \cup \varphi\big(\mathrm{Fr}(\Omega)\big) \ ,$$

allora vale

$$\mathcal{H}^2(S^2) = \mathcal{H}^2(\varphi\big(\Omega\big)) \ .$$

Poiché φ è iniettiva su Ω, dalla Definizione 1.19, si ottiene allora

$$\mathcal{H}^2(S^2) = \int_\Omega J_\varphi(\theta,\alpha) d\theta d\alpha = 4\pi r^2 \ .$$

Esempio 1.10. *(Cilindro)*
Siano $r, a \in \mathbb{R}$, $r > 0$, $a > 0$. Consideriamo

$$C = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ \ t.c. \ \ \|(x,y)\| = r, \ z \in [0,a]\big\} \subseteq \mathbb{R}^3 \ .$$

Si ha che

$$\mathcal{H}^2(C) = 2\pi r a \ .$$

Infatti, consideriamo la funzione $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^3)$, data da

$$\varphi(\theta,h) = \big(r\cos(\theta), r\sin(\theta), h\big) \ .$$

Poniamo ora

$$\Omega = \big(0, 2\pi\big) \times \big(0, a\big) \subseteq \mathbb{R}^2 \ .$$

Si ha $C = \varphi\big(\overline{\Omega}\big)$; inoltre, poiché $\mathcal{L}^2\big(\mathrm{Fr}(\Omega)\big) = 0$, dal Lemma 1.2 si ha $\mathcal{H}^2\big(\varphi(\mathrm{Fr}(\Omega))\big) = 0$. Quindi, visto che

$$C = \varphi\big(\Omega\big) \cup \varphi\big(\mathrm{Fr}(\Omega)\big) \ ,$$

allora vale

$$\mathcal{H}^2(C) = \mathcal{H}^2(\varphi\big(\Omega\big)) \ .$$

Poiché φ è iniettiva su Ω, dalla Definizione 1.19, si ottiene allora

$$\mathcal{H}^2(C) = \int_\Omega J_\varphi(\theta,h) d\theta dh = 2\pi r a \ .$$

Esempio 1.11. *(Toro)*
Siano $r, R \in \mathbb{R}$, $R > r > 0$. Consideriamo

$$T = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \;\; t.c. \;\; \big(R - \|(x, y)\|\big)^2 + z^2 = r^2\right\} \subseteq \mathbb{R}^3 .$$

Si ha che

$$\mathcal{H}^2(C) = 4\pi^2 rR .$$

Infatti, consideriamo la funzione $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^3)$, data da

$$\varphi(t, \theta) = \big((R + r\cos(t))\cos(\theta), (R + r\cos(t))\sin(\theta), r\sin(t)\big) .$$

Poniamo ora

$$\Omega = \big(0, 2\pi\big) \times \big(0, 2\pi\big) \subseteq \mathbb{R}^2 .$$

Si ha $T = \varphi\big(\overline{\Omega}\big)$; inoltre, poiché $\mathcal{L}^2\big(\mathrm{Fr}(\Omega)\big) = 0$, dal Lemma 1.2 si ha $\mathcal{H}^2\big(\varphi(\mathrm{Fr}(\Omega))\big) = 0$. Quindi, visto che

$$T = \varphi\big(\Omega\big) \cup \varphi\big(\mathrm{Fr}(\Omega)\big) ,$$

allora vale

$$\mathcal{H}^2(T) = \mathcal{H}^2(\varphi\big(\Omega)\big) .$$

Poiché φ è iniettiva su Ω, dalla Definizione 1.19, si ottiene allora

$$\mathcal{H}^2(T) = \int_\Omega J_\varphi(t, \theta) dt d\theta = 4\pi^2 rR .$$

Esempio 1.12. *(Cono)*
Sia $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Consideriamo

$$C = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \;\; t.c. \;\; \|(x, y)\| = z \leq r\right\} \subseteq \mathbb{R}^3 .$$

Si ha che

$$\mathcal{H}^2(C) = \sqrt{2}\pi r^2 .$$

Infatti, consideriamo la funzione data da

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad \varphi(x, y) = \big(x, y, g(x, y)\big) , \qquad g(x, y) = \|(x, y)\| .$$

Osserviamo esplicitamente che φ è Lipschitziana. Poniamo ora

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \;\; t.c. \;\; 0 < \|(x, y)\| < r\right\} \subseteq \mathbb{R}^2 .$$

Si ha $C = \varphi\big(\overline{\Omega}\big)$; inoltre, poiché $\mathcal{L}^2\big(\mathrm{Fr}(\Omega)\big) = 0$, dal Lemma 1.2 si ha $\mathcal{H}^2\big(\varphi(\mathrm{Fr}(\Omega))\big) = 0$. Quindi, visto che

$$C = \varphi\big(\Omega\big) \cup \varphi\big(\mathrm{Fr}(\Omega)\big) ,$$

allora vale

$$\mathcal{H}^2(C) = \mathcal{H}^2(\varphi(\Omega)) \ .$$

Poiché φ è di classe C^∞ e iniettiva su Ω, dalla Definizione 1.19, si ottiene allora

$$\mathcal{H}^2(C) = \int_\Omega J_\varphi(x,y)dxdy = \sqrt{2}\pi r^2 \ .$$

Per estendere la definizione di integrale di Hausdorff alle varietà, introduciamo le seguenti definizioni e dimostriamo alcuni lemmi preliminari.

Definizione 1.20. *(Supporto)*
Sia $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Chiamiamo ***supporto*** *di f, l'insieme*

$$\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega, \ \ t.c. \ , \ f(x) \neq 0\}}.$$

Definizione 1.21. *(Partizione dell'unità)*
Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un compatto e sia $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ un suo ricoprimento aperto finito, dove $I = \{1, \dots, q\}$, $q \in \mathbb{N}$. Una famiglia di funzioni reali $\{\eta_i\}_{i\in I}$, con $\eta_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, si dice ***partizione dell'unità****, subordinata ad $\mathcal{A}$, se:*

(i) $\mathrm{supp}(\eta_i) \subseteq A_i \ , \quad \forall\, i \in I \ ;$

(ii) $0 \le \eta_i \le 1 \ , \quad \forall\, i \in I \ ;$

(iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{q} \eta_i \equiv 1$, *su un aperto contenente K.*

Lemma 1.4. *Siano $K \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^n$, con K compatto e V aperto limitato. Allora esiste $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ tale che:*

(i) $0 \le h(x) \le 1$, *per ogni $x \in \mathbb{R}^n$;*

(ii) $\mathrm{supp}(h) \subseteq V$;

(iii) $h \equiv 1$, *su un aperto contenente K.*

Dimostrazione. Iniziamo mostrando che per ogni $r > 0$, esiste $\varphi_r \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ tale che:

(a) $\varphi_r \ge 0$;

(b) $\mathrm{supp}(\varphi_r) \subseteq \overline{B_r(0)}$;

(c) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_r(x)\, dx = 1$;

dove

$$B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| < r\}.$$

Infatti, sia $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ una funzione tale che

$$\begin{cases} f(x) > 0, & \text{se } x \in B_1(0), \\ f(x) = 0, & \text{se } x \notin B_1(0). \end{cases}$$

Ad esempio,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}}, & \text{se } x \in B_1(0), \\ 0, & \text{se } x \notin B_1(0). \end{cases}$$

Allora

$$\operatorname{supp}(f) \subseteq \overline{B_1(0)},$$

e ponendo $\varphi_1 = \dfrac{1}{c} f$, dove

$$c = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \int_{B_1(0)} f(x)\, dx,$$

si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_1(x)\, dx = 1\ .$$

Definendo

$$\varphi_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad \varphi_r(x) = \frac{1}{r^n} \varphi_1\left(\frac{x}{r}\right)\ ,$$

si ha che le proprietà $(a), (b), (c)$ sono verificate.
Sia ora $r > 0$ tale che

$$\operatorname{dist}(K, \operatorname{Fr}(V)) = 4r$$

e definiamo i seguenti insiemi:

$$\begin{aligned} V_r &= \{x \in \mathbb{R}^n,\ \operatorname{dist}(x, K) < r\}, \\ K_{2r} &= \{x \in \mathbb{R}^n,\ \operatorname{dist}(x, K) \leq 2r\}, \\ K_{3r} &= \{x \in \mathbb{R}^n,\ \operatorname{dist}(x, K) \leq 3r\}. \end{aligned}$$

In questo modo

$$K \subseteq V_r \subseteq K_{2r} \subseteq K_{3r} \subseteq V,$$

con K_{2r}, K_{3r} compatti e V_r aperto. Poniamo

$$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad h(x) = \int_{K_{2r}} \varphi_r(y - x)\, dy\ .$$

Si ha che $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ e $h \geq 0$. Inoltre, poiché per ogni $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\operatorname{supp}\big(\varphi_r(\cdot - x)\big) \subseteq \overline{B_r(x)},$$

vale

$$h(x) = \int_{K_{2r}\cap B_r(x)} \varphi_r(y-x)\, dy \leq \int_{B_r(x)} \varphi_r(y-x)\, dy = 1, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n\,,$$

quindi la (i) è verificata. Ora, se $h(x) \neq 0$, allora $K_{2r} \cap B_r(x) \neq \emptyset$, pertanto

$$\mathrm{supp}(h) \subseteq K_{3r} \subseteq V,$$

così anche la (ii) è verificata. Infine, se $x \in V_r$, si ottiene

$$K_{2r} \cap B_r(x) = B_r(x),$$

da cui $h(x) = 1$, mostrando la proprietà (iii). $\square$

Lemma 1.5. *Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un compatto e sia $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ un suo ricoprimento aperto finito, dove $I = \{1,\dots,q\}$, $q \in \mathbb{N}$. Allora esiste una partizione dell'unità subordinata ad $\mathcal{A}$.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto finito del compatto $K \subseteq \mathbb{R}^n$, dove $I = \{1,\dots,q\}$, $q \in \mathbb{N}$. Poiché per ogni $\tilde{x} \in K$, esiste $i \in I$ tale che $\tilde{x} \in A_i$, allora esiste $\tilde{r} > 0$ tale che $\overline{B_{\tilde{r}}(\tilde{x})} \subseteq A_i$. In questo modo, la famiglia $\{B_{\tilde{r}}(\tilde{x})\}_{\tilde{x}\in K}$ è un ricoprimento aperto di K, ma poiché K è compatto esistono $p \in \mathbb{N}$, $x_1,\dots,x_p \in K$, $r_1,\dots,r_p \in \mathbb{R}$ positivi, tali che $\mathcal{B} = \{B_\ell\}_{\ell\in L}$ sia un ricoprimento aperto finito di $K \subseteq \mathbb{R}^n$, dove $B_\ell = B_{r_\ell}(x_\ell)$ e $L = \{1,\dots,p\}$. Ponendo ora $V = \bigcup_{\ell\in L} B_\ell$, si ha che V è un aperto limitato e $K \subseteq V$. Sia adesso $\psi_\ell \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ una funzione tale che, per ogni $\ell \in L$

$$\begin{cases} \psi_\ell(x) > 0, & \text{se } x \in B_\ell, \\ \psi_\ell(x) = 0, & \text{se } x \notin B_\ell. \end{cases}$$

Ad esempio,

$$\psi_\ell(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{r_\ell^2 - \|x-x_\ell\|^2}}, & \text{se } x \in B_\ell, \\ 0, & \text{se } x \notin B_\ell. \end{cases}$$

Osserviamo che

$$\Psi(x) := \sum_{\ell=1}^{p} \psi_\ell(x) > 0, \quad \forall\, x \in V.$$

Sia ora $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ una funzione data dal Lemma 1.4 e definiamo, per ogni $\ell \in L$

$$\widetilde{\eta}_\ell(x) = \begin{cases} h(x)\dfrac{\psi_\ell(x)}{\Psi(x)}, & \text{se } x \in V, \\ 0, & \text{se } x \notin V. \end{cases}$$

In questo modo la famiglia $\{\widetilde{\eta}_\ell\}_{\ell\in L}$ soddisfa le proprietà $(ii), (iii)$ della Definizione 1.21, inoltre

$$\forall\, \ell \in L,\ \exists\, i \in I \ \text{ t.c. } \ \mathrm{supp}(\widetilde{\eta}_\ell) \subseteq A_i\,.$$

Adesso, poiché per ogni $i \in I$, esistono un numero finito di funzioni della famiglia $\{\widetilde{\eta}_\ell\}_{\ell \in L}$ il cui supporto è contenuto in A_i, definiamo

$$L_1 = \{\ell \in L \ , \ \text{t.c.} \ \ , \text{supp}(\widetilde{\eta}_\ell) \subseteq A_1\}$$

$$L_i = \{\ell \in L \ , \ \text{t.c.} \ \ , \text{supp}(\widetilde{\eta}_\ell) \subseteq A_i\} \setminus (L_1 \cup \ldots \cup L_{i-1}) \ , \ i = 2, \ldots q \ .$$

Poniamo allora

$$\eta_i = \sum_{\ell \in L_i} \widetilde{\eta}_\ell \ , \quad \forall \, i \in I \ .$$

In questo modo si ha che la famiglia $\{\eta_i\}_{i \in I}$ soddisfa le proprietà $(i), (ii), (iii)$ della Definizione 1.21. □

Tenendo in considerazione l'Osservazione 1.11 e il Lemma 1.5, diamo ora la seguente definizione.

Definizione 1.22. *(Integrale di Hausdorff su varietà)*
Siano $n, m \in \mathbb{N}$, con $n \leq m$, $k \in \overline{\mathbb{N}}$ ed $M \subseteq \mathbb{R}^m$ una varietà compatta di dimensione n e di classe C^k. Dato un suo ricoprimento aperto finito $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$, con $I = \{1, \ldots, q\}$, $q \in \mathbb{N}$ e tale che la famiglia $\{A_i \cap M\}_{i \in I}$ sia un ricoprimento finito di M come nell'Osservazione 1.11, consideriamo $\{\eta_i\}_{i \in I}$, una partizione dell'unità subordinata ad $\mathcal{A}$. Sia ora $f \in C(M; \mathbb{R})$, allora definiamo l'integrale di Hausdorff di f su M, il seguente valore reale

$$\int_M f \, dH^n = \int_M \sum_{i=1}^q \eta_i f \, dH^n = \sum_{i=1}^q \int_{A_i \cap M} \eta_i f \, dH^n \ .$$

Osservazione 1.16. *In particolare, si dimostra che la definizione non dipende dalla scelta del ricoprimento (quindi dalle parametrizzazioni) o dalla partizione dell'unità.*

1.5 Teorema della divergenza

Iniziamo dando la seguente definizione.

Definizione 1.23. *(Aperto regolare)*
*Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, aperto, con $n \geq 2$. Allora Ω si dice **aperto regolare**, se:*

(i) Ω *è limitato;*

(ii) $\Omega = \mathrm{Int}\left(\overline{\Omega}\right)$*;*

(iii) $\mathrm{Fr}(\Omega)$ *è una varietà di dimensione $(n-1)$ e di classe almeno C^1.*

In questo caso, $\mathrm{Fr}(\Omega)$ *si chiama **bordo** di Ω e si indica con $\partial\Omega$.*

Osservazione 1.17. *Nel caso $n = 1$, possiamo definire un aperto regolare $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ semplicemente come una unione finita di intervalli limitati e aperti del tipo*

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^{k} (a_j, b_j) \ ,$$

con $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $a_j < b_j < a_{j+1} < b_{j+1}$, per $j = 1, \ldots, k-1$, con $k \in \mathbb{N}$. In questo caso il bordo di Ω è costituito dagli estremi degli intervalli, $\partial\Omega = \{a_j, b_j,\ j = 1, \ldots k\}$ (pensato come una "varietà di dimensione 0").

Esempio 1.13. *Sia $n \geq 2$. Consideriamo*

$$\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^n, \quad t.c. \quad \|x\| < 2,\ \|x\| \neq 1\right\}$$

Si ha che Ω è aperto, limitato, ma non è regolare in quanto

$$\Omega \neq \mathrm{Int}\left(\overline{\Omega}\right) \ .$$

Osserviamo che $\mathrm{Fr}(\Omega)$ *è una varietà di dimensione $(n-1)$ e di classe C^∞ (composta da due componenti connesse).*

Esempio 1.14. *Sia $n \geq 2$. Consideriamo*

$$\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^n, \quad t.c. \quad 1 < \|x\| < 2\right\}$$

Si ha che Ω è un aperto regolare; in particolare $\partial\Omega$ è una varietà di dimensione $(n-1)$ e di classe C^∞ (composta da due componenti connesse).

Esempio 1.15. *(Insiemi di sottolivello)*
Sia $n \geq 2$. Data $F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, consideriamo il seguente ***insieme di sottolivello***

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^n, \quad t.c. \quad F(x) < 0 \right\} .$$

Se Ω è limitato ed inoltre

$$\nabla F(x) \neq 0, \ \forall \, x \in \mathbb{R}^n, \quad t.c. \quad F(x) = 0 \ ,$$

allora Ω è un aperto regolare ed in particolare

$$\partial\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^n, \quad t.c. \quad F(x) = 0 \right\} .$$

Infatti, poniamo

$$Z = \left\{ x \in \mathbb{R}^n, \quad t.c. \quad F(x) = 0 \right\} ,$$

vogliamo mostrare prima di tutto che $\mathrm{Fr}(\Omega) = Z$.
Sia allora $x_0 \in \mathrm{Fr}(\Omega)$ e supponiamo per assurdo $x_0 \notin Z$, cioè $F(x_0) > 0$ oppure $F(x_0) < 0$. Dal teorema della permanenza del segno avremmo $x_0 \notin \mathrm{Fr}(\Omega)$; quindi $\mathrm{Fr}(\Omega) \subseteq Z$.
Viceversa, sia $x_0 \in Z$ e poniamo

$$\nu = \frac{\nabla F(x_0)}{\|\nabla F(x_0)\|} \ ,$$

che è ben definito in quanto $\nabla F(x_0) \neq 0$. Sia ora $x = x_0 + t\nu$, con $t \in \mathbb{R}$, allora dal teorema del valor medio di Lagrange si ha

$$\exists \, c \in [x_0, x], \quad t.c. \quad F(x) - F(x_0) = \langle \nabla F(c), x - x_0 \rangle \ .$$

Poiché $x_0 \in Z$, cioè $F(x_0) = 0$, si ottiene :

$$F(x) = t \Big\langle \nabla F(c), \frac{\nabla F(x_0)}{\|\nabla F(x_0)\|} \Big\rangle \ .$$

Osserviamo che

$$\Big\langle \nabla F(c), \frac{\nabla F(x_0)}{\|\nabla F(x_0)\|} \Big\rangle \xrightarrow[c \to x_0]{} \|\nabla F(x_0)\| > 0 \ ,$$

quindi, dal teorema della permanenza del segno, esiste $\delta > 0$ tale che:

$$\begin{cases} F(x) < 0, & \forall \, t \in (-\delta, 0), \\ F(x) > 0, & \forall \, t \in (0, \delta), \end{cases} \tag{3}$$

cioè

$$\begin{cases} x \in \Omega, & \forall \, t \in (-\delta, 0), \\ x \notin \Omega, & \forall \, t \in (0, \delta). \end{cases}$$

In altri termini $x_0 \in \mathrm{Fr}(\Omega)$*; quindi* $Z \subseteq \mathrm{Fr}(\Omega)$*. Resta così provato che* $\mathrm{Fr}(\Omega) = Z$*.*
Ora, poiché Z *è una* $(n-1)$*-varietà di classe* C^1*, resta da mostrare che* $\Omega = \mathrm{Int}\left(\overline{\Omega}\right)$*.*
Dalle condizioni (3), si ha anche

$$\begin{cases} x \in \overline{\Omega} & \forall\, t \in (-\delta, 0) \\ x \notin \overline{\Omega} & \forall\, t \in (0, \delta) \end{cases}$$

quindi $Z = \mathrm{Fr}(\Omega) = \mathrm{Fr}(\overline{\Omega})$*. Inoltre valgono le seguenti relazioni*

$$\begin{aligned} \overline{\Omega} &= \mathrm{Int}(\Omega) \cup \mathrm{Fr}(\Omega) \\ \overline{(\overline{\Omega})} = \overline{\Omega} &= \mathrm{Int}(\overline{\Omega}) \cup \mathrm{Fr}(\overline{\Omega}), \end{aligned}$$

dove le precedenti unioni sono disgiunte. Allora, poiché Ω *è aperto, si ha*

$$\Omega = \mathrm{Int}(\Omega) = \mathrm{Int}\left(\overline{\Omega}\right) .$$

In conclusione Ω *è un aperto regolare ed in particolare*

$$\partial\Omega = Z = \left\{x \in \mathbb{R}^n, \ \ t.c. \ \ F(x) = 0\right\} .$$

Ovviamente, cambiando segno alla funzione, si ottengono insiemi di sopralivello.

Notazione 1.1. *Sia* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$*. Denotiamo con* $\hat{x}_j \in \mathbb{R}^{n-1}$*, il vettore ottenuto da* x *eliminando la* j*-esima componente, in particolare*

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 =& (x_2, \ldots, x_n) \, , \\ \hat{x}_j =& (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n), \quad 2 \le j \le n-1 \\ \hat{x}_n =& (x_1, \ldots, x_{n-1}) \, . \end{aligned}$$

Inoltre, con abuso di notazione, indicheremo per ogni $j = 1, \ldots, n$

$$x = (\hat{x}_j, x_j) \, .$$

Osservazione 1.18. *Sia* $n \ge 2$*. Dato* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *aperto regolare, allora la proprietà (globale) espressa nell'Esempio 1.15, è sempre vera localmente, cioé: per ogni* $x_0 \in \partial\Omega$*, esistono un aperto* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *contenente* x_0 *ed una funzione* $F \in C^1(U;\mathbb{R})$*, tale che*

$$\Omega \cap U = \{x \in U, \ \ t.c. \ \ F(x) < 0\},$$

oppure

$$\Omega \cap U = \{x \in U, \ \ t.c. \ \ F(x) > 0\},$$

con $\nabla F(x) \neq 0$, *se* $F(x) = 0$.
Infatti, poiché $\partial\Omega$ *è una varietà di dimensione* $(n-1)$ *e di classe almeno* C^1, *per l'Osservazione 1.9, allora* $\partial\Omega$ *è localmente grafico. In particolare esistono un aperto* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *contenente* x_0, *che possiamo supporre del tipo*

$$U = V \times W \subseteq \mathbb{R}^n, \quad V \subseteq \mathbb{R}^{n-1},\ W \subseteq \mathbb{R},$$

con V, W *aperti limitati, ed una funzione* $g \in C^1(V; W)$, *tale che:*

$$\partial\Omega \cap U = \big\{(\hat{x}_j, x_j) \in V \times W,\ \ t.c.\ \ x_j = g(\hat{x}_j)\big\},$$

per qualche $j = 1, \ldots, n$. *Consideriamo ora la funzione*

$$F(x) = F(\hat{x}_j, x_j) = x_j - g(\hat{x}_j)\ ,$$

in modo tale che

$$\partial\Omega \cap U = \big\{(\hat{x}_j, x_j) \in V \times W,\ \ t.c.\ \ F(\hat{x}_j, x_j) = x_j - g(\hat{x}_j) = 0\big\};$$

inoltre

$$\nabla F(x) = \big(-\nabla g(\hat{x}_j), 1\big) \neq 0, \quad \forall x \in \partial\Omega \cap U.$$

Definiamo ora i due seguenti aperti limitati:

$$\begin{aligned} A^s &= \big\{(\hat{x}_j, x_j) \in V \times W,\ \ t.c.\ \ x_j > g(\hat{x}_j)\big\} = \big\{x \in U,\ \ t.c.\ \ F(x) > 0\big\}; \\ A_s &= \big\{(\hat{x}_j, x_j) \in V \times W,\ \ t.c.\ \ x_j < g(\hat{x}_j)\big\} = \big\{x \in U,\ \ t.c.\ \ F(x) < 0\big\}. \end{aligned}$$

In questo modo, si verifica una ed una sola delle seguenti due condizioni:

(i) $A_s \subseteq \Omega$ *e* $A^s \subseteq \Omega^c$;

(ii) $A^s \subseteq \Omega$ *e* $A_s \subseteq \Omega^c$.

Infatti, se per assurdo $A_s \subseteq \Omega$ *e* $A^s \subseteq \Omega$, *allora si avrebbe* $A_s \cup A^s \subseteq \Omega$. *Ora, poiché* Ω *è un aperto regolare, vale* $\Omega = \mathrm{Int}\big(\overline{\Omega}\big)$; *questa proprietà (globale) dovrebbe allora valere anche per* $A_s \cup A^s$ *che è un aperto contenuto in* Ω, *ma*

$$\mathrm{Int}\big(\overline{A_s \cup A^s}\big) = U \neq A_s \cup A^s$$

e questa è una contraddizione.
In conclusione abbiamo mostrato che un aperto regolare $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *è sempre localmente "sotto-grafico" o "sopra-grafico"; in particolare si trova localmente "da una stessa parte del bordo".*

Definizione 1.24. *(Normale esterna)*
Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto regolare e $x_0 \in \partial\Omega$, con $n \geq 2$. Un vettore $\nu \in \mathbb{R}^n$, con $\|\nu\| = 1$, si dice ***normale esterna*** *a Ω, in x_0, se:*

(i) ν è ortogonale a $\partial\Omega$ in x_0, cioè $\nu \in N_{x_0}\partial\Omega = (T_{x_0}\partial\Omega)^{\perp}$;

(ii) $\exists\, \delta > 0$, tale che per ogni $t \in (0, \delta)$, si ha

$$\begin{cases} x_0 + t\nu \notin \Omega \\ x_0 - t\nu \in \Omega \end{cases}$$

In particolare, se $F = 0$ è un'equazione locale per $\partial\Omega$, allora tenendo in considerazione l'Osservazione 1.18, vale

$$\begin{cases} \nu = \dfrac{\nabla F(x_0)}{\|\nabla F(x_0)\|}, & \text{se localmente } F < 0, \text{ in } \Omega; \\ \\ \nu = -\dfrac{\nabla F(x_0)}{\|\nabla F(x_0)\|}, & \text{se localmente } F > 0, \text{ in } \Omega. \end{cases}$$

Osservazione 1.19. *Nel caso $n = 1$, riprendendo l'Osservazione 1.17, consideriamo ad esempio $\Omega = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, un aperto regolare con una unica componente connessa, dove $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$. Allora, poiché $\partial\Omega = \{a, b\}$, la normale esterna a Ω in a vale -1, mentre in b vale $+1$.*

Definizione 1.25. *(Divergenza)*
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, aperto, con $n \in \mathbb{N}$. Consideriamo una funzione

$$F : \Omega \to \mathbb{R}^n, \quad F = (F_1, \ldots, F_n)$$

Se F è differenziabile in $x \in \Omega$, definiamo la ***divergenza*** *di F, nel punto x, nel seguente modo*

$$\operatorname{div}(F(x)) = tr(Jac\, F(x)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial x_k}(x).$$

Notazione 1.2. *Scriveremo $f \in C^k\left(\overline{\Omega}; \mathbb{R}\right)$, con $k \geq 1$, se f è di classe C^k su un aperto contenente $\overline{\Omega}$.*

Vale il seguente risultato

Teorema 1.7. *(della divergenza)*
Sia $F \in C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n)$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, aperto regolare, $n \geq 2$. Allora, denotando con ν la normale unitaria esterna a $\partial\Omega$, si ha

$$\int_\Omega \operatorname{div}(F(x))dx = \int_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle dH^{n-1}. \tag{4}$$

*La quantità $\int_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle dH^{n-1}$ si chiama **flusso** del campo F attraverso $\partial\Omega$.*

Il precedente teorema è equivalente alla seguente versione scalare

Teorema 1.8. *(della divergenza, versione scalare)*
Sia $f \in C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R})$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, aperto regolare, $n \geq 2$. Allora, denotando con $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ la normale unitaria esterna a $\partial\Omega$, si ha per ogni $j = 1, \ldots, n$

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} f \nu_j dH^{n-1}.$$

Osservazione 1.20. *Per provare la precedente equivalenza basta osservare che, se vale il Teorema 1.7, allora si può considerare il campo F che ha tutte le componenti nulle tranne la j-esima uguale a f, ottenendo quindi la versione scalare.*
Viceversa, se vale il Teorema 1.8, allora basta applicarlo ad ogni componente di F e usare la linearità e l'additività dell'integrale.

Come corollario si ottiene la seguente formula di **integrazione per parti**

Teorema 1.9. *(Integrazione per parti)*
Siano $f, g \in C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R})$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, aperto regolare, $n \geq 2$. Allora, denotando con $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ la normale unitaria esterna a $\partial\Omega$, si ha per ogni $j = 1, \ldots, n$

$$\int_\Omega g(x) \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} g f \nu_j dH^{n-1} - \int_\Omega f(x) \frac{\partial g}{\partial x_j}(x)\, dx. \tag{5}$$

Dimostrazione. Basta applicare il Teorema 1.8 alla funzione prodotto gf. □

Osservazione 1.21. *(Teorema fondamentale del calcolo integrale)*
Nel caso $n = 1$, ricordando le Osservazioni 1.17, 1.19 e 1.15, consideriamo ad esempio $\Omega = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, un aperto regolare con una unica componente connessa, dove $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$. Sia $F \in C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R})$, allora il teorema della divergenza diventa

$$\int_a^b F'(x)\, dx = \int_\Omega \operatorname{div}(F(x))\, dx = \int_{\partial\Omega} F\, \nu\, dH^0 = F(b) - F(a).$$

Osservazione 1.22. *Il teorema della divergenza può essere generalizzato a funzioni e domini meno regolari, ad esempio il cui bordo è localmente grafico di una funzione Lipschitziana; per una trattazione completa si veda ad esempio [3].*

La dimostrazione del teorema della divergenza verrà fatta successivamente. Adesso mostriamo alcuni esempi ed applicazioni.

Esempio 1.16. *Consideriamo*

$$B_r^n = \Big\{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < r,\ r > 0\Big\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Poniamo $S_r^{n-1} = \partial B_r^n$. *Allora si ha*

$$\mathcal{H}^{n-1}(S_r^{n-1}) = n\omega_n r^{n-1},$$

dove $\omega_n = \mathcal{H}^n(B_1^n) = \mathcal{L}^n(B_1^n)$.
Infatti, consideriamo la funzione identità

$$F \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n), \qquad F(x) = x.$$

Si ha

$$\mathrm{div} F(x) = n, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Inoltre, poiché la normale esterna a B_r^n *è data da*

$$\nu(x) = \frac{x}{\|x\|}, \quad \forall\, x \in S_r^{n-1},$$

si ha

$$\langle F(x), \nu(x)\rangle = \|x\| = r, \quad \forall\, x \in S_r^{n-1}.$$

Quindi, dal teorema della divergenza, si ha

$$n\omega_n r^n = \int_{B_r^n} \mathrm{div}(F(x))dx = \int_{S_r^{n-1}} \langle F, \nu\rangle dH^{n-1} = r\mathcal{H}^{n-1}(S_r^{n-1}).$$

Teorema 1.10. *(Teorema di Gauss, carica puntiforme)*
Consideriamo una carica puntiforme q*, posta nell'origine di* $\mathbb{R}^3$*, con carica elettrica* c_q*. Sia*

$$E : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3, \qquad E(x) = c_q \frac{x}{\|x\|^3},$$

il campo elettrico generato da q.
Siano ora $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ *un aperto regolare e* ν *la sua normale esterna, allora valgono le seguenti:*

(i) *se* $0 \notin \overline{\Omega}$*, allora* $\displaystyle\int_{\partial\Omega} \langle E, \nu\rangle dH^2 = 0$;

(ii) se $0 \in \Omega$, allora $\int_{\partial\Omega} \langle E, \nu \rangle dH^2 = 4\pi c_q$.

Dimostrazione. Prima di tutto $E \in C^\infty\big(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; \mathbb{R}^3\big)$, inoltre

$$\frac{\partial E_j}{\partial x_j}(x) = c_q \frac{\|x\|^2 - 3x_j^2}{\|x\|^5}, \quad x \neq 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Quindi

$$\mathrm{div} E(x) = 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Proviamo la (i). Se $0 \notin \overline{\Omega}$, allora $E \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$ e dal teorema della divergenza, si ha

$$0 = \int_\Omega \mathrm{div}(E(x))dx = \int_{\partial\Omega} \langle E, \nu \rangle dH^2.$$

Proviamo ora la (ii). Poiché Ω è aperto, se $0 \in \Omega$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$\overline{B}_\varepsilon = \big\{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| \leq \varepsilon\big\} \subseteq \Omega.$$

Poniamo

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{B}_\varepsilon.$$

Si ha che Ω_ε è un aperto regolare e $0 \notin \overline{\Omega}_\varepsilon$, quindi dal punto (i), otteniamo

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \langle E, \nu \rangle dH^2 = 0.$$

Ora, $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \partial B_\varepsilon$, quindi

$$0 = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \langle E, \nu \rangle dH^2 = \int_{\partial\Omega} \langle E, \nu \rangle dH^2 + \int_{\partial B_\varepsilon} \langle E, \nu \rangle dH^2.$$

Inoltre, la normale esterna a Ω_ε è data da

$$\nu(x) = -\frac{x}{\|x\|}, \quad \forall\, x \in \partial B_\varepsilon,$$

quindi

$$\langle E(x), \nu(x) \rangle = -c_q \frac{1}{\|x\|^2} = -c_q \frac{1}{\varepsilon^2}, \quad \forall\, x \in \partial B_\varepsilon.$$

In conclusione

$$\int_{\partial\Omega} \langle E, \nu \rangle dH^2 = -\int_{\partial B_\varepsilon} \langle E, \nu \rangle dH^2 = c_q \frac{1}{\varepsilon^2} \mathcal{H}^2(\partial B_\varepsilon) = c_q 4\pi.$$

$\square$

Osservazione 1.23. *(Teorema di Gauss per la densità di carica)*
Sia $\rho \in C(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$ una densità di carica elettrica e sia $E \in C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ il campo elettrico generato. Siano ora $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto regolare e ν la sua normale esterna, Allora vale le seguente equazione integrale (Teorema di Gauss per la densità di carica): il flusso del campo elettrico attraverso $\partial\Omega$ è uguale alla carica totale in Ω, cioé

$$\int_{\partial\Omega} \langle E, \nu \rangle dH^2 = \int_{\Omega} \rho(x) dx.$$

Teorema 1.11. *(Prima equazione di Maxwell)*
Sia $\rho \in C(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$ una densità di carica elettrica e sia $E \in C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ il campo elettrico generato. Allora vale la seguente equazione differenziale

$$\operatorname{div}(E(x)) = \rho(x), \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Dimostrazione. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto regolare, allora dal teorema della divergenza e dall'Osservazione 1.23, si ha

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(E(x)) dx = \int_{\partial\Omega} \langle E, \nu \rangle dH^2 = \int_{\Omega} \rho(x) dx.$$

Quindi

$$\int_{\Omega} \Big(\operatorname{div}(E(x)) - \rho(x) \Big) dx = 0.$$

Poiché Ω è arbitrario e la funzione integranda è continua, allora la precedente equazione integrale vale anche puntualmente, ottenendo la tesi. $\square$

Passiamo ora alla dimostrazione del teorema della divergenza; iniziamo con alcune proposizioni preliminari.

Proposizione 1.6. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $f \in C^1(A;\mathbb{R})$. Se $\operatorname{supp}(f)$ è compatto e contenuto in A, allora si ha*

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\, dx = 0, \quad \forall\, j = 1, \dots, n.$$

Dimostrazione. Prima di tutto, estendiamo f a zero fuori da A, cioé $f(x) = 0$ se $x \notin A$; in particolare per questa estensione si ha $f \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$. Sia ora $j \in \{1, \dots, n\}$. Poiché $\operatorname{supp}(f)$ è compatto, $\exists\, c > 0$ tale che

$$\operatorname{supp}(f) \subseteq [-c, c]^n = \underbrace{[-c, c] \times \cdots \times [-c, c]}_{n\, volte}.$$

Si ha inoltre che

$$\operatorname{supp}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big) \subseteq \operatorname{supp}(f) \subseteq [-c, c]^n,$$

quindi
$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\,dx = \int_{[-c,c]^n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\,dx.$$
Ora, dal teorema di riduzione di Fubini, si ottiene:
$$\int_{[-c,c]^n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)dx = \int_{[-c,c]^{n-1}} \left(\int_{-c}^{c} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)dx_j\right) d\hat{x}_j = \int_{[-c,c]^{n-1}} f(\hat{x}_j, c) - f(\hat{x}_j, -c) d\hat{x}_j = 0$$
in quanto f è nulla sulla frontiera di $[-c,c]^n$. $\square$

Definizione 1.26. *(Aperto k-normale)*
*Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Diciamo che A è un **aperto k-normale**, se esistono $k \in \{1, \dots, n\}$, un aperto limitato $V \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$, un intervallo aperto $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$, con $a < b$, e una funzione $g \in C^1(V, (a,b))$, per cui A è sottografico oppure sopragrafico, cioè:*
$$A = \big\{(\hat{x}_k, x_k) \in V \times (a,b), \ \ t.c. \ \ x_k < g(\hat{x}_k\big\},$$
oppure
$$A = \big\{(\hat{x}_k, x_k) \in V \times (a,b), \ \ t.c. \ \ x_k > g(\hat{x}_k)\big\}.$$
*Inoltre, chiamiamo **bordo relativo** a g (o bordo Grafico) l'insieme*
$$\partial_G A = \big\{(\hat{x}_k, x_k) \in V \times (a,b), \ \ t.c. \ \ x_k = g(\hat{x}_k)\big\}.$$

Proposizione 1.7. *Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto k-normale ed $f \in C^1(\overline{A}; \mathbb{R})$ una funzione tale che* $\mathrm{supp}(f) \subseteq V \times (a,b)$, *allora si ha*
$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\,dx = \int_{\partial_G A} f\nu_j\,dH^{n-1}, \quad \forall\, j = 1,..,n\ ,$$
con $\nu = (\nu_1, .., \nu_n)$ normale esterna definita su $\partial_G A$.

Dimostrazione. Supponiamo, per esempio, che A sia sottografico. Proviamo separatamente i casi $k = j$ e $k \neq j$.
Caso $k = j$. Abbiamo
$$A = \{(\hat{x}_j, x_j) \in V \times (a,b), \ \text{t.c.} \ \ x_j < g(\hat{x}_j\}.$$
Risulta
$$\begin{aligned}\int_A \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\,dx &= \int_V \left(\int_a^{g(\hat{x}_j)} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\hat{x}_j, x_j)\,dx_j\right) d\hat{x}_j \\ &= \int_V f(\hat{x}_j, g(\hat{x}_j)) - f(\hat{x}_j, a)\,d\hat{x}_j \\ &= \int_V f(\hat{x}_j, g(\hat{x}_j))\,d\hat{x}_j, \end{aligned} \tag{6}$$

in quanto $\mathrm{supp}(f) \subseteq V \times (a,b)$, quindi $f(\hat{x}_j, a) = 0$. Poniamo ora

$$F(x) = F(\hat{x}_j, x_j) = x_j - g(\hat{x}_j),$$

in questo modo $F = 0$ è un'equazione locale per il bordo relativo. La normale esterna ad A nei punti di $\partial_G A$ è data da

$$\nu(x) = \frac{\nabla F(x)}{\|\nabla F(x)\|},$$

con

$$\nabla F(x) = (-\nabla g(\hat{x}_j), 1), \qquad \|\nabla F(x)\| = \sqrt{1 + \|\nabla g(\hat{x}_j)\|^2}.$$

In particolare

$$\nu_j(x) = \frac{1}{\|\nabla F(x)\|} \frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla g(\hat{x}_j)\|^2}}.$$

Sia ora

$$\varphi \in C^1(V; \mathbb{R}^n), \qquad \varphi(\hat{x}_j) = (\hat{x}_j, g(\hat{x}_j)),$$

una parametrizzazione di $\partial_G A$, con

$$J_\varphi(\hat{x}_j) = \sqrt{1 + \|\nabla g(\hat{x}_j)\|^2}.$$

Quindi

$$\int_{\partial_G A} f \nu_j \, dH^{n-1} = \int_V f(\hat{x}_j, g(\hat{x}_j)) \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla g(\hat{x}_j)\|^2}} J_\varphi(\hat{x}_j) \, d\hat{x}_j = \int_V f(\hat{x}_j, g(\hat{x}_j)) \, d\hat{x}_j \, .$$

Da quest'ultima formula e da (6), si ottiene la tesi nel caso $k = j$.
Caso $k \neq j$. In questo caso $x_j \in \{\hat{x}_k\}$ e risulta

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \, dx = \int_V \left(\int_a^{g(\hat{x}_k)} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \, dx_k \right) d\hat{x}_k. \tag{7}$$

Osserviamo ora che

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_a^{g(\hat{x}_k)} f(\hat{x}_k, x_k) \, dx_k = \int_a^{g(\hat{x}_k)} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\hat{x}_k, x_k) \, dx_k + f(\hat{x}_k, g(\hat{x}_k)) \frac{\partial g}{\partial x_j}(\hat{x}_k) \, .$$

Da questo e da (7) otteniamo allora

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \, dx = -\int_V f(\hat{x}_k, g(\hat{x}_k)) \frac{\partial g}{\partial x_j}(\hat{x}_k) \, d\hat{x}_k + \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\int_a^{g(\hat{x}_k)} f(\hat{x}_k, x_k) \, dx_k \right) d\hat{x}_k \, . \tag{8}$$

Poniamo

$$h(\hat{x}_k) = \int_a^{g(\hat{x}_k)} f(\hat{x}_k, x_k) \, dx_k \, .$$

Si ha che $h \in C^1(V; \mathbb{R})$ e $\mathrm{supp}(h) \subseteq V$, in particolare poiché V è limitato, il supporto di h è compatto. Dalla Proposizione 1.6, otteniamo

$$\int_V \frac{\partial h}{\partial x_j}(\hat{x}_k) \, d\hat{x}_k = 0 \, .$$

Sostituendo in (8) si ottiene

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\, dx = -\int_V f(\hat{x}_k, g(\hat{x}_k)) \frac{\partial g}{\partial x_j}(\hat{x}_k)\, d\hat{x}_k. \tag{9}$$

Adesso, in modo analogo al caso precedente, consideriamo

$$F(x) = F(\hat{x}_k, x_k) = x_k - g(\hat{x}_k).$$

La normale esterna ad A, nei punti di $\partial_G A$, è data da

$$\nu(x) = \frac{\nabla F(x)}{\|\nabla F(x)\|} ,$$

in particolare

$$\nu_j(x) = \frac{-\dfrac{\partial g}{\partial x_j}(\hat{x}_k)}{\sqrt{1 + \|\nabla g(\hat{x}_k)\|^2}} .$$

Sia

$$\varphi \in C^1(V; \mathbb{R}^n), \qquad \varphi(\hat{x}_k) = (\hat{x}_k, g(\hat{x}_k)),$$

una parametrizzazione di $\partial_G A$, con

$$J_\varphi(\hat{x}_k) = \sqrt{1 + \|\nabla g(\hat{x}_k)\|^2} .$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int_{\partial_G A} f\nu_j \, dH^{n-1} &= \int_V f(\hat{x}_k, g(\hat{x}_k)) \frac{-\dfrac{\partial g}{\partial x_j}(\hat{x}_k)}{\sqrt{1 + \|\nabla g(\hat{x}_k)\|^2}} J_\varphi(\hat{x}_k)\, d\hat{x}_k \\ &= -\int_V f(\hat{x}_k, g(\hat{x}_k)) \frac{\partial g}{\partial x_j}(\hat{x}_k)\, d\hat{x}_k .\end{aligned}$$

Da quest'ultima formula e da (9), si ottiene la tesi nel caso $k \neq j$. □

Dimostrazione. (del teorema 1.8)
Osserviamo per prima cosa che $\overline{\Omega}$ e $\partial\Omega$ sono compatti. Ora, poiché Ω è un aperto regolare, ricordando l'Osservazione 1.18, si ha che per ogni $\tilde{x} \in \partial\Omega$ esiste $U_{\tilde{x}} \subseteq \mathbb{R}^n$, intorno di $\tilde{x}$, tale che $\Omega \cap U_{\tilde{x}}$ è un aperto k-normale, per qualche $k \in \{1, \dots, n\}$; inoltre $\partial\Omega \cap U_{\tilde{x}} = \partial_G(\Omega \cap U_{\tilde{x}})$. La famiglia $\{U_{\tilde{x}}\}_{\tilde{x} \in \partial\Omega}$ è un ricoprimento aperto di $\partial\Omega$ e poiché quest'ultimo è compatto esiste un sottoricoprimento finito $\{A_i\}_{i \in I}$, con $I = \{1, \dots, q\}$, $q \in \mathbb{N}$; in particolare notiamo esplicitamente che la famiglia $\{A_i \cap \partial\Omega\}_{i \in I}$ è un ricoprimento finito di $\partial\Omega$ come nell'Osservazione 1.11, in quanto i grafici cartesiani sono parametrizzazioni (Esempio 1.7).
Poniamo ora

$$E = \Omega \setminus \Big(\bigcup_{i=1}^{q} A_i \Big),$$

così E è chiuso e contenuto in Ω. Esiste allora un aperto A_0 tale che

$$E \subseteq A_0, \quad \overline{A}_0 \subseteq \Omega.$$

In questo modo la famiglia $\{A_i\}_{i\in\{0,1,\dots,q\}}$ è un ricoprimento aperto finito di $\overline{\Omega}$.
Usando il Lemma 1.5, consideriamo ora una partizione dell'unità $\{\eta_i\}_{i\in\{0,1,\dots,q\}}$, subordinata ad $\{A_i\}_{i\in\{0,1,\dots,q\}}$. Dalla condizione (iii) nella Definizione 1.21, si ha

$$\sum_{i=0}^{q} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} \equiv 0$$

su un aperto contenente $\overline{\Omega}$, per ogni $j = 1, \dots, n$. Allora:

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)dx = \int_\Omega \sum_{i=0}^{q} \eta_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)dx = \int_\Omega \sum_{i=0}^{q} \frac{\partial\big(\eta_i(x)f(x)\big)}{\partial x_j}dx = \sum_{i=0}^{q}\int_\Omega \frac{\partial\big(\eta_i(x)f(x)\big)}{\partial x_j}dx. \tag{10}$$

Dalla condizione (i) nella Definizione 1.21, si ha che vale

$$\operatorname{supp}(\eta_i f) \subseteq \operatorname{supp}(\eta_i) \subseteq A_i\ , \quad i = 0, 1, \dots, q\ .$$

Distinguiamo ora due casi per gli addendi nella sommatoria in (10).
Supponiamo $i = 0$, cioè $\operatorname{supp}(\eta_0 f) \subseteq A_0$, allora dalla Proposizione 1.6 otteniamo

$$\int_\Omega \frac{\partial\big(\eta_0(x)f(x)\big)}{\partial x_j}\,dx = \int_{\Omega\cap A_0} \frac{\partial\big(\eta_0(x)f(x)\big)}{\partial x_j}\,dx = \int_{A_0} \frac{\partial\big(\eta_0(x)f(x)\big)}{\partial x_j}\,dx = 0.$$

Inoltre, visto che $A_0 \cap \partial\Omega = \emptyset$, abbiamo anche

$$\int_{\partial\Omega} \eta_0 f \nu_j \, dH^{n-1} = 0.$$

Quindi, in questo caso

$$\int_\Omega \frac{\partial\big(\eta_0(x)f(x)\big)}{\partial x_j}\,dx = \int_{\partial\Omega} \eta_0 f \nu_j \, dH^{n-1} = 0. \tag{11}$$

Supponiamo invece che $i \neq 0$, cioè $\operatorname{supp}(\eta_i f) \subseteq A_i$, con $i \in \{1, \dots, q\}$, allora ricordando che $\Omega \cap A_i$ sono aperti k-normali, dalla Proposizione 1.7 otteniamo

$$\int_\Omega \frac{\partial\big(\eta_i(x)f(x)\big)}{\partial x_j}\,dx = \int_{\Omega\cap A_i} \frac{\partial\big(\eta_i(x)f(x)\big)}{\partial x_j}\,dx = \int_{\partial_G(\Omega\cap A_i)} \eta_i f \nu_j \, dH^{n-1}.$$

Poiché $\partial_G(\Omega \cap A_i) = \partial\Omega \cap A_i$ e $\operatorname{supp}(\eta_i f) \subseteq A_i$, si ha

$$\int_{\partial_G(\Omega\cap A_i)} \eta_i f \nu_j \, dH^{n-1} = \int_{\partial\Omega\cap A_i} \eta_i f \nu_j \, dH^{n-1} = \int_{\partial\Omega} \eta_i f \nu_j \, dH^{n-1},$$

quindi anche nel caso $i \neq 0$ si ottiene

$$\int_\Omega \frac{\partial\big(\eta_i(x)f(x)\big)}{\partial x_j}\,dx = \int_{\partial\Omega} \eta_i f \nu_j \, dH^{n-1}. \tag{12}$$

Sostituendo nella formula (10) le uguaglianze (11) e (12), si ha

$$\sum_{i=0}^{q} \int_\Omega \frac{\partial\big(\eta_i(x)f(x)\big)}{\partial x_j}\,dx = \sum_{i=1}^{q} \int_{\partial\Omega} \eta_i f \nu_j \, dH^{n-1}.$$

Scambiando nuovamente sommatoria e integrale (usando la proprietà (*iii*) nella Definizione 1.21) e ricordando la Definizione 1.22, si ha

$$\sum_{i=1}^{q} \int_{\partial\Omega} \eta_i f \nu_j \, dH^{n-1} = \int_{\partial\Omega} \Big(\sum_{i=1}^{q} \eta_i\Big) f \nu_j \, dH^{n-1} = \int_{\partial\Omega} f \nu_j \, dH^{n-1},$$

provando la tesi. □

Osservazione 1.24. *Il teorema della divergenza si estende ad aperti regolari a tratti, dove $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice aperto regolare a tratti, se esistono un numero finito di aperti k-normali A_j, $j = 1, \dots, q$, $q \in \mathbb{N}$, tali che $A_j \cap A_i = \emptyset$, se $j \neq i$, con*

$$\Omega = \mathrm{Int}\Big(\bigcup_{j=1}^{q} \overline{A_j}\Big).$$

Inoltre, si richiede che la frontiera di Ω sia una varietà a tratti di dimensione $(n-1)$ e di classe almeno C^1, cioé se, a meno di un insieme di misura $\mathcal{H}^{n-1}$-dimensionale nulla, è una varietà di dimensione $(n-1)$ e di classe almeno C^1, unione disgiunta di un numero finito di componenti connesse.
In questo caso, si chiama bordo di Ω e si indica con $\partial\Omega$, la varietà di dimensione $(n-1)$, unione disgiunta di un numero finito di componenti connesse, contenuta in $\mathrm{Fr}(\Omega)$.

1.6 Forme differenziali e Teorema di Stokes

Definizione 1.27. *(1-forme canoniche)*
*Sia $n \in \mathbb{N}$. Per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$, chiamiamo **1-forma canonica** su $\mathbb{R}^n$, la seguente applicazione lineare*

$$dx_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad dx_i(v) = v_i \ ,$$

dove $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$.

Notazione 1.3. *Indichiamo con "$\wedge$" il classico prodotto esterno (o wedge), associativo ed anti-commutativo, definito sui vettori, che estendiamo alle 1-forme canoniche.*

Definizione 1.28. *(k-forme canoniche)*
*Siano $k, n \in \mathbb{N}$. Per ogni $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$, chiamiamo **$k$-forma canonica** su $\mathbb{R}^n$, la seguente applicazione multi-lineare*

$$dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{k\, volte} \to \mathbb{R},$$

definita da

$$dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}(v^1, \dots, v^k) = \det \begin{pmatrix} v^1_{i_1} & \dots & v^1_{i_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v^k_{i_1} & \dots & v^k_{i_k} \end{pmatrix}$$

dove $v^j = (v^j_1, \dots, v^j_n) \in \mathbb{R}^n$, per ogni $j \in \{1, \dots, k\}$.

Osservazione 1.25. *Dalle proprietà del determinante, se per qualche $j, \ell \in \{1, \dots, k\}$ si ha $i_j = i_\ell$ (in particolare se $k > n$), si ha*

$$dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} = 0 \ .$$

Inoltre

$$dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} = \operatorname{sgn}(\sigma)\ dx_{\sigma(i_1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\sigma(i_k)} \ ,$$

dove

$$\sigma : \{i_1, \dots, i_k\} \to \{i_1, \dots, i_k\}$$

è una permutazione di indici con $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$ se occorrono un numero pari di trasposizioni per passare da $\{i_1, \dots, i_k\}$ a $\{\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k)\}$; vale $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$ altrimenti.

Definizione 1.29. *Denotiamo con $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ lo spazio vettoriale (a coefficienti reali) generato dalle k-forme canoniche su $\mathbb{R}^n$.*
In particolare, se $k > n$, allora $\Lambda^k(\mathbb{R}^n) = \{0\}$, mentre se $k \in \{1, \ldots, n\}$ si ha

$$\Lambda^k(\mathbb{R}^n) = \left\{ \sum_{1 \le i_1, \ldots, i_k \le n} \lambda_{i_1 \ldots i_k}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k},\ \lambda_{i_1 \ldots i_k} \in \mathbb{R} \right\}, \quad \dim\big(\Lambda^k(\mathbb{R}^n)\big) = \binom{n}{k} .$$

*Un elemento di $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ si chiama **k-forma** su $\mathbb{R}^n$; inoltre, il numero k è detto il grado della forma.*

Osservazione 1.26. *Usando le proprietà del prodotto esterno, esteso per linearità alle k-forme, se*

$$\omega_1 \in \Lambda^{k_1}(\mathbb{R}^n), \quad \omega_2 \in \Lambda^{k_2}(\mathbb{R}^n), \quad k_1, k_2 \in \mathbb{N},$$

allora

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \in \Lambda^{k_1+k_2}(\mathbb{R}^n) .$$

Definizione 1.30. *(k-forme differenziali)*
*Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Chiamiamo **$k$-forma differenziale** una funzione*

$$\omega : \Omega \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n), \qquad \omega(x) = \sum_{1 \le i_1, \ldots, i_k \le n} f_{i_1 \ldots i_k}(x)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

dove le funzioni

$$f_{i_1 \ldots i_k} : \Omega \to \mathbb{R},$$

si chiamano coefficienti di ω.
Diremo che $\omega \in C^q\big(\Omega; \Lambda^k(\mathbb{R}^n)\big)$, se tutti i coefficienti $f_{i_1 \ldots i_k} \in C^q\big(\Omega; \mathbb{R}\big)$, con $q = 0, 1, 2, \ldots$.

Notazione 1.4. *Per convenzione, poniamo $\Lambda^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$, cioè le costanti sono 0-forme. In questo modo una funzione $f \in C^q\big(\Omega; \Lambda^0(\mathbb{R}^n)\big) = C^q\big(\Omega; \mathbb{R}\big)$, rappresenta una 0-forma differenziale di classe C^q.*

Notazione 1.5. *Per comodità utilizzeremo la seguente notazione. Se $\omega \in C\big(\Omega; \Lambda^k(\mathbb{R}^n)\big)$, scriveremo*

$$\omega(x) = \sum_I f_I(x)\, dx_I \ ,$$

dove abbiamo posto $I = I^{k,n} = \{i_1, \ldots, i_k\}$, con $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$dx_I = dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \ , \qquad \sum_I = \sum_{1 \le i_1, \ldots, i_k \le n}$$

Definizione 1.31. *(Differenziale esterno)*
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia

$$\omega \in C^1\big(\Omega; \Lambda^k(\mathbb{R}^n)\big), \qquad \omega(x) = \sum_I f_I(x)\, dx_I\ .$$

*Chiamiamo **differenziale esterno** di ω, la seguente $(k+1)$-forma differenziale*

$$d\omega \in C\big(\Omega; \Lambda^{k+1}(\mathbb{R}^n)\big), \qquad d\omega(x) = \sum_I \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_I}{\partial x_i}(x)\, dx_i \wedge dx_I\ .$$

Osservazione 1.27. *Se $\omega \in C^2\big(\Omega; \Lambda^k(\mathbb{R}^n)\big)$, allora*

$$d^2\omega = d(d\omega) = 0\ .$$

Infatti, sia $\omega(x) = \sum_I f_I(x) dx_I$. Allora dalla definizione di differenziale esterno segue immediatamente che

$$d^2\omega(x) = \sum_I \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f_I}{\partial x_i \partial x_j}(x)\, dx_i \wedge dx_j \wedge dx_I.$$

A questo punto poniamo

$$A = (a_{ij}), \qquad a_{ij} = \frac{\partial^2 f_I}{\partial x_i \partial x_j}$$

e

$$B = (b_{ij}), \qquad b_{ij} = dx_i \wedge dx_j$$

in particolare A è una matrice simmetrica per il teorema di Schwarz e B è una matrice antisimmetrica per le proprietà del prodotto wedge. Ora osserviamo che

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f_I}{\partial x_i \partial x_j}(x)\, dx_i \wedge dx_j = Tr(AB)\ ,$$

allora si avrà che

$$Tr(AB) = 0.$$

Infatti,

$$\begin{aligned} Tr(AB) &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ji} \\ &= \sum_{i<j} a_{ij} b_{ji} + \sum_{i=j} a_{ii} b_{ii} + \sum_{i>j} a_{ij} b_{ji} \\ &= \sum_{i<j} a_{ij} b_{ji} + 0 - \sum_{i<j} a_{ij} b_{ij} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Definizione 1.32. *(Pull-back)*
Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e $\varphi \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^m)$ una parametrizzazione di $M := \varphi(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^m$, con $n \leq m$. Data

$$\omega \in C\big(M;\Lambda^k(\mathbb{R}^m)\big), \qquad \omega(x) = \sum_I f_I(x)\, dx_I \ ,$$

*chiamiamo **pull-back** di ω, la seguente*

$$\omega^{*,\varphi} \in C\big(\Omega;\Lambda^k(\mathbb{R}^n)\big), \qquad \omega^{*,\varphi}(u) = \sum_I \sum_{J_\leq} f_I(\varphi(u)) \frac{\partial \varphi_I}{\partial u_J}(u)\, du_J \ .$$

dove abbiamo posto

$$u = (u_1,\dots,u_n) \in \Omega, \quad \varphi(u) = \big(\varphi_1(u),\dots,\varphi_m(u)\big) = (x_1,\dots,x_m) = x \in M \ ,$$

$$I = I^{k,m} = \{i_1,\dots,i_k\}, \quad i_1,\dots,i_k \in \{1,\dots,m\} \ ,$$

$$J = J^{k,n} = \{j_1,\dots,j_k\}, \quad j_1,\dots,j_k \in \{1,\dots,n\} \ ,$$

$$\frac{\partial \varphi_I}{\partial u_J}(u) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{i_1}}{\partial u_{j_1}}(u) & \dots & \frac{\partial \varphi_{i_1}}{\partial u_{j_k}}(u) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_{i_k}}{\partial u_{j_1}}(u) & \dots & \frac{\partial \varphi_{i_k}}{\partial u_{j_k}}(u) \end{pmatrix}$$

ed infine

$$\sum_{J_\leq} = \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq n}$$

Osservazione 1.28. *Dalla definizione si riconosce immediatamente che il pull-back di una funzione (cioè una 0-forma differenziale) è semplicemente la composizione con la parametrizzazione.*
Osserviamo anche che per una qualsiasi k-forma differenziale, il pull-back rispetto ad una composizione è uguale alla composizione dei pull-back.

Osservazione 1.29. *Nel seguito, se non ci sono ambiguità sulla parametrizzazione rispetto alla quale si effettua il pull-back, indicheremo semplicemente $\omega^* = \omega^{*,\varphi}$.*

Osservazione 1.30. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e $\varphi \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^m)$ una parametrizzazione di $M := \varphi(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^m$. Valgono le seguenti proprietà:*

(i) siano $\omega_1, \omega_2 \in C\big(M; \Lambda^k(\mathbb{R}^m)\big)$*, allora*

$$(\omega_1 + \omega_2)^* = \omega_1^* + \omega_2^* \; ;$$

(ii) siano $\omega_1, \in C\big(M; \Lambda^{k_1}(\mathbb{R}^m)\big)$, $\omega_2 \in C\big(M; \Lambda^{k_2}(\mathbb{R}^m)\big)$*, allora*

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)^* = \omega_1^* \wedge \omega_2^* \; ;$$

(iii) siano $\omega \in C^1\big(\overline{M}; \Lambda^k(\mathbb{R}^m)\big)$, $\varphi \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^m)$*, allora*

$$(d\omega)^* = d(\omega^*) \; .$$

Infatti, per quanto riguarda (i), sia $I = \{i_1, \ldots, i_{k_1}\}$ *con* $i_1, \ldots, i_{k_1} \in \{1, \ldots, m\}$*. Siano*

$$\omega_1(x) = \sum_I f_I(x) dx_I$$

e

$$\omega_2(x) = \sum_I g_I(x) dx_I.$$

Ovviamente si ha che

$$\omega_1(x) + \omega_2(x) = \sum_I \left[f_I(x) + g_I(x) \right] dx_I.$$

Applicando la definizione di pull-back si avrà

$$\begin{aligned}
(\omega_1(u) + \omega_2(u))^* &= \sum_I \sum_{J_\leq} \left[f_I(\varphi(u)) + g_I(\varphi(u)) \right] \frac{\partial \varphi_I}{\partial u_J}(u) du_J \\
&= \sum_I \sum_{J_\leq} f_I(\varphi(u)) \frac{\partial \varphi_I}{\partial u_J}(u) du_J + \sum_I \sum_{J_\leq} g_I(\varphi(u)) \frac{\partial \varphi_I}{\partial u_J}(u) du_J \\
&= \omega_1^*(u) + \omega_2^*(u).
\end{aligned}$$

Per provare (ii), sia $I = \{i_1, \ldots, i_{k_1}\}$ *con* $i_1, \ldots, i_{k_1} \in \{1, \ldots, m\}$ *e sia* $\widetilde{I} = \left\{ \widetilde{i_1}, \ldots, \widetilde{i_{k_2}} \right\}$ *con* $\widetilde{i_1}, \ldots, \widetilde{i_{k_2}} \in \{1, \ldots, m\}$*. Consideriamo*

$$\omega_1(x) = \sum_I f_I(x) dx_I$$

e

$$\omega_2(x) = \sum_{\widetilde{I}} g_{\widetilde{I}}(x) dx_{\widetilde{I}}.$$

Ovviamente si ha che

$$\omega_1(x) \wedge \omega_2(x) = \sum_I \sum_{\widetilde{I}} f_I(x) g_{\widetilde{I}}(x) dx_I \wedge dx_{\widetilde{I}}.$$

Dalla definizione di pull-back segue che

$$
\begin{aligned}
(\omega_1(u) \wedge \omega_2(u))^* &= \sum_I \sum_{\widetilde{I}} \sum_{J_\leq} \sum_{\widetilde{J}_\leq} f_I(\varphi(u)) g_{\widetilde{I}}(\varphi(u)) \left(\frac{\partial \varphi_I}{\partial u_J}(u) du_J \wedge \frac{\partial \varphi_{\widetilde{I}}}{\partial u_{\widetilde{J}}}(u) du_{\widetilde{J}} \right) \\
&= \left(\sum_I \sum_{J_\leq} f_I(\varphi(u)) \frac{\partial \varphi_I}{\partial u_J}(u) du_J \right) \wedge \left(\sum_{\widetilde{I}} \sum_{\widetilde{J}_\leq} g_{\widetilde{I}}(\varphi(u)) \frac{\partial \varphi_{\widetilde{I}}}{\partial u_{\widetilde{J}}}(u) du_{\widetilde{J}} \right) \\
&= \omega_1^*(u) \wedge \omega_2^*(u).
\end{aligned}
$$

Infine, per (iii), sia $\omega(x) = \sum_I f_I(x) dx_I$. *Allora, per definizione di pull-back si ha*

$$
\omega^*(u) = \sum_I \sum_{J_\leq} f_I(\varphi(u)) \frac{\partial \varphi_I}{\partial u_J}(u) du_J
$$

e per definizione di differenziale esterno si ha

$$
d\omega(x) = \sum_I \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_I}{\partial x_i}(x) dx_i \wedge dx_I.
$$

Calcoliamo il pull-back del differenziale applicando la definizione. Si ha

$$
\begin{aligned}
(d\omega)^*(u) &= \sum_I \sum_{i=1}^m \sum_{J_\leq} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_I}{\partial x_i}(\varphi(u)) \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(u) du_j \right) \wedge \left(\frac{\partial \varphi_I}{\partial u_J}(u) du_J \right) \\
&= \sum_I \sum_{i=1}^m \sum_{J_\leq} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_I}{\partial x_i}(\varphi(u)) \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(u) \frac{\partial \varphi_I}{\partial u_J}(u) du_j \wedge du_J \\
&= \sum_I \sum_{J_\leq} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial u_j} \Big(f_I(\varphi(u)) \Big) \frac{\partial \varphi_I}{\partial u_J}(u) du_j \wedge du_J,
\end{aligned}
$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la formula della derivata composta. Calcoliamo ora il differenziale del pull-back applicando la definizione. Si ha

$$
\begin{aligned}
d(\omega^*(u)) &= \sum_I \sum_{J_\leq} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial u_j} \left(f_I(\varphi(u)) \frac{\partial \varphi_I}{\partial u_J}(u) \right) du_j \wedge du_J \\
&= \sum_I \sum_{J_\leq} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial u_j} (f_I(\varphi(u))) \frac{\partial \varphi_I}{\partial u_J}(u) du_j \wedge du_J \\
&\quad + \sum_I \sum_{J_\leq} \sum_{j=1}^n f_I(\varphi(u)) \frac{\partial^2 \varphi_I}{\partial u_j \partial u_J}(u) du_j \wedge du_J.
\end{aligned}
$$

Osserviamo ora che

$$
\sum_{J_\leq} \sum_{j=1}^n f_I(\varphi(u)) \frac{\partial^2 \varphi_I}{\partial u_j \partial u_J}(u) du_j \wedge du_J = f_I(\varphi(u)) \sum_{J_\leq} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \varphi_I}{\partial u_j \partial u_J}(u) du_j \wedge du_J.
$$

La sommatoria nel membro di sinistra è formalmente $Tr(AB)$, *con*

$$A = (a_{iJ}), \qquad a_{iJ} = \frac{\partial^2 \varphi_I}{\partial u_j \partial u_J}(u)$$

e

$$B = (b_{iJ}), \qquad b_{iJ} = du_j \wedge du_J.$$

Dato che φ *è di classe* C^2, *si ha che* A *è simmetrica per il teorema di Schwarz, mentre* B *è antisimmetrica per le proprietà del prodotto wedge. Allora*

$$Tr(AB) = 0$$

e di conseguenza

$$d(\omega^*(u)) = \sum_I \sum_{J_\leq} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial u_j}(f_I(\varphi(u))) \frac{\partial \varphi_I}{\partial u_J}(u) du_j \wedge du_J.$$

Abbiamo così provato che

$$(d\omega)^* = d(\omega^*).$$

Definizione 1.33. *(Integrale di n-forme)*
Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *un aperto e* $f \in C(\Omega; \mathbb{R})$. *Prima di tutto poniamo*

$$\int_\Omega f(u)\, du_1 \wedge \ldots \wedge du_n := \int_\Omega f(u)\, du\ .$$

Data ora $\varphi \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^m)$ *una parametrizzazione di* $M := \varphi(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^m$, *poniamo per ogni* $\omega \in C\big(M; \Lambda^n(\mathbb{R}^m)\big)$,

$$\int_M \omega := \int_\Omega \omega^*\ .$$

Ricordando l'Osservazione 1.11 e il Lemma 1.5, diamo ora la seguente definizione.

Definizione 1.34. *(Integrale di Integrale di n-forme su varietà)*
Sia $M \subseteq \mathbb{R}^m$ *una varietà compatta di dimensione* n *e di classe* C^1. *Dato un suo ricoprimento aperto finito* $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$, *con* $I = \{1, \ldots, q\}$, $q \in \mathbb{N}$ *e tale che la famiglia* $\{A_i \cap M\}_{i \in I}$ *sia un ricoprimento finito di* M *come nell'Osservazione 1.11, consideriamo* $\{\eta_i\}_{i \in I}$, *una partizione dell'unità subordinata ad* $\mathcal{A}$. *Sia ora* $\omega \in C\big(M; \Lambda^n(\mathbb{R}^m)\big)$, *allora definiamo l'integrale di* ω *su* M, *il seguente valore reale*

$$\int_M \omega = \int_M \sum_{i=1}^q \eta_i \omega = \sum_{i=1}^q \int_{A_i \cap M} \eta_i \omega\ .$$

Osservazione 1.31. *In particolare, si dimostra che la definizione non dipende dalla scelta del ricoprimento (quindi dalle parametrizzazioni) o dalla partizione dell'unità.*

Ricordando la Proposizione 1.6, vale il seguente

Corollario 1.1. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $\omega \in C^1\big(A; \Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^n)\big)$. Se $\operatorname{supp}(w)$ è compatto e contenuto in A, allora si ha*

$$\int_A d\omega = 0 \ .$$

Corollario 1.2. *Siano $M \subseteq \mathbb{R}^m$ una varietà compatta di dimensione n, di classe C^2, e $\omega \in C^1\big(\overline{M}; \Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^m)\big)$. Allora*

$$\int_M d\omega = 0 \ .$$

Dimostrazione. Basta considerare una partizione dell'unità subordinata ad un ricoprimento aperto finito di M come nell'Osservazione 1.11, ed utilizzare la Definizione 1.34 e il Corollario 1.1. $\square$

Osservazione 1.32. *Siano $n \geq 2$, $D \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ un aperto e $\gamma \in C^1(D; \mathbb{R}^n)$ una parametrizzazione di $\gamma(D) \subseteq \mathbb{R}^n$. Consideriamo $\omega \in C\big(\gamma(D); \Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^n)\big)$, data da*

$$\omega(u) = f(u)\, du_J \ , \quad J = \{j_1, \ldots, j_{n-1}\}, \quad 1 \leq j_1 \leq \ldots \leq j_{n-1} \leq n \ .$$

Allora si ha

$$\omega^* \in C\big(D; \Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})\big), \qquad \omega^*(t) = (-1)^{j+1} f(\gamma(t)) N_j(\gamma(t))\, dt \ , \quad j \notin J \ ,$$

dove

$$dt = dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_{n-1},$$

con N_j la j-esima componente del vettore

$$N(\gamma(t)) = \det \begin{pmatrix} e_1 & \dfrac{\partial \gamma_1}{\partial t_1}(t) & \ldots & \dfrac{\partial \gamma_1}{\partial t_{n-1}}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_n & \dfrac{\partial \gamma_n}{\partial t_1}(t) & \ldots & \dfrac{\partial \gamma_n}{\partial t_{n-1}}(t) \end{pmatrix}$$

dove l'ultimo termine rappresenta un determinate formale, con $e_1, \ldots, e_n$ i versori di direzione canonici in $\mathbb{R}^n$. In particolare, si ha

$$\|N(\gamma(t))\| = J_\gamma(t) \ .$$

Definizione 1.35. *(Parametrizzazione compatibile)*
Siano $n \geq 2$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto regolare, ν la sua normale esterna, $D \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ un aperto e $\gamma \in C^1(D;\mathbb{R}^n)$ una parametrizzazione di $\partial\Omega \cap A$, con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Diciamo che γ è una ***parametrizzazione compatibile****, con l'orientazione di $\partial\Omega$, se per ogni $t \in D$ la base*

$$\left\{\nu(\gamma(t)), \frac{\partial\gamma}{\partial t_1}(t), \ldots, \frac{\partial\gamma}{\partial t_{n-1}}(t)\right\}$$

è positivamente orientata con la base canonica

$$\{e_1, \ldots, e_n\} \ ,$$

cioè la matrice di cambiamento di base ha determinante positivo. In questo caso si pone

$$\partial^+\Omega \cap A = \gamma(D) \ .$$

In particolare, se per ogni $u \in \partial\Omega$, si considera una parametrizzazione (locale) compatibile, allora $\partial^+\Omega$ si dice ***bordo orientato*** *di Ω.*

Osservazione 1.33. *Siano $n \geq 2$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto regolare, ν la sua normale esterna, $D \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ un aperto e $\gamma \in C^1(D;\mathbb{R}^n)$ una parametrizzazione compatibile di $\partial\Omega \cap A$, con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Allora, per ogni $t \in D$, la normale esterna in $\gamma(t)$ è data da* [1]

$$\nu(\gamma(t)) = \frac{N(\gamma(t))}{\|N(\gamma(t))\|} \ .$$

Teorema 1.12. *(della divergenza, versione forme differenziali)*
Sia $\omega \in C^1\big(\overline{\Omega};\Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^n)\big)$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, aperto regolare, $n \geq 2$. Vale

$$\int_\Omega d\omega = \int_{\partial^+\Omega} \omega \ . \tag{13}$$

Dimostrazione. Segue direttamente dal Teorema della divergenza 1.7, utilizzando le Osservazioni 1.32 e 1.33 e le Definizioni 1.33, 1.34 e 1.35. □

[1]Siano $v^1, \ldots, v^{n-1} \in \mathbb{R}^n$ e sia $v \in \mathbb{R}^n$ definito dal determinante formale

$$v = \det \begin{pmatrix} e_1 & v_1^1 & \ldots & v_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_n & v_n^1 & \ldots & v_n^{n-1} \end{pmatrix} \ .$$

Allora $\langle v, v^i \rangle = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, n-1$.

Corollario 1.3. *(Formula di Gauss-Green nel piano)*
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ *un aperto regolare e* $\omega \in C^1\big(\overline{\Omega}; \Lambda^1(\mathbb{R}^2)\big)$, *data da*

$$\omega(u,v) = f(u,v)du + g(u,v)dv \, .$$

Allora si ha

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) - \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\right) du\, dv = \int_{\partial^+\Omega} \omega \, .$$

Dimostrazione. Osserviamo che per definizione di differenziale esterno si ha

$$\begin{aligned} d\omega(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)dv \wedge du + \frac{\partial g}{\partial u}(u,v)du \wedge dv \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) - \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\right) du \wedge dv. \end{aligned}$$

Allora applicando il teorema della divergenza per le forme differenziali si ha

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) - \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\right) dudv = \int_\Omega d\omega = \int_{\partial^+\Omega} \omega.$$

□

Definizione 1.36. *Siano* $m \geq n \geq 2$, $\Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ *un aperto e* $\varphi \in C^1(\Omega_0; \mathbb{R}^m)$ *una parametrizzazione di* $\varphi(\Omega_0)$.
Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *è un aperto regolare tale che* $\overline{\Omega} \subseteq \Omega_0$, *poniamo* $M = \varphi(\Omega)$ *e* $\partial M = \varphi(\partial\Omega)$.
Inoltre, se $\gamma \in C^1(D; \mathbb{R}^n)$, *con* $D \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ *aperto, è una parametrizzazione (locale) di* $\partial\Omega$, *compatibile con l'orientazione di* $\partial\Omega$, *allora diciamo che*

$$\Gamma := \varphi \circ \gamma \in C^1(D; \mathbb{R}^m)$$

è una parametrizzazione (locale) di ∂M, *compatibile con l'orientazione di* ∂M.
In particolare, se per ogni $x \in \partial M$, *si considera una parametrizzazione (locale) compatibile, allora* $\partial^+ M$ *si dice bordo orientato di* M.

Teorema 1.13. *(di Stokes)*
Siano $m \geq n \geq 2$, $\Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ *aperto e* $\varphi \in C^2(\Omega_0; \mathbb{R}^m)$ *una parametrizzazione di* $M_0 = \varphi(\Omega_0)$.
Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *un aperto regolare tale che* $\overline{\Omega} \subseteq \Omega_0$, $\omega \in C^1\big(\overline{M}; \Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^m)\big)$, *dove* $M = \varphi(\Omega)$.
Allora vale

$$\int_M d\omega = \int_{\partial^+ M} \omega \, .$$

Dimostrazione. Osserviamo che, usando la Definizione 1.33, il punto (iii) dell'Osservazione 1.30 e il Teorema 1.12, si ha

$$\int_M d\omega = \int_\Omega (d\omega)^{*,\varphi} = \int_\Omega d(\omega^{*,\varphi}) = \int_{\partial^+\Omega} \omega^{*,\varphi} \, .$$

Ora, per dimostrare

$$\int_{\partial^+ M} \omega = \int_{\partial^+\Omega} \omega^{*,\varphi}$$

utilizzeremo dei ricoprimenti aperti finiti di $\partial\Omega$ e ∂M come nell'Osservazione 1.11. Per ogni $\tilde{u} \in \partial\Omega$ consideriamo una parametrizzazione (locale) compatibile con l'orientazione di $\partial\Omega$, cioé siano $\tilde{D} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ aperto, $U_{\tilde{u}} \subseteq \mathbb{R}^n$ intorno di $\tilde{u}$ e $\tilde{\gamma} \in C^1(\tilde{D};\mathbb{R}^n)$ parametrizzazione, tale che

$$\partial^+\Omega \cap U_{\tilde{u}} = \tilde{\gamma}(\tilde{D}) \, .$$

Osserviamo che non è restrittivo supporre $U_{\tilde{u}} \subseteq \Omega_0$. La famiglia $\{U_{\tilde{u}}\}_{\tilde{u}\in\partial\Omega}$ è un ricoprimento aperto di $\partial\Omega$ e poiché quest'ultimo è compatto esiste un sottoricoprimento finito $\{A_i\}_{i\in I}$, dove $I = \{1, \ldots, q\}$, $q \in \mathbb{N}$, con

$$\partial^+\Omega \cap A_i = \gamma_i(D_i), \ \forall\, i \in I \, .$$

In particolare la famiglia $\{A_i\}_{i\in I}$ è un ricoprimento aperto finito di $\partial\Omega$ come nell'Osservazione 1.11. Siano ora $B_i \subseteq \mathbb{R}^m$ aperti tali che [1]

$$\varphi(A_i) = M_0 \cap B_i, \ \forall\, i \in I \, ,$$

quindi poniamo

$$\Gamma_i = \varphi \circ \gamma_i \in C^1(D_i;\mathbb{R}^m), \ \forall\, i \in I$$

e notiamo che Γ_i è una parametrizzazione (locale) di ∂M, compatibile con l'orientazione di ∂M, con

$$\partial^+ M \cap B_i = \Gamma_i(D_i), \ \forall\, i \in I \, .$$

In questo modo la famiglia $\{B_i\}_{i\in I}$ è un ricoprimento aperto finito di ∂M come nell'Osservazione 1.11. Usando il Lemma 1.5, consideriamo ora una partizione dell'unità $\{\eta_i\}_{i\in I}$, subordinata a $\{B_i\}_{i\in I}$. Usando la Definizione 1.34 e la condizione (iii) nella Definizione 1.21, si ha allora:

$$\int_{\partial^+ M} \omega = \int_{\partial^+ M} \sum_{i=1}^{q} \eta_i\omega = \sum_{i=1}^{q} \int_{\partial^+ M} \eta_i\omega.$$

[1]Poiché non è restrittivo supporre anche $\overline{A}_i \subseteq \Omega_0$, allora esiste $\varepsilon > 0$ per cui l'insieme

$$B_i = \left\{x + t\nu_x, \ x \in \varphi(A_i), \ t \in [0,\varepsilon), \ \nu_x \in N_x M_0, \ \|\nu_x\| = 1\right\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

sia aperto e tale che $\varphi(A_i) = M_0 \cap B_i$, dove $N_x M_0$ denota lo spazio normale ad M_0, nel punto x.

Dalla condizione (i) nella Definizione 1.21, si ha che vale

$$\mathrm{supp}(\eta_i\omega) \subseteq \mathrm{supp}(\eta_i) \subseteq B_i,\ \forall\, i \in I\ .$$

Consideriamo un singolo addendo della sommatoria; allora

$$\int_{\partial^+ M} \eta_i\omega = \int_{\partial^+ M\cap B_i} \eta_i\omega = \int_{D_i} \big(\eta_i\omega\big)^{*,\Gamma_i}\ . \tag{14}$$

Osserviamo ora che $\eta_i^{*,\varphi} = \eta_i \circ \varphi$, quindi la famiglia $\{\eta_i^{*,\varphi}\}_{i\in I}$, è una partizione dell'unità subordinata ad $\{A_i\}_{i\in I}$. Dalla Definizione 1.34 e dalla condizione (iii) nella Definizione 1.21, si ha allora:

$$\int_{\partial^+\Omega} \omega^{*,\varphi} = \int_{\partial^+\Omega} \sum_{i=1}^{q} \eta_i^{*,\varphi}\omega^{*,\varphi} = \sum_{i=1}^{q} \int_{\partial^+\Omega} \eta_i^{*,\varphi}\omega^{*,\varphi} = \sum_{i=1}^{q} \int_{\partial^+\Omega} (\eta_i\omega)^{*,\varphi}.$$

Dalla condizione (i) nella Definizione 1.21, si ha che vale

$$\mathrm{supp}\big((\eta_i\omega)^{*,\varphi}\big) \subseteq \mathrm{supp}(\eta_i^{*,\varphi}) \subseteq A_i,\ \forall\, i \in I\ .$$

Consideriamo un singolo addendo della sommatoria; allora, ricordando l'Osservazione 1.28, si ottiene

$$\int_{\partial^+\Omega} (\eta_i\omega)^{*,\varphi} = \int_{\partial^+\Omega\cap A_i} (\eta_i\omega)^{*,\varphi} = \int_{D_i} \big((\eta_i\omega)^{*,\varphi}\big)^{*,\gamma_i} = \int_{D_i} (\eta_i\omega)^{*,\Gamma_i}\ . \tag{15}$$

Quindi, da (14), (15) e usando la proprietà (iii) nella Definizione 1.21, si ha

$$\int_{\partial^+ M} \omega = \sum_{i=1}^{q} \int_{\partial^+ M\cap B_i} \eta_i\omega = \sum_{i=1}^{q} \int_{D_i} \big(\eta_i\omega\big)^{*,\Gamma_i} = \sum_{i=1}^{q} \int_{\partial^+\Omega\cap A_i} (\eta_i\omega)^{*,\varphi} = \int_{\partial^+\Omega} \omega^{*,\varphi}.$$

$\square$

Mostriamo ora alcuni esempi ed applicazioni.

Definizione 1.37. *(Rotore)*
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto ed $F \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$ un campo vettoriale, $F = (F_1, F_2, F_3)$. Chiamiamo ***rotore*** *di F, il seguente campo vettoriale*

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}(F(x)) &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}(x), \frac{\partial F_1}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}(x), \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x)\right) \\ &= \det \begin{pmatrix} e_1 & \dfrac{\partial}{\partial x_1} & F_1(x) \\ e_2 & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & F_2(x) \\ e_3 & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & F_3(x) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

dove l'ultimo termine rappresenta un determinate formale, con e_1, e_2, e_3 i versori di direzione canonici in $\mathbb{R}^3$.
Inoltre, si dice che F è un ***campo irrotazionale*** *se $\mathrm{rot}(F) \equiv 0$.*

Osservazione 1.34. *Sia* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ *un aperto ed* $F \in C^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$*. Allora*

$$\operatorname{div}\big(\operatorname{rot}(F(x))\big) = 0, \quad \forall\, x \in \Omega\ .$$

Infatti, dalle definizioni di rotore e di divergenza segue che per ogni $x \in \Omega$ *si ha*

$$\operatorname{div}\big(\operatorname{rot}(F(x))\big) =$$

$$= \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_1 \partial x_2}(x) - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_1 \partial x_3}(x) + \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial x_3}(x) - \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_2 \partial x_1}(x) + \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_3 \partial x_1}(x) - \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_3 \partial x_2}(x).$$

A questo punto dato che F *è di classe* C^2 *possiamo usare il teorema di Schwarz e concludere.*

Corollario 1.4. *(Teorema del rotore)*
Siano $\Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ *un aperto e* $\varphi \in C^2(\Omega_0;\mathbb{R}^3)$ *una parametrizzazione di* $\varphi(\Omega_0)$*.*
Siano Ω *un aperto regolare, con* $\overline{\Omega} \subseteq \Omega_0$*,* $\Sigma = \varphi(\Omega)$ *e* ν *la normale a* Σ*, determinata da* φ

$$\nu(\varphi(u)) = \frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) \times \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u)}{\left\| \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) \times \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u) \right\|}\ , \quad u = (u_1, u_2) \in \Omega,$$

dove "$\times$*" indica il prodotto vettoriale in* $\mathbb{R}^3$*. Sia ora* $\gamma \in C^1(I;\mathbb{R}^2)$*, con* $I \subseteq \mathbb{R}$ *aperto, una parametrizzazione (locale) di* $\partial\Omega$*, compatibile con l'orientazione di* $\partial\Omega$*, e sia* τ *il vettore tangente unitario a* $\partial\Sigma$*, definito da*

$$\tau\big(\Gamma(t)\big) = \frac{\dot{\Gamma}(t)}{\|\dot{\Gamma}(t)\|}, \quad \Gamma(t) = \varphi\big(\gamma(t)\big), \quad t \in I\ .$$

Sia infine $F \in C^1(\overline{\Sigma};\mathbb{R}^3)$*, allora si ha*

$$\int_\Sigma \langle \operatorname{rot}(F), \nu \rangle dH^2 = \int_{\partial\Sigma} \langle F, \tau \rangle dH^1\ .$$

La quantità $\displaystyle\int_{\partial\Sigma} \langle F, \tau \rangle dH^1$ *si chiama* ***circuitazione*** *del campo* F *lungo* $\partial\Sigma$*.*

Dimostrazione. Definiamo la seguente forma differenziale

$$\omega(x) := F_1(x)dx_1 + F_2(x)dx_2 + F_3(x)dx_3$$

ed osserviamo che $\omega \in C^1(\overline{\Sigma}, \Lambda^1(\mathbb{R}^3))$. Applicando la definizione di differenziale esterno si ha

$$\begin{aligned}
d\omega(x) &= d(F_1(x)dx_1 + F_2(x)dx_2 + F_3(x)dx_3) \\
&= -\frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x)dx_1 \wedge dx_2 - \frac{\partial F_1}{\partial x_3}(x)dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x)dx_1 \wedge dx_2 \\
&\quad - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}(x)dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial F_3}{\partial x_1}(x)dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial F_3}{\partial x_2}(x)dx_2 \wedge dx_3 \\
&= \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x)\right) dx_1 \wedge dx_2 + \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial F_1}{\partial x_3}(x)\right) dx_1 \wedge dx_3 \\
&\quad + \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}(x)\right) dx_2 \wedge dx_3 \\
&= \big(\mathrm{rot}(F(x))\big)_3 dx_1 \wedge dx_2 - \big(\mathrm{rot}(F(x))\big)_2 dx_1 \wedge dx_3 + \big(\mathrm{rot}(F(x))\big)_1 dx_2 \wedge dx_3.
\end{aligned}$$

A questo punto osserviamo che, ponendo

$$N = N(\varphi(u)) = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) \times \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u), \quad u \in \Omega,$$

si ha

$$\begin{aligned}
d\omega^{*,\varphi}(u) &= \left[\big(\mathrm{rot}(F(\varphi(u)))\big)_3 N_3 - \big(\mathrm{rot}(F(\varphi(u)))\big)_2(-N_2) + \big(\mathrm{rot}(F(\varphi(u)))\big)_1 N_1\right] du_1 \wedge du_2 \\
&= \left[\big(\mathrm{rot}(F(\varphi(u)))\big)_3 \frac{N_3}{\|N\|} + \big(\mathrm{rot}(F(\varphi(u)))\big)_2 \frac{N_2}{\|N\|} + \big(\mathrm{rot}(F(\varphi(u)))\big)_1 \frac{N_1}{\|N\|}\right] \|N\| du_1 \wedge du_2 \\
&= \left[\big(\mathrm{rot}(F(\varphi(u)))\big)_3 \nu_3 + \big(\mathrm{rot}(F(\varphi(u)))\big)_2 \nu_2 + \big(\mathrm{rot}(F(\varphi(u)))\big)_1 \nu_1\right] J_\varphi(u) du_1 \wedge du_2 \\
&= \langle \mathrm{rot}(F(\varphi(u))), \nu(\varphi(u))\rangle J_\varphi(u) du_1 \wedge du_2.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma d\omega &= \int_{\varphi(\Omega)} d\omega \\
&= \int_\Omega d\omega^{*,\varphi} \\
&= \int_\Omega \langle \mathrm{rot}(F(\varphi(u))), \nu(\varphi(u))\rangle J_\varphi(u) du_1 \wedge du_2 \\
&= \int_\Omega \langle \mathrm{rot}(F(\varphi(u))), \nu(\varphi(u))\rangle J_\varphi(u) du_1 du_2 \\
&= \int_\Sigma \langle \mathrm{rot}(F), \nu\rangle dH^2.
\end{aligned}$$

D'altra parte, osserviamo che $\Gamma = \varphi \circ \gamma$ è una parametrizzazione (locale) di $\partial\Sigma$, compatibile con l'orientazione di $\partial\Sigma$ e si ha (localmente, per ogni $t \in I$)

$$\begin{aligned}
\omega^{*,\Gamma}(t) &= \Big(F_1(\Gamma(t))\dot{\Gamma}_1(t) + F_2(\Gamma(t))\dot{\Gamma}_2(t) + F_3(\Gamma(t))\dot{\Gamma}_3(t)\Big)\, dt \\
&= \left(F_1(\Gamma(t))\frac{\dot{\Gamma}_1(t)}{\left\|\dot{\Gamma}(t)\right\|} + F_2(\Gamma(t))\frac{\dot{\Gamma}_2(t)}{\left\|\dot{\Gamma}(t)\right\|} + F_3(\Gamma(t))\frac{\dot{\Gamma}_3(t)}{\left\|\dot{\Gamma}(t)\right\|}\right) \left\|\dot{\Gamma}(t)\right\| dt \\
&= \Big(F_1(\Gamma(t))\tau_1(t) + F_2(\Gamma(t))\tau_2(t) + F_3(\Gamma(t))\tau_3(t)\Big) J_\Gamma(t) dt \\
&= \langle F(\Gamma(t)), \tau(\Gamma(t))\rangle J_\Gamma(t) dt.
\end{aligned}$$

Pertanto, si ha

$$\int_{\partial^+\Sigma} \omega = \int_{\partial^+\Sigma} \langle F, \tau\rangle dH^1.$$

Infine, applicando il teorema di Stokes, si ottiene

$$\int_\Sigma \langle \mathrm{rot}(F), \nu\rangle dH^2 = \int_\Sigma d\omega = \int_{\partial^+\Sigma} \omega = \int_{\partial^+\Sigma} \langle F, \tau\rangle dH^1.$$

□

Osservazione 1.35. *(Teorema di Faraday)*
Siano $E_t \in C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ un campo elettrico e $B_t \in C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ il campo magnetico indotto, dove anche le mappe $t \mapsto E_t$ e $t \mapsto B_t$ sono di classe C^1, per ogni tempo $t \in \mathbb{R}$. Siano ora Σ, ν, τ come nel Teorema del rotore 1.4, ed indipendenti dal tempo. Allora vale la seguente equazione integrale (Teorema di Faraday): la circuitazione del campo elettrico lungo $\partial\Sigma$ è uguale all'opposto della variazione temporale del flusso del campo magnetico attraverso Σ, cioè

$$\int_{\partial\Sigma} \langle E_t, \tau\rangle dH^1 = -\frac{d}{dt}\left(\int_\Sigma \langle B_t, \nu\rangle dH^2\right) .$$

Teorema 1.14. *(Terza equazione di Maxwell)*
Siano $E_t \in C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ un campo elettrico e $B_t \in C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ il campo magnetico indotto, dove anche le mappe $t \mapsto E_t$ e $t \mapsto B_t$ sono di classe C^1, per ogni tempo $t \in \mathbb{R}$. Allora vale la seguente equazione differenziale

$$\mathrm{rot}(E_t(x)) = -\frac{\partial B_t}{\partial t}(x), \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Dimostrazione. Siano Σ, ν, τ come nel Teorema del rotore 1.4, ed indipendenti dal tempo. Allora vale

$$\int_\Sigma \langle \mathrm{rot}(E_t), \nu\rangle dH^2 = \int_{\partial\Sigma} \langle E_t, \tau\rangle dH^1 .$$

Inoltre, si ha anche

$$\frac{d}{dt}\left(\int_\Sigma \langle B_t, \nu\rangle dH^2\right) = \int_\Sigma \langle \frac{\partial B_t}{\partial t}, \nu\rangle dH^2 \ .$$

Dal teorema di Faraday, Osservazione 1.35, si ottiene

$$\int_\Sigma \langle \mathrm{rot}(E_t) + \frac{\partial B_t}{\partial t}, \nu\rangle dH^2 = 0.$$

Poiché Σ è arbitraria e la funzione integranda è continua, allora la precedente equazione integrale vale anche puntualmente, ottenendo la tesi. □

Osservazione 1.36. *(Potenziale elettrostatico)*
Dal Teorema di Faraday (o dalla terza equazione di Maxwell) si ha che il campo elettrostatico (cioè il campo elettrico in regime stazionario) è un campo conservativo, quindi esiste una funzione $V \in C^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$, detta ***potenziale elettrostatico****, tale che*

$$E(x) = -\nabla V(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \ .$$

In particolare, il campo elettrostatico è irrotazionale.

2 Parte Seconda

2.1 Polinomi trigonometrici e di Fourier

Richiamiamo alcune formule trigonometriche

Lemma 2.1. *Siano* $t, s, h, k \in \mathbb{R}$. *Si ha*

$$\cos(t \pm s) = \cos(t)\cos(s) \mp \sin(t)\sin(s)\ ,$$
$$\sin(t \pm s) = \sin(t)\cos(s) \pm \cos(t)\sin(s)\ ,$$

$$\begin{aligned} \cos(ht)\cos(kt) &= \frac{1}{2}\big\{ \cos((h-k)t) + \cos((h+k)t)\big\}\ , \\ \sin(ht)\cos(kt) &= \frac{1}{2}\big\{ \sin((h+k)t) + \sin((h-k)t)\big\}\ , \\ \sin(ht)\sin(kt) &= \frac{1}{2}\big\{ \cos((h-k)t) - \cos((h+k)t)\big\}\ . \end{aligned}$$

Siano ora $h, k \in \mathbb{N}$. *Valgono le seguenti formule integrali*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(ht)\cos(kt)dt = \begin{cases} 0, & se\ h \neq k \\ \pi, & se\ h = k \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(ht)\sin(kt)dt = \begin{cases} 0, & se\ h \neq k \\ \pi, & se\ h = k \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(ht)\sin(kt)dt = 0$$

Definizione 2.1. *(Polinomio trigonometrico)*
Un ***polinomio trigonometrico*** *(reale), di grado minore o uguale ad* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *è una funzione*

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\}$$

dove $a_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \in \mathbb{R}$*; questi ultimi si chiamano i coefficienti di* p.
Si dice che p *ha grado uguale ad* n, *se* a_n *e* b_n *non sono entrambi nulli.*
L'insieme dei polinomi trigonometrici di grado minore o uguale a n *si indica con* T_n.

Osservazione 2.1. *Siano $h, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Allora le funzioni*

$$\big(\cos(t)\big)^h \big(\sin(t)\big)^k$$

sono polinomi trigonometrici.

Osservazione 2.2. *Sia $p \in T_n$. Allora $p \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, 2π-periodica.*

Osservazione 2.3. *Siano $p \in T_n$, $q \in T_m$. Allora $p \cdot q \in T_{n+m}$.*

Proposizione 2.1. *Sia $p \in T_n$, dato da*

$$p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\} \ .$$

Allora si ha

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(t)\cos(kt)dt, \quad k = 0, ..., n$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(t)\sin(kt)dt, \quad k = 1, ..., n$$

In particolare, due polinomi trigonometrici sono uguali se e solo se hanno gli stessi coefficienti.

Dimostrazione. Se $k = 0$, si ha $\cos(kt) = 1$ e quindi,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(t)dt &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}dt + \frac{1}{\pi}\sum_{h=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} \{a_h \cos(ht) + b_h \sin(ht)\}\, dt \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{a_0}{2}(2\pi) + \frac{1}{\pi}\sum_{h=1}^{n}\left\{\frac{a_h}{h}\,[\sin(ht)]_{-\pi}^{\pi} - \frac{b_h}{h}\,[\cos(ht)]_{-\pi}^{\pi}\right\} \\
&= a_0 + 0 = a_0.
\end{aligned}$$

Sia ora $k = 1, \dots, n$. Allora,

$$\int_{-\pi}^{\pi} p(t)\cos(kt)dt = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos(kt)dt + \sum_{h=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}\{a_h\cos(ht)\cos(kt) + b_h\sin(ht)\cos(kt)\}\, dt.$$

Utilizzando le formule del Lemma 2.1, l'unico integrale che non si annulla sarà quello che otteniamo per $h = k$ ed abbiamo così

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(t)\cos(kt)dt = \frac{1}{\pi}(a_k\pi + 0) = a_k.$$

Per b_k si ragiona in modo del tutto analogo. $\square$

Osservazione 2.4. *L'insieme T_n è un sottospazio vettoriale di $C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, di dimensione $2n+1$. In particolare le funzioni*

$$\{1, \cos(t), \sin(t), \ldots, \cos(nt), \sin(nt)\}$$

sono linearmente indipendenti e costituiscono una base per T_n; infatti, dato $p \in T_n$ si ha

$$p = 0 \iff a_0 = a_1 = b_1 = \ldots = a_n = b_n = 0 \, .$$

Ricordiamo la seguente definizione

Definizione 2.2. *(Spazi $L^p(\Omega;\mathbb{R})$)*
Siano $n \in \mathbb{N}$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Dato $p \in \mathbb{R}$, con $1 \le p < +\infty$, definiamo lo ***spazio*** *$L^p(\Omega;\mathbb{R})$ nel seguente modo*

$$L^p(\Omega;\mathbb{R}) = \left\{ u \in Mis(\Omega;\mathbb{R}) \;\; t.c. \;\; \int_\Omega |u(x)|^p dx < +\infty \right\},$$

dove abbiamo indicato con $Mis(\Omega;\mathbb{R})$ l'insieme delle funzioni misurabili, secondo Lebesgue, da Ω a valori reali.

Osservazione 2.5. *Lo spazio $L^p(\Omega;\mathbb{R})$ munito della norma*

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \; u \in L^p(\Omega;\mathbb{R})$$

è uno spazio di Banach separabile; inoltre se $1 < p < +\infty$ allora è anche riflessivo.
In particolare, $L^2(\Omega;\mathbb{R})$ è uno spazio di Hilbert, munito del prodotto scalare

$$\langle u, v \rangle_{L^2} = \int_\Omega u(x)v(x)dx \, , \quad u, v \in L^2(\Omega;\mathbb{R}) \, .$$

Introduciamo ora alcuni speciali spazi di funzioni periodiche.

Definizione 2.3. *(Spazi $L^p\big(S^1;\mathbb{R}\big)$)*
Dato $p \in \mathbb{R}$, con $1 \le p < +\infty$, definiamo lo ***spazio*** *$L^p\big(S^1;\mathbb{R}\big)$*

$$L^p\big(S^1;\mathbb{R}\big) = L^p_{per}\big((-\pi,\pi);\mathbb{R}\big),$$

come lo spazio delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodiche, con $f \in L^p\big((-\pi,\pi);\mathbb{R}\big)$.

Osservazione 2.6. *Sia $f \in L^1\big(S^1;\mathbb{R}\big)$. Allora per ogni $c \in \mathbb{R}$, si ha*

$$\int_c^{c+2\pi} f(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \, .$$

Osservazione 2.7. *Sia $f \in L^1\big(S^1;\mathbb{R}\big)$. Allora, per ogni $k \in \mathbb{N}$, vale*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt \in \mathbb{R}, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt \in \mathbb{R}$$

Introduciamo ora i polinomi di Fourier reali; le definizioni e i relativi risultati si estendono anche al caso di funzioni a valori complessi (si veda l'Appendice A.1).

Definizione 2.4. *(Polinomio di Fourier)*
Sia $f \in L^1\big(S^1;\mathbb{R}\big)$. Si chiama ***polinomio di Fourier*** *di f, di grado minore o uguale ad $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, il seguente polinomio trigonometrico*

$$S_n(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad S_n(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\} \ ,$$

dove

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt, \quad k = 0, ..., n$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt, \quad k = 1, ..., n$$

sono detti i coefficienti di Fourier di f.

Osservazione 2.8. *Sia $f \in L^1\big(S^1;\mathbb{R}\big)$. Se f viene modificata su un insieme di misura nulla, i coefficienti di Fourier non cambiano.*

Osservazione 2.9. *L'operatore S_n è lineare su $L^1\big(S^1;\mathbb{R}\big)$, cioè:*

$$S_n(\alpha f + \beta g) = \alpha S_n(f) + \beta S_n(g) \ ,$$

per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f, g \in L^1\big(S^1;\mathbb{R}\big)$.

Osservazione 2.10. *Non è restrittivo considerare funzioni 2π-periodiche, infatti se f è una funzione T-periodica, con $T > 0$, allora è possibile determinare una funzione $\widetilde{f}$ che sia 2π-periodica, mediante la seguente trasformazione*

$$s \mapsto t = \tfrac{T}{2\pi}s, \qquad f(t) = f\left(\tfrac{T}{2\pi}s\right) = \widetilde{f}(s) \ .$$

In particolare, se f è una funzione T-periodica e sommabile su un intervallo di lunghezza T, allora usando il precedente cambio di variabile, si definisce il suo polinomio di Fourier nel seguente modo

$$S_n(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad S_n(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left\{ a_k \cos\left(\tfrac{2\pi}{T} kt\right) + b_k \sin\left(\tfrac{2\pi}{T} kt\right) \right\} ,$$

dove

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos\left(\tfrac{2\pi}{T} kt\right) dt, \quad k = 0, ..., n$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin\left(\tfrac{2\pi}{T} kt\right) dt, \quad k = 1, ..., n$$

Riportiamo di seguito alcuni esempi.

Esempio 2.1. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodica, definita sull'intervallo $[-\pi, \pi[$ nel seguente modo*

$$f(t) = \begin{cases} 0, & se\ t = -\pi \\ t, & se\ t \in (-\pi, \pi). \end{cases}$$

Utilizzando la Definizione 2.4, poiché la funzione è dispari, avremo che

$$a_k = 0 \quad \forall k = 0, \ldots, n.$$

Inoltre, per ogni $k = 1, \ldots, n$, si ha

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(kt) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} t \sin(kt) dt \\ &\overset{per\ parti}{=} 2 \left[-\frac{1}{k\pi} t \cos(kt) \right]_0^{\pi} + \frac{2}{k\pi} \int_0^{\pi} \cos(kt) dt \\ &= -\frac{2\pi}{k\pi} \cos(k\pi) + \frac{2}{k^2\pi} [\sin(kt)]_0^{\pi} \\ &= -\frac{2}{k} \cos(k\pi) + 0. \end{aligned}$$

Osserviamo che $\cos(k\pi) = (-1)^k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e quindi

$$b_k = -(-1)^k \frac{2}{k} \quad \forall k = 1, \ldots, n.$$

Perciò

$$S_n(f)(t) = 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kt) .$$

Esempio 2.2. *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π*-periodica, definita sull'intervallo* $[-\pi, \pi[$ *nel seguente modo*

$$f(t) = \begin{cases} t + 2\pi, & se\ t \in [-\pi, 0) \\ t, & se\ t \in [0, \pi). \end{cases}$$

Utilizzando l'Osservazione 2.6, si ha che se lavoriamo su $[0, 2\pi)$ *allora* f *è la funzione identità. Utilizzando la Definizione 2.4, si ha che*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t dt = \frac{1}{2\pi}(4\pi^2 - 0) = 2\pi.$$

Se $k \geq 1$, *integrando per parti, avremo che*

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t \cos(kt) dt = \frac{1}{\pi} \left\{ \left[\frac{t \sin(kt)}{k} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{1}{k} \sin(kt) dt \right\} = 0$$

e

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t \sin(kt) dt = \frac{1}{\pi} \left\{ \left[\frac{t \cos(kt)}{k} \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{1}{k} \cos(kt) dt \right\} = -\frac{2}{k}.$$

Perciò

$$S_n(f)(t) = \pi - 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kt)}{k} \ .$$

Esempio 2.3. *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π*-periodica, definita sull'intervallo* $[-\pi, \pi[$ *nel seguente modo*

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(t), & se\ t \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\} \\ 0, & se\ \ t = -\pi, 0. \end{cases}$$

Utilizzando la Definizione 2.4, poiché la funzione è dispari, avremo che

$$a_k = 0 \quad \forall k \geq 0.$$

D'altra parte, per $k \geq 1$ *avremo che*

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn}(t) \sin(kt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(kt) dt = -\frac{2}{k\pi}(\cos(k\pi) - 1).$$

Quindi

$$b_k = \frac{2}{k\pi} \left(1 - (-1)^k\right) = \begin{cases} 0, & se\ k\ \text{è}\ pari \\ \frac{4}{k\pi}, & se\ k\ \text{è}\ dispari. \end{cases}$$

Perciò

$$S_{2n+1}(f)(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin\left((2k+1)t\right)}{2k+1} \ .$$

Esempio 2.4. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodica, definita sull'intervallo $[-\pi, \pi[$ nel seguente modo*

$$f(t) = |t| \, .$$

Utilizzando la Definizione 2.4, poiché la funzione è pari, avremo che

$$b_k = 0 \quad \forall k \geq 1.$$

D'altra parte, si ha

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t dt = \pi$$

e per $k \geq 1$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| \cos(kt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos(kt) dt \\ &\overset{per\ parti}{=} \frac{2}{\pi} \left\{ \left[\frac{t \sin(kt)}{k} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(kt)}{k} dt \right\} \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ 0 + \frac{1}{k^2} (\cos(k\pi) - 1) \right\} . \end{aligned}$$

Perciò

$$a_k = \frac{2}{k^2 \pi} \Big((-1)^k - 1 \Big) = \begin{cases} 0, & \textit{se } k \textit{ è pari} \\ -\frac{4}{k^2\pi}, & \textit{se } k \textit{ è dispari.} \end{cases}$$

Dunque

$$S_{2n+1}(f)(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos\big((2k+1)t\big)}{(2k+1)^2} \, .$$

Esempio 2.5. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodica, definita sull'intervallo $[-\pi, \pi[$ nel seguente modo*

$$f(t) = t^2 \, .$$

Utilizzando la Definizione 2.4, poiché la funzione è pari, avremo che

$$b_k = 0 \quad \forall k = 1, \ldots, n.$$

D'altra parte, si ha

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 dt = \frac{2}{\pi} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{\pi} = 2 \frac{\pi^2}{3}$$

e per $k \geq 1$

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\cos(kt)dt \\
&\overset{per\ parti}{=} \frac{2}{\pi}\left[\frac{t^2}{k}\sin(kt)\right]_0^{\pi} - \frac{4}{k\pi}\int_0^{\pi} t\sin(kt)dt \\
&\overset{per\ parti}{=} 0 + \frac{4}{k^2\pi}\left[t\cos(kt)\right]_0^{\pi} + \frac{4}{k^2\pi}\int_0^{\pi}\cos(kt)dt \\
&= \frac{4}{k^2}\cos(k\pi) + \frac{4}{k^3\pi}\left[\sin(kt)\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{4}{k^2}(-1)^k.
\end{aligned}
$$

Perciò

$$S_n(f)(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos(kt)\ .$$

Esempio 2.6. *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π*-periodica, definita sull'intervallo* $[-\pi, \pi[$ *nel seguente modo*

$$f(t) = \begin{cases} 0, & se\ t \in [-\pi, 0) \\ t, & se\ t \in [0, \pi). \end{cases}$$

Si ha che, vista la definizione della funzione, per calcolare i coefficienti di Fourier è sufficiente integrare tra 0 *e* π *nella Definizione 2.4. Si ha che*

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} tdt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Inoltre, per $k = 1, \dots, n$ *si ha*

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(kt)dt \\
&\overset{per\ parti}{=} \frac{1}{\pi}\left[\frac{t}{k}\sin(kt)\right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{k}\sin(kt)dt \\
&= 0 + \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(kt)}{k^2}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{\cos(k\pi) - 1}{\pi k^2} \\
&= \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}.
\end{aligned}
$$

Similmente, per $k = 1, \ldots, n$ *si ha*

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi t \sin(kt) dt \\
&\overset{per\ parti}{=} -\frac{1}{\pi} \left[\frac{t}{k} \cos(kt) \right]_0^\pi + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{k} \cos(kt) dt \\
&= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{k} \cos(k\pi) \right) + \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(kt)}{k^2} \right]_0^\pi \\
&= -\frac{\cos(k\pi)}{k} + 0 \\
&= -\frac{(-1)^k}{k}.
\end{aligned}$$

Dunque

$$S_n(f)(t) = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^n \frac{\big((-1)^k - 1\big)}{\pi k^2} \cos(kt) - \frac{(-1)^k}{k} \sin(kt) \,.$$

2.2 Sviluppabilità in serie di Fourier

Definizione 2.5. *(Serie di Fourier)*
Sia $f \in L^1\big(S^1;\mathbb{R}\big)$. Si chiama ***serie di Fourier*** *di f, la seguente serie di funzioni*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\{a_k\cos(kt)+b_k\sin(kt)\}\ ,$$

dove

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(kt)dt, \quad k\geq 0$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin(kt)dt, \quad k\geq 1\ .$$

In particolare $S_n(f)$ è la successione delle somme parziali.
Inoltre, diremo che f è sviluppabile in serie di Fourier, nel punto $t \in \mathbb{R}$, se valgono le seguenti condizioni:

(i) la serie di Fourier converge puntualmente in t, cioè esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ con

$$\lim_{n\to+\infty}S_n(f)(t)=\lambda\ ,$$

(ii) la somma della serie di Fourier coincide con il valore di f in t, cioè

$$\lambda=f(t)\ .$$

Osservazione 2.11. *Data $f \in L^1\big(S^1;\mathbb{R}\big)$, usando la formula di Eulero è possibile scrivere la serie di Fourier di f in una forma più compatta, utilizzando l'esponenziale complesso invece delle funzioni trigonometriche reali (si veda a riguardo l'Osservazione A.3, nell'Appendice A.1).*

Definizione 2.6. *(Nucleo di Dirichlet)*
Sia $n \in \mathbb{N}$. Si chiama ***nucleo di Dirichlet*** *il seguente polinomio trigonometrico*

$$D_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad D_n(t)=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)\right\}\ .$$

Osservazione 2.12. *Valgono le seguenti proprietà:*

(i) D_n *è pari;*

(ii) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = 1;$

(iii) $D_n(t) = \dfrac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\pi\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$

Proviamo (i); per definizione di nucleo di Dirichlet

$$D_n(-t) = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(-kt)\right\}.$$

Tuttavia, per la parità della funzione coseno

$$\cos(-kt) = \cos(kt), \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall k = 1, \dots, n$$

e quindi $D_n(t) = D_n(-t)$.
Per provare (ii), osserviamo che

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = \frac{1}{2\pi}(\pi - (-\pi)) + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kt)dt.$$

A questo punto, si ha che

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kt)dt = k\big[\sin(kt)\big]_{-\pi}^{\pi} = k(\sin(k\pi) - \sin(-k\pi)) = 0, \quad \forall k = 1, \dots, n$$

e quindi

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = 1.$$

Infine, per quanto riguarda (iii), per $k = 1, \dots, n$, *usando le formule trigonometriche del Lemma 2.1 e sfruttando la disparità della funzione seno, otteniamo*

$$\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos(kt) = \frac{1}{2}\left\{\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right) - \sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)t\right)\right\}.$$

Sommando in k *abbiamo una somma telescopica e quindi*

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right) - \sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)t\right)\right\} = \frac{1}{2}\left\{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right\}.$$

Perciò, usando la definizione di nucleo di Dirichlet, avremo che

$$2\pi\sin\left(\frac{t}{2}\right)D_n(t) = \sin\left(\frac{t}{2}\right) + 2\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos(kt) = \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right).$$

Lemma 2.2. *(Forma compatta per $S_n(f)$)*
Sia $f \in L^1\big(S^1;\mathbb{R}\big)$. Allora

$$S_n(f)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(s)D_n(s-t)ds = 2\int_0^{\pi} m_f(t,s)D_n(s)ds\ ,$$

dove abbiamo indicato, per ogni $t, s \in \mathbb{R}$,

$$m_f(t,s) = \frac{f(t+s)+f(t-s)}{2}.$$

Dimostrazione. Utilizzando le formule per i coefficienti di Fourier e le proprietà del nucleo di Dirichlet, si ha

$$\begin{aligned}
S_n(f)(t) =& \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\} \\
=& \int_{-\pi}^{\pi} f(s)\frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(ks)\cos(kt) + \sin(ks)\sin(kt)\right\} ds \\
=& \int_{-\pi}^{\pi} f(s)\frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos\big(k(s-t)\big)\right\} ds \\
=& \int_{-\pi}^{\pi} f(s)D_n(s-t)ds \\
=& \int_{-\pi-t}^{\pi-t} f(t+x)D_n(x)dx \\
=& \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)D_n(x)dx \\
=& \int_{-\pi}^{0} f(t+x)D_n(x)dx + \int_0^{\pi} f(t+x)D_n(x)dx \\
=& \int_0^{\pi} f(t-s)D_n(-s)ds + \int_0^{\pi} f(t+s)D_n(s)ds \\
=& \int_0^{\pi} f(t-s)D_n(s)ds + \int_0^{\pi} f(t+s)D_n(s)ds \\
=& \int_0^{\pi} f(t-s)D_n(s) + f(t+s)D_n(s)ds \\
=& 2\int_0^{\pi} m_f(t,s)D_n(s)ds\ .
\end{aligned}$$

□

Proposizione 2.2. *Sia $f \in L^1\big(S^1;\mathbb{R}\big)$. Siano $t, \lambda \in \mathbb{R}$, allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

(i) $\lim_{n\to+\infty} S_n(f)(t) = \lambda$;

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\big(m_f(t,s)-\lambda\big)D_n(s)ds = 0$.

Dimostrazione. Poiché per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ vale

$$2\int_0^{\pi}\lambda D_n(t)dt = \lambda \; ,$$

allora si ottiene

$$S_n(f)(t)-\lambda = 2\int_0^{\pi}\big(m_f(t,s)-\lambda\big)D_n(s)ds \; .$$

□

Richiamiamo il seguente risultato di densità

Teorema 2.1. *(di densità)*
Siano $n \in \mathbb{N}$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Dato $p \in \mathbb{R}$, con $1 \le p < +\infty$, allora l'insieme $C_0^{\infty}(\Omega;\mathbb{R})$ (l'insieme delle funzioni C^{∞} a supporto compatto contenuto in Ω) è denso in $L^p(\Omega;\mathbb{R})$, cioè: data $f \in L^p(\Omega;\mathbb{R})$, allora si ha che

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \varphi_\varepsilon \in C_0^{\infty}(\Omega;\mathbb{R}) \ \ t.c. \ \ \|f-\varphi_\varepsilon\|_{L^p} < \varepsilon \; .$$

Lemma 2.3. *(di Riemann-Lebesgue)*
Sia $f \in L^1\big((a,b);\mathbb{R}\big)$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Allora valgono le seguenti:

(i) $\displaystyle\lim_{|\alpha|\to+\infty}\int_a^b f(s)\cos(\alpha s)ds = 0$;

(ii) $\displaystyle\lim_{|\alpha|\to+\infty}\int_a^b f(s)\sin(\alpha s)ds = 0$.

Dimostrazione. Dimostriamo solo la *(i)*, la *(ii)* è analoga. Dal Teorema (di densità) 2.1, poiché $C_0^{\infty}\big((a,b);\mathbb{R}\big)$ è denso in $L^1\big((a,b);\mathbb{R}\big)$, allora

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \varphi_\varepsilon \in C_0^{\infty}\big((a,b);\mathbb{R}\big) \ \ \text{t.c.} \ \ \|f-\varphi_\varepsilon\|_{L^1} < \varepsilon \; .$$

Scriviamo

$$\int_a^b f(s)\cos(\alpha s)ds = \int_a^b \big(f(s)-\varphi_\varepsilon(s)\big)\cos(\alpha s)ds + \int_a^b \varphi_\varepsilon(s)\cos(\alpha s)ds.$$

Per il primo addendo, si ha

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b \big(f(s)-\varphi_\varepsilon(s)\big)\cos(\alpha s)ds\right| &\le \int_a^b |f(s)-\varphi_\varepsilon(s)|\,|\cos(\alpha s)|ds \\ &\le \int_a^b |f(s)-\varphi_\varepsilon(s)|ds \\ &= \|f-\varphi_\varepsilon\|_{L^1} < \varepsilon \; , \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Per il secondo addendo, poiché $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty\big((a,b);\mathbb{R}\big)$, integrando per parti, esiste $C_\varepsilon > 0$ tale che $(\alpha \neq 0)$

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b \varphi_\varepsilon(s)\cos(\alpha s)ds\right| &= \left|\left[\frac{\sin(\alpha s)}{\alpha}\varphi_\varepsilon(s)\right]_a^b - \int_a^b \frac{\sin(\alpha s)}{\alpha}\varphi'_\varepsilon(s)ds\right| \\
&= \left|-\frac{1}{\alpha}\int_a^b \sin(\alpha s)\varphi'_\varepsilon(s)ds\right| \\
&= \frac{1}{|\alpha|}\left|\int_a^b \sin(\alpha s)\varphi'_\varepsilon(s)ds\right| \\
&\leq \frac{1}{|\alpha|}\int_a^b |\varphi'_\varepsilon(s)|ds \\
&\leq \frac{C_\varepsilon}{|\alpha|} \xrightarrow[|\alpha|\to+\infty]{} 0\ .
\end{aligned}$$

In conclusione,

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, M_\varepsilon > 0,\ \text{ t.c. } \left|\int_a^b f(s)\cos(\alpha s)ds\right| < 2\varepsilon,\ \forall\, |\alpha| > M_\varepsilon\ ,$$

concludendo la dimostrazione. □

Osservazione 2.13. *Il lemma di Riemann-Lebesgue fornisce una condizione necessaria affinchè una serie trigonometrica sia la serie di Fourier di una qualche funzione $f \in L^1\big(S^1;\mathbb{R}\big)$, in particolare i coefficienti devono essere infinitesimi.*

Teorema 2.2. *(di localizzazione di Riemann)*
Sia $f \in L^1\big(S^1;\mathbb{R}\big)$. Siano $t,\lambda \in \mathbb{R}$, allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:

(i) $\lim_{n\to+\infty} S_n(f)(t) = \lambda$;

(ii) $\exists\, c \in \mathbb{R}$ *tale che*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^c \big(m_f(t,s)-\lambda\big)\frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})s\big)}{s}ds = 0\ .$$

Dimostrazione. Sia $c \in (0,\pi)$ tale che

$$\int_0^\pi \big(m_f(t,s)-\lambda\big)D_n(s)ds = \int_0^c \big(m_f(t,s)-\lambda\big)D_n(s)ds + \int_c^\pi \big(m_f(t,s)-\lambda\big)D_n(s)ds.$$

Per la Proposizione 2.2, si ha che (i) vale se e solo se

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi \big(m_f(t,s)-\lambda\big)D_n(s)ds = 0.$$

Ora, per il Lemma di Riemann-Lebesgue 2.3, si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\int_c^\pi \frac{\big(m_f(t,s)-\lambda\big)}{2\sin\left(\frac{s}{2}\right)}\sin\big((n+\tfrac{1}{2})s\big)ds = 0\ ,$$

poichè la funzione

$$s \mapsto \frac{\big(m_f(t,s)-\lambda\big)}{2\sin\left(\frac{s}{2}\right)}$$

è L^1 su (c,π). Quindi (i) vale se e solo se

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^c \big(m_f(t,s)-\lambda\big)\frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})s\big)}{2\sin\left(\frac{s}{2}\right)}ds = 0.$$

Adesso, la funzione

$$g(s) := \frac{1}{s} - \frac{1}{2\sin\left(\frac{s}{2}\right)}$$

è continua e limitata su $(0,c)$, infatti

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{2\sin\left(\frac{s}{2}\right)} \simeq \frac{-\frac{s^3}{24}+o(s^3)}{s^2+o(s^2)} \xrightarrow[s\to 0]{} 0\ .$$

Si ottiene quindi che $g \in L^1\big((0,c);\mathbb{R}\big)$, perciò nuovamente per il Lemma di Riemann-Lebesgue si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^c \big(m_f(t,s)-\lambda\big)\sin\big((n+\tfrac{1}{2})s\big)\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{2\sin\left(\frac{s}{2}\right)}\right)ds = 0.$$

In conclusione

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^c \big(m_f(t,s)-\lambda\big)\frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})s\big)}{2\sin\left(\frac{s}{2}\right)}ds = 0$$

se e solo se

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^c \big(m_f(t,s)-\lambda\big)\frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})s\big)}{s}ds = 0.$$

□

Corollario 2.1. *(Criterio di Dini)*
Sia $f \in L^1\big(S^1;\mathbb{R}\big)$. Dato $t \in \mathbb{R}$, se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $g \in L^1\big((0,c);\mathbb{R}\big)$ per qualche $c > 0$, dove

$$g(s) = \frac{m_f(t,s)-\lambda}{s}\ ,$$

allora

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f)(t) = \lambda\ .$$

Dimostrazione. Dal Lemma di Riemann-Lebesgue si ha

$$0 = \lim_{n\to+\infty} \int_0^c g(s) \sin\big((n+\tfrac{1}{2})s\big) ds = \lim_{n\to+\infty} \int_0^c \frac{m_f(t,s)-\lambda}{s} \sin\big((n+\tfrac{1}{2})s\big) ds \, .$$

Dal teorema di localizzazione di Riemann si ottiene allora

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f)(t) = \lambda \, .$$

□

Notazione 2.1. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dato $t \in \mathbb{R}$, denotiamo (se esistono finiti) i limiti destro e sinistro di f in t, nel seguente modo*

$$f(t^+) := \lim_{s\to t^+} f(s), \quad f(t^-) := \lim_{s\to t^-} f(s) \, .$$

Inoltre poniamo

$$f^*(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} \, .$$

Osservazione 2.14. *Se f è continua in $t \in \mathbb{R}$, allora $f^*(t) = f(t)$.*

Definizione 2.7. *(Funzioni C^k a tratti)*
*Sia $f : A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}$ limitato. Diciamo che f è una **funzione C^k a tratti** su A, se esiste un insieme finito*

$$A_n := \{t_1, \dots, t_n\} \subseteq A, \ n \in \mathbb{N} \, ,$$

per cui $f \in C^k\big(A \setminus A_n; \mathbb{R}\big)$, con derivata di ordine massimo limitata; qui $k = 0, 1, 2 \dots, +\infty$.

Osservazione 2.15. *Sia $f : A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}$. Se f è C^1 a tratti su A, allora esistono finiti $f(t^+), f(t^-)$, per ogni $t \in A$.*
Infatti, sia A_n l'insieme dei punti sui quali la funzione non è C^1. Ora, se $t \in A \setminus A_n$ allora la funzione è C^1 su tale insieme e quindi i due limiti chiaramente esistono.
Se invece $t \in A_n$, possono verificarsi due casi:

(i) f è continua ma non derivabile in t;

(ii) f non è continua in t.

Nel primo caso, chiaramente i due limiti esistono. Consideriamo perciò il caso in cui f non sia continua in t e utilizziamo la seguente caratterizzazione del limite

$$\lim_{s\to t^+} f(s) \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ :\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon\ \forall x, y \in (t, t+\delta)$$

Osserviamo inoltre che, dalla definizione di funzione C^1 a tratti, la derivata è limitata da una costante $M > 0$ sull'insieme $A \backslash A_n$.
Sia allora $\varepsilon > 0$ arbitrario e scegliamo $\delta < \frac{\varepsilon}{M}$; in particolare non è restrittivo supporre δ tale che $(t, t+\delta) \cap A_n = \emptyset$. Siano ora $x, y \in (t, t+\delta)$ con $x < y$. Allora, f è di classe C^1 sull'intervallo (x, y) e per il teorema del valor medio di Lagrange esisterà $z \in (x, y)$ tale che

$$f(y) - f(x) = f'(z)(y - x).$$

Visto che $|x - y| < \delta$, poiché $x, y \in (t, t+\delta)$, passando al valore assoluto avremo

$$|f(y) - f(z)| = |f'(z)||x - y| \le M\delta.$$

Abbiamo perciò mostrato che

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ :\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon,\ \forall x, y \in (t, t+\delta)$$

e questo prova che esiste finito $f(t^+) = \lim_{s\to t^+} f(s)$.
In modo del tutto analogo si prova che esiste finito $f(t^-)$.

Corollario 2.2. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodica. Se f è C^1 a tratti su $[-\pi, \pi)$, allora per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha*

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f)(t) = f^*(t)\ .$$

Dimostrazione. Dall'Osservazione 2.15, il valore $f^*(t)$ è ben definito per ogni $t \in [-\pi, \pi)$. Se mostriamo che esiste $c > 0$ tale che $g \in L^1\big((0, c); \mathbb{R}\big)$, dove

$$g(s) = \frac{m_f(t, s) - f^*(t)}{s}\ ,$$

allora dal Criterio di Dini (Corollario 2.1) si ottiene la tesi. Sia allora

$$\begin{aligned} g(s) =& \frac{1}{s}\left\{\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}\right\} \\ =& \frac{1}{2}\left\{\frac{f(t+s) - f(t^+)}{s} + \frac{f(t-s) - f(t^-)}{s}\right\} \\ =& \frac{1}{2}\left\{g^+(s) + g^-(s)\right\}\ . \end{aligned}$$

Consideriamo g^+, si ha

$$g^+(s) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(t+s) - f(t+x)}{s}\,.$$

Sia ora $A_n \subseteq [-\pi, \pi)$ come nella Definizione 2.7. Poiché A_n è finito, esiste $c > 0$ tale che

$$(t, t+c) \cap A_n = \emptyset.$$

Allora $f \in C^1\big((t, t+c); \mathbb{R}\big)$, con derivata limitata, diciamo da una costante $M > 0$. Quindi dal teorema di Lagrange, se $x, s \in (0, c)$, esiste $z \in [t+x, t+s]$, tale che

$$f(t+s) - f(t+x) = f'(z)(s-x),$$

così $(s > 0)$

$$\frac{|f(t+s) - f(t+x)|}{s} = |f'(z)|\frac{|s-x|}{s} \leq M\frac{|s-x|}{s} \xrightarrow[x\to 0^+]{} M\,.$$

Allora g^+ è limitata su $(0, c)$, quindi sommabile; lo stesso vale analogamente per g^-. Quindi $g \in L^1\big((0, c); \mathbb{R}\big)$. $\square$

Osservazione 2.16. *Tutte le funzioni considerate negli Esempi 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, sono C^1 a tratti su $[-\pi, \pi)$.*
In particolare, tranne che per la funzione dell'Esempio 2.6, si ha $f(t) = f^*(t)$, per ogni $t \in \mathbb{R}$, in particolare queste funzioni sono sviluppabili in serie di Fourier su $\mathbb{R}$.
Per quanto riguarda la funzione dell'Esempio 2.6, notiamo che si ha

$$f(\pi) = 0 \neq \frac{\pi}{2} = f^*(\pi)\,.$$

Osservazione 2.17. *La convergenza puntuale delle serie di Fourier permette di calcolare la somma di alcune serie numeriche. Ad esempio, considerando la funzione dell'Esempio 2.5 e prendendo $t = 0$, si ottiene*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Sempre per la stessa funzione, con $t = \pi$, si ha

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

La condizione espressa dal precedente Corollario 2.2, per funzioni di classe C^1, si può migliorare; diamo la seguente definizione.

Definizione 2.8. *(Funzioni Hölderiane)*
Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f : I \to \mathbb{R}$. Diciamo che f è una ***funzione Hölderiana*** *su I, di esponente $\alpha \in (0,1]$, se esiste una costante $M > 0$, tale che*

$$|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|^\alpha, \quad \forall\, x, y \in I \ .$$

Se $\alpha = 1$ nella precedente condizione, allora f è Lipschitziana su I.
L'insieme delle funzioni Hölderiane su I, di esponente $\alpha \in (0,1]$, si indica con $C^{0,\alpha}(I;\mathbb{R})$. Iterando, dato $k \in \mathbb{N}$, si definiscono gli spazi $C^{k,\alpha}(I;\mathbb{R})$, delle funzioni di classe C^k, con le derivate di ordine k, Hölderiane con esponente $\alpha \in (0,1]$.

Osservazione 2.18. *In particolare, se $f \in C^{0,\alpha}(I;\mathbb{R})$, per qualche $\alpha \in (0,1]$, allora f è uniformemente continua (quindi continua) su I.*

Corollario 2.3. *(Criterio di Hölder)*
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodica. Se $f \in C^{0,\alpha}\big([-\pi,\pi];\mathbb{R}\big)$, per qualche $\alpha \in (0,1]$, allora per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f)(t) = f(t) \ ,$$

in altri termini, f è sviluppabile in serie di Fourier su $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. Dalle Osservazioni 2.14 e 2.18, per ogni $t \in [-\pi,\pi]$, si ha $f^*(t) = f(t)$. Se mostriamo che esiste $c > 0$ tale che $g \in L^1\big((0,c);\mathbb{R}\big)$, dove

$$g(s) = \frac{m_f(t,s) - f(t)}{s} \ ,$$

allora dal Criterio di Dini (Corollario 2.1) si ottiene la tesi. Sia allora

$$\begin{aligned} g(s) =& \frac{1}{s}\left\{\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}\right\} \\ =& \frac{1}{2}\left\{\frac{f(t+s) - f(t^+)}{s} + \frac{f(t-s) - f(t^-)}{s}\right\} \\ =& \frac{1}{2}\left\{g^+(s) + g^-(s)\right\} \ . \end{aligned}$$

Consideriamo g^+, si ha

$$g^+(s) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(t+s) - f(t+x)}{s} \ .$$

Dalla Definizione 2.8, dato $c > 0$ tale che $(t, t+c) \subseteq [-\pi,\pi]$, si ha $(s > 0)$

$$\frac{|f(t+s) - f(t+x)|}{s} \leq M\frac{|s-x|^\alpha}{s} \xrightarrow[x\to 0^+]{} M\frac{1}{s^{1-\alpha}} \ .$$

Poiché $\alpha \in (0,1]$, allora g^+ è sommabile su $(0,c)$; lo stesso vale analogamente per g^-. Quindi $g \in L^1\big((0,c);\mathbb{R}\big)$. $\square$

Esempio 2.7. *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* 2π*-periodica, definita sull'intervallo* $[-\pi, \pi[$ *nel seguente modo*

$$f(t) = \sqrt{|t|}\ .$$

Osserviamo che f *non è* C^1 *a tratti su* $[-\pi, \pi)$*, ma* $f \in C^{0,\frac{1}{2}}\big([-\pi, \pi]; \mathbb{R}\big)$*. Dimostriamo innanzitutto che in generale se* $a, b \geq 0$*, allora vale la seguente disuguaglianza*

$$\left|\sqrt{a} - \sqrt{b}\right| \leq \sqrt{|a-b|}.$$

Infatti, supponiamo $a \geq b \geq 0$ *(in caso contrario, basta scambiare i ruoli di* a *e* b*). A questo punto è sufficiente elevare al quadrato il primo membro ed osservare che* $\sqrt{a} \geq \sqrt{b}$ *(da cui* $-\sqrt{a} \leq -\sqrt{b}$*). In questo modo si ha*

$$a + b - 2\sqrt{a}\sqrt{b} \leq a + b - 2b = a - b = |a - b|\,,$$

che prova la disuguaglianza. Quindi, per ogni $t_1, t_2 \in [-\pi, \pi)$

$$\left|\sqrt{|t_1|} - \sqrt{|t_2|}\right| \leq \sqrt{||t_1| - |t_2||} \leq \sqrt{|t_1 - t_2|},$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato le proprietà del valore assoluto. Abbiamo così provato che

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq |t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}} \quad \forall t_1, t_2 \in [-\pi, \pi).$$

Allora dal Criterio di Hölder (Corollario 2.3), si ha che f *è sviluppabile in serie di Fourier su* $\mathbb{R}$*.*

2.3 Disuguaglianza di Bessel e applicazioni

Consideriamo lo spazio di Hilbert

$$L^2(S^1;\mathbb{R}) = L^2_{per}((-\pi,\pi);\mathbb{R})$$

delle funzioni reali, 2π-periodiche e a quadrato sommabile su $(-\pi,\pi)$. Poniamo per comodità

$$\langle f,g\rangle = \langle f,g\rangle_{L^2} = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt\ , \quad f,g \in L^2\big(S^1;\mathbb{R}\big)\ ,$$

$$\|f\| = \|f\|_{L^2} = \sqrt{\langle f,f\rangle} = \left(\int_{-\pi}^{\pi}\big(f(t)\big)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\ , \quad f \in L^2\big(S^1;\mathbb{R}\big)\ .$$

Osservazione 2.19. *Dalle* ***disuguaglianze di Hölder*** [1] *e poiché l'insieme* $(-\pi,\pi)$ *è limitato, si ha*

$$L^2\big(S^1;\mathbb{R}\big) \subseteq L^1\big(S^1;\mathbb{R}\big)\ .$$

Osservazione 2.20. *L'insieme* T_n*, dei polinomi trigonometrici di grado minore o uguale a* n*, è un sottospazio vettoriale di* $L^2\big(S^1;\mathbb{R}\big)$*, di dimensione* $2n+1$*. In particolare le funzioni*

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(t)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(t)}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}}\right\}$$

costituiscono una base ortonormale per T_n*.*

Notazione 2.2. *Poniamo*

$$u_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad u_{2k-1}(t) = \frac{\cos(kt)}{\sqrt{\pi}}, \quad u_{2k}(t) = \frac{\sin(kt)}{\sqrt{\pi}}, \quad k = 1,\dots,n\ .$$

In questo modo una base ortonormale per T_n *è data da*

$$\mathcal{U}_n = \{u_0, u_1, \dots, u_{2n}\}\ .$$

[1] Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f \in L^p(\Omega;\mathbb{R})$, $g \in L^q(\Omega;\mathbb{R})$, dove $p,q \in [1,+\infty]$, con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Allora valgono le seguenti disuguaglianze di Hölder

$$\|fg\|_{L^1} \le \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}\ . \tag{16}$$

Sia ora $f \in L^2\big(S^1;\mathbb{R}\big)$, allora rinominiamo i coefficienti di Fourier nel seguente modo

$$\hat{f}_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} a_0, \quad \hat{f}_{2k-1} = \sqrt{\pi} a_k, \quad \hat{f}_{2k} = \sqrt{\pi} b_k, \quad k = 1, \ldots, n \, .$$

Allora si ha

$$S_n(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\} = \sum_{k=0}^{2n} \hat{f}_k u_k(t) \, ,$$

con

$$\hat{f}_k = \langle f, u_k \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) u_k(t) dt \, , \quad k = 0, 1, \ldots, 2n \, .$$

In particolare si ottiene

$$\|S_n(f)\|^2 = \sum_{k=0}^{2n} \hat{f}_k^2 \, .$$

Proposizione 2.3. *(Disuguaglianza di Bessel)*
Sia $f \in L^2\big(S^1;\mathbb{R}\big)$. Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\|S_n(f)\| \leq \|f\| \, .$$

In particolare, in termini dei coefficienti di Fourier

$$\pi \Big\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k^2 + b_k^2\big) \Big\} = \sum_{k=0}^{2n} \hat{f}_k^2 \leq \|f\|^2 \, . \tag{17}$$

Dimostrazione. Vale

$$\begin{aligned}
\|f - S_n(f)\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(t) - S_n(f)(t)\big)^2 dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(t)\big)^2 - 2f(t)S_n(f)(t) + \big(S_n(f)(t)\big)^2 dt \\
&= \|f\|^2 - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{k=0}^{2n} \hat{f}_k u_k(t) dt + \|S_n(f)\|^2 \\
&= \|f\|^2 - 2 \sum_{k=0}^{2n} \left(\hat{f}_k \int_{-\pi}^{\pi} f(t) u_k(t) dt \right) + \|S_n(f)\|^2 \\
&= \|f\|^2 - 2 \sum_{k=0}^{2n} \hat{f}_k^2 + \|S_n(f)\|^2 \\
&= \|f\|^2 - \|S_n(f)\|^2 \, .
\end{aligned}$$

Poiché il primo membro è positivo, si ottiene la tesi. □

Il prossimo risultato mostra che il polinomio di Fourier di una funzione f è il polinomio trigonometrico che approssima meglio f in "media quadratica".

Proposizione 2.4. *Sia* $f \in L^2\big(S^1;\mathbb{R}\big)$. *Allora si ha*

$$\|f - S_n(f)\| \le \|f - p\| \,, \quad \forall\, p \in T_n \,.$$

Dimostrazione. Sia $p \in T_n$, allora rispetto alla base $\mathcal{U}_n$, esistono delle costanti reali c_k, con $k = 0, 1, \dots, 2n$, tali che

$$p(t) = \sum_{k=0}^{2n} c_k u_k(t) \,, \quad c_k = \langle p, u_k \rangle \,.$$

Allora vale

$$\begin{aligned}
\|f - p\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(t) - p(t)\big)^2 dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(t)\big)^2 - 2f(t)p(t) + \big(p(t)\big)^2 dt \\
&= \|f\|^2 - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{k=0}^{2n} c_k u_k(t) dt + \|p\|^2 \\
&= \|f\|^2 - 2\sum_{k=0}^{2n} \left(c_k \int_{-\pi}^{\pi} f(t) u_k(t) dt \right) + \sum_{k=0}^{2n} c_k^2 \\
&= \|f\|^2 - 2\sum_{k=0}^{2n} \hat{f}_k c_k + \sum_{k=0}^{2n} c_k^2 \,.
\end{aligned}$$

Ora, dalla dimostrazione della Proposizione 2.3, si ha

$$\begin{aligned}
\|f - p\|^2 - \|f - S_n(f)\|^2 &= \|f\|^2 - 2\sum_{k=0}^{2n} \hat{f}_k c_k + \sum_{k=0}^{2n} c_k^2 - \|f\|^2 + \sum_{k=0}^{2n} \hat{f}_k^2 \\
&= \sum_{k=0}^{2n} \big(c_k - \hat{f}_k\big)^2 \ge 0 \,.
\end{aligned}$$

□

Come applicazione, mostriamo un risultato sulla convergenza uniforme delle serie di Fourier; premettiamo il seguente fatto.

Osservazione 2.21. *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π*-periodica. Se* f *è continua e* C^1 *a tratti su* $[-\pi, \pi)$, *allora (estendendo eventualmente* f' *a zero nei punti in cui non esiste) si ha, per ogni* $n \in \mathbb{N}$

$$S_n(f')(t) = \big(S_n(f)\big)'(t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R} \,.$$

Infatti, dalla definizione di polinomio di Fourier segue immediatamente che

$$(S_n(f))'(t) = \sum_{k=1}^{n} \{-ka_k \sin(kt) + kb_k \cos(kt)\} .$$

Inoltre, sempre dalla definizione di polinomio di Fourier, si ha che

$$S_n(f')(t) = \frac{\widetilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left\{ \widetilde{a}_k \cos(kt) + \widetilde{b}_k \sin(kt) \right\}$$

dove

$$\widetilde{a}_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \cos(kt) dt, \quad k = 0 \ldots, n$$

e

$$\widetilde{b}_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \sin(kt) dt, \quad k = 1 \ldots, n.$$

Osserviamo esplicitamente che gli ultimi integrali sono ben posti, in quanto f è continua e C^1 a tratti su $[-\pi, \pi)$. Ora, si ha che

$$\widetilde{a}_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) dt = f(\pi) - f(-\pi) = 0$$

poiché f è una funzione 2π-periodica. Inoltre, integrando per parti si ha che per ogni $k = 1, \ldots, n$

$$\widetilde{a}_k = \frac{1}{\pi} \big[f(t) \cos(kt) \big]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(-k \sin(kt)) dt = kb_k$$

e

$$\widetilde{b}_k = \frac{1}{\pi} \big[f(t) \sin(kt) \big]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(k \cos(kt)) dt = -ka_k,$$

i quali coincidono con i coefficienti di Fourier di $(S_n(f))'(t)$. In conclusione, dato che due polinomi trigonometrici sono uguali se e solo se hanno gli stessi coefficienti di Fourier, avremo che

$$S_n(f')(t) = \big(S_n(f)\big)'(t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R} .$$

Teorema 2.3. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodica. Se f è continua e C^1 a tratti su $[-\pi, \pi)$, allora la serie di Fourier di f converge totalmente [1], quindi uniformemente, ad f, su $\mathbb{R}$.*

[1] Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, con $f_k : A \to \mathbb{R}$, una successione di funzioni. Si dice che la serie di funzioni $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$ converge totalmente, se converge la serie numerica delle norme uniformi, cioè

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty = \sum_{k=1}^{+\infty} \sup_{x \in A} |f_k(x)| < +\infty .$$

Ricordiamo inoltre, che la convergenza totale implica quella uniforme.

Dimostrazione. Dal Corollario 2.2 sappiamo che la serie di Fourier di f converge puntualmente ad f, cioè per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{n \to +\infty} S_n(f)(t) = f^*(t) = f(t)\ .$$

Ora, dall'Osservazione 2.21, se

$$S_n(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\}\ ,$$

allora, estendendo eventualmente f' a zero nei punti in cui non esiste, si ha

$$S_n(f')(t) = \sum_{k=1}^{n} \{k b_k \cos(kt) - k a_k \sin(kt)\}\ .$$

Adesso, poiché f' è limitata, allora $f' \in L^2\big(S^1;\mathbb{R}\big)$, quindi applicando la disuguaglianza di Bessel (17) a f', si ottiene

$$\sum_{k=1}^{n} \left(k^2 a_k^2 + k^2 b_k^2\right) \leq \frac{1}{\pi}\|f\|^2 =: M_1\ .$$

Inoltre, dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, si ha

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\,(k|a_k| + k|b_k|) \\
&\leq \sqrt{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 a_k^2 + k^2 b_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{2 M_2 M_1}\ ,
\end{aligned}$$

dove abbiamo posto

$$M_2 := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\ .$$

Infine, osserviamo che per ogni $k \in \mathbb{N}$ vale

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \big(|a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)|\big) \leq |a_k| + |b_k|\ .$$

Allora la serie di Fourier di f

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\}$$

converge totalmente, quindi uniformemente. $\square$

Teorema 2.4. *(di Riesz)*
Ogni funzione in $L^2\big(S^1;\mathbb{R}\big)$ è sviluppabile in serie di Fourier, nel senso della convergenza in media quadratica. In altri termini, data $f \in L^2\big(S^1;\mathbb{R}\big)$ allora

$$\lim_{n\to+\infty} \|f - S_n(f)\| = 0 \ .$$

Dimostrazione. Sia $f \in L^2\big(S^1;\mathbb{R}\big)$. Dal Teorema (di densità) 2.1, poiché $C_0^\infty\big((-\pi,\pi);\mathbb{R}\big)$ è denso in $L^2\big((-\pi,\pi);\mathbb{R}\big)$, allora

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \varphi_\varepsilon \in C_0^\infty\big((-\pi,\pi);\mathbb{R}\big) \ \text{ t.c. } \ \|f - \varphi_\varepsilon\| < \varepsilon \ .$$

Ora, poiché l'operatore S_n è lineare (Osservazione 2.9), utilizzando la disuguaglianza di Bessel (17), si ha

$$\begin{aligned}
\|f - S_n(f)\| =& \|f - \varphi_\varepsilon + \varphi_\varepsilon - S_n(\varphi_\varepsilon) + S_n(\varphi_\varepsilon) - S_n(f)\| \\
\leq& \|f - \varphi_\varepsilon\| + \|\varphi_\varepsilon - S_n(\varphi_\varepsilon)\| + \|S_n(\varphi_\varepsilon) - S_n(f)\| \\
=& \|f - \varphi_\varepsilon\| + \|\varphi_\varepsilon - S_n(\varphi_\varepsilon)\| + \|S_n(\varphi_\varepsilon - f)\| \\
\leq& \|f - \varphi_\varepsilon\| + \|\varphi_\varepsilon - S_n(\varphi_\varepsilon)\| + \|\varphi_\varepsilon - f\| \\
=& 2\|f - \varphi_\varepsilon\| + \|\varphi_\varepsilon - S_n(\varphi_\varepsilon)\| \\
=& 2I_1 + I_2 \ .
\end{aligned}$$

Esaminiamo separatamente i due addendi. Dal risultato di densità, $I_1 < \varepsilon$. Adesso, poiché $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty\big((-\pi,\pi);\mathbb{R}\big)$, allora dal Teorema 2.3, si ha che la serie di Fourier di φ_ε converge uniformemente ad φ_ε, perciò

$$I_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \big(\varphi_\varepsilon(t) - S_n(\varphi_\varepsilon)(t)\big)^2 dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0;$$

quindi

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \text{ t.c. } \ I_2 < \varepsilon,\ \forall\, n > n_\varepsilon \ .$$

In conclusione,

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \text{ t.c. } \ \|f - S_n(f)\| < 3\varepsilon,\ \forall\, n > n_\varepsilon \ .$$

□

Osservazione 2.22. *(Identità di Parseval)*
Sia $f \in L^2\big(S^1;\mathbb{R}\big)$. Dalla dimostrazione della Proposizione 2.3, si vede che

$$\|f - S_n(f)\|^2 = \|f\|^2 - \|S_n(f)\|^2 \ .$$

Quindi il Teorema di Riesz è equivalente a

$$\lim_{n\to+\infty} \|S_n(f)\|^2 = \|f\|^2 \ .$$

In termini dei coefficienti di Fourier, poiché

$$\|S_n(f)\|^2 = \sum_{k=0}^{n} \hat{f}_k^2 = \pi\Big\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k^2 + b_k^2\big) \Big\} \ ,$$

allora si ottiene la seguente identità di Parseval

$$\|f\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \hat{f}_k^2 = \pi\Big\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \big(a_k^2 + b_k^2\big) \Big\} \ . \tag{18}$$

In particolare, la seguente famiglia numerabile

$$\mathcal{U} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}}, \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

è una base ortonormale per lo spazio di Hilbert $L^2\big(S^1;\mathbb{R}\big)$*.*

Osservazione 2.23. *L'identità di Parseval fornisce una condizione necessaria affinchè una serie trigonometrica sia la serie di Fourier di una qualche funzione* $f \in L^2\big(S^1;\mathbb{R}\big)$*, in particolare la serie del quadrato dei coefficienti deve essere convergente (si confronti con l'Osservazione 2.13).*

Osservazione 2.24. *L'identità di Parseval permette anche il calcolo della somma di alcune serie numeriche. Ad esempio, consideriamo la funzione dell'Esempio 2.1: i coefficienti sono dati da*

$$a_0 = 0, \quad a_k = 0, \quad b_k = 2\frac{(-1)^{k+1}}{k}, \quad k \in \mathbb{N} \ ,$$

mentre

$$\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{2}{3}\pi^3 \ .$$

Allora da (18), si ha

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

ritrovando il risultato ottenuto nell'Osservazione 2.17

Proposizione 2.5. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodica e continua a tratti su $[-\pi, \pi)$ (cioè continua a meno di un numero finito di punti, in $[-\pi, \pi)$, e limitata). Poniamo*

$$I_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad I_f(t) = \int_{-\pi}^{t} f(s)ds \ .$$

Allora I_f è continua e C^1 a tratti su $[-\pi, \pi)$. Inoltre, se

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\}$$

è la serie di Fourier di f, allora ponendo

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(t) = I_f(t) - \frac{a_0}{2}(t + \pi) = \int_{-\pi}^{t} f(s) - \frac{a_0}{2} ds \ ,$$

si ha che F è 2π-periodica, continua e C^1 a tratti su $[-\pi, \pi)$, e la sua serie di Fourier è data da

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \{A_k \cos(kt) + B_k \sin(kt)\} \ ,$$

dove

$$\frac{A_0}{2} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{b_k}{k}, \quad A_k = -\frac{b_k}{k}, \quad B_k = \frac{a_k}{k}, \quad k \geq 1 \ .$$

In particolare la serie di Fourier di F converge uniformemente ad F, su $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. La prima affermazione segue dal Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale. Per quanto riguarda i coefficienti di Fourier di F, la tesi segue da un calcolo esplicito; mostriamo come esempio il calcolo degli A_k, per i B_k si ragiona analogamente. Sia allora $k \geq 1$, si ha

$$\begin{aligned}
A_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cos(kt) dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{t} f(s) - \frac{a_0}{2} ds \right) \cos(kt) \ dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{t} \left(f(s) - \frac{a_0}{2} \right) \cos(kt) \ ds \right) \ dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{s}^{\pi} \left(f(s) - \frac{a_0}{2} \right) \cos(kt) \ dt \right) \ ds \\
&= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(s) - \frac{a_0}{2} \right) \frac{\sin(ks)}{k} \ ds \\
&= -\frac{1}{\pi} \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin(ks) \ ds \\
&= -\frac{1}{k} b_k \ .
\end{aligned}$$

Per quanto riguarda A_0, basta osservare che poiché F è continua e C^1 a tratti, dal Corollario 2.2 e l'Osservazione 2.14, si ha che per ogni $t \in \mathbb{R}$ la serie di Fourier di F converge puntualmente ad F, quindi

$$0 = F(-\pi) = F(\pi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k A_k = \frac{A_0}{2} - \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{b_k}{k} \, .$$

L'ultima affermazione sulla convergenza uniforme segue dal Teorema 2.3. $\square$

Osservazione 2.25. *Il precedente risultato fornisce una condizione necessaria affinchè una serie trigonometrica sia la serie di Fourier di una qualche funzione continua (si confronti con le Osservazioni 2.13 e 2.23). Ad esempio, la seguente serie trigonometrica*

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\log(k)} \sin(kt)$$

non è la serie di Fourier di alcuna funzione continua. Infatti, la serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{(-1)^k}{k \log(k)} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k \log(k)} \ ,$$

non converge.

Corollario 2.4. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodica, continua e C^1 a tratti su $[-\pi, \pi)$. Allora la serie di Fourier di f' (estesa a zero dove non è definita) si ottiene derivando termine a termine quella di f.*

Dimostrazione. Basta applicare la Proposizione 2.5 alla funzione f'. $\square$

2.4 Nucleo di Poisson

Definizione 2.9. *(Nucleo di Poisson)*
Per ogni $r \in [0,1)$, chiamiamo ***nucleo di Poisson*** *la seguente funzione*

$$P_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad P_r(t) = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} r^k \cos(kt)\right\} .$$

Osservazione 2.26. *La funzione P_r è ben definita. Infatti scrivendo*

$$z = r\big(\cos(t) + i\sin(t)\big) = re^{it} \in \mathbb{C}$$

si ha

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} r^k \cos(kt) =& Re\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} z^k\right\}\\ =&\frac{1-|z|^2}{2|1-z|^2}\\ =&\frac{1-r^2}{2|1-re^{it}|^2}\\ =&\frac{1-r^2}{2\big(1-2r\cos(t)+r^2\big)}\end{aligned}$$

In particolare P_r è non negativa, pari e 2π-periodica.

Definizione 2.10. *Sia $f \in L^1\big(S^1;\mathbb{R}\big)$ e siano a_k, b_k i suoi coefficienti di Fourier. Per ogni $r \in [0,1)$, definiamo la seguente funzione*

$$f_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_r(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} r^k \left\{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\right\} .$$

Osservazione 2.27. *La funzione f_r è ben definita. Infatti dall'Osservazione 2.13, si ha che i coefficienti a_k, b_k sono infinitesimi, quindi limitati, allora esiste una costante positiva M tale che*

$$|a_k| \leq M, \quad |b_k| \leq M, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}\,,$$

quindi

$$|r^k \left\{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\right\}| \leq r^k\big(|a_k| + |b_k|\big) \leq 2Mr^k, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}\,.$$

Poiché $r \in [0,1)$, *allora la serie*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} r^k \left\{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\right\}$$

converge totalmente (quindi uniformemente e puntualmente).
In particolare, la convergenza uniforme implica che f_r *è anche continua, in quanto sono continue le funzioni*

$$t \mapsto r^k \left\{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\right\} \ .$$

Riportiamo ora il seguente risultato di convergenza (si veda ad esempio [5]).

Lemma 2.4. *Sia* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *aperto e sia* $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq L^1\big(\Omega;\mathbb{R}\big)$ *una successione di funzioni tale che la serie di funzioni* $\sum_{k=1}^{+\infty} g_k$ *converga puntualmente. Se*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_\Omega |g_k(x)|\ dx\right) < +\infty$$

allora

$$\int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{+\infty} g_k(x)\right)\ dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_\Omega g_k(x)\ dx\right) \ .$$

In altri termini, è possibile integrare termine a termine.

Teorema 2.5. *(di rappresentazione di Poisson)*
Sia $f \in L^1\big(S^1;\mathbb{R}\big)$. *Allora per ogni* $r \in [0,1)$, *vale la seguente formula di rappresentazione integrale di Poisson*

$$f_r(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(s) P_r(s-t) ds \ . \tag{19}$$

Dimostrazione. Utilizzando le formule per i coefficienti di Fourier, si ha

$$\begin{aligned}
f_r(t) =& \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} r^k \left\{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\right\} \\
=& \frac{1}{2}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\ ds + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(r^k \int_{-\pi}^{\pi} f(s)\left\{\cos(ks)\cos(kt) + \sin(ks)\sin(kt)\right\}\ ds\right) \\
=& \frac{1}{2}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\ ds + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} r^k f(s)\cos\big(k(s-t)\big)\ ds\right)
\end{aligned}$$

A questo punto, dato $t \in \mathbb{R}$, chiamiamo

$$g_k(s) = r^k f(s)\cos\big(k(s-t)\big) \ .$$

In questo modo

$$|g_k(s)| \le r^k |f(s)|, \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \ ,$$

e visto che $r \in [0,1)$, allora la successione $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ soddisfa le ipotesi del Lemma 2.4. Quindi si può scambiare la serie con l'integrale e si ottiene

$$\begin{aligned} f_r(t) =& \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\, ds + \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\Big\{r^k f(s)\cos\big(k(s-t)\big)\Big\}\ ds\right) \\ =& \int_{-\pi}^{\pi} f(s)\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\Big\{r^k\cos\big(k(s-t)\big)\Big\}\right)\ ds \\ =& \int_{-\pi}^{\pi} f(s)P_r(s-t)\ ds \ . \end{aligned}$$

□

Osservazione 2.28. *Scegliendo $f \equiv 1$, si ha anche $f_r \equiv 1$, quindi per ogni $t \in \mathbb{R}$ vale*

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_r(s-t)ds = 1 \ .$$

In particolare

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_r(s)ds = 1 \ .$$

Osservazione 2.29. *Mostriamo che è possibile riscrivere la formula (19) sul disco unitario, in termini di un integrale di bordo. Cioè, sia*

$$B = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \ t.c. \ \ x^2+y^2 < 1\Big\} \subseteq \mathbb{R}^2, \quad S = \partial B \ .$$

Dati $r \in [0,1)$, $t, s \in \mathbb{R}$, identifichiamo

$$\begin{aligned} B \ni (x,y) &\simeq x+iy = r\big(\cos(t)+i\sin(t)\big) = re^{it} = z \ , \\ S \ni (x,y) &\simeq x+iy = \cos(s)+i\sin(s) = e^{is} = z \ . \end{aligned}$$

Sia ora $f \in L^1\big(S;\mathbb{R}\big)$, definiamo

$$\begin{aligned} \varphi : S \to \mathbb{R}, &\quad \varphi(z) = \varphi(e^{is}) = f(s) \ , \\ u : B \to \mathbb{R}, &\quad u(z) = u(re^{it}) = f_r(t) \ . \end{aligned}$$

Infine, poniamo

$$P(z,w) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-|z|^2}{|w-z|^2} \ , \quad \forall\, z \in B \ , w \in S \ . \tag{20}$$

Sostituendo $z = re^{it}$, $w = e^{is}$, *riconosciamo che*

$$P(z,w) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-|z|^2}{|w-z|^2} = \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{|e^{is}-re^{it}|^2} = \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{|1-re^{i(t-s)}|^2} = P_r(t-s)\ , \quad \forall\, t,s \in \mathbb{R}\ .$$

Allora si ha che (19) è equivalente a

$$u(z) = \int_S \varphi(w)P(z,w)\ dH^1_w\ , \quad \forall\, z \in B\ ,$$

dove dH^1_w *indica che l'integrale è fatto nel senso della misura di Hausdorff* 1*-dimensionale, rispetto alla variabile* $w \in S$.

2.5 Problema del potenziale elettrostatico

In questa sezione, come applicazione, vogliamo usare alcuni risultati della teoria delle serie di Fourier per lo studio di un particolare problema di elettrostatica.
Diamo alcune definizioni preliminari.

Definizione 2.11. *(Laplaciano)*
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, aperto, con $n \in \mathbb{N}$. Data una funzione $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$, chiamiamo ***Laplaciano*** *il seguente operatore differenziale Δ applicato ad u nel seguente modo*

$$\Delta u(x) = \operatorname{div}\big(\nabla u(x)\big) = tr\big(D^2 u(x)\big) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}(x), \quad \forall\, x \in \Omega\,.$$

Definizione 2.12. *(Funzioni armoniche)*
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, con $n \in \mathbb{N}$. Una funzione $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$, si dice ***armonica*** *se soddisfa la seguente equazione di Laplace*

$$\Delta u(x) = 0, \quad \forall\, x \in \Omega.$$

Inoltre, data $f \in C(\Omega; \mathbb{R})$, si dice che $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$ risolve l'equazione di Poisson se:

$$\Delta u(x) = f(x), \quad \forall\, x \in \Omega.$$

Osservazione 2.30. *Dal Teorema 1.11 sappiamo che data $\rho \in C(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ una densità di carica elettrica, allora il campo elettrostatico generato $E \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ soddisfa la prima equazione di Maxwell*

$$\operatorname{div}(E(x)) = \rho(x), \quad x \in \mathbb{R}^3\,.$$

Inoltre, ricordando l'Osservazione 1.36, poiché il campo elettrostatico è conservativo, chiamiamo $V \in C^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ il potenziale elettrostatico tale che

$$E(x) = -\nabla V(x), \quad x \in \mathbb{R}^3\,.$$

Allora, dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto, si ha che V soddisfa la seguente equazione di Poisson

$$\Delta V(x) = -\rho(x), \quad \forall\, x \in \Omega.$$

In particolare, se $\rho = 0$ su Ω (cioè non è presente carica elettrica), allora V soddisfa l'equazione di Laplace

$$\Delta V(x) = 0, \quad \forall\, x \in \Omega.$$

Definizione 2.13. *(Problema di Dirichlet)*
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, con $n \in \mathbb{N}$. Si dice che una funzione $u \in C^2\big(\Omega;\mathbb{R}\big) \cap C\big(\overline{\Omega};\mathbb{R}\big)$ è soluzione del ***problema di Dirichlet****, per il Laplaciano, se soddisfa*

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = \varphi(x), & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{21}$$

con $f \in C(\Omega;\mathbb{R})$ e $\varphi \in C\big(\partial\Omega;\mathbb{R}\big)$ assegnate.

Vale il seguente risultato (si veda l'Appendice A.3)

Teorema 2.6. *(Unicità per il Problema di Dirichlet)*
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e siano $u_1, u_2 \in C^2\big(\Omega;\mathbb{R}\big) \cap C\big(\overline{\Omega};\mathbb{R}\big)$ soluzioni del Problema di Dirichlet (21). Allora $u_1 \equiv u_2$.

Motivati dalla precedente Osservazione 2.30, si vuole studiare il seguente problema: supponiamo di conoscere il valore φ del potenziale elettrostatico sulla frontiera di un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ privo di carica, allora sapendo che il potenziale elettrostatico soddisfa l'equazione di Laplace, se ne vuole conoscere il valore all'interno di Ω, in altri termini si vuole determinare una soluzione del seguente problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in \Omega \\ u(x) = \varphi(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

In particolare, usando alcuni risultati sulle serie di Fourier ed alcune proprietà delle funzioni olomorfe (si veda l'Appendice A.2), mostreremo l'esistenza di una soluzione al precedente problema sul disco unitario nel piano; siano allora

$$B = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \text{ t.c. } \ x^2 + y^2 < 1\big\} \subseteq \mathbb{R}^2, \quad S = \partial B \ .$$

Chiamiamo $z = (x,y)$ e consideriamo il seguente problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u(z) = 0, & z \in B \\ u(z) = \varphi(z), & z \in S \end{cases} \tag{22}$$

Teorema 2.7. *(Esistenza per il Problema di Dirichlet sul disco)*
Sia $u : \overline{B} \to \mathbb{R}$, definita da

$$u(z) = \begin{cases} \displaystyle\int_S \varphi(w) P(z,w) \, dH^1_w \ , & z \in B \ , \\ \\ \varphi(z) \ , & z \in S \ , \end{cases}$$

dove P è il nucleo di Poisson definito in (20) con $\varphi \in C\big(S;\mathbb{R}\big)$ assegnata. Allora $u \in C^2\big(B;\mathbb{R}\big) \cap C\big(\overline{B};\mathbb{R}\big)$, è soluzione del problema di Dirichlet (22).

Dimostrazione. Sia $f \in C\big(S;\mathbb{R}\big)$ la funzione ottenuta identificando $\varphi(z) = \varphi(e^{is}) = f(s)$ come nell'Osservazione 2.29 e siano a_k, b_k i suoi coefficienti di Fourier. Allora ponendo $z = re^{it}$, per $r \in [0,1)$, $t \in \mathbb{R}$, $z \in B$, dall'Osservazione 2.29 si ha

$$\begin{aligned} u(z) = f_r(t) =& \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} r^k \left\{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\right\} \\ =& Re\left\{\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k z^k\right\} + Im\left\{\sum_{k=1}^{+\infty} b_k z^k\right\} . \end{aligned}$$

Ora, poiché i coefficienti a_k, b_k sono infinitesimi, quindi limitati, si ha che le ultime due serie di potenze complesse hanno raggio di convergenza maggiore o uguale ad uno; in particolare convergono uniformemente a due funzioni olomorfe (in particolare C^∞) su B (Proposizione A.1, Teorema A.2). Inoltre, si ha che la parte reale e la parte immaginaria di una funzione olomorfa sono armoniche (Proposizione A.2). In conclusione, poiché la somma di funzioni armoniche è armonica, abbiamo mostrato che $u \in C^2\big(B;\mathbb{R}\big)$ e vale

$$\Delta u(z) = 0, \qquad \forall\, z \in B\ .$$

Resta da dimostrare che $u \in C\big(\overline{B};\mathbb{R}\big)$, cioè

$$\lim_{z \to v} u(z) = \varphi(v), \qquad \forall\, v \in S\ . \tag{23}$$

Siano $z \in B$, $v \in S$, allora dalle Osservazioni 2.28 e 2.29 si ha

$$u(z) - \varphi(v) = \int_S \big(\varphi(w) - \varphi(v)\big) P(z,w)\, dH^1_w\ .$$

Sia ora $\delta > 0$, poniamo

$$S_J = S \cap \big\{z \in \mathbb{R}^2,\ \text{ t.c. }\ |z - v| < \delta\big\}$$

$$S_I = S \cap \big\{z \in \mathbb{R}^2,\ \text{ t.c. }\ |z - v| \geq \delta\big\}$$

Scriviamo

$$\begin{aligned} u(z) - \varphi(v) =& \int_{S_J} \big(\varphi(w) - \varphi(v)\big) P(z,w)\, dH^1_w + \int_{S_I} \big(\varphi(w) - \varphi(v)\big) P(z,w)\, dH^1_w \\ =& \quad J(z,v,\delta) + I(z,v,\delta)\ . \end{aligned}$$

Ora

$$\big|J(z,v,\delta)\big| \leq \Big(\sup_{\substack{|w-v|<\delta \\ w \in S}} \big|\varphi(w) - \varphi(v)\big|\Big) \int_{S_J} P(z,w)\, dH^1_w \leq \sup_{\substack{|w-v|<\delta \\ w \in S}} \big|\varphi(w) - \varphi(v)\big|\ .$$

Nella prossima stima utilizziamo il fatto che se $z \to v$, allora possiamo supporre $|z-v| < \frac{\delta}{2}$, quindi

$$|z-w| = |(w-v)-(z-v)| \geq |w-v| - |z-v| \geq \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2} \, .$$

In questo modo abbiamo

$$\begin{aligned}
\big|I(z,v,\delta)\big| \leq & 2\Big(\sup_{w\in S}\big|\varphi(w)\big|\Big)\int_{S_I} P(z,w)\, dH^1_w \\
\leq & 2\Big(\sup_{w\in S}\big|\varphi(w)\big|\Big)\int_{S} \frac{1}{2\pi}\frac{1-|z|^2}{|w-z|^2}\, dH^1_w \\
\leq & \frac{4}{\pi\delta^2}\Big(\sup_{w\in S}\big|\varphi(w)\big|\Big)\big(1-|z|^2\big)\int_{S} dH^1_w \\
= & \frac{8}{\delta^2}\Big(\sup_{w\in S}\big|\varphi(w)\big|\Big)\big(1-|z|^2\big) \, .
\end{aligned}$$

In particolare, per ogni $\delta > 0$

$$\lim_{z\to v}\big|I(z,v,\delta)\big| = 0 \, ,$$

in quanto, se $z \to v \in S$, si ha $|z| \to 1$. Allora, visto che

$$\big|u(z) - \varphi(v)\big| \leq \big|J(z,v,\delta)\big| + \big|I(z,v,\delta)\big| \, ,$$

vale

$$\limsup_{z\to v}\big|u(z)-\varphi(v)\big| \leq \sup_{\substack{|w-v|<\delta \\ w\in S}}\big|\varphi(w)-\varphi(v)\big|, \quad \forall\, \delta > 0 \, .$$

Adesso, poiché $\varphi \in C\big(S;\mathbb{R}\big)$, si ha

$$\sup_{\substack{|w-v|<\delta \\ w\in S}}\big|\varphi(w)-\varphi(v)\big| \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0 \, .$$

In definitiva,

$$0 \leq \liminf_{z\to v}\big|u(z)-\varphi(v)\big| \leq \limsup_{z\to v}\big|u(z)-\varphi(v)\big| = 0 \, ,$$

provando quindi la (23). $\square$

Osservazione 2.31. *La soluzione fornita dal precedente Teorema 2.7 è anche unica in virtù del Teorema 2.6.*

Osservazione 2.32. *Il nucleo di Poisson e il precedente Teorema 2.7 si generalizzano al caso di dimensione arbitraria. Sia infatti $n \geq 2$, poniamo*

$$B = \big\{x \in \mathbb{R}^n, \ \ t.c. \ \ \|x\| < 1\big\} \subseteq \mathbb{R}^n, \quad S = \partial B \, .$$

Chiamiamo nucleo di Poisson, per B, la seguente funzione

$$P(x,y) = \frac{1}{n\omega_n}\frac{1-|x|^2}{|y-x|^n} \ , \quad \forall\, x \in B \ , y \in S \ ,$$

dove ω_n è la misura di Lebesgue di B. Infine, data $\varphi \in C\big(S;\mathbb{R}\big)$, sia $u : \overline{B} \to \mathbb{R}$, definita da

$$u(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_S \varphi(y)P(x,y)\ dH_y^{n-1} \ , & x \in B \ , \\ \\ \varphi(x) \ , & x \in S \ , \end{cases}$$

dove dH_y^{n-1} indica che l'integrale è fatto nel senso della misura di Hausdorff $(n-1)$-dimensionale, rispetto alla variabile $y \in S$. Allora $u \in C^2\big(B;\mathbb{R}\big) \cap C\big(\overline{B};\mathbb{R}\big)$, è (l'unica) soluzione del seguente problema di Dirichlet sulla palla unitaria

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in B \\ u(x) = \varphi(x), & x \in S \end{cases}$$

2.6 Problema di diffusione del calore

In questa sezione, come applicazione, vogliamo usare alcuni risultati della teoria delle serie di Fourier per lo studio di un particolare sistema termodinamico.
Denotiamo con $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,+\infty)$, la coppia data da un punto nello spazio ed una coordinata temporale; siano inoltre $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un arbitrario aperto regolare e ν la sua normale esterna, indipendenti dal tempo. Definiamo le seguenti quantità:

- $q \in C^1\big(\mathbb{R}^3 \times (0,+\infty); \mathbb{R}^3\big)$, la densità (di flusso) del calore nel punto x, al tempo t;
- $Q(t) = -\displaystyle\int_{\partial\Omega} \langle q, \nu \rangle dH^2$, il flusso del calore attraverso $\partial\Omega$, al tempo t;
- $e, u \in C^2\big(\mathbb{R}^3 \times (0,+\infty); \mathbb{R}\big)$, rispettivamente energia interna e temperatura del sistema nel punto x, al tempo t .

Valgono le seguenti

- $\dfrac{\partial e}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)$, equazione di bilancio energetico (normalizzata);
- $Q(t) = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\displaystyle\int_{\Omega} e(x,t)dx\right)$, equazione di continuità;
- $q(x,t) = -\nabla_x u(x,t)$, legge di Fourier;

qui abbiamo indicato con ∇_x il gradiente fatto solo rispetto alle variabili spaziali.

Osservazione 2.33. *Utilizzando il Teorema della divergenza 1.7 (ragionando come nel Teorema 1.14), si ottiene allora che la temperatura soddisfa la seguente equazione differenziale*

$$\Delta_x u(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t), \quad \forall\ (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,+\infty)\ ,$$

dove abbiamo indicato con Δ_x il Laplaciano fatto solo rispetto alle variabili spaziali. Infatti, dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un arbitrario aperto regolare e ν la sua normale esterna, indipendenti dal tempo, per definizione di flusso di calore si ha

$$Q(t) = -\int_{\partial\Omega} \langle q, \nu \rangle dH^2$$

e applicando la legge di Fourier si ha

$$-\int_{\partial\Omega} \langle q, \nu \rangle dH^2 = \int_{\partial\Omega} \langle \nabla_x u(x,t), \nu \rangle dH^2.$$

Applichiamo ora il teorema della divergenza ottenendo

$$\int_{\partial\Omega} \langle \nabla_x u(x,t), \nu \rangle dH^2 = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla_x u(x,t))dx.$$

Ora, ricordando che per definizione di Laplaciano $\operatorname{div}(\nabla_x u(x,t)) = \Delta_x u(x,t)$*, avremo*

$$Q(t) = \int_{\Omega} \Delta_x u(x,t)dx.$$

D'altra parte, per l'equazione di continuità e portando la derivata all'interno dell'integrale si ha

$$Q(t) = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} e(x,t)dx$$

e applicando l'equazione di bilancio energetico abbiamo

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} e(x,t)dx = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t)dx.$$

Dunque, abbiamo

$$Q(t) = \int_{\Omega} \Delta_x u(x,t)dx = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t)dx$$

da cui segue

$$\int_{\Omega} \left(\Delta_x u(x,t) - \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) \right) dx = 0.$$

Poiché Ω *è arbitrario e la funzione integranda è continua, allora la precedente equazione integrale vale anche puntualmente, ottenendo la tesi.*

Definizione 2.14. *(Operatore del calore)*
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$*, aperto, con* $n \in \mathbb{N}$*, poniamo* $C_\Omega = \Omega \times (0, +\infty) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$*. Data una funzione* $u \in C^2(C_\Omega; \mathbb{R})$*, chiamiamo* ***operatore del calore*** *il seguente operatore differenziale* H *applicato ad* u *nel seguente modo*

$$Hu(x,t) = \Delta_x u(x,t) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,t), \quad \forall\ (x,t) \in C_\Omega\ .$$

Si dice che $u \in C^2(C_\Omega; \mathbb{R})$ *soddisfa l'equazione di diffusione o* ***equazione del calore****, se*

$$Hu(x,t) = 0, \quad \forall\ (x,t) \in C_\Omega\ .$$

Definizione 2.15. *(Problema di Cauchy-Dirichlet)*
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *un aperto, con* $n \in \mathbb{N}$*. Si dice che una funzione* $u \in C^2(C_\Omega; \mathbb{R}) \cap C(\overline{C}_\Omega; \mathbb{R})$ *è soluzione del* ***problema di Cauchy-Dirichlet****, per l'operatore del calore, se soddisfa*

$$\begin{cases} Hu(x,t) = 0, & (x,t) \in C_\Omega \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \Omega \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega,\ t \geq 0 \end{cases} \tag{24}$$

con $\varphi \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$ *assegnata, tale che* $\varphi \equiv 0$ *su* $\partial\Omega$*.*

Vale il seguente risultato (si veda l'Appendice A.4)

Teorema 2.8. *(Unicità per il Problema di Cauchy-Dirichlet)*
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *un aperto limitato e siano* $u_1, u_2 \in C^2\big(C_\Omega; \mathbb{R}\big) \cap C\big(\overline{C}_\Omega; \mathbb{R}\big)$ *soluzioni del Problema di Cauchy-Dirichlet (24). Allora* $u_1 \equiv u_2$.

Motivati dalla precedente Osservazione 2.33, si vuole studiare il seguente problema: supponiamo di conoscere al tempo iniziale il valore della temperatura u in tutti i punti di una sbarra (diciamo di lunghezza π e spessore trascurabile) e supponiamo che agli estremi la temperatura sia fissata (diciamo zero), allora sapendo che la temperatura soddisfa l'equazione di diffusione, vogliamo determinarne il valore per tutti i tempi. In altri termini, siano

$$I = (0, \pi) \subseteq \mathbb{R}, \quad C_I = I \times (0, +\infty),$$

allora si vuole determinare una soluzione del seguente problema di Cauchy-Dirichlet

$$\begin{cases} Hu(x,t) = 0, & (x,t) \in C_I \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in I \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0 \end{cases} \tag{25}$$

con $\varphi \in C\big(\overline{I}; \mathbb{R}\big)$ assegnata, tale che $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$. Osserviamo che in questo caso unidimensionale,

$$Hu(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\ . \tag{26}$$

Usando alcuni risultati sulle serie di Fourier e richiedendo un'ulteriore ipotesi di regolarità sulla funzione assegnata φ, mostreremo l'esistenza di una soluzione al precedente problema.

Teorema 2.9. *(Esistenza per il Problema di Cauchy-Dirichlet unidimensionale)*
Sia $\varphi \in C^1\big(\overline{I}; \mathbb{R}\big)$*, tale che* $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$*. Poniamo*

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(s) \sin(ks) ds, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Sia $u : \overline{C}_I \to \mathbb{R}$*, definita da*

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k e^{-k^2 t} \sin(kx)\ .$$

Allora $u \in C^2\big(C_I; \mathbb{R}\big) \cap C\big(\overline{C}_I; \mathbb{R}\big)$*, è soluzione del problema di Cauchy-Dirichlet (25).*

Dimostrazione. Sia $\widetilde{\varphi}$ la funzione definita da

$$\widetilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in [0, \pi], \\ -\varphi(-x), & x \in [-\pi, 0], \end{cases}$$

ed estesa con 2π-periodicità su tutto $\mathbb{R}$. Risulta allora $\widetilde{\varphi} \in C^1\big(S^1;\mathbb{R}\big)$ e dispari, quindi i suoi coefficienti di Fourier sono

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{\varphi}(s)\cos(ks)ds = 0, \quad k = 0, ..., n$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{\varphi}(s)\sin(ks)ds = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \varphi(s)\sin(ks)ds, \quad k = 1, ..., n$$

Inoltre, $\widetilde{\varphi}$ è sviluppabile in serie di Fourier su tutto $\mathbb{R}$, in particolare dal Teorema 2.3 la serie di Fourier di $\widetilde{\varphi}$ converge totalmente, quindi uniformemente, a $\widetilde{\varphi}$, su $\mathbb{R}$. Quindi

$$\widetilde{\varphi}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(kx), \quad x \in \mathbb{R} \ ,$$

in particolare

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(kx), \quad x \in [0, \pi] \ .$$

Osserviamo esplicitamente che la convergenza totale della serie di Fourier di $\widetilde{\varphi}$ significa

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |b_k| < +\infty \ . \tag{27}$$

Poniamo ora

$$u_k(x,t) = b_k e^{-k^2 t}\sin(kx), \quad k \in \mathbb{N} \ ,$$

si ha $u_k \in C^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, per ogni $k \in \mathbb{N}$. Poiché

$$|u_k(x,t)| \leq |b_k|, \quad t \geq 0, \ k \in \mathbb{N} \ ,$$

allora da (27), si ha che la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x,t)$$

converge totalmente, quindi uniformemente, ad una funzione continua su $\overline{C}_I$; chiamiamo allora tale limite

$$u \in C\big(\overline{C}_I;\mathbb{R}\big), \qquad u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x,t) \ .$$

In particolare, vale

$$\begin{aligned} u(x,0) =& \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(kx) = \varphi(x), \quad x \in I \\ u(0,t) =& u(\pi,t) = 0, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

quindi le condizioni al contorno del problema di Cauchy-Dirichlet (25) sono verificate. Osserviamo ora, che da un calcolo esplicito si ha (si veda a riguardo anche la successiva Osservazione 2.35)

$$Hu_k(x,t) = 0, \quad (x,t) \in C_I, \ \forall\, k \in \mathbb{N} \ .$$

Vogliamo mostrare adesso che $u \in C^2\big(C_I;\mathbb{R}\big)$. Sia allora $\varepsilon > 0$, poniamo

$$C_I^\varepsilon = I \times (\varepsilon, +\infty) \ .$$

Calcoliamo, ad esempio,

$$\frac{\partial u_k}{\partial x}(x,t) = b_k k e^{-k^2 t} \cos(kx), \quad k \in \mathbb{N} \ .$$

Si ha

$$e^{-k^2 t} = \frac{1}{e^{k^2 t}} \leq \frac{1}{e^{k^2 \varepsilon}}, \quad \forall\, t \geq \varepsilon \ ,$$

quindi

$$|ke^{-k^2 t}| \leq |ke^{-k^2 \varepsilon}| \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0, \quad \forall\, t \geq \varepsilon \ ,$$

allora esiste una costante $M > 0$, tale che

$$\left|\frac{\partial u_k}{\partial x}(x,t)\right| \leq M|b_k|, \quad \forall\, (x,t) \in C_I^\varepsilon \ .$$

Da (27), si ottiene che si ha che la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\partial u_k}{\partial x}(x,t)$$

converge totalmente su C_I^ε; data l'arbitrarietà di ε, si ha la convergenza totale su C_I. In particolare, si ha che $\frac{\partial u}{\partial x}$ esiste ed inoltre vale

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\partial u_k}{\partial x}(x,t), \quad \forall\, (x,t) \in C_I \ .$$

Con lo stesso ragionamento si prova che esistono le derivate di ogni ordine, rispetto a x e t di u, su C_I. Quindi, si ha in particolare che $u \in C^\infty\big(C_I;\mathbb{R}\big)$, ed infine vale

$$Hu(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} Hu_k(x,t) = 0 \ .$$

concludendo la dimostrazione. $\square$

Osservazione 2.34. *La soluzione fornita dal precedente Teorema 2.9 è anche unica in virtù del Teorema 2.8.*

Osservazione 2.35. *L'idea che una somma di funzioni del tipo* $c_k e^{-k^2 t}\sin(kx)$*, con* c_k *costanti, possa essere soluzione dell'equazione di diffusione unidimensionale, risiede nell'utilizzo del metodo delle separazioni delle variabili. Cioè, si cercano soluzioni all'equazione differenziale (26) del tipo*

$$u(x,t) = f(x)g(t), \quad (x,t) \in C_I \ ,$$

con f, g *da determinare. In particolare, per una funzione di questo tipo, si ha*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = f'(x)g(t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f''(x)g(t) \ ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = f(x)g'(t) \ .$$

Quindi

$$Hu(x,t) = 0 \iff f''(x)g(t) = f(x)g'(t) \ .$$

Ora, supponendo f *e* g *non nulle, esisterà una costante* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tale che*

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g'(t)}{g(t)} = \lambda, \quad \forall \ (x,t) \in C_I \ .$$

Distinguiamo tre casi.

- *Caso* $\lambda > 0$*. Si ha*

  $$f''(x) = \lambda f(x),$$

  le cui soluzioni sono del tipo

  $$f(x) = c_1 e^{+\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \ .$$

  Imponendo le condizioni $f(0) = f(\pi) = 0$*, si avrebbe* $c_1 = c_2 = 0$*; quindi si otterrebbe la soluzione identicamente nulla.*

- *Caso* $\lambda = 0$*. Si ha*

  $$f''(x) = 0,$$

  le cui soluzioni sono del tipo

  $$f(x) = c_1 + c_2 x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \ .$$

  Imponendo le condizioni $f(0) = f(\pi) = 0$*, si avrebbe* $c_1 = c_2 = 0$*; quindi si otterrebbe la soluzione identicamente nulla.*

- *Caso* $\lambda < 0$*. Si ha*

  $$f''(x) = \lambda f(x),$$

le cui soluzioni sono del tipo

$$f(x) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \, .$$

Imponendo le condizioni $f(0) = f(\pi) = 0$, *si avrebbe* $c_1 = 0$, $c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0$. *A questo punto, potrebbe essere* $c_2 = 0$, *quindi si otterrebbe la soluzione identicamente nulla, oppure* $\sqrt{-\lambda}\pi = k\pi$, *cioè* $\lambda = -k^2$, *con* $k \in \mathbb{N}$.

Quindi, l'unica possibilità di avere soluzioni non nulle è dato da funzioni del tipo

$$f_k(x) = c_2 \sin(kx), \quad c_2 \in \mathbb{R}, \; k \in \mathbb{N} \, .$$

Ora, utilizzando il valore $\lambda = -k^2$, *con* $k \in \mathbb{N}$, *si ottiene*

$$g'(t) = -k^2 g(t),$$

le cui soluzioni sono del tipo

$$g_k(t) = c_3 e^{-k^2 t}, \quad c_3 \in \mathbb{R}, \; k \in \mathbb{N} \, .$$

In conclusione, chiamando $c_k = c_2 c_3$, *allora la funzione*

$$u_k(x,t) = c_k e^{-k^2 t} \sin(kx), \quad c_k \in \mathbb{R}, \; k \in \mathbb{N} \, ,$$

è soluzione del seguente sistema

$$\begin{cases} Hu_k(x,t) = 0, \quad (x,t) \in C_I \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Infine, poiché l'operatore H *è lineare, una somma finita di* u_k *è ancora soluzione del precedente sistema. Quindi, la dimostrazione del Teorema 2.9 mostra che anche la somma infinita è soluzione ed è possibile scegliere opportunamente le costanti* c_k *in modo da soddisfare tutte le condizioni al bordo del problema (25).*

A Appendice

A.1 Serie di Fourier complesse

Definizione A.1. *(Spazi $L^p(\Omega;\mathbb{C})$)*
*Siano $n \in \mathbb{N}$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Dato $p \in \mathbb{R}$, con $1 \leq p < +\infty$, definiamo lo **spazio** $L^p(\Omega;\mathbb{C})$ nel seguente modo*

$$L^p(\Omega;\mathbb{C}) = \left\{ u \in Mis(\Omega;\mathbb{C}) \;\; t.c. \;\; \int_\Omega |u(x)|^p dx < +\infty \right\},$$

dove abbiamo indicato con $Mis(\Omega;\mathbb{C})$ l'insieme delle funzioni misurabili, secondo Lebesgue, da Ω a valori complessi.

Osservazione A.1. *Lo spazio $L^p(\Omega;\mathbb{C})$ munito della norma*

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \; u \in L^p(\Omega;\mathbb{C})$$

è uno spazio di Banach separabile; inoltre se $1 < p < +\infty$ allora è anche riflessivo.
In particolare, $L^2(\Omega;\mathbb{C})$ è uno spazio di Hilbert, munito del prodotto scalare (complesso)

$$\langle u, v \rangle_{L^2_{\mathbb{C}}} = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx \; , \quad u, v \in L^2(\Omega;\mathbb{C}) \; .$$

Definizione A.2. *(Spazi $L^p\big(S^1;\mathbb{C}\big)$)*
*Dato $p \in \mathbb{R}$, con $1 \leq p < +\infty$, definiamo lo **spazio** $L^p\big(S^1;\mathbb{C}\big)$*

$$L^p\big(S^1;\mathbb{C}\big) = L^p_{per}\big((-\pi,\pi);\mathbb{C}\big),$$

come lo spazio delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-periodiche, con $f \in L^p\big((-\pi,\pi);\mathbb{C}\big)$.

Osservazione A.2. *Sia $f \in L^1\big(S^1;\mathbb{C}\big)$. Allora, per ogni $k \in \mathbb{N}$, vale*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt \in \mathbb{C}, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt \in \mathbb{C}$$

Definizione A.3. *(Polinomio di Fourier complesso)*
Sia $f \in L^1(S^1;\mathbb{C})$. Si chiama ***polinomio di Fourier complesso*** *di f, di grado minore o uguale ad $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, il seguente polinomio trigonometrico*

$$S_n(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \qquad S_n(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\} \ ,$$

dove

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt, \quad k = 0, ..., n$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt, \quad k = 1, ..., n$$

sono detti i coefficienti (complessi) di Fourier di f.

Definizione A.4. *(Serie di Fourier complessa)*
Sia $f \in L^1(S^1;\mathbb{C})$. Si chiama ***serie di Fourier complessa*** *di f, la seguente serie di funzioni*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\} \ ,$$

dove

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt, \quad k \geq 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt, \quad k \geq 1 \ .$$

In particolare $S_n(f)$ è la successione delle somme parziali.
Inoltre, diremo che f è sviluppabile in serie di Fourier, nel punto $t \in \mathbb{R}$, se valgono le seguenti condizioni:

(i) la serie di Fourier converge puntualmente in t, cioè esiste $\lambda \in \mathbb{C}$ con

$$\lim_{n \to +\infty} S_n(f)(t) = \lambda \ ,$$

(ii) la somma della serie di Fourier coincide con il valore di f in t, cioè

$$\lambda = f(t) \ .$$

Osservazione A.3. *(Forma compatta per le serie di Fourier)*
Sia $t \in \mathbb{R}$; dalla formula di Eulero,

$$e^{it} = \cos(t) + i\sin(t) \ ,$$

si ricava, per ogni $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \cos(kt) = \dfrac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2} \ , \\ \\ \sin(kt) = \dfrac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2i} = (-i)\dfrac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2} \ . \end{cases}$$

Quindi, ponendo

$$\begin{cases} \alpha_k = \dfrac{a_k - ib_k}{2}, \quad k \in \mathbb{N} \ , \\ \\ \alpha_0 = \dfrac{a_0}{2} \ , \\ \\ \alpha_{-k} = \dfrac{a_k + ib_k}{2}, \quad k \in \mathbb{N} \ , \end{cases}$$

si ottiene, data $f \in L^1\big(S^1;\mathbb{C}\big)$, la seguente forma compatta per la sua serie di Fourier complessa:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k e^{ikt} \ ,$$

con

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt, \quad k \in \mathbb{Z} \ .$$

Ovviamente la precedente forma compatta vale anche se $f \in L^1\big(S^1;\mathbb{R}\big)$ è a valori reali, in particolare poiché i coefficienti a_k e b_k sono reali, vale

$$\alpha_{-k} = \overline{\alpha}_k, \quad k \in \mathbb{N} \ .$$

A.2 Richiami di analisi complessa

Riportiamo alcune definizioni e risultati (si veda ad esempio [6]).

Definizione A.5. *(Funzione olomorfa)*
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto. Diciamo che $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è una ***funzione olomorfa****, in $z_0 \in \Omega$, se*

$$\exists \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C} \, .$$

In particolare, diremo che f è olomorfa su Ω, se è olomorfa in tutti i punti di Ω. Infine, denotiamo con $H(\Omega; \mathbb{C})$, l'insieme delle funzioni olomorfe su Ω.

Identifichiamo ora

$$\mathbb{C} \ni z = x + iy \simeq (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \, .$$

Inoltre, data $f : \Omega \to \mathbb{C}$, con $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, poniamo

$$f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$$

dove $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ denotano rispettivamente la parte reale e immaginaria di f.

Teorema A.1. *(Condizioni di Cauchy-Riemann)*
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto. Allora $f = u + iv : \Omega \to \mathbb{C}$ è olomorfa, in $z_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$, se e solo se le funzioni u, v sono differenziabili e soddisfano le seguenti condizioni di Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases} \tag{28}$$

Proposizione A.1. *Consideriamo una serie di potenze in $\mathbb{C}$*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad c_k \in \mathbb{C} \, .$$

di centro $z_0 \in \mathbb{C}$ e raggio di convergenza $r > 0$ (anche $+\infty$). Sia

$$f : B_r(z_0) \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k \, ,$$

dove

$$B_r(z_0) = \big\{ z \in \mathbb{C}, \ |z - z_0| < r \big\} \quad \big(\textit{oppure} \ \ B_r(z_0) = \mathbb{C}, \ \textit{se} \ \ r = +\infty \big) \, .$$

Allora $f \in H\big(B_r(z_0); \mathbb{C}\big)$.

Teorema A.2. *Sia $f \in H(\Omega;\mathbb{C})$, con $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto. Allora f è analitica; in particolare f ammette derivate (complesse) di ogni ordine ed inoltre, per ogni $z_0 \in \Omega$, si ha*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k, \quad \forall\, z \in B_r(z_0)\ ,$$

dove $r = dist(z_0, \mathrm{Fr}(\Omega))$ se $\Omega \neq \mathbb{C}$, oppure $r = +\infty$ se $\Omega = \mathbb{C}$.

Utilizzando le condizioni di Cauchy-Riemann (28), si ottiene la seguente

Proposizione A.2. *Sia $f = u + iv \in H(\Omega;\mathbb{C})$, con $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto. Allora le funzioni u, v sono armoniche, cioè $u, v \in C^2(\Omega;\mathbb{R})$ e*

$$\Delta u(x,y) = \Delta v(x,y) = 0, \quad \forall\, (x,y) \in \Omega\ .$$

Osservazione A.4. *In generale, date due funzioni u, v armoniche, non è detto che la funzione $f = u + iv$ sia olomorfa. Infatti, siano ad esempio*

$$u(x,y) = x, \quad v(x,y) = -y\ .$$

Allora per ogni aperto Ω, si ha $u, v \in C^2(\Omega;\mathbb{R})$ e

$$\Delta u(x,y) = \Delta v(x,y) = 0, \quad \forall\, (x,y) \in \Omega\ .$$

Ma la funzione $f = u + iv \notin H(\Omega;\mathbb{C})$, in quanto non sono verificate le condizioni di Cauchy-Riemann (28).

Proposizione A.3. *(Coniugata armonica)*
Sia $u \in C^2(\Omega;\mathbb{R})$, con $\Omega \subseteq \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ aperto. Se u è armonica e Ω è semplicemente connesso, allora esiste $v \in C^2(\Omega;\mathbb{R})$ armonica, tale che $f = u + iv \in H(\Omega;\mathbb{C})$. In particolare una tale funzione v si chiama ***coniugata armonica*** *di u ed è definita a meno di costanti.*

A.3 Principio del massimo per il Laplaciano

Lemma A.1. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato. Se $u \in C^2(\Omega;\mathbb{R}) \cap C(\overline{\Omega};\mathbb{R})$ soddisfa*

$$\Delta u(x) > 0, \quad \forall\, x \in \Omega\ ,$$

allora u non ammette massimi interni; in particolare

$$u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u, \quad \forall\, x \in \Omega\ .$$

Dimostrazione. Supponiamo che $x_0 \in \Omega$ sia un punto di massimo locale per u. Allora $D^2u(x_0) \leq 0$, nel senso delle forme quadratiche; in particolare

$$0 < \Delta u(x_0) = tr\big(D^2 u(x_0)\big) \leq 0\ ,$$

che è assurdo. □

Teorema A.3. *(Principio del massimo debole)*
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato. Se $u \in C^2(\Omega;\mathbb{R}) \cap C(\overline{\Omega};\mathbb{R})$ soddisfa

$$\Delta u(x) \geq 0, \quad \forall\, x \in \Omega\ ,$$

allora

$$u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u, \quad \forall\, x \in \Omega\ .$$

Dimostrazione. Sia $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Poiché Ω è limitato, esiste una costante $M > 0$, tale che

$$e^{x_1} \leq M, \quad \forall\, x \in \Omega\ .$$

Ora, dato $\varepsilon > 0$, definiamo la seguente funzione

$$u_\varepsilon \in C^2(\Omega;\mathbb{R}) \cap C(\overline{\Omega};\mathbb{R}), \qquad u_\varepsilon(x) = u(x) - \varepsilon w(x)\ ,$$

dove abbiamo posto

$$w(x) = M - e^{x_1}, \quad \forall\, x \in \Omega\ .$$

Osserviamo esplicitamente che

$$0 \leq w(x) \leq M, \qquad u_\varepsilon(x) \leq u(x), \quad \forall\, x \in \Omega\ .$$

Adesso, poiché $\Delta w(x) = -e^{x_1} < 0$, vale

$$\Delta u_\varepsilon(x) = \Delta u(x) - \varepsilon \Delta w(x) > 0, \quad \forall\, x \in \Omega\ .$$

Allora, dal Lemma A.1, si ha

$$u_\varepsilon(x) \leq \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon, \quad \forall\, x \in \Omega\ .$$

Quindi

$$u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon + \varepsilon w(x) \leq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon M, \quad \forall\, x \in \Omega\ .$$

Data l'arbitrarietà di ε, si ottiene la tesi. $\square$

Corollario A.1. *(Principio del minimo debole)*
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato. Se $u \in C^2\big(\Omega;\mathbb{R}\big) \cap C\big(\overline{\Omega};\mathbb{R}\big)$ soddisfa

$$\Delta u(x) \leq 0, \quad \forall\, x \in \Omega\ ,$$

allora

$$u(x) \geq \min_{\partial\Omega} u, \quad \forall\, x \in \Omega\ .$$

Dimostrazione. Applicare il principio del massimo debole alla funzione $-u$. $\square$

Corollario A.2. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato. Se $u \in C^2\big(\Omega;\mathbb{R}\big) \cap C\big(\overline{\Omega};\mathbb{R}\big)$ soddisfa*

$$\Delta u(x) = 0, \quad \forall\, x \in \Omega\ ,$$

allora

$$\min_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u, \quad \forall\, x \in \Omega\ .$$

Dimostrazione. Applicare il principio del massimo/minimo debole. $\square$

Come applicazione, si ottiene il seguente risultato di unicità.

Teorema A.4. *(Unicità per il Problema di Dirichlet)*
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e siano $u_1, u_2 \in C^2\big(\Omega;\mathbb{R}\big) \cap C\big(\overline{\Omega};\mathbb{R}\big)$ soluzioni del seguente Problema di Dirichlet, per il Laplaciano

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = \varphi(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

con $f \in C(\Omega;\mathbb{R})$ e $\varphi \in C\big(\partial\Omega;\mathbb{R}\big)$ assegnate. Allora $u_1 \equiv u_2$.

Dimostrazione. Definiamo la seguente funzione

$$u(x) = u_1(x) - u_2(x), \quad x \in \Omega \ .$$

Si ha che $u \in C^2\big(\Omega;\mathbb{R}\big) \cap C\big(\overline{\Omega};\mathbb{R}\big)$ è soluzione del seguente Problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{29}$$

Allora, dal Corollario A.2, si ha

$$0 = \min_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u = 0, \quad \forall\, x \in \Omega \ .$$

Quindi $u \equiv 0$. $\square$

Osservazione A.5. *L'unicità per il Problema di Dirichlet, data dal Teorema 2.6, si può provare utilizzando il Teorema della Divergenza 1.7, richiedendo un po' più di regolarità. Infatti, se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un aperto regolare e $u \in C^2\big(\overline{\Omega};\mathbb{R}\big)$, allora vale la seguente **formula dell'Energia***

$$\int_\Omega \|\nabla u(x)\|^2 \, dx = -\int_\Omega u(x)\ \Delta u(x)\ dx + \int_{\partial\Omega} u\ \frac{\partial u}{\partial \nu}\ dH^{n-1} \ , \tag{30}$$

dove $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \langle \nabla u, \nu \rangle$ denota la derivata direzionale di u lungo la normale esterna ν. Infatti, dalla definizione di norma Euclidea segue che

$$\int_\Omega \|\nabla u(x)\|^2 \, dx = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)^2 dx.$$

Allora, dato che $u \in C^2\big(\overline{\Omega};\mathbb{R}\big)$, applichiamo la formula di integrazione per parti, Teorema 1.9, con $f(x) = u(x)$ e $g(x) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$ ottenendo

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)^2 dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_i dH^{n-1} - \int_\Omega u(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) dx, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Sommando si ha

$$\int_\Omega \|\nabla u(x)\|^2 \, dx = \sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_i dH^{n-1} - \sum_{i=1}^n \int_\Omega u(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) dx. \tag{31}$$

Per definizione di derivata direzionale, si ha

$$\sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_i dH^{n-1} = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \nu} dH^{n-1},$$

mentre per definizione di Laplaciano

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} u(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) dx = \int_{\Omega} u(x) \Delta u(x) dx.$$

Quindi, sostituendo in (31) otteniamo la formula dell'energia (30).
In particolare, se $u \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$ *è soluzione del Problema di Dirichlet (29), allora dalla formula (30), si ha* $\nabla u \equiv 0$ *su* Ω*, quindi* u *è costante (eventualmente su ogni componente connessa di* Ω*); ma poiché* u *è continua fino al bordo, dove vale zero, allora* $u \equiv 0$ *su* Ω*.*

A.4 Principio del massimo per l'operatore del calore

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, con $n \in \mathbb{N}$, poniamo $C_\Omega = \Omega \times (0, +\infty) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.

Lemma A.2. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato. Se $u \in C^2\big(C_\Omega; \mathbb{R}\big) \cap C\big(\overline{C}_\Omega; \mathbb{R}\big)$ soddisfa*

$$Hu(x,t) > 0, \quad \forall\, (x,t) \in C_\Omega \ ,$$

allora u non ammette massimi interni; inoltre

$$u(x,t) \leq \sup_{\partial C_\Omega} u, \quad \forall\, (x,t) \in C_\Omega \ .$$

Dimostrazione. Sia $T > 0$, poniamo

$$C_\Omega^T = \Omega \times (0,T), \quad \partial_p C_\Omega^T = \partial C_\Omega \cap \partial C_\Omega^T \ ,$$

dove l'insieme $\partial_p C_\Omega^T$ si chiama bordo parabolico di C_Ω^T. Vogliamo mostrare che

$$u(x,t) \leq \sup_{\partial_p C_\Omega^T} u, \quad \forall\, (x,t) \in C_\Omega^T \ . \tag{32}$$

Supponiamo che $(x_0, t_0) \in C_\Omega^T$ sia un punto di massimo locale per u. Allora il gradiente di u si annulla in (x_0, t_0) e la matrice Hessiana di u, calcolata in (x_0, t_0), è semi-definita negativa nel senso delle forme quadratiche; in particolare

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_0) = 0, \quad \Delta_x u(x_0, t_0) \leq 0 \ .$$

Allora

$$0 < Hu(x_0, t_0) = \Delta_x u(x_0, t_0) - \frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_0) \leq 0 \ ,$$

che è assurdo. Quindi u ammette massimo in un punto di ∂C_Ω^T; vogliamo escludere il "coperchio superiore". Supponiamo quindi che (x_0, T) sia un punto di massimo locale per u, con $x_0 \in \Omega$. Allora

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_0, T) \geq 0, \quad \Delta_x u(x_0, T) \leq 0 \ .$$

Allora

$$0 < Hu(x_0, T) = \Delta_x u(x_0, T) - \frac{\partial u}{\partial t}(x_0, T) \leq 0 \ ,$$

che è assurdo. Questo mostra la (32). In conclusione, data l'arbitrarietà di T, si ottiene la tesi. □

Teorema A.5. *(Principio del massimo parabolico debole)*
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *un aperto limitato. Se* $u \in C^2\big(C_\Omega;\mathbb{R}\big) \cap C\big(\overline{C}_\Omega;\mathbb{R}\big)$ *soddisfa*

$$Hu(x,t) \geq 0, \quad \forall\,(x,t) \in C_\Omega\ ,$$

allora

$$u(x,t) \leq \sup_{\partial C_\Omega} u, \quad \forall\,(x,t) \in C_\Omega\ .$$

Dimostrazione. Sia $T > 0$, poniamo

$$C_\Omega^T = \Omega \times (0,T), \quad \partial_p C_\Omega^T = \partial C_\Omega \cap \partial C_\Omega^T\ .$$

Dato ora $\varepsilon > 0$, definiamo la seguente funzione

$$u_\varepsilon \in C^2\big(C_\Omega;\mathbb{R}\big) \cap C\big(\overline{C}_\Omega;\mathbb{R}\big), \qquad u_\varepsilon(x,t) = u(x,t) - \varepsilon w(x,t)\ ,$$

dove abbiamo posto

$$w(x,t) = t, \quad \forall\,(x,t) \in C_\Omega\ .$$

Osserviamo esplicitamente che

$$0 \leq w(x) \leq T, \qquad u_\varepsilon(x) \leq u(x), \quad \forall\,(x,t) \in C_\Omega^T\ .$$

Adesso, poiché $Hw(x,t) = -1 < 0$, vale

$$Hu_\varepsilon(x,t) = Hu(x,t) - \varepsilon Hw(x,t) > 0, \quad \forall\,(x,t) \in C_\Omega^T\ .$$

Allora, dalla dimostrazione del Lemma A.2, si ha

$$u_\varepsilon(x,t) \leq \sup_{\partial_p C_\Omega^T} u_\varepsilon, \quad \forall\,(x,t) \in C_\Omega^T\ .$$

Quindi

$$u(x,t) \leq \sup_{\partial_p C_\Omega^T} u_\varepsilon + \varepsilon w(x,t) \leq \sup_{\partial_p C_\Omega^T} u + \varepsilon T, \quad \forall\,(x,t) \in C_\Omega^T\ .$$

Data l'arbitrarietà di ε, si ottiene

$$u(x,t) \leq \sup_{\partial_p C_\Omega^T} u, \quad \forall\,(x,t) \in C_\Omega^T\ .$$

Infine, data anche l'arbitrarietà di T, si ottiene la tesi. □

Corollario A.3. *(Principio del minimo parabolico debole)*
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *un aperto limitato. Se* $u \in C^2\big(C_\Omega;\mathbb{R}\big) \cap C\big(\overline{C}_\Omega;\mathbb{R}\big)$ *soddisfa*

$$Hu(x,t) \leq 0, \quad \forall\,(x,t) \in C_\Omega\ ,$$

allora

$$u(x,t) \geq \inf_{\partial C_\Omega} u, \quad \forall\,(x,t) \in C_\Omega\ .$$

Dimostrazione. Applicare il principio del massimo parabolico debole alla funzione $-u$. $\square$

Corollario A.4. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato. Se $u \in C^2\big(C_\Omega;\mathbb{R}\big) \cap C\big(\overline{C}_\Omega;\mathbb{R}\big)$ soddisfa*

$$Hu(x,t) = 0, \quad \forall\ (x,t) \in C_\Omega\ ,$$

allora

$$\inf_{\partial C_\Omega} u \leq u(x,t) \leq \sup_{\partial C_\Omega} u, \quad \forall\ (x,t) \in C_\Omega\ .$$

Dimostrazione. Applicare il principio del massimo/minimo parabolico debole. $\square$

Come applicazione, si ottiene il seguente risultato di unicità.

Teorema A.6. *(Unicità per il Problema di Cauchy-Dirichlet)*
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e siano $u_1, u_2 \in C^2\big(C_\Omega;\mathbb{R}\big) \cap C\big(\overline{C}_\Omega;\mathbb{R}\big)$ soluzioni del seguente Problema di Cauchy-Dirichlet, per l'operatore del calore

$$\begin{cases} Hu(x,t) = 0, & (x,t) \in C_\Omega \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \Omega \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega,\ t \geq 0 \end{cases}$$

con $\varphi \in C\big(\overline{\Omega};\mathbb{R}\big)$ assegnata, tale che $\varphi \equiv 0$ su $\partial\Omega$. Allora $u_1 \equiv u_2$.

Dimostrazione. Definiamo la seguente funzione

$$u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t), \quad (x,t) \in C_\Omega\ .$$

Si ha che $u \in C^2\big(C_\Omega;\mathbb{R}\big) \cap C\big(\overline{C}_\Omega;\mathbb{R}\big)$ è soluzione del seguente Problema di Cauchy-Dirichlet

$$\begin{cases} Hu(x,t) = 0, & (x,t) \in C_\Omega \\ u(x,0) = 0, & x \in \Omega \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega,\ t \geq 0 \end{cases} \tag{33}$$

Allora, dal Corollario A.4, si ha

$$0 = \inf_{\partial C_\Omega} u \leq u(x,t) \leq \sup_{\partial C_\Omega} u = 0, \quad \forall\ (x,t) \in C_\Omega\ .$$

Quindi $u \equiv 0$. $\square$

Osservazione A.6. *L'unicità per il Problema di Cauchy-Dirichlet, data dal Teorema 2.8, si può provare utilizzando il Teorema della Divergenza 1.7, richiedendo un po' più di regolarità. Infatti, se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un aperto regolare e $u \in C^2\big(\overline{C}_\Omega; \mathbb{R}\big)$, allora vale formula dell'Energia (30), per ogni $t \geq 0$,*

$$\int_\Omega \|\nabla_x u(x,t)\|^2 \, dx = -\int_\Omega u(x,t) \; \Delta_x u(x,t) \; dx + \int_{\partial\Omega} u \; \frac{\partial_x u}{\partial \nu} \; dH^{n-1} \; , \tag{34}$$

dove $\dfrac{\partial_x u}{\partial \nu} = \langle \nabla_x u, \nu \rangle$ denota la derivata direzionale di u, fatta rispetto alla variabile x, lungo la normale esterna ν. In particolare, se $u \in C^2\big(\overline{C}_\Omega; \mathbb{R}\big)$ è soluzione del Problema di Cauchy-Dirichlet (33), definiamo la seguente funzione

$$E_u : [0, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad E_u(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega \big(u(x,t)\big)^2 \; dx \; .$$

Osserviamo esplicitamente che $E_u(t) \geq 0$, per ogni $t \geq 0$, ed in particolare $E_u(0) = 0$. Ora, poiché $Hu \equiv 0$ su C_Ω, si ha per ogni $t \geq 0$,

$$\int_\Omega u(x,t) \; \Delta_x u(x,t) \; dx = \int_\Omega u(x,t) \; \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \; dx \; .$$

Utilizzando la formula (34), si ottiene per ogni $t \geq 0$,

$$-\int_\Omega \|\nabla_x u(x,t)\|^2 \; dx = \frac{1}{2} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} \Big(\big(u(x,t)\big)^2 \Big) \; dx = \frac{\partial E_u}{\partial t}(t) \; .$$

In altri termini, la funzione E_u è monotona decrescente, quindi

$$0 \leq E_u(t) \leq E_u(0) = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

In conclusione $E_u \equiv 0$ su $[0, +\infty)$, quindi $u \equiv 0$ su C_Ω.

A.5 Misura della palla n-dimensionale

Sia $n \in \mathbb{N}$. Consideriamo la palla in $\mathbb{R}^n$, di centro l'origine e raggio $r > 0$

$$B_r^n = \{x \in \mathbb{R}^n, \ \|x\| < r\}.$$

Chiamiamo ω_n la misura di Lebesgue della palla di raggio unitario in $\mathbb{R}^n$, cioè

$$\omega_n = \mathcal{L}^n(B_1^n) = \int_{B_1^n} 1 \, dx,$$

In particolare, usando il teorema del cambiamento di variabile, si ha

$$\mathcal{L}^n(B_r^n) = \omega_n r^n \ .$$

Ricordiamo la definizione dalla funzione Gamma di Eulero

$$\Gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad \Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \, t^{s-1} dt.$$

Vogliamo mostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, vale la seguente relazione

$$\omega_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \ . \tag{35}$$

Prima di tutto, usando il teorema di riduzione, se $n \geq 3$, si ha

$$\omega_n = \frac{2\pi}{n} \omega_{n-2} \ .$$

Infatti, sia $x = (y, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$, allora

$$\begin{aligned}
\omega_n = \mathcal{L}^n(B_1^n) &= \int_{B_1^n} 1 \, dx \\
&= \int_{B_1^2} \left(\int_{B^{n-2}_{\sqrt{1-\|y\|^2}}} 1 \, dz \right) \, dy \\
&= \int_{B_1^2} \mathcal{L}^{n-2}\left(B^{n-2}_{\sqrt{1-\|y\|^2}}\right) \, dy \\
&= \int_{B_1^2} \omega_{n-2}\left(1 - \|y\|^2\right)^{\frac{n-2}{2}} \, dy \\
&= \omega_{n-2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r\left(1 - r^2\right)^{\frac{n-2}{2}} \, dr \right) \, d\theta \\
&= \frac{2\pi}{n} \omega_{n-2} \ .
\end{aligned}$$

Quindi, poiché dalla definizione di ω_n risulta $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = \pi$, allora si ottiene, per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} \omega_{2k} = \frac{\pi^{k-1}}{k!}\omega_2 = \frac{\pi^k}{k!} \\ \\ \omega_{2k+1} = \frac{2^k\pi^k}{\big(2k+1\big)\big(2(k-1)+1\big)\big(2(k-2)+1\big)\cdots 3}\omega_1 = \frac{2\pi^k}{\big(k+\frac{1}{2}\big)\big(k-1+\frac{1}{2}\big)\big(k-2+\frac{1}{2}\big)\cdots\frac{3}{2}} \end{cases}$$

Ora, utilizzando il teorema di integrazione per parti nella definizione della funzione Γ, si ha

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \ , \quad \forall\, s \in (0, +\infty) \ , \tag{36}$$

dalla quale, poiché $\Gamma(1) = 1$, si ottiene

$$\Gamma(n+1) = n! \ , \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \ .$$

Inoltre, si ha

$$\Gamma\big(\tfrac{1}{2}\big) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{-\frac{1}{2}} dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \ ,$$

dalla quale si ottiene anche

$$\Gamma\big(\tfrac{3}{2}\big) = \Gamma\big(\tfrac{1}{2}+1\big) = \tfrac{1}{2}\Gamma\big(\tfrac{1}{2}\big) = \tfrac{\sqrt{\pi}}{2} \ .$$

In conclusione, se $n = 2k$, si ha

$$\omega_n = \omega_{2k} = \frac{\pi^k}{k!} = \frac{\pi^k}{\Gamma(k+1)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\big(\frac{n}{2}+1\big)} \ .$$

Analogamente, se $n = 2k+1$, utilizzando (36) risulta

$$\begin{aligned} \omega_n = \omega_{2k+1} = & \frac{2\pi^k}{\big(k+\frac{1}{2}\big)\big(k-1+\frac{1}{2}\big)\big(k-2+\frac{1}{2}\big)\cdots\frac{3}{2}} \\ = & \frac{2\pi^k}{\Gamma\big(k+1+\frac{1}{2}\big)}\Gamma\big(\tfrac{3}{2}\big) \\ = & \frac{2\pi^k}{\Gamma\big(k+1+\frac{1}{2}\big)}\frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ = & \frac{\pi^{k+\frac{1}{2}}}{\Gamma\big(k+1+\frac{1}{2}\big)} \\ = & \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\big(\frac{n}{2}+1\big)} \ . \end{aligned}$$

Quindi la formula (35) è provata per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Riferimenti bibliografici

[1] L.C.Evans, R.F..Gariepy; *Measure Theory and Fine Properties of Functions. Revised Edition.* Chapman and Hall/CRC, 2015

[2] K.J.Falconer; *Fractal Geometry.* John Wiley and Sons, 1990

[3] H.Federer; *Geometric Measure Theory.* Springer, 1996

[4] N.Fusco, P.Marcellini, C.Sbordone; *Lezioni di Analisi matematica due.* Zanichelli, 2020

[5] E.Lanconelli; *Lezioni di Analisi Matematica 2.*, Pitagora Editrice, Bologna, 1995

[6] E.Lanconelli; *Lezioni di Analisi Matematica 2, Seconda parte.*, Pitagora Editrice, Bologna, 1997

Indice analitico