Appunti delle lezioni di

Analisi non lineare

Versione 30/08/2025

Indice

1	Richiami e preliminari	4
1.1	Spazi e convergenze	4
1.2	Calcolo differenziale	8
1.3	Alcune proprietà delle funzioni	11
1.4	Teorema della divergenza	16
1.5	Spazi funzionali	18
2	Alcuni modelli	25
2.1	Esempio. Un Problema di Dirichlet unidimensionale	26
2.2	Esempio. Un Problema di Dirichlet per il Laplaciano	28
2.3	Esempio. Un Sistema Hamiltoniano	31
3	Lemma di deformazione	33
3.1	Condizione di Palais-Smale	33
3.2	Esempi	36
3.3	Pseudo-gradienti	38
4	Primi teoremi di minimax	46
4.1	Principio di minimax	46
4.2	Teorema del passo montano	49
4.3	Applicazioni a PDEs di tipo ellittico. I	52
5	Teorema di linking	58
5.1	Link	58
5.2	Teorema di linking	63
5.3	Applicazioni a PDEs di tipo ellittico. II	66
6	Link in dimensione infinita	75
6.1	Link relativo	75
6.2	Applicazioni a sistemi Hamiltoniani	79
A	Appendice	91
A.1	Alcuni Teoremi di Analisi Funzionale	91
A.2	Bootstrap	93
A.3	Invertibilità del Laplaciano	95
A.4	Identità di Pohozaev	97
	Riferimenti bibliografici	101

1 Richiami e preliminari

1.1 Spazi e convergenze

Richiamiamo alcune definizioni e proprietà; per una trattazione completa dei seguenti argomenti si vedano ad esempio [5], [15].

Assumiamo noti i concetti di spazio topologico e spazio metrico.

Uno spazio topologico X si dice **separabile** se contiene un sottoinsieme numerabile e denso. Dato uno spazio vettoriale (reale) topologico X , denotiamo con X^* il suo **duale topologico**, cioè l'insieme di tutte le funzioni lineari e continue da X a valori reali.

Uno **spazio normato** X è uno spazio vettoriale (reale) munito di norma $\|\cdot\|_X$; in particolare è uno spazio metrico (quindi topologico) in quanto la norma induce una distanza (quindi una topologia).

Vale la seguente caratterizzazione della dimensione ¹: sia X uno spazio normato e sia

$$B = \{x \in X \text{ t.c. } \|x\|_X \leq 1\}$$

la palla chiusa unitaria; allora si ha che ²

$$\dim(X) < +\infty \iff B \text{ è compatta.} \quad (1)$$

Uno spazio di **Banach** è uno spazio normato, completo rispetto alla distanza indotta dalla norma.

Siano X, Y spazi normati. L'insieme delle mappe lineari e continue ³ da X in Y , che denotiamo $L(X, Y)$, è uno spazio normato munito della **norma operatoriale**

$$\|F\|_{XY} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X = 1}} \|F(x)\|_Y = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|F(x)\|_Y}{\|x\|_X}, \quad \forall F \in L(X, Y).$$

¹Si può ottenere come corollario del Lemma di Riesz (si veda l'Appendice A.1)

²Ricordiamo che in uno spazio metrico, le definizioni di compattezza (per successioni o per ricoprimenti) sono equivalenti.

³Siano X, Y spazi normati e sia $F : X \rightarrow Y$ una funzione lineare. Allora F è continua se e solo se è limitata, cioè esiste $M \geq 0$ tale che

$$\|F(x)\|_Y \leq M\|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

In particolare, se Y è uno spazio di Banach allora anche $L(X, Y)$ è uno spazio di Banach, rispetto alla norma operatoriale.

Lo spazio $L(X, \mathbb{R})$ coincide con il duale topologico X^* ; in questo caso, per comodità denotiamo la norma operatoriale

$$\|F\|_{X^*} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X=1}} |F(x)| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|F(x)|}{\|x\|_X}, \quad \forall F \in L(X, \mathbb{R}).$$

In particolare, se X è uno spazio di Banach tale che X^* è separabile, allora X è separabile.

Sia X uno spazio normato. Consideriamo ora il **biduale** $X^{**} = (X^*)^*$ e definiamo la funzione J_x , per ogni $x \in X$, nel modo seguente:

$$J_x : X^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad J_x(F) = F(x).$$

Si ha che $J_x \in X^{**}$, per ogni $x \in X$. Inoltre, la mappa di valutazione canonica

$$J : X \rightarrow X^{**}, \quad x \mapsto J_x$$

è lineare, iniettiva e preserva le norme, cioè

$$\|x\|_X = \|J_x\|_{X^{**}}, \quad \forall x \in X.$$

Si dice che X è **riflessivo** se J è anche suriettiva, quindi un isomorfismo isometrico. In particolare si ha che se X è uno spazio di Banach, allora X è riflessivo se e solo se X^* è riflessivo.

Sia $\{x_k\} \subseteq X$ una successione in uno spazio normato X ; si dice che $\{x_k\}$ **converge in norma (o fortemente)** ad $\ell \in X$, e si scrive

$$x_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \ell,$$

se

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x_k - \ell\|_X = 0.$$

Sia $\{x_k\} \subseteq X$ una successione in uno spazio normato X ; si dice che $\{x_k\}$ **converge debolmente** ad $\ell \in X$, e si scrive

$$x_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \ell,$$

se

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} F(x_k) = F(\ell), \quad \forall F \in X^*. \quad (2)$$

Osserviamo esplicitamente che se il limite debole esiste allora è unico ¹.

Inoltre, la convergenza in norma implica quella debole, il viceversa è in generale falso (si veda l'Esempio 1.1); comunque se $\{x_k\}$ è una successione debolmente convergente allora è limitata ².

Un sottoinsieme $A \subseteq X$ di uno spazio di Banach X si dice (sequenzialmente) **debolmente compatto** ³ se ogni successione in A ammette una sottosuccessione debolmente convergente in A , cioè: data $\{x_k\} \subseteq A$, allora

$$\exists \ell \in A, \{x_{j_k}\} \subseteq \{x_k\} \text{ t.c. } x_{j_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \ell.$$

Il **Teorema di Kakutani** afferma che uno spazio di Banach X è riflessivo se e solo se la palla chiusa unitaria

$$\{x \in X \text{ t.c. } \|x\|_X \leq 1\}$$

è debolmente compatta. Come conseguenza, in uno spazio di Banach riflessivo ogni successione limitata ammette una sottosuccessione debolmente convergente.

Uno spazio di **Hilbert** X è uno spazio vettoriale (reale) munito di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$, completo rispetto alla distanza indotta dalla norma

$$\|\cdot\|_X := \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle_X};$$

in particolare è uno spazio di Banach.

In uno spazio di Hilbert X , il **Teorema di rappresentazione di Riesz**, afferma che

$$\forall F \in X^*, \exists ! x \in X \text{ t.c. } F(h) = \langle x, h \rangle_X, \quad \forall h \in X;$$

in particolare si ha (verificare per esercizio):

$$\|F\|_{X^*} = \|x\|_X. \tag{3}$$

Come corollario ogni spazio di Hilbert è riflessivo. Inoltre, una successione $\{x_k\} \subseteq X$ converge debolmente ad $\ell \in X$ se e solo se

$$\langle x, x_k \rangle_X \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \langle x, \ell \rangle_X, \quad \forall x \in X.$$

¹Segue da un corollario del Teorema di Hahn-Banach (si veda l'Appendice A.1) che garantisce l'esistenza di un funzionale lineare e continuo che separa i punti, cioè se $x, y \in X$ con $x \neq y$, allora esiste $F \in X^*$ tale che $F(x) \neq F(y)$.

²Si può mostrare usando il Principio dell'Uniforme Limitatezza o Teorema di Banach-Steinhaus (si veda l'Appendice A.1)

³Si ricordi il Teorema di Eberlein-Šmulian (si veda l'Appendice A.1) sull'equivalenza delle diverse definizioni di compattezza debole (per successioni o per ricoprimenti), in uno spazio di Banach.

Ricordiamo infine che uno spazio di Hilbert X è separabile se e solo se ammette una base ortonormale numerabile; in particolare data una base ortonormale numerabile $\{e_j\} \subseteq X$, vale la seguente **Identità di Parseval**

$$\|x\|_X^2 = \sum_{j \in \mathbb{N}} c_j^2, \quad \forall x \in X,$$

dove

$$c_j = \langle x, e_j \rangle_X, \quad \forall j \in \mathbb{N};$$

in particolare

$$x = \sum_{j \in \mathbb{N}} c_j e_j.$$

Esempio 1.1. *Sia X uno spazio di Hilbert separabile, con $\dim(X) = +\infty$. Consideriamo la successione $\{x_k\} \subseteq X$, data da una base ortonormale di X . Si ha che $\{x_k\}$ è una successione debolmente convergente a $0 \in X$, infatti usando l'identità di Parseval si ottiene che la successione $\{c_k\} = \{\langle x, x_k \rangle_X\} \subseteq \mathbb{R}$ deve essere infinitesima per ogni $x \in X$, ma questo significa*

$$\langle x, x_k \rangle_X \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 = \langle x, 0 \rangle_X, \quad \forall x \in X.$$

D'altra parte, la successione $\{x_k\}$ non converge in norma a $0 \in X$, poiché

$$\|x_k\|_X = 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

1.2 Calcolo differenziale

Introduciamo ora alcune definizioni riguardanti il calcolo differenziale in spazi di Banach; si vedano ad esempio [2], [3].

Definizione 1.1. (*Differenziale di Fréchet*)

Siano X, Y spazi di Banach. Una funzione $f : X \rightarrow Y$ si dice **differenziabile secondo Fréchet** in $x \in X$, se $\exists F \in L(X, Y)$ tale che:

$$f(x+h) = f(x) + F(h) + o(\|h\|_X), \quad h \rightarrow 0.$$

In questo caso si pone $F = d_x f$ e si chiama **differenziale di Fréchet** di f in x .

In particolare, diremo che f è differenziabile secondo Fréchet se lo è per ogni $x \in X$.

Infine, se f è differenziabile secondo Fréchet ed inoltre la mappa

$$d_{(\cdot)} f : X \rightarrow L(X, Y)$$

è continua, allora si dice che $f \in C^1(X; Y)$.

Osservazione 1.1. Siano X, Y spazi di Banach e $f : X \rightarrow Y$ una funzione differenziabile secondo Fréchet. Se la mappa $d_{(\cdot)} f : X \rightarrow L(X, Y)$ è differenziabile secondo Fréchet in $x \in X$, chiamiamo $d_x^2 f \in L(X, L(X, Y))$ il differenziale di Fréchet, del secondo ordine, di f in x ; in particolare poiché $L(X, L(X, Y))$ è isomorfo allo spazio $L_2(X, Y)$ delle mappe bilineari e continue da X in Y , possiamo pensare $d_x^2 f \in L_2(X, Y)$. In particolare, diremo che f è differenziabile due volte secondo Fréchet se lo è per ogni $x \in X$. Inoltre, se f è differenziabile due volte secondo Fréchet ed inoltre la mappa

$$d_{(\cdot)}^2 f : X \rightarrow L_2(X, Y)$$

è continua, allora diremo che $f \in C^2(X; Y)$.

Iterando questo argomento, si definiscono funzioni differenziabili di ogni ordine.

Definizione 1.2. (*Derivata di Gâteaux*)

Siano X, Y spazi di Banach. Una funzione $f : X \rightarrow Y$ si dice **derivabile secondo Gâteaux** in $x \in X$, lungo $h \in X$, se esiste il seguente limite ($t \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} \in Y.$$

In questo caso il valore del precedente limite si indica con $\partial_h f(x)$ e si chiama **derivata di Gâteaux** di f in x , lungo h .

Proposizione 1.1. *Siano X, Y spazi di Banach e sia $f : X \rightarrow Y$ differenziabile secondo Fréchet in $x \in X$. Allora f è derivabile secondo Gâteaux in x , lungo $h, \forall h \in X$ e vale*

$$d_x f(h) = \partial_h f(x).$$

Proposizione 1.2. *Siano X, Y spazi di Banach e sia $f : X \rightarrow Y$ derivabile secondo Gâteaux in $x \in X$, lungo $h \in X$, per ogni $x, h \in X$. Se*

$$\partial_{(\cdot)} f(x) \in L(X, Y), \quad \forall x \in X,$$

ed inoltre la mappa

$$\partial_{(\cdot)} f(\cdot) : X \rightarrow L(X, Y), \quad x \mapsto \partial_{(\cdot)} f(x)$$

è continua, allora f è differenziabile secondo Fréchet e vale

$$d_x f(h) = \partial_h f(x), \quad \forall x, h \in X.$$

In particolare $f \in C^1(X; Y)$.

Notazione 1.1. *In queste note, per comodità, denoteremo con:*

- $\mathbb{B}$ uno spazio di Banach separabile, munito di norma $\|\cdot\| = \|\cdot\|_X$;
- $\mathbb{H}$ uno spazio di Hilbert separabile, munito di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_X$;

Nel seguito saremo principalmente interessati a funzioni a valori reali; riscriviamo esplicitamente la condizione di differenziabilità in questo caso.

Definizione 1.3. *(Differenziale di Fréchet, per funzioni a valori reali)*

Una funzione $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice differenziabile secondo Fréchet in $x \in \mathbb{B}$, se $\exists F \in \mathbb{B}^$ tale che:*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - F(h)}{\|h\|} = 0.$$

In questo caso si pone $F = d_x f$ e si chiama differenziale di Fréchet di f in x .

In particolare, diremo che f è differenziabile secondo Fréchet se lo è per ogni $x \in \mathbb{B}$.

Infine, se f è differenziabile secondo Fréchet ed inoltre la mappa

$$d_{(\cdot)} f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}^*$$

è continua, allora si dice che $f \in C^1(\mathbb{B}; \mathbb{R})$.

Definizione 1.4. (Derivata di Gâteaux, per funzioni a valori reali)

Una funzione $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **derivabile secondo Gâteaux** in $x \in \mathbb{B}$, lungo $h \in \mathbb{B}$, se esiste il seguente limite ($t \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} \in \mathbb{R}.$$

In questo caso il valore del precedente limite si indica con $\partial_h f(x)$ e si chiama **derivata di Gâteaux** di f in x , lungo h .

Definizione 1.5. Sia $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile secondo Fréchet. Allora $x_0 \in B$ si dice **punto critico** per f , se $d_{x_0} f = 0$, cioè:

$$d_{x_0} f(h) = 0, \forall h \in \mathbb{B}.$$

In questo caso il valore reale $f(x_0)$ si chiama **valore critico** per f ; se $c \in \mathbb{R}$ non è un valore critico per f allora si dice che è un **valore regolare**. Denotiamo con $\text{crit}(f) \subseteq \mathbb{B}$ l'insieme dei punti critici per f , cioè

$$\text{crit}(f) = \{x \in \mathbb{B}. \text{ t.c. } d_x f = 0\}.$$

Inoltre, denotiamo con $\text{crit}^c(f) \subseteq \mathbb{B}$ l'insieme dei punti critici per f , al livello $c \in \mathbb{R}$, cioè

$$\text{crit}^c(f) = \{x \in \mathbb{B}. \text{ t.c. } d_x f = 0, f(x) = c\}.$$

Infine, denotiamo con $V\text{crit}(f) \subseteq \mathbb{R}$ l'insieme dei valori critici per f , cioè

$$V\text{crit}(f) = f(\text{crit}(f)).$$

Osservazione 1.2. (Teorema di Fermat)

Sia $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile secondo Fréchet. Ricordiamo che se $x_0 \in B$ è un estremante (locale) per f , allora x_0 è punto critico.

In uno spazio di Hilbert esiste uno speciale elemento associato al differenziale.

Definizione 1.6. (Gradiente)

Sia $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile secondo Fréchet. Allora (dal teorema di rappresentazione di Riesz):

$$\forall x \in \mathbb{H}, \exists! v \in \mathbb{H} \text{ t.c. } d_x f(h) = \langle v, h \rangle, \forall h \in \mathbb{H}.$$

Questo unico elemento v si chiama **gradiente** di f in x e si denota $\nabla f(x)$.

Osservazione 1.3. In particolare, per ogni $x \in \mathbb{H}$, da (3) si ha :

$$\|\nabla f(x)\| = \|d_x f\|_*.$$

1.3 Alcune proprietà delle funzioni

Richiamiamo ora alcune definizioni che saranno utili nel seguito.

Definizione 1.7. (*Funzione debolmente continua*)

Una funzione $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **debolmente inferiormente semi-continua** se, data una successione $\{x_k\} \subseteq \mathbb{B}$ debolmente convergente ad $\ell \in \mathbb{B}$, allora si ha ¹

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) \geq f(\ell).$$

Allo stesso modo, $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **debolmente superiormente semi-continua** se $-f$ è debolmente inferiormente semi-continua.

Infine, una funzione $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **debolmente continua** se è contemporaneamente debolmente inferiormente e superiormente semi-continua; in particolare, data una successione $\{x_k\} \subseteq \mathbb{B}$ debolmente convergente ad $\ell \in \mathbb{B}$, allora si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = f(\ell).$$

Osservazione 1.4. Una funzione debolmente continua è continua: infatti, data f debolmente continua, poiché ogni successione convergente (fortemente, in norma) converge in particolare anche debolmente, allora f è anche continua. Il viceversa non è in generale vero.

Esempio 1.2. Consideriamo la funzione

$$f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \|x\|,$$

dove $\dim(\mathbb{H}) = +\infty$. Ovviamente f è continua. Si ha che f non è debolmente continua. Infatti, consideriamo ad esempio la successione $\{x_k\} \subseteq \mathbb{H}$, data da una base ortonormale

¹Ricordiamo che, data una successione $\{a_k\} \subseteq \mathbb{R}$, si definisce limite inferiore

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} a_k := \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\inf_{j \geq k} a_j \right);$$

in particolare, poiché la successione $b_k = \inf_{j \geq k} a_j$ è monotona crescente, il limite inferiore esiste sempre. In maniera analoga si definisce il limite superiore

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} a_k := \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\sup_{j \geq k} a_j \right).$$

di $\mathbb{H}$. Dall'Esempio 1.1 si ha che $\{x_k\}$ è una successione debolmente convergente a $0 \in \mathbb{H}$.
Ma

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|x_k\| = \lim_{k \rightarrow +\infty} 1 = 1 \neq 0 = f(0).$$

Quindi f non è debolmente continua.

D'altra parte, f è debolmente inferiormente semi-continua. Infatti, sia $\{x_k\} \subseteq \mathbb{H}$ una successione debolmente convergente a $\ell \in \mathbb{H}$. Allora, poiché

$$\|x_k\| \|\ell\| \geq |\langle x_k, \ell \rangle|,$$

quindi, passando al limite inferiore

$$\|\ell\| \liminf_{k \rightarrow +\infty} \|x_k\| \geq \liminf_{k \rightarrow +\infty} |\langle x_k, \ell \rangle| = \lim_{k \rightarrow +\infty} |\langle x_k, \ell \rangle| = \|\ell\|^2.$$

Questo prova che f è debolmente inferiormente semi-continua.

Osservazione 1.5. Siano $\mathbb{B}$ uno spazio di Banach riflessivo e $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione debolmente continua. Allora se $A \subseteq \mathbb{B}$ è un insieme limitato, si ha che f è limitata su A . Infatti, sia ad esempio

$$c = \sup_{x \in A} f(x).$$

Se fosse $c = +\infty$, esisterebbe una successione massimizzante $\{x_k\} \subseteq A$, tale che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = +\infty.$$

Ora, poiché A è limitato e $\mathbb{B}$ è riflessivo, esiste una sottosuccessione debolmente convergente, cioè

$$\exists \ell \in \mathbb{B}, \{x_{j_k}\} \subseteq \{x_k\} \text{ t.c. } x_{j_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \ell.$$

Si avrebbe

$$+\infty = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{j_k}) = f(\ell) \in \mathbb{R},$$

che è assurdo; quindi $c \in \mathbb{R}$.

Osservazione 1.6. In contrasto con il classico Teorema di Weierstrass, in dimensione infinita una funzione continua, definita su un insieme limitato e chiuso, non è limitata in generale (si veda l'Esempio 1.6).

Definizione 1.8. (Funzione coerciva)

Una funzione $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **coerciva** se

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty. \quad (4)$$

Vale il seguente classico risultato, alla base dei metodi diretti del calcolo delle variazioni .

Teorema 1.1. *Sia $\mathbb{B}$ uno spazio di Banach riflessivo. Supponiamo che $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}$ sia:*

(i) *coerciva;*

(ii) *debolmente inferiormente semi-continua.*

Allora esiste un punto di minimo globale per f . Se in particolare f è differenziabile, allora esiste un punto critico.

Dimostrazione. Mostriamo prima di tutto che la funzione è limitata dal basso, in particolare

$$\exists c \in \mathbb{R} \text{ t.c. } c = \inf_{x \in \mathbb{B}} f(x) .$$

Infatti, se per assurdo $c = -\infty$, allora esisterebbe una successione minimizzante $\{x_k\} \subseteq \mathbb{B}$ tale che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = -\infty .$$

Poiché f è coerciva, si ha che $\{x_k\}$ deve essere limitata; in particolare, visto che $\mathbb{B}$ è riflessivo, esiste una sottosuccessione debolmente convergente, cioè

$$\exists \ell \in \mathbb{B}, \{x_{j_k}\} \subseteq \{x_k\} \text{ t.c. } x_{j_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \ell .$$

A questo punto, usando il fatto che f è debolmente inferiormente semi-continua, si avrebbe

$$-\infty = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = \liminf_{k \rightarrow +\infty} f(x_{j_k}) \geq f(\ell) \in \mathbb{R} ,$$

che è assurdo; quindi $c \in \mathbb{R}$. Sia ora una successione minimizzante $\{x_k\} \subseteq \mathbb{B}$ tale che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = c .$$

Di nuovo, poiché f è coerciva, si ha che $\{x_k\}$ deve essere limitata; in particolare, visto che $\mathbb{B}$ è riflessivo, esiste una sottosuccessione debolmente convergente, cioè

$$\exists \ell \in \mathbb{B}, \{x_{j_k}\} \subseteq \{x_k\} \text{ t.c. } x_{j_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \ell .$$

Usando nuovamente il fatto che f è debolmente inferiormente semi-continua, si ottiene

$$c = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = \liminf_{k \rightarrow +\infty} f(x_{j_k}) \geq f(\ell) \geq c ,$$

quindi esiste un punto di minimo globale per f . L'ultima affermazione dell'enunciato segue dal Teorema di Fermat. □

Osservazione 1.7. Osserviamo esplicitamente che nelle ipotesi del precedente Teorema 1.1, si è dimostrato in particolare che la funzione è limitata dal basso. Ovviamente ragionando allo stesso modo con $-f$, si ottiene che se una funzione non è limitata né dal basso né dall'alto, allora i metodi diretti del calcolo delle variazioni non si applicano.

Introduciamo ora anche la seguente proprietà.

Definizione 1.9. (Funzione compatta)

Sia $f : X_1 \rightarrow X_2$ una funzione continua tra spazi normati. Allora f si dice **compatta** se verifica una delle seguenti condizioni (equivalenti):

- (i) f manda insiemi limitati di X_1 in insiemi relativamente compatti di X_2 (cioè la cui chiusura è compatta);
- (ii) se $\{x_k\} \subseteq X_1$ è una successione limitata, allora $\{f(x_k)\} \subseteq X_2$ ammette una sottosuccessione convergente.

Esempio 1.3. Sia X uno spazio normato. Allora la funzione

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \|x\|_X,$$

è compatta.

Osservazione 1.8. Se $f : X_1 \rightarrow X_2$ è una funzione compatta e lineare tra spazi normati, allora f trasforma successioni debolmente convergenti, in successioni convergenti in norma (verificare per esercizio)¹.

Esempio 1.4. Consideriamo la funzione

$$f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \|x\|,$$

dove $\dim(\mathbb{H}) = +\infty$. Risulta che f è compatta; inoltre dall'Esempio 1.2 si ha che f non è debolmente continua. Mostriamo che f non verifica la proprietà espressa dall'Osservazione 1.8 (si noti che f non è lineare). Infatti, consideriamo ad esempio la successione $\{x_k\} \subseteq \mathbb{H}$, data da una base ortonormale di $\mathbb{H}$; dall'Esempio 1.1 si ha che $\{x_k\}$ è una successione debolmente convergente a $0 \in \mathbb{H}$. Ora definiamo la successione $\{y_k\} \subseteq \mathbb{H}$, data da

$$\begin{cases} y_{2k} = x_k, \\ y_{2k+1} = 0. \end{cases}$$

¹Si tenga presente la seguente osservazione: in uno spazio metrico X , se ogni sottosuccessione $\{x_{j_k}\} \subseteq \{x_k\} \subseteq X$ ammette una sottosuccessione convergente a $\ell \in X$, allora la successione $\{x_k\}$ converge a ℓ .

Si ha che anche $\{y_k\}$ è una successione debolmente convergente a $0 \in \mathbb{H}$. D'altra parte

$$\begin{cases} f(y_{2k}) = 1, \\ f(y_{2k+1}) = 0. \end{cases}$$

Quindi la successione $\{f(y_k)\} \subseteq \mathbb{R}$ non ammette limite in $\mathbb{R}$ (ovviamente ammette sottosuccessioni convergenti).

Proposizione 1.3. Sia $f : \mathbb{B}_1 \rightarrow \mathbb{B}_2$ una funzione compatta e sia $\Omega \subseteq \mathbb{B}_1$ un aperto limitato. Allora per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $f_\varepsilon \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{B}_2)$, tale che

$$\|f_\varepsilon(x) - f(x)\|_{\mathbb{B}_2} < \varepsilon, \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \quad (5)$$

ed inoltre $f_\varepsilon(\overline{\Omega}) \subseteq Y \subseteq \mathbb{B}_2$, con $\dim(Y) < +\infty$.

Dimostrazione. Poiché $\overline{f(\overline{\Omega})}$ è compatto, esiste un ricoprimento finito $\{B_i = B(y_i, \frac{\varepsilon}{2})\}_{i \in I}$, con $y_i \in \mathbb{B}_2$, tale che

$$\overline{f(\overline{\Omega})} \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i,$$

Sia

$$f_\varepsilon(x) = \frac{\sum_{i \in I} r_i(x) y_i}{\sum_{i \in I} r_i(x)},$$

dove

$$r_i(x) = \max\{\varepsilon - \|f(x) - y_i\|_{\mathbb{B}_2}, 0\}, \quad \forall x \in \overline{\Omega}, i \in I.$$

Allora f_ε soddisfa (5). Inoltre, posto

$$Y = \text{span}\{y_i, i \in I\},$$

si ha $f_\varepsilon(\overline{\Omega}) \subseteq Y$, con $\dim(Y) < +\infty$. □

Come conseguenza si ottiene il seguente risultato di approssimazione

Corollario 1.1. Sia $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ una funzione compatta e sia $\Omega \subseteq \mathbb{B}$ un aperto limitato. Allora esiste una successione $f_k \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{B})$, tale che f_k converge uniformemente ad f su $\overline{\Omega}$, ed inoltre

$$f_k(\overline{\Omega}) \subseteq Y_k \subseteq \mathbb{B}, \quad \dim(Y_k) < +\infty, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

1.4 Teorema della divergenza

Riportiamo qui alcune definizioni.

Definizione 1.10. (*Divergenza*)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, aperto, con $n \in \mathbb{N}$. Consideriamo una funzione

$$F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad F = (F_1, \dots, F_n)$$

Se F è differenziabile, definiamo la **divergenza** di F nel seguente modo

$$\operatorname{div}(F(x)) = \operatorname{tr}(\operatorname{Jac} F(x)) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial x_k}(x).$$

Definizione 1.11. (*Aperto regolare*)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, aperto, con $n \geq 2$. Allora Ω si dice **aperto regolare**, se:

- (i) Ω è limitato;
- (ii) $\Omega = \operatorname{Int}(\overline{\Omega})$;
- (iii) $\partial\Omega$ è una varietà di dimensione $(n-1)$ e di classe almeno C^1 .

Notazione 1.2. Scriveremo $f \in C^k(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$, con $k \geq 1$, se f è di classe C^k su un aperto contenente $\overline{\Omega}$.

Vale il seguente risultato

Teorema 1.2. (*della divergenza*)

Sia $F \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, aperto regolare, $n \geq 2$. Allora, denotando con ν la normale unitaria esterna a $\partial\Omega$, si ha

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(F(x)) dx = \int_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle dH^{n-1}, \quad (6)$$

dove il secondo integrale è inteso rispetto alla misura di Hausdorff $(n-1)$ -dimensionale dH^{n-1} su $\partial\Omega$; in particolare la quantità $\int_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle dH^{n-1}$ si chiama **flusso del campo F attraverso $\partial\Omega$** .

Il precedente teorema è equivalente alla seguente versione scalare

Teorema 1.3. *Sia $f \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, aperto regolare, $n \geq 2$. Allora, denotando con $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ la normale unitaria esterna a $\partial\Omega$, si ha per ogni $j = 1, \dots, n$*

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x) dx = \int_{\partial\Omega} f \nu_j dH^{n-1}.$$

Come corollario si ottiene la seguente formula di **integrazione per parti**

Teorema 1.4. *(Integrazione per parti)*

Siano $f, g \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, aperto regolare, $n \geq 2$. Allora, denotando con $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ la normale unitaria esterna a $\partial\Omega$, si ha per ogni $j = 1, \dots, n$

$$\int_{\Omega} g(x) \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x) dx = \int_{\partial\Omega} g f \nu_j dH^{n-1} - \int_{\Omega} f(x) \frac{\partial g_j}{\partial x_j}(x) dx. \quad (7)$$

Osservazione 1.9. *Il teorema della divergenza può essere generalizzato a funzioni e domini meno regolari, ad esempio il cui bordo è localmente grafico di una funzione Lipschitziana; per una trattazione completa si vedano ad esempio [7], [8].*

1.5 Spazi funzionali

Introduciamo alcuni speciali spazi di funzioni; si vedano ad esempio [1], [5].

Definizione 1.12. (*Spazi $L^p(\Omega; \mathbb{R})$*)

Siano $n \in \mathbb{N}$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Dato $p \in \mathbb{R}$, con $1 \leq p < +\infty$, definiamo lo **spazio $L^p(\Omega; \mathbb{R})$** nel seguente modo

$$L^p(\Omega; \mathbb{R}) = \left\{ u \in \text{Mis}(\Omega; \mathbb{R}) \text{ t.c. } \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < +\infty \right\},$$

dove abbiamo indicato con $\text{Mis}(\Omega; \mathbb{R})$ l'insieme delle funzioni misurabili, secondo Lebesgue, da Ω a valori reali.

Lo spazio $L^p(\Omega; \mathbb{R})$ munito della norma

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad u \in L^p(\Omega; \mathbb{R})$$

è uno spazio di Banach separabile; inoltre se $1 < p < +\infty$ allora è anche riflessivo. In particolare, $L^2(\Omega; \mathbb{R})$ è uno spazio di Hilbert

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f \in L^p(\Omega; \mathbb{R})$, $g \in L^q(\Omega; \mathbb{R})$, dove $p, q \in [1, +\infty)$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Allora valgono le seguenti **disuguaglianze di Hölder**

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}. \quad (8)$$

Definizione 1.13. (*Spazi di Sobolev $W^{k,p}(\Omega; \mathbb{R})$*)

Siano $n \in \mathbb{N}$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Dati $k \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{R}$, con $1 \leq p < +\infty$, definiamo lo **spazio di Sobolev $W^{k,p}(\Omega; \mathbb{R})$** nel seguente modo

$$W^{k,p}(\Omega; \mathbb{R}) = \{u \in L^p(\Omega; \mathbb{R}) \text{ t.c. } \partial^\alpha u \in L^p(\Omega; \mathbb{R}), |\alpha| \leq k\},$$

dove α denota un multi-indice e $\partial^\alpha u$ la **derivata debole**¹ di u , di ordine α .

¹Sia $u \in L^1_{loc}(\Omega; \mathbb{R})$ (cioè sommabile su ogni sottoinsieme compatto contenuto in Ω) e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un multi-indice, allora una funzione $v \in L^1_{loc}(\Omega; \mathbb{R})$ si dice derivata debole di u , di ordine α , se

$$\int_{\Omega} u(x) \partial^\alpha h(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v(x) h(x) dx, \quad \forall h \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R})$$

con

$$\partial^\alpha h(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} h(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

e dove $C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R})$ denota lo spazio delle funzioni C^∞ e a supporto compatto contenuto in Ω .

Lo spazio $W^{k,p}(\Omega; \mathbb{R})$ munito della norma

$$\|u\| = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad u \in W^{k,p}(\Omega; \mathbb{R})$$

è uno spazio di Banach separabile; inoltre se $1 < p < +\infty$ allora è anche riflessivo. In particolare, $W^{k,2}(\Omega; \mathbb{R})$ è uno spazio di Hilbert

Definizione 1.14. (Spazi di Sobolev $H^{k,p}(\Omega; \mathbb{R})$)

Siano $n \in \mathbb{N}$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Dati $k \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{R}$, con $1 \leq p < +\infty$, definiamo lo **spazio di Sobolev** $H^{k,p}(\Omega; \mathbb{R})$ nel seguente modo

$$H^{k,p}(\Omega; \mathbb{R}) = \overline{C^\infty(\Omega; \mathbb{R}) \cap W^{k,p}(\Omega; \mathbb{R})}^{\|\cdot\|},$$

dove $\|\cdot\|$ è la norma su $W^{k,p}(\Omega; \mathbb{R})$. Per comodità scriveremo $H^k(\Omega; \mathbb{R}) = H^{k,2}(\Omega; \mathbb{R})$.

Vale il seguente risultato di N.G.Meyers e J.Serrin [11].

Teorema 1.5. (di Meyers-Serrin)

Siano $n \in \mathbb{N}$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Dati $k \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{R}$, con $1 \leq p < +\infty$, allora si ha

$$W^{k,p}(\Omega; \mathbb{R}) = H^{k,p}(\Omega; \mathbb{R}).$$

Definizione 1.15. (Spazi di Sobolev $H_0^{k,p}(\Omega; \mathbb{R})$)

Siano $n \in \mathbb{N}$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto limitato. Dati $k \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{R}$, con $1 \leq p < +\infty$, definiamo lo **spazio di Sobolev** $H_0^{k,p}(\Omega; \mathbb{R})$ come il seguente sottospazio chiuso di $H^{k,p}(\Omega; \mathbb{R})$

$$H_0^{k,p}(\Omega; \mathbb{R}) = \overline{C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R})}^{\|\cdot\|},$$

dove $\|\cdot\|$ è la norma su $W^{k,p}(\Omega; \mathbb{R})$. Inoltre, se $1 < p < +\infty$, denotiamo il duale con

$$H^{-k,p'}(\Omega; \mathbb{R}) = \left(H_0^{k,p}(\Omega; \mathbb{R}) \right)^*, \quad \text{con } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

In particolare, per ogni $F \in H^{-k,p'}(\Omega; \mathbb{R})$, vale la seguente rappresentazione (si veda ad esempio [1])

$$F(h) = \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f_\alpha(x) \partial^\alpha h(x) dx, \quad f_\alpha \in L^{p'}(\Omega; \mathbb{R}). \quad (9)$$

Ricordiamo ora la seguente **disuguaglianza di Poincaré**; siano $n \in \mathbb{N}$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto limitato, dato $p \in \mathbb{R}$, con $1 \leq p < +\infty$, allora vale

$$\exists C = C(\Omega, p) > 0 \text{ t.c. } \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^p dx, \quad \forall u \in H_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}). \quad (10)$$

Valgono inoltre i seguenti **teoremi di immersione**

Teorema 1.6. (*Immersioni di Sobolev-Rellich-Kondrakov*)

Siano $n \in \mathbb{N}$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto limitato, con frontiera Lipschitz. Dati $k \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{R}$, con $1 \leq p < +\infty$, si ha:

(i) se $kp < n$, poniamo $p^* = \frac{np}{n - kp}$, allora per ogni $q \in \mathbb{R}$ con $1 \leq q \leq p^*$ vale

$$\iota : H^{k,p}(\Omega; \mathbb{R}) \xrightarrow[\text{cont}]{} L^q(\Omega; \mathbb{R}), \quad (11)$$

inoltre, se in particolare $1 \leq q < p^*$, allora

$$\iota : H^{k,p}(\Omega; \mathbb{R}) \xrightarrow[\text{cpt}]{} L^q(\Omega; \mathbb{R});$$

(ii) se $kp = n$, allora per ogni $q \in \mathbb{R}$ con $1 \leq q < +\infty$ vale

$$\iota : H^{k,p}(\Omega; \mathbb{R}) \xrightarrow[\text{cpt}]{} L^q(\Omega; \mathbb{R});$$

(iii) se $kp > n$, allora ¹

$$\iota : H^{k,p}(\Omega; \mathbb{R}) \xrightarrow[\text{cont}]{} C^{r,\alpha}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}),$$

dove $r = k - \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor - 1$, con

$$\alpha = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + 1 - \frac{n}{p}, & \text{se } \frac{n}{p} \notin \mathbb{N}; \\ \text{qualsiasi in } (0, 1), & \text{se } \frac{n}{p} \in \mathbb{N}; \end{cases}$$

inoltre, se in particolare $\alpha < \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + 1 - \frac{n}{p}$, allora

$$\iota : H^{k,p}(\Omega; \mathbb{R}) \xrightarrow[\text{cpt}]{} C^{r,\alpha}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}).$$

¹Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Diciamo che f è una **funzione Hölderiana** su Ω , di esponente $\alpha \in (0, 1]$, se esiste una costante $M > 0$, tale che

$$|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|^\alpha, \quad \forall x, y \in \Omega.$$

Se $\alpha = 1$ nella precedente condizione, allora f è Lipschitziana su Ω .

L'insieme delle funzioni Hölderiane su Ω , di esponente $\alpha \in (0, 1]$, si indica con $C^{0,\alpha}(\Omega; \mathbb{R})$. In particolare, se $f \in C^{0,\alpha}(\Omega; \mathbb{R})$, per qualche $\alpha \in (0, 1]$, allora f è uniformemente continua (quindi continua) su Ω .

Inoltre se $0 < \alpha < \beta \leq 1$, con Ω limitato, allora

$$C^{0,\beta}(\Omega; \mathbb{R}) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\Omega; \mathbb{R}).$$

Iterando, dato $k \in \mathbb{N}$, si definiscono gli spazi $C^{k,\alpha}(\Omega; \mathbb{R})$, delle funzioni di classe C^k , con le derivate di ordine k , Hölderiane con esponente $\alpha \in (0, 1]$.

Le precedenti immersioni continuano a valere per i sottospazi $H_0^{k,p}(\Omega; \mathbb{R})$, in particolare senza l'ipotesi di frontiera Lipschitz. Infine, per gli spazi duali, si ha che se $q \in \mathbb{R}$ è tale che

$$\begin{cases} q > \frac{p^*}{p^* - 1}, & \text{se } kp < n; \\ q > 1, & \text{se } kp = n; \\ q \geq 1, & \text{se } kp > n; \end{cases}$$

allora

$$\iota : L^q(\Omega; \mathbb{R}) \xrightarrow[\text{cpt}]{} H^{-k,p'}(\Omega; \mathbb{R}). \quad (12)$$

Osservazione 1.10. Poiché tutte le immersioni ι sono lineari, se nel precedente Teorema 1.6 si è in regime di compattezza, allora dall'Osservazione 1.8 si ha che successioni debolmente convergenti nel primo spazio, sono convergenti in norma nello spazio di arrivo.

Esempio 1.5. (Weierstrass) Sia

$$X = \{u \in H^{2,2}((-1, 1); \mathbb{R}), \text{ t.c. } u(-1) = -1, u(1) = 1\}.$$

Consideriamo la funzione

$$E : X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad E(u) = \int_{-1}^1 (t u'(t))^2 dt.$$

Prima di tutto, il funzionale è ben definito e non negativo. Sia ora $\{u_k\} \subseteq X$, data per esempio da

$$u_k(t) = \frac{\arctan(kt)}{\arctan(k)}.$$

Un calcolo diretto mostra che (verificare per esercizio)

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} E(u_k) = 0$$

in particolare

$$0 = \inf_{u \in X} E(u)$$

quindi $\{u_k\}$ è una successione minimizzante. Ora, dalle immersioni nel Teorema 1.6, caso (iii), si ha

$$\iota : H^{2,2}((-1, 1); \mathbb{R}) \xrightarrow[\text{cont}]{} C^{1, \frac{1}{2}}([-1, 1]; \mathbb{R}).$$

Quindi, poiché ogni funzione in X ammette un rappresentante con in particolare derivata continua, allora E non ammette minimo su X , cioè non può esistere $u_0 \in X$, tale che $E(u_0) = 0$.

Riportiamo qui un esempio (riguardante l'Osservazione 1.6) di una funzione definita su un sottoinsieme chiuso e limitato di uno spazio infinito dimensionale, la quale è continua ma non limitata.

Esempio 1.6. Sia $X = L^2((0, 1); \mathbb{R})$ e $A \subseteq X$ la palla chiusa unitaria. Consideriamo la funzione

$$F : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(f) = \int_0^1 x (f(x))^2 dx .$$

Si ha che F è continua su A (verificare per esercizio) e

$$\sup_{f \in A} F(f) = 1 .$$

Dato $\varepsilon > 0$, una successione massimizzante (per $\varepsilon \rightarrow 0$), con ad esempio $\|f_\varepsilon\| = 1$, è data da

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0, 1 - \varepsilon) \\ \left(\frac{2(x - 1 + \varepsilon)}{\varepsilon^2} \right)^{\frac{1}{2}}, & x \in (1 - \varepsilon, 1) \end{cases} .$$

Inoltre, non esiste $f \in A$ tale che $F(f) = 1$, cioè F non ammette massimo su A ; infatti si avrebbe

$$1 = F(f) = \int_{(0,1) \setminus Z} x (f(x))^2 dx < \int_{(0,1) \setminus Z} (f(x))^2 dx = \|f\|^2 ,$$

dove $Z = \{x \in (0, 1) \text{ t.c. } f(x) = 0\}$. Sia allora

$$G : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(f) = \frac{1}{1 - F(f)} .$$

In questo modo G è continua su A ma

$$\sup_{f \in A} G(f) = +\infty .$$

Introduciamo ora anche alcuni speciali spazi di funzioni periodiche.

Definizione 1.16. (Spazi $L^p(S^1; \mathbb{R})$)

Dato $p \in \mathbb{R}$, con $1 \leq p < +\infty$, definiamo lo **spazio** $L^p(S^1; \mathbb{R})$

$$L^p(S^1; \mathbb{R}) = L_{per}^p((-\pi, \pi); \mathbb{R}),$$

come lo spazio delle funzioni reali in $L^p((-\pi, \pi); \mathbb{R})$ e 2π -periodiche.

In particolare consideriamo lo spazio di Hilbert

$$L^2(S^1; \mathbb{R}) = L_{per}^2((-\pi, \pi); \mathbb{R})$$

delle funzioni reali a quadrato sommabile e 2π -periodiche, munito del prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt, \quad \forall f, g \in L^2(S^1; \mathbb{R}).$$

Dalla sviluppabilità in serie di Fourier, si ha che se $f \in L^2(S^1; \mathbb{R})$, allora

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)),$$

dove

$$\begin{cases} a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt, & k \geq 0 \\ b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt, & k \geq 1. \end{cases}$$

In particolare, le funzioni

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(kt)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(kt)}{\sqrt{\pi}}; k \in \mathbb{N} \right\},$$

formano una base ortonormale di $L^2(S^1; \mathbb{R})$ e vale l'**identità di Parseval**

$$\|f\|_{L^2}^2 = \pi \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right\}.$$

Definizione 1.17. (*Spazi di Sobolev $H^s(S^1; \mathbb{R})$*)

Sia ora $s \in [0, 1]$, definiamo **spazio di Sobolev $H^s(S^1; \mathbb{R})$** nel seguente modo

$$H^s(S^1; \mathbb{R}) = \{f \in L^2(S^1; \mathbb{R}), \text{ t.c. } \|f\|_s < +\infty\},$$

dove

$$\|f\|_s^2 = \pi \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (1 + k^{2s}) (a_k^2 + b_k^2) \right\}.$$

Sia ora $m \in \mathbb{N}$, diciamo che $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m) \in L^2(S^1; \mathbb{R}^m)$ se $\gamma_j \in L^2(S^1; \mathbb{R})$, per ogni $j = 1, \dots, m$ (in maniera analoga si definisce $L^p(S^1; \mathbb{R}^m)$, con $1 \leq p < +\infty$). In particolare, siamo interessati al caso $s = \frac{1}{2}, m = 2n$.

Definizione 1.18. (*Spazi di Sobolev $H^{\frac{1}{2}}(S^1; \mathbb{R}^{2n})$*)

Sia $n \in \mathbb{N}$. Definiamo lo **spazio di Sobolev $H^{\frac{1}{2}}(S^1; \mathbb{R}^{2n})$**

$$H^{\frac{1}{2}}(S^1; \mathbb{R}^{2n}) = \left\{ \gamma \in L^2(S^1; \mathbb{R}^{2n}), \text{ t.c. } \|\gamma\|_{\frac{1}{2}} < +\infty \right\}, \quad (13)$$

dove

$$\|\gamma\|_{\frac{1}{2}}^2 = \pi \left\{ \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (1+k) (|a_k|^2 + |b_k|^2) \right\}. \quad (14)$$

In particolare $H^{\frac{1}{2}}(S^1; \mathbb{R}^{2n})$ è uno spazio di Hilbert dotato del seguente prodotto scalare

$$\langle \gamma, \psi \rangle_{\frac{1}{2}} = \pi \left\{ \frac{\langle a_0, \alpha_0 \rangle}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (1+k) (\langle a_k, \alpha_k \rangle + \langle b_k, \beta_k \rangle) \right\}, \quad \forall \gamma, \psi \in H^{\frac{1}{2}}(S^1; \mathbb{R}^{2n}),$$

con

$$\gamma(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)), \quad \psi(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (\alpha_k \cos(kt) + \beta_k \sin(kt)),$$

con coefficienti $a_0, a_k, b_k, \alpha_0, \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}^{2n}$, per ogni $k \in \mathbb{N}$; inoltre, se $\gamma \in H^{\frac{1}{2}}(S^1; \mathbb{R}^{2n})$, si intende per derivata debole

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} k (b_k \cos(kt) - a_k \sin(kt)).$$

Infine, anche in questa situazione, valgono le seguenti immersioni per ogni $q \in \mathbb{R}$ con $1 \leq q < +\infty$

$$\iota : H^{\frac{1}{2}}(S^1; \mathbb{R}^{2n}) \xrightarrow{cpt} L^q(S^1; \mathbb{R}^{2n}), \quad (15)$$

in particolare vale la seguente disuguaglianza, per ogni $q \geq 1$

$$\exists C_s > 0 \text{ t.c. } \|\gamma\|_{L^q} \leq C_s \|\gamma\|_{\frac{1}{2}}, \quad \forall \gamma \in H^{\frac{1}{2}}(S^1; \mathbb{R}^{2n}). \quad (16)$$

2 Alcuni modelli

In questa sezione introduciamo alcuni esempi, che serviranno come modelli per le applicazioni nel seguito. Riportiamo prima alcune proprietà sulla differenziabilità di speciali funzioni.

Esempio 2.1. *Consideriamo la seguente funzione*

$$f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2} \|x\|^2 = \frac{\langle x, x \rangle}{2}.$$

Allora si ha $f \in C^\infty(\mathbb{H}; \mathbb{R})$; in particolare (verificare per esercizio)

$$\begin{aligned} d_x f(h) &= \langle x, h \rangle, \quad \forall x, h \in \mathbb{H}, \\ d_x^2 f(h_1, h_2) &= \langle h_1, h_2 \rangle, \quad \forall x, h_1, h_2 \in \mathbb{H}, \\ d_x^k f &= 0, \quad \forall x \in \mathbb{H}, k \in \mathbb{N}, k \geq 3. \end{aligned}$$

Esempio 2.2. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, con $n \in \mathbb{N}$. Poniamo*

$$\mathbb{H} = H_0^1(\Omega; \mathbb{R})$$

e, usando la disuguaglianza di Poincaré (10), muniamo $\mathbb{H}$ della norma equivalente

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in \mathbb{H},$$

e del relativo prodotto scalare

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle dx, \quad \forall u, v \in \mathbb{H}.$$

Consideriamo la seguente funzione

$$G : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(u) = \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u(x)|^{p+1} dx = \frac{1}{p+1} \|u\|_{L^{p+1}}^{p+1},$$

dove $p \in \mathbb{R}$ è tale che valga l'immersione

$$\iota : \mathbb{H} \xrightarrow[\text{cont}]{} L^{p+1}(\Omega; \mathbb{R}),$$

in modo che G sia ben definita (si veda a riguardo il Teorema 1.6).

Allora, se $p+1 \geq 2$, si ha $G \in C^2(\mathbb{H}; \mathbb{R})$; in particolare (verificare per esercizio)

$$\begin{aligned} d_u G(h) &= \int_{\Omega} |u(x)|^{p-1} u(x) h(x) dx, \quad \forall u, h \in \mathbb{H}, \\ d_u^2 G(h_1, h_2) &= \int_{\Omega} p |u(x)|^{p-2} h_1(x) h_2(x) dx, \quad \forall u, h_1, h_2 \in \mathbb{H}. \end{aligned}$$

2.1 Esempio. Un Problema di Dirichlet unidimensionale

Consideriamo il seguente Problema di Dirichlet sull'intervallo $(0, \pi)$

$$\begin{cases} -u''(t) = u^3(t), & t \in (0, \pi) \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

Definizione 2.1. Diciamo che una funzione $u \in H_0^1((0, \pi); \mathbb{R})$ è soluzione debole del Problema di Dirichlet (17), se

$$\int_0^\pi u'(t)h'(t)dt = \int_0^\pi u^3(t)h(t)dt, \quad \forall h \in C_0^\infty((0, \pi); \mathbb{R}).$$

Osservazione 2.1. La definizione di soluzione debole è motivata dal teorema di integrazione per parti. Cioè, se $u \in C^2([0, \pi]; \mathbb{R})$ fosse una soluzione classica di (17), allora moltiplicando ambo i membri dell'equazione differenziale per una funzione test $h \in C_0^\infty((0, \pi); \mathbb{R})$, si avrebbe

$$\int_0^\pi -u''(t)h(t)dt = \int_0^\pi u^3(t)h(t)dt;$$

quindi integrando per parti si ottiene la condizione data nella Definizione 2.1.

In particolare, la funzione $u \equiv 0$ è soluzione debole del Problema di Dirichlet (17).

Vogliamo mostrare che trovare soluzioni deboli del precedente problema equivale ad un problema variazionale di esistenza di punti critici. Posto

$$\mathbb{H} = H_0^1((0, \pi); \mathbb{R}),$$

usando la disuguaglianza di Poincaré (10) è possibile munire $\mathbb{H}$ della norma equivalente

$$\|u\| = \left(\int_0^\pi (u'(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in \mathbb{H},$$

e del relativo prodotto scalare

$$\langle u, v \rangle = \int_0^\pi u'(t) v'(t) dt, \quad \forall u, v \in \mathbb{H}.$$

Ora definiamo il seguente funzionale

$$E : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}, \quad E(u) = \frac{1}{2} \int_0^\pi (u'(t))^2 dt - \frac{1}{4} \int_0^\pi (u(t))^4 dt.$$

Prima di tutto, il funzionale è ben definito, poiché dal Teorema 1.6 si ha

$$\mathbb{H} \xrightarrow[\text{cont}]{} C^{0,\alpha}([0, \pi]; \mathbb{R}) \xrightarrow[\text{cont}]{} L^q((0, \pi); \mathbb{R}), \quad \forall \alpha \in (0, 1), \forall q \geq 1;$$

in particolare, se $\alpha < \frac{1}{2}$, la prima immersione è anche compatta. Notiamo anche che si può riscrivere

$$E(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{4}\|u\|_{L^4}^4.$$

Ora, ricordando gli Esempi 2.1 e 2.2, si ha $E \in C^2(\mathbb{H}; \mathbb{R})$, con

$$d_u E(h) = \int_0^\pi u'(t)h'(t) - u^3(t)h(t)dt, \quad \forall u, h \in \mathbb{H},$$

$$d_u^2 E(h_1, h_2) = \int_0^\pi h_1'(t)h_2'(t) - 3u^2(t)h_1(t)h_2(t)dt, \quad \forall u, h_1, h_2 \in \mathbb{H}.$$

Quindi, se in particolare $u \in \mathbb{H}$ è punto critico per E , allora

$$d_u E(h) = 0, \quad \forall h \in \mathbb{H},$$

ma per densità questo è equivalente a dire che u è soluzione debole del problema (17).

Ad esempio, la funzione $u \equiv 0$ è punto critico per E .

Ora, mostriamo che il funzionale non è limitato né dal basso né dall'alto, per cui i metodi diretti del calcolo delle variazioni non si applicano, in particolare il Teorema 1.1 (Osservazione 1.7).

Mostriamo prima che E non è limitato inferiormente. Infatti, sia $\bar{u} \in \mathbb{H}$, $\|\bar{u}\| \neq 0$ e consideriamo la successione $\{u_k\} \subseteq \mathbb{H}$, dove

$$u_k(t) = k\bar{u}.$$

Allora

$$E(u_k) = E(k\bar{u}) = \frac{k^2}{2} \int_0^\pi (\bar{u}'(t))^2 dt - \frac{k^4}{4} \int_0^\pi (\bar{u}(t))^4 dt \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} -\infty;$$

quindi

$$\inf_{u \in \mathbb{H}} E(u) = -\infty.$$

Mostriamo ora che E non è limitato superiormente. Infatti, consideriamo la successione $\{u_k\} \subseteq \mathbb{H}$, dove

$$u_k(t) = \sin(kt).$$

Allora

$$E(u_k) \geq \frac{\pi}{4}k^2 - \frac{\pi}{4} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} +\infty;$$

quindi

$$\sup_{u \in \mathbb{H}} E(u) = +\infty.$$

2.2 Esempio. Un Problema di Dirichlet per il Laplaciano

Il prossimo modello è una generalizzazione dell'Esempio 2.1, a funzioni di più variabili.

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, con $n \geq 3$. Consideriamo il seguente Problema di Dirichlet, per il Laplaciano, su Ω

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = |u(x)|^{p-1}u(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (18)$$

dove $p \in \mathbb{R}$ con

$$2 < p + 1 < 2^* = \frac{2n}{n-2}.$$

Definizione 2.2. Diciamo che una funzione $u \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R})$ è *soluzione debole del Problema di Dirichlet (18)*, se

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u(x), \nabla h(x) \rangle dx = \int_{\Omega} |u(x)|^{p-1}u(x)h(x)dx, \quad \forall h \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}).$$

Osservazione 2.2. La definizione di soluzione debole è motivata dal teorema della divergenza 1.2. Cioè, se $u \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$, con Ω aperto regolare, fosse una soluzione classica di (18), allora moltiplicando ambo i membri dell'equazione differenziale per una funzione test $h \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R})$, si avrebbe

$$\int_{\Omega} -\Delta u(x)h(x)dx = \int_{\Omega} |u(x)|^{p-1}u(x)h(x)dx;$$

quindi, poiché $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$, applicando la formula (6) alla funzione $h\nabla u$, si ottiene la condizione data nella Definizione 2.2.

In particolare, la funzione $u \equiv 0$ è soluzione debole del Problema di Dirichlet (18).

Vogliamo mostrare che trovare soluzioni deboli del precedente problema equivale ad un problema variazionale di esistenza di punti critici.

Posto

$$\mathbb{H} = H_0^1(\Omega; \mathbb{R}),$$

usando la disuguaglianza di Poincaré (10) è possibile munire $\mathbb{H}$ della norma equivalente

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in \mathbb{H},$$

e del relativo prodotto scalare

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle dx, \quad \forall u, v \in \mathbb{H}. \quad (19)$$

Ora definiamo il seguente funzionale

$$E : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}, \quad E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u(x)|^{p+1} dx.$$

Prima di tutto, il funzionale è ben definito, poiché dal Teorema 1.6 si ha

$$\iota : \mathbb{H} \xrightarrow[\text{cont}]{} L^{p+1}(\Omega; \mathbb{R});$$

in particolare, poiché $p+1 < 2^*$, la precedente immersione è anche compatta. Notiamo anche che si può riscrivere

$$E(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{p+1} \|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}.$$

Ora, ricordando gli Esempi 2.1 e 2.2, poiché $p+1 > 2$, si ha $E \in C^2(\mathbb{H}; \mathbb{R})$, con

$$d_u E(h) = \int_{\Omega} \langle \nabla u(x), \nabla h(x) \rangle - |u(x)|^{p-1} u(x) h(x) dx, \quad \forall u, h \in \mathbb{H},$$

$$d_u^2 E(h_1, h_2) = \int_{\Omega} \langle \nabla h_1(x), \nabla h_2(x) \rangle - p |u(x)|^{p-1} h_1(x) h_2(x) dx, \quad \forall u, h_1, h_2 \in \mathbb{H}.$$

Quindi, se in particolare $u \in \mathbb{H}$ è punto critico per E , allora

$$d_u E(h) = 0, \quad \forall h \in \mathbb{H},$$

ma per densità questo è equivalente a dire che u è soluzione debole del problema (18).

Ad esempio, la funzione $u \equiv 0$ è punto critico per E .

Ora, mostriamo che il funzionale non è limitato né dal basso né dall'alto, per cui i metodi diretti del calcolo delle variazioni non si applicano, in particolare il Teorema 1.1 (Osservazione 1.7).

Mostriamo prima che E non è limitato inferiormente. Infatti, sia $\bar{u} \in \mathbb{H}$, $\|\bar{u}\| \neq 0$ e consideriamo la successione $\{u_k\} \subseteq \mathbb{H}$, dove

$$u_k(x) = k\bar{u}.$$

Allora

$$E(u_k) = E(k\bar{u}) = \frac{k^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla \bar{u}(x)|^2 dx - \frac{k^{p+1}}{p+1} \int_{\Omega} |\bar{u}(x)|^{p+1} dx \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} -\infty;$$

quindi, poiché $p + 1 > 2$, si ha

$$\inf_{u \in \mathbb{H}} E(u) = -\infty.$$

Mostriamo ora che E non è limitato superiormente. Poniamo la funzione

$$G : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(u) = \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u(x)|^{p+1} dx = \frac{1}{p+1} \|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}.$$

Si ha che G è debolmente continua, infatti se $\{u_k\} \subseteq \mathbb{H}$ è una successione debolmente convergente in $\mathbb{H}$, la compattezza della mappa ι , assicura la convergenza forte di $\{u_k\}$ in $L^{p+1}(\Omega; \mathbb{R})$ (si veda l'Osservazione 1.10); poniamo ora la funzione continua

$$F : L^{p+1}(\Omega; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(u) = \frac{1}{p+1} \|u\|_{L^{p+1}}^{p+1},$$

in questo modo

$$G : \mathbb{H} \xrightarrow[\text{cpt}]{\iota} L^{p+1}(\Omega; \mathbb{R}) \xrightarrow[\text{cont}]{F} \mathbb{R}, \quad G(u) = F(\iota(u)),$$

quindi G è debolmente continua.

Consideriamo adesso la successione $\{u_k\} \subseteq \mathbb{H}$, data da una base ortonormale di $\mathbb{H}$. Poiché $\{u_k\}$ è una successione debolmente convergente a 0 in $\mathbb{H}$ e G è debolmente continua, si ha che, per ogni fissato $t \in \mathbb{R}$ vale

$$G(tu_k) = \frac{|t|^{p+1}}{p+1} \int_{\Omega} |u_k(x)|^{p+1} dx = |t|^{p+1} G(u_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$$

Allora

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sup_{k \in \mathbb{N}} E(tu_k) \geq \frac{t^2}{4},$$

quindi

$$\sup_{u \in \mathbb{H}} E(u) = +\infty.$$

2.3 Esempio. Un Sistema Hamiltoniano

Il prossimo modello è una generalizzazione dell'Esempio 2.1, a funzioni vettoriali.

Ricordiamo che per una data funzione Hamiltoniana $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, le equazioni Hamiltoniane sono le seguenti

$$\begin{cases} \dot{p}_i(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}(p(t), q(t)) \\ \dot{q}_i(t) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}(p(t), q(t)) \end{cases} \quad i = 1, \dots, n.$$

Ponendo

$$\gamma(t) = (p(t), q(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R},$$

il precedente sistema si riscrive nel seguente modo

$$-J\dot{\gamma}(t) = \nabla \mathcal{H}(\gamma(t)), \quad (20)$$

dove J è la matrice simplettica canonica in $\mathbb{R}^{2n}$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad J^2 = -I_{2n}.$$

Consideriamo il problema di cercare soluzioni periodiche del Sistema Hamiltoniano (20), con $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R})$ definita da

$$\mathcal{H} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{H}(\xi) = \frac{1}{p+1} |\xi|^{p+1}, \quad p+1 > 2, \quad p \in \mathbb{R}.$$

Osserviamo che non è restrittivo cercare soluzioni 2π -periodiche. Infatti se γ è una soluzione T -periodica, con $T > 0$, consideriamo il seguente cambio di variabile

$$t = \frac{T}{2\pi} s, \quad \gamma(t) = \gamma\left(\frac{T}{2\pi} s\right) = \tilde{\gamma}(s).$$

Si ottiene

$$\dot{\tilde{\gamma}}(s) = \frac{d}{ds}(\tilde{\gamma}(s)) = \frac{T}{2\pi} \dot{\gamma}(t) = \frac{T}{2\pi} J \nabla \mathcal{H}(\gamma(t)) = J \left(\frac{T}{2\pi} \nabla \mathcal{H}(\tilde{\gamma}(s)) \right) = J \nabla \tilde{\mathcal{H}}(\tilde{\gamma}(s)).$$

Quindi $\tilde{\gamma}$ è 2π -periodica e risolve il sistema Hamiltoniano

$$-J\dot{\tilde{\gamma}}(s) = \nabla \tilde{\mathcal{H}}(\tilde{\gamma}(s)),$$

con $\tilde{\mathcal{H}} = \frac{T}{2\pi} \mathcal{H}$.

Definizione 2.3. Diciamo che una funzione $\gamma \in H^{\frac{1}{2}}(S^1; \mathbb{R}^{2n})$ è *soluzione debole del Sistema Hamiltoniano* (20), se

$$\int_{-\pi}^{\pi} \langle -J\dot{\gamma}(t), \psi(t) \rangle dt = \int_{-\pi}^{\pi} \langle \nabla \mathcal{H}(\gamma(t)), \psi(t) \rangle dt, \quad \forall \psi \in H^{\frac{1}{2}}(S^1; \mathbb{R}^{2n}). \quad (21)$$

In particolare, la funzione $\gamma \equiv 0$ è soluzione debole del Problema di Dirichlet (20).

Vogliamo mostrare che trovare soluzioni deboli del precedente problema equivale ad un problema variazionale di esistenza di punti critici. Infatti, posto allora

$$\mathbb{H} = H^{\frac{1}{2}}(S^1; \mathbb{R}^{2n}),$$

definiamo il seguente funzionale

$$E : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}, \quad E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \langle -J\dot{\gamma}(t), \gamma(t) \rangle dt - \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{H}(\gamma(t)) dt.$$

Prima di tutto, in virtù delle immersioni (15), si ha che il funzionale è ben definito. Ora, si ha

$$d_{\gamma}E(\psi) = \int_{-\pi}^{\pi} \langle -J\dot{\gamma}(t) - \nabla \mathcal{H}(\gamma(t)), \psi(t) \rangle dt, \quad \forall \gamma, \psi \in \mathbb{H},$$

in particolare, poiché $p + 1 > 2$, si ha $E \in C^2(\mathbb{H}; \mathbb{R})$ (verificare per esercizio). Quindi, se $\gamma \in \mathbb{H}$ è punto critico per E , allora

$$d_{\gamma}E(\psi) = 0, \quad \forall \psi \in \mathbb{H},$$

e questo significa che γ è soluzione debole del problema (20).

Ora, mostriamo che il funzionale non è limitato né dal basso né dall'alto, per cui i metodi diretti del calcolo delle variazioni non si applicano, in particolare il Teorema 1.1 (Osservazione 1.7).

Infatti, consideriamo la successione $\{\gamma_k\} \subseteq \mathbb{H}$, dove

$$\gamma_k(t) = (\cos(kt), 0, \dots, 0, \sin(kt), 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

dove le funzioni $\cos(kt), \sin(kt)$ appaiono al posto 1 ed $n + 1$. Allora

$$E(\gamma_k) = k\pi + \frac{2\pi}{p+1} \xrightarrow{k \rightarrow \pm\infty} \pm\infty.$$

Quindi

$$\inf_{\gamma \in \mathbb{H}} E(\gamma) = -\infty, \quad \sup_{\gamma \in \mathbb{H}} E(\gamma) = +\infty.$$

3 Lemma di deformazione

3.1 Condizione di Palais-Smale

Vogliamo introdurre una opportuna proprietà di compattezza. Diamo prima le seguenti definizioni.

Definizione 3.1. (*Successione di Palais-Smale*)

Sia $f \in C^1(\mathbb{B}; \mathbb{R})$. Una successione $\{x_k\} \subseteq \mathbb{B}$ si dice **successione di Palais-Smale** per f , al livello $c \in \mathbb{R}$, se

$$\begin{cases} f(x_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{(\mathbb{R})} c; \\ d_{x_k} f \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{(\mathbb{B}^*)} 0. \end{cases}$$

Definizione 3.2. (*Condizione di Palais-Smale*)

Sia $f \in C^1(\mathbb{B}; \mathbb{R})$. Diremo che f soddisfa la **condizione di Palais-Smale**, al livello c , se ogni successione di Palais-Smale per f , al livello c , ammette una sottosuccessione convergente in $\mathbb{B}$, cioè: data $\{x_k\} \subseteq \mathbb{B}$ successione di Palais-Smale per f , al livello c , allora

$$\exists x_0 \in \mathbb{B}, \{x_{j_k}\} \subseteq \{x_k\} \quad t.c. \quad x_{j_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x_0.$$

In questo caso scriveremo che f soddisfa $(PS)_c$. In particolare diremo che f soddisfa (PS) se f soddisfa $(PS)_c, \forall c \in \mathbb{R}$.

Osservazione 3.1. La precedente è una particolare condizione di compattezza, infatti se f soddisfa $(PS)_c$, allora l'insieme $\text{crit}^c(f) \subseteq \mathbb{B}$ è compatto.

Vale la seguente proprietà.

Lemma 3.1. Sia $f \in C^1(\mathbb{B}; \mathbb{R})$. Se f soddisfa $(PS)_c$, con $c \notin V\text{crit}(f) \subseteq \mathbb{R}$, allora:

$$\exists r > 0 \quad t.c. \quad \|d_x f\|_* \geq r, \quad \forall x \in f^{-1}([c-r, c+r]).$$

Dimostrazione. Per assurdo. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, ponendo $r = \frac{1}{k}$, avremmo che esisterebbe $x_k \in \mathbb{B}$ per cui

$$c - \frac{1}{k} \leq f(x_k) \leq c + \frac{1}{k} \quad \text{t.c.} \quad \|d_{x_k} f\|_* < \frac{1}{k}.$$

Allora $\{x_k\} \subseteq \mathbb{B}$ sarebbe una successione di Palais-Smale per f , al livello c . Poiché f soddisfa $(PS)_c$, allora

$$\exists x_0 \in \mathbb{B}, \{x_{j_k}\} \subseteq \{x_k\} \quad \text{t.c.} \quad x_{j_k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} x_0.$$

Per la continuità di f e $d_{(\cdot)}f$, si avrebbe

$$f(x_0) = c, \quad d_{x_0} f = 0,$$

cioè $c \in Vcrit(f)$. Ma questo è assurdo. □

Osservazione 3.2. *In spazi di Hilbert è possibile usare il gradiente nella Definizione 3.1 di successione di Palais-Smale. Infatti dalla Definizione 1.6 e dall'Osservazione 1.3, se $f \in C^1(\mathbb{H}; \mathbb{R})$, allora una successione $\{x_k\} \subseteq \mathbb{H}$ si dice successione di Palais-Smale per f , al livello $c \in \mathbb{R}$, se soddisfa le condizioni equivalenti*

$$\begin{cases} f(x_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{(\mathbb{R})} c; \\ \nabla f(x_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{(\mathbb{H})} 0. \end{cases}$$

Il seguente lemma, sulla decomposizione del differenziale, risulterà utile per le applicazioni nel seguito.

Lemma 3.2. *(di decomposizione del differenziale)*

*Sia $f \in C^1(\mathbb{B}; \mathbb{R})$. Supponiamo che per ogni $x \in \mathbb{B}$ valga la seguente **decomposizione del differenziale***

$$d_x f = L(x) + K(x),$$

dove $L : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}^$ è un operatore lineare, continuo e invertibile, mentre $K : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}^*$ è una mappa compatta.*

Allora ogni successione di Palais-Smale per f , limitata, ammette una sottosuccessione convergente.

Dimostrazione. Sia $\{x_k\} \subseteq \mathbb{B}$ una successione di Palais-Smale per f , limitata. In particolare si ha

$$d_{x_k} f = L(x_k) + K(x_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{(\mathbb{B}^*)} 0.$$

Allora vale

$$x_k = -L^{-1}(K(x_k)) + o(1), \quad \text{per } k \rightarrow +\infty.$$

Poiché per ipotesi $\{x_k\} \subseteq \mathbb{B}$ è limitata, allora $\{L^{-1}(K(x_k))\} \subseteq \mathbb{B}$ ammette una sottosuccessione convergente, in quanto la composizione di funzioni continue e compatte è ancora compatta. Quindi anche $\{x_k\} \subseteq \mathbb{B}$ ammette una sottosuccessione convergente. $\square$

In spazi di Hilbert vale in particolare il seguente

Corollario 3.1. *(di decomposizione del gradiente)*

*Sia $f \in C^1(\mathbb{H}; \mathbb{R})$. Supponiamo che per ogni $x \in \mathbb{H}$ valga la seguente **decomposizione del gradiente***

$$\nabla f(x) = x + K(x), \tag{22}$$

dove $K : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ è una mappa compatta.

Allora ogni successione di Palais-Smale per f , limitata, ammette una sottosuccessione convergente.

3.2 Esempi

Riportiamo alcuni esempi riguardanti la condizione di Palais-Smale.

Esempio 3.1. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x)$.

Si ha che $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ e f soddisfa $(PS)_c$, per ogni $c \in \mathbb{R}$, con $c \neq \pm 1$. Infatti, se $c \neq \pm 1$, in particolare non esistono successioni di Palais-Smale per f , al livello c , quindi la condizione $(PS)_c$ è banalmente verificata.

Se invece, ad esempio $c = 1$, poniamo $x_k = 2\pi k$, per ogni $k \in \mathbb{N}$. Allora si ha

$$f(x_k) = 1, \quad f'(x_k) = -\sin(x_k) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Quindi $\{x_k\} \subseteq \mathbb{R}$ è una successione di Palais-Smale per f , al livello 1. Ma poiché $\{x_k\}$ è divergente, non può ammettere sottosuccessioni convergenti. Per cui f non soddisfa $(PS)_1$. In maniera analoga si ragiona se $c = -1$.

Esempio 3.2. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$.

Si ha che $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ e f soddisfa $(PS)_c$, per ogni $c \in \mathbb{R}$, con $c \neq 0$. Infatti, se $c \neq 0$, in particolare non esistono successioni di Palais-Smale per f , al livello c , quindi la condizione $(PS)_c$ è banalmente verificata.

Se invece $c = 0$, poniamo $x_k = k$, per ogni $k \in \mathbb{N}$. Allora si ha

$$\begin{cases} \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} e^{-k} = 0; \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} f'(x_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} -e^{-k} = 0. \end{cases}$$

Quindi $\{x_k\} \subseteq \mathbb{R}$ è una successione di Palais-Smale per f , al livello 0. Ma poiché $\{x_k\}$ è divergente, non può ammettere sottosuccessioni convergenti. Per cui f non soddisfa $(PS)_0$.

Esempio 3.3. Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, $f(x, y) = e^{-y} - x^2$.

Si ha che f non soddisfa $(PS)_0$.

Esempio 3.4. Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ e coerciva, cioè:

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Allora f soddisfa (PS) .

Il precedente esempio non si estende al caso infinito dimensionale.

Esempio 3.5. Sia $\dim(\mathbb{B}) = +\infty$. Consideriamo la seguente funzione

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-2, 2] \\ (|t| - 2)^2, & t \notin [-2, 2]. \end{cases}$$

Poniamo

$$f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = g(\|x\|)$$

Si ha che $f \in C^1(\mathbb{B}; \mathbb{R})$ e coerciva, ma f non soddisfa $(PS)_0$. Infatti sia $\{x_k\} \subseteq \mathbb{B}$ con $\|x_k\| \leq 1$, per ogni $k \in \mathbb{N}$. Allora si ha

$$f(x_k) = 0, \quad d_{x_k} f = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

Quindi $\{x_k\}$ è una successione di Palais-Smale per f , al livello 0. Ma la palla unitaria in $\mathbb{B}$ non è compatta (si ricordi la caratterizzazione della dimensione (1)).

3.3 Pseudo-gradienti

Diamo alcune definizioni.

Definizione 3.3. (*Deformazione*)

Sia X uno spazio topologico. Una funzione $\varphi \in C(X; X)$ si chiama **deformazione** in X , se è omotopa all'identità, cioè esiste una **omotopia** $\eta \in C([0, 1] \times X; X)$ tale che:

$$(i) \quad \eta(0, x) = x, \quad \forall x \in X;$$

$$(ii) \quad \eta(1, x) = \varphi(x), \quad \forall x \in X.$$

Definizione 3.4. (*Insieme di sottolivello*)

Sia X uno spazio topologico e sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Chiamiamo **insieme di sottolivello** per f , relativo a $c \in \mathbb{R}$, il seguente sottoinsieme di X :

$$f^c = \{x \in X \text{ t.c. } f(x) \leq c\}.$$

La seguente è una fondamentale proprietà topologica: al fine di illustrare l'idea della dimostrazione, consideriamo inizialmente funzioni di classe C^2 definite in $\mathbb{R}^n$; successivamente mostreremo che queste ipotesi si possono indebolire e richiedere solamente funzioni di classe C^1 definite su spazi di Banach (si veda il Lemma 3.5).

Lemma 3.3. (*Lemma di deformazione in $\mathbb{R}^n$, per funzioni di classe C^2*)

Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ e sia $c \in \mathbb{R}$ con $c \notin Vcrit(f)$. Se f soddisfa $(PS)_c$, allora esistono $\varepsilon > 0$ ed una deformazione $\varphi \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, tali che:

$$(i) \quad \varphi(x) = x, \quad \forall x \notin f^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]);$$

$$(ii) \quad \varphi(f^{c+\varepsilon}) \subseteq f^{c-\varepsilon}.$$

Dimostrazione. Prima di tutto, poiché $f \in C^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ allora $\nabla f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, quindi in particolare $\nabla f \in Liploc(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$.

Ora, visto che $c \notin Vcrit(f)$ ed f soddisfa $(PS)_c$, dal Lemma 3.1, si ha che

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ t.c. } \|\nabla f(x)\| \geq 2\varepsilon, \quad \forall x \in f^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]). \quad (23)$$

Per comodità, definiamo i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$:

$$A = f^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]), \quad B = f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]).$$

Adesso consideriamo la seguente funzione

$$\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(x) = \frac{\text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus A)}{\text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus A) + \text{dist}(x, B)}.$$

Si ha che $\psi \in Lip_{loc}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, inoltre

$$\begin{cases} 0 \leq \psi(x) \leq 1, & \forall x \in \mathbb{R}^n; \\ \psi(x) = 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus A; \\ \psi(x) = 1, & \text{se } x \in B. \end{cases}$$

Infine definiamo la funzione

$$\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}, & x \in A; \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus A. \end{cases}$$

Si ha che $\Psi \in Lip_{loc}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Ora, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, consideriamo ora il seguente Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\eta}(t, x) = -\Psi(\eta(t, x)) \\ \eta(0, x) = x, \end{cases} \quad (24)$$

dove abbiamo denotato $\dot{\eta}(t, x) = \frac{\partial \eta}{\partial t}(t, x)$. Poiché $\Psi \in Lip_{loc}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, il problema (24) ammette una (unica) soluzione

$$\eta(\cdot, x) \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

In particolare, dai teoremi di dipendenza continua dal dato iniziale, si ha

$$\eta \in C([0, 1] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n).$$

Poniamo

$$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \varphi(x) = \eta(1, x).$$

In questo modo $\varphi \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ è una deformazione in $\mathbb{R}^n$. Inoltre, poiché

$$\Psi(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus A,$$

allora φ soddisfa la condizione (i) della tesi. Per quanto riguarda la seconda condizione, proviamo innanzitutto che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, la funzione composta $f(\eta(\cdot, x))$ è decrescente. Notiamo che la precedente composizione è di classe C^1 , quindi calcoliamo

$$\frac{d}{dt}(f(\eta(t, x))) = \langle \nabla f(\eta(t, x)), \dot{\eta}(t, x) \rangle = \begin{cases} -\psi(\eta(t, x)) \|\nabla f(\eta(t, x))\|, & \eta(t, x) \in A; \\ 0, & \eta(t, x) \in \mathbb{R}^n \setminus A. \end{cases}$$

Poiché ψ è non negativa, allora $f(\eta(\cdot, x))$ è decrescente. Sia ora $x \in f^{c+\varepsilon}$. Se

$$\exists t \in [0, 1] \text{ t.c. } f(\eta(t, x)) \leq c - \varepsilon,$$

allora

$$f(\varphi(x)) = f(\eta(1, x)) \leq c - \varepsilon,$$

cioè $\varphi(x) \in f^{c-\varepsilon}$. Quindi, resta da provare che se $x \in B$, allora non può accadere che

$$f(\eta(t, x)) \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon], \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (25)$$

Infatti, se per assurdo valesse (25), allora poiché $\psi(x) = 1, \forall x \in B$, da (23) si avrebbe

$$\begin{aligned} f(\varphi(x)) &= f(\eta(1, x)) = f(\eta(0, x)) + \int_0^1 \frac{d}{dt} (f(\eta(t, x))) dt \\ &= f(x) + \int_0^1 \langle \nabla f(\eta(t, x)), \dot{\eta}(t, x) \rangle dt \\ &= f(x) - \int_0^1 \|\nabla f(\eta(t, x))\| dt \leq c + \varepsilon - 2\varepsilon = c - \varepsilon, \end{aligned}$$

che è in contraddizione con (25). Quindi φ soddisfa anche la condizione (ii) della tesi. $\square$

Dalla precedente dimostrazione si evince che l'ingrediente cruciale è la regolarità del gradiente, in modo da ottenere una soluzione del problema di Cauchy e costruire la deformazione. Adesso mostreremo che per qualsiasi funzione di classe C^1 definita su uno spazio di Banach è possibile definire un sostituto del gradiente con le caratteristiche necessarie per far funzionare il lemma di deformazione.

Definizione 3.5. (*Pseudo-Gradiente*)

Sia $f \in C^1(\mathbb{B}; \mathbb{R})$. Poniamo

$$\mathbb{B}^r = \{x \in \mathbb{B} \text{ t.c. } d_x f \neq 0\}.$$

Una funzione $V \in Lip_{loc}(\mathbb{B}^r; \mathbb{B})$ si dice **Pseudo-Gradiente** per f (scriveremo PG in breve), se per ogni $x \in \mathbb{B}^r$ valgono le seguenti:

- (i) $\|V(x)\| \leq 2\|d_x f\|_*$;
- (ii) $d_x f(V(x)) \geq \|d_x f\|_*^2$.

Osservazione 3.3. Sia $\mathbb{H}$ uno spazio di Hilbert. Se $f \in C^2(\mathbb{H}; \mathbb{R})$, allora ∇f è PG per f ; d'altra parte se $f \in C^1(\mathbb{H}; \mathbb{R})$, allora ∇f non è in generale PG per f .

Definizione 3.6. (*Insieme paracompatto*)

Uno spazio topologico X si dice **paracompatto** se ogni ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento aperto localmente finito. In altri termini, sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di X ,

$$\mathcal{A} = \{A_j, j \in J\}, \quad A_j \text{ aperti } \forall j \in J, \quad X \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j,$$

con J una famiglia qualsiasi di indici. Allora esiste $\mathcal{B} = \{B_i, i \in I\}$ ricoprimento aperto di X , tale che

$$\forall i \in I, \exists j \in J \text{ con } B_i \subseteq A_j;$$

ed inoltre per ogni $x \in X$, esiste U_x intorno di x , tale che

$$\text{card}\{i \in I, \text{ t.c. } B_i \cap U_x \neq \emptyset\} < +\infty.$$

Vale il seguente risultato di A.H. Stone; si veda [16].

Teorema 3.1. (*di Stone*)

Ogni spazio metrico è paracompatto.

In particolare, poiché uno spazio di Banach è in particolare uno spazio metrico, allora è paracompatto. Possiamo quindi dimostrare ora il seguente risultato.

Lemma 3.4. (*di esistenza di PG*)

Sia $f \in C^1(\mathbb{B}; \mathbb{R})$. Allora esiste una PG per f .

Dimostrazione. Sia $x_0 \in \mathbb{B}^r$. Allora

$$\exists w \in \mathbb{B}, \|w\| = 1, \quad \text{t.c. } d_{x_0}f(w) > \frac{2}{3}\|d_{x_0}f\|_*.$$

Ponendo $v = \frac{3}{2}\|d_{x_0}f\|_*w$, si ottiene

$$\|v\| < 2\|d_{x_0}f\|_*, \quad d_{x_0}f(v) > \|d_{x_0}f\|_*^2.$$

Poiché $d_{(\cdot)}f$ è continuo, esiste A_{x_0} intorno di x_0 , tale che

$$\|v\| < 2\|d_x f\|_*, \quad d_x f(v) > \|d_x f\|_*^2, \quad \forall x \in A_{x_0}. \quad (26)$$

In questo modo, la famiglia $\mathcal{A} = \{A_{x_0}, x_0 \in \mathbb{B}^r\}$, è un ricoprimento aperto di $\mathbb{B}^r \subseteq \mathbb{B}$. Ora, visto che $\mathbb{B}$ è paracompatto, esiste un sottoricoprimento aperto localmente finito $\mathcal{B} = \{B_i, i \in I\}$, tale che

$$\forall i \in I, \exists x_0 \in \mathbb{B}^r \text{ con } B_i \subseteq A_{x_0}.$$

Quindi, per ogni $i \in I$, esiste $v_i \in \mathbb{B}$ tale che (26) vale per ogni $x \in B_i$. Sia ora

$$r_i : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}, \quad r_i(x) = \text{dist}(x, \mathbb{B} \setminus B_i), \quad \forall i \in I,$$

e poniamo

$$\eta_i : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \eta_i(x) = \frac{r_i(x)}{\sum_{k \in I} r_k(x)}, \quad \forall i \in I.$$

Le funzioni η_i sono ben definite perché $\mathcal{B}$ è localmente finito (per ogni $x \in \mathbb{B}$ esiste un intorno di x che interseca solo un numero finito di B_i). Ora, per ogni $i \in I$, si ha che $\eta_i \in Lip_{loc}(\mathbb{B}; \mathbb{R})$, inoltre

$$\begin{cases} 0 \leq \eta_i(x) \leq 1, & \forall x \in \mathbb{B}; \\ \eta_i(x) = 0, & \forall x \in \mathbb{B} \setminus B_i; \\ \sum_{i \in I} \eta_i(x) = 1, & \forall x \in \mathbb{B}. \end{cases}$$

Infine, sia

$$V : \mathbb{B}^r \rightarrow \mathbb{B}, \quad V(x) = \sum_{i \in I} \eta_i(x) v_i.$$

Di nuovo, V è ben definita perché $\mathcal{B}$ è localmente finito, inoltre $V \in Lip_{loc}(\mathbb{B}^r; \mathbb{B})$. Ora mostriamo che V soddisfa le proprietà (i) e (ii) della Definizione 3.5. Infatti, poiché V è combinazione convessa delle v_i e poiché per ogni $i \in I$, le v_i soddisfano (26) sul supporto delle η_i , allora per ogni $x \in \mathbb{B}^r$ si ha

$$\|V(x)\| = \left\| \sum_{i \in I} \eta_i(x) v_i \right\| \leq \sum_{i \in I} (\eta_i(x) \|v_i\|) \leq \sum_{i \in I} (\eta_i(x) 2 \|d_x f\|_*) \leq 2 \|d_x f\|_*;$$

ed usando la linearità del differenziale

$$d_x f(V(x)) = d_x f \left(\sum_{i \in I} \eta_i(x) v_i \right) = \sum_{i \in I} (\eta_i(x) d_x f(v_i)) \geq \sum_{i \in I} (\eta_i(x) \|d_x f\|_*^2) \geq \|d_x f\|_*^2.$$

In conclusione, V è uno PG per f . □

Vale allora il seguente generale

Lemma 3.5. *(di deformazione)*

Sia $f \in C^1(\mathbb{B}; \mathbb{R})$ e sia $c \in \mathbb{R}$ con $c \notin V_{crit}(f)$. Se f soddisfa $(PS)_c$, allora esistono $\varepsilon > 0$ ed una deformazione $\varphi \in C(\mathbb{B}; \mathbb{B})$, tali che:

- (i) $\varphi(x) = x, \quad \forall x \notin f^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]);$
- (ii) $\varphi(f^{c+\varepsilon}) \subseteq f^{c-\varepsilon}.$

Dimostrazione. Poiché $f \in C^1(\mathbb{B}; \mathbb{R})$, dal Lemma 3.4, esiste uno PG per f ,

$$V \in Lip_{loc}(\mathbb{B}^r; \mathbb{B}).$$

La dimostrazione è analoga a quella del Lemma 3.3, usando nel problema di Cauchy una opportuna funzione costruita con la funzione V ; per completezza la riportiamo di seguito. Prima di tutto, visto che $c \notin Vcrit(f)$ ed f soddisfa $(PS)_c$, dal Lemma 3.1, si ha che

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ t.c. } \|d_x f\|_* \geq 2\varepsilon, \quad \forall x \in f^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]). \quad (27)$$

Per comodità, definiamo i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{B}$:

$$A = f^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]), \quad B = f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]).$$

Adesso consideriamo la seguente funzione

$$\psi : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(x) = \frac{\text{dist}(x, \mathbb{B} \setminus A)}{\text{dist}(x, \mathbb{B} \setminus A) + \text{dist}(x, B)}.$$

Si ha che $\psi \in Lip_{loc}(\mathbb{B}; \mathbb{R})$, inoltre

$$\begin{cases} 0 \leq \psi(x) \leq 1, & \forall x \in \mathbb{B}; \\ \psi(x) = 0, & \text{se } x \in \mathbb{B} \setminus A; \\ \psi(x) = 1, & \text{se } x \in B. \end{cases}$$

Infine definiamo la funzione

$$\Psi : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}, \quad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) \frac{V(x)}{\|d_x f\|_*}, & x \in A; \\ 0, & x \in \mathbb{B} \setminus A. \end{cases}$$

Si ha che $\Psi \in Lip_{loc}(\mathbb{B}; \mathbb{B})$. Ora, per ogni $x \in \mathbb{B}$, consideriamo ora il seguente Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\eta}(t, x) = -\Psi(\eta(t, x)) \\ \eta(0, x) = x, \end{cases} \quad (28)$$

dove abbiamo denotato $\dot{\eta}(t, x) = \frac{\partial \eta}{\partial t}(t, x)$. Poiché $\Psi \in Lip_{loc}(\mathbb{B}; \mathbb{B})$, il problema (28) ammette una (unica) soluzione

$$\eta(\cdot, x) \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{B}), \quad \forall x \in \mathbb{B}.$$

In particolare, dai teoremi di dipendenza continua dal dato iniziale, si ha

$$\eta \in C([0, 1] \times \mathbb{B}; \mathbb{B}).$$

Poniamo

$$\varphi : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}, \quad \varphi(x) = \eta(1, x).$$

In questo modo $\varphi \in C(\mathbb{B}; \mathbb{B})$ è una deformazione in $\mathbb{B}$. Inoltre, poiché

$$\Psi(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{B} \setminus A,$$

allora φ soddisfa la condizione (i) della tesi. Per quanto riguarda la seconda condizione, proviamo innanzitutto che per ogni $x \in \mathbb{B}$, la funzione composta $f(\eta(\cdot, x))$ è decrescente. Notiamo che la precedente composizione è di classe C^1 , quindi calcoliamo

$$\frac{d}{dt}(f(\eta(t, x))) = d_{\eta(t, x)}f(\dot{\eta}(t, x)) = \begin{cases} -\frac{\psi(\eta(t, x))}{\|d_{\eta(t, x)}f\|_*} d_{\eta(t, x)}f(V(\eta(t, x))), & \eta(t, x) \in A; \\ 0, & \eta(t, x) \in \mathbb{B} \setminus A. \end{cases}$$

Dalla proprietà (ii) nella Definizione 3.5 di Pseudo-Gradiente, si ottiene

$$\frac{d}{dt}(f(\eta(t, x))) \leq \begin{cases} -\psi(\eta(t, x))\|d_{\eta(t, x)}f\|_*, & \eta(t, x) \in A; \\ 0, & \eta(t, x) \in \mathbb{B} \setminus A. \end{cases}$$

Poiché ψ è non negativa, allora $f(\eta(\cdot, x))$ è decrescente. Sia ora $x \in f^{c+\varepsilon}$. Se

$$\exists t \in [0, 1) \text{ t.c. } f(\eta(t, x)) \leq c - \varepsilon,$$

allora

$$f(\varphi(x)) = f(\eta(1, x)) \leq c - \varepsilon,$$

cioè $\varphi(x) \in f^{c-\varepsilon}$. Quindi, resta da provare che se $x \in B$, allora non può accadere che

$$f(\eta(t, x)) \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon], \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (29)$$

Infatti, se per assurdo valesse (29), allora poiché $\psi(x) = 1, \forall x \in B$, da (27) si avrebbe

$$\begin{aligned} f(\varphi(x)) &= f(\eta(1, x)) = f(\eta(0, x)) + \int_0^1 \frac{d}{dt}(f(\eta(t, x))) dt \\ &= f(x) + \int_0^1 d_{\eta(t, x)}f(\dot{\eta}(t, x)) dt \\ &= f(x) - \int_0^1 \|d_{\eta(t, x)}f\|_* dt \leq c + \varepsilon - 2\varepsilon = c - \varepsilon, \end{aligned}$$

che è in contraddizione con (29). Quindi φ soddisfa anche la condizione (ii) della tesi. $\square$

Osservazione 3.4. Sia $f \in C^1(\mathbb{B}; \mathbb{R})$, limitata dal basso, cioè

$$c := \inf_{x \in \mathbb{B}} f(x) > -\infty.$$

Se f soddisfa $(PS)_c$, allora $c \in Vcrit(f)$, in particolare f ammette un punto critico di minimo, cioè

$$\exists x_0 \in \mathbb{B} \text{ t.c. } c = f(x_0) = \min_{x \in \mathbb{B}} f(x), \quad d_{x_0} f = 0.$$

Infatti, se $c \notin Vcrit(f)$, allora dal Lemma di deformazione esisterebbero $\varepsilon > 0$ ed una deformazione $\varphi \in C(\mathbb{B}; \mathbb{B})$, tali che:

$$\varphi(f^{c+\varepsilon}) \subseteq f^{c-\varepsilon}.$$

Ma $f^{c+\varepsilon} \neq \emptyset$, mentre $f^{c-\varepsilon} = \emptyset$ e questo è assurdo.

In maniera analoga, se f è limitata dall'alto e soddisfa la condizione di Palais-Smale al livello dell'estremo superiore, allora f ammette un punto critico di massimo.

4 Primi teoremi di minimax

4.1 Principio di minimax

In questa sezione vediamo una prima applicazione del Lemma di deformazione 3.5. Iniziamo dando la seguente definizione.

Definizione 4.1. (*Flusso*) Sia X uno spazio topologico. Una funzione $\eta \in C(\mathbb{R} \times X; X)$ si chiama **flusso**, se

$$\eta(0, x) = x, \quad \forall x \in X,$$

ed inoltre soddisfa la seguente proprietà di gruppo:

$$\eta(t, \cdot) \circ \eta(s, \cdot) = \eta(t, \eta(s, \cdot)) = \eta(t + s, \cdot), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}. \quad (30)$$

In particolare un flusso genera una famiglia ad un parametro di omeomorfismi, cioè per ogni $t \in \mathbb{R}$, la mappa $\eta(t, \cdot) : X \rightarrow X$ è un omeomorfismo, la cui inversa è $\eta(-t, \cdot)$.

Dato un flusso η , una famiglia $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di X si dice **η -invariante** se:

$$\eta(t, A) \in \mathcal{A}, \quad \forall A \in \mathcal{A}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Se la precedente proprietà vale per ogni $t \geq 0$, la famiglia $\mathcal{A}$ si dice (positivamente) **η -invariante**.

Osservazione 4.1. Analogamente, una funzione $\eta \in C([0, +\infty) \times X; X)$ si dice **semiflusso** se

$$\eta(0, x) = x, \quad \forall x \in X,$$

ed inoltre soddisfa la seguente proprietà di semigruppato:

$$\eta(t, \cdot) \circ \eta(s, \cdot) = \eta(t, \eta(s, \cdot)) = \eta(t + s, \cdot), \quad \forall t, s \geq 0.$$

Inoltre, dato un semiflusso η , una famiglia $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di X si dice (positivamente) **η -invariante** se:

$$\eta(t, A) \in \mathcal{A}, \quad \forall A \in \mathcal{A}, \quad \forall t \geq 0.$$

Osservazione 4.2. *La funzione η definita nella dimostrazione del Lemma di deformazione 3.5 (oppure 3.3) è un esempio di flusso (e anche semiflusso).*

Dimostriamo ora il seguente risultato dovuto a R.S. Palais; si veda [12].

Teorema 4.1. *(Principio di minimax)*

Sia $f \in C^1(\mathbb{B}; \mathbb{R})$ una funzione che soddisfi (PS). Sia ora $\mathcal{A}$ una famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{B}$, η -invariante per ogni flusso η per cui

$$f(\eta(\cdot, x)) \text{ è decrescente, } \forall x \in \mathbb{B}. \quad (31)$$

Poniamo

$$c := \inf_{A \in \mathcal{A}} \sup_{x \in A} f(x). \quad (32)$$

Se $c \in \mathbb{R}$, allora $c \in Vcrit(f)$ (cioè f ammette un punto critico).

Dimostrazione. Sia $c \in \mathbb{R}$ e supponiamo per assurdo che $c \notin Vcrit(f)$. Poiché f soddisfa (PS), in particolare $(PS)_c$, allora dal Lemma di deformazione 3.5 esisterebbero $\varepsilon > 0$ ed un flusso η con la proprietà (31). Inoltre, la deformazione $\varphi \in C(\mathbb{B}; \mathbb{B})$, data da $\varphi(x) = \eta(1, x)$, per ogni $x \in \mathbb{B}$, verifica in particolare $\varphi(f^{c+\varepsilon}) \subseteq f^{c-\varepsilon}$. Usando la definizione di c come estremo inferiore, si ha che

$$\exists A_0 \in \mathcal{A} \text{ t.c. } \sup_{x \in A_0} f(x) \leq c + \varepsilon,$$

cioè $A_0 \subseteq f^{c+\varepsilon}$. Poniamo $A_1 = \eta(1, A_0) = \varphi(A_0)$. Poiché $\mathcal{A}$ è η -invariante, allora $A_1 \in \mathcal{A}$. Inoltre

$$f(\eta(1, x)) = f(\varphi(x)) \leq c - \varepsilon, \quad \forall x \in A_0,$$

cioè $A_1 \subseteq f^{c-\varepsilon}$. Allora si avrebbe

$$c = \inf_{A \in \mathcal{A}} \sup_{x \in A} f(x) \leq \sup_{x \in A_1} f(x) \leq c - \varepsilon,$$

cioè $\varepsilon \leq 0$, ma questo è assurdo. □

Osservazione 4.3. *Dalla precedente dimostrazione si nota che basterebbe che f soddisfi $(PS)_c$, con c definito in (32).*

Osservazione 4.4. *Il precedente risultato vale anche usando una famiglia $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi (positivamente) η -invariante, rispetto ad ogni flusso (o semiflusso) con la proprietà (31).*

Dal Teorema 4.1, si ottengono alcune generalizzazioni di risultati di tipo Weierstrass (si confrontino con l'Osservazione 3.4).

Esempio 4.1. Sia $f \in C^1(\mathbb{B}; \mathbb{R})$. Se

$$c := \inf_{x \in \mathbb{B}} f(x) > -\infty,$$

ed f soddisfa $(PS)_c$, allora f ammette un punto critico di minimo. Infatti, sia

$$\mathcal{A} = \{\{x\}, \text{ t.c. } x \in \mathbb{B}\}.$$

Allora $\mathcal{A}$ è η -invariante per ogni flusso η e si ha

$$\inf_{A \in \mathcal{A}} \sup_{x \in A} f(x) = \inf_{x \in \mathbb{B}} f(x) = c,$$

quindi $c \in Vcrit(f)$, cioè

$$\exists x_0 \in \mathbb{B} \text{ t.c. } c = f(x_0) = \min_{x \in \mathbb{B}} f(x), \quad d_{x_0} f = 0.$$

Esempio 4.2. Sia $f \in C^1(\mathbb{B}; \mathbb{R})$. Se

$$c := \sup_{x \in \mathbb{B}} f(x) < +\infty,$$

ed f soddisfa $(PS)_c$, allora f ammette un punto critico di massimo. Infatti, sia

$$\mathcal{A} = \{\mathbb{B}\}.$$

Allora $\mathcal{A}$ è η -invariante per ogni flusso η e si ha

$$\inf_{A \in \mathcal{A}} \sup_{x \in A} f(x) = \sup_{x \in \mathbb{B}} f(x) = c,$$

quindi $c \in Vcrit(f)$, cioè

$$\exists x_0 \in \mathbb{B} \text{ t.c. } c = f(x_0) = \max_{x \in \mathbb{B}} f(x), \quad d_{x_0} f = 0.$$

4.2 Teorema del passo montano

In questa sezione dimostriamo il famoso "Mountain pass theorem" dovuto a A.Ambrosetti-P.H.Rabinowitz del 1973, si veda [4].

Teorema 4.2. *(del passo montano)*

Sia $f \in C^1(\mathbb{B}; \mathbb{R})$. Supponiamo che esistano $r \in \mathbb{R}$, $\bar{v} \in \mathbb{B}$ con $\|\bar{v}\| > r > 0$, tali che:

$$b := \inf_{x \in S} f(x) > \max\{f(0), f(\bar{v})\} =: a, \quad (33)$$

dove

$$S = \{x \in \mathbb{B} \text{ t.c. } \|x\| = r\}.$$

Se f soddisfa (PS), allora f ammette un punto critico $x_0 \in \mathbb{B}$ tale che $f(x_0) \geq b$.

In particolare, definendo

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1]; \mathbb{B}) \text{ t.c. } \gamma(0) = 0, \gamma(1) = \bar{v}\}$$

e ponendo

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} f(\gamma(t)), \quad (34)$$

allora si ha che $c \geq b$ ed inoltre $c \in Vcrit(f)$, cioè

$$\exists x_0 \in \mathbb{B} \text{ t.c. } f(x_0) = c, d_{x_0}f = 0.$$

Dimostrazione. Prima di tutto, osserviamo che se $\gamma \in \Gamma$, allora vale la seguente proprietà di intersezione

$$S \cap \gamma([0, 1]) \neq \emptyset. \quad (35)$$

Quindi

$$b \leq \max_{t \in [0, 1]} f(\gamma(t)), \quad \forall \gamma \in \Gamma,$$

così dalla definizione di c in (34), si ottiene

$$b \leq \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} f(\gamma(t)) = c.$$

Supponiamo ora, per assurdo, che $c \notin Vcrit(f)$. Poiché f soddisfa (PS), in particolare $(PS)_c$, allora dal Lemma di deformazione 3.5 esisterebbero $\varepsilon > 0$ ed una deformazione $\varphi \in C(\mathbb{B}; \mathbb{B})$, tali che:

- (i) $\varphi(x) = x, \quad \forall x \notin f^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]);$
- (ii) $\varphi(f^{c+\varepsilon}) \subseteq f^{c-\varepsilon}.$

In particolare, poiché $b > a$, possiamo supporre senza perdere di generalità che $c - 2\varepsilon > a$. Dalla definizione di c , come estremo inferiore,

$$\exists \gamma_0 \in \Gamma \text{ t.c. } \max_{t \in [0,1]} f(\gamma_0(t)) \leq c + \varepsilon,$$

cioè $\gamma_0([0, 1]) \subseteq f^{c+\varepsilon}$. Poniamo $\gamma_1 = \varphi \circ \gamma_0$. In questo modo $\gamma_1 \in C([0, 1]; \mathbb{B})$, in particolare $\gamma_1([0, 1]) \subseteq f^{c-\varepsilon}$, ed inoltre

$$\begin{cases} \gamma_1(0) = \varphi(\gamma_0(0)) = \varphi(0) = 0; \\ \gamma_1(1) = \varphi(\gamma_0(1)) = \varphi(\bar{v}) = \bar{v}. \end{cases}$$

Quindi $\gamma_1 \in \Gamma$. Allora si avrebbe

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} f(\gamma(t)) \leq \max_{t \in [0,1]} f(\gamma_1(t)) \leq c - \varepsilon,$$

cioè $\varepsilon \leq 0$, ma questo è assurdo. □

Osservazione 4.5. *Come nell'Osservazione 4.3, dalla precedente dimostrazione si nota che basterebbe che f soddisfi $(PS)_c$, con c definito in (34).*

Il prossimo esempio, dovuto a H. Brezis e L. Nirenberg (si veda [6]), mostra una funzione che ha la struttura del passo montano (33), ma per cui non vale (PS); in particolare il Teorema del passo montano 4.2 non si applica.

Esempio 4.3. *Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, $f(x, y) = x^2 + (1 - x)^3 y^2$.*

Si ha

$$f(0, 0) = f(2, 2) = 0.$$

Inoltre

$$\nabla f(x, y) = (2x - 3(1 - x)^2 y^2, 2(1 - x)^3 y) ,$$

così

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff (x, y) = (0, 0) ;$$

quindi f ammette l'origine come unico punto critico. Ora,

$$f(x, y) \geq x^2 + \frac{1}{8}y^2 \geq \frac{1}{8}(x^2 + y^2) = \frac{1}{32}, \text{ se } \|(x, y)\| = \frac{1}{2}.$$

Quindi, usando le notazioni del Teorema del passo montano 4.2, si ottiene in particolare che la condizione (33) è verificata, cioè

$$b := \inf_{(x,y) \in S} f(x, y) \geq \frac{1}{32} > 0 = \max\{f(0, 0), f(2, 2)\} =: a,$$

dove

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } \|(x, y)\| = \frac{1}{2} \right\}.$$

Infine, f non soddisfa $(PS)_1$. Infatti, notando che $f(1, y) = 1$, per ogni $y \in \mathbb{R}$, consideriamo ad esempio la seguente successione

$$\{(x_k, y_k)\} \subseteq \mathbb{R}^2, \quad (x_k, y_k) = \left(1 - \frac{1}{k}, \sqrt{\frac{2}{3}} k \right).$$

In questo modo si ha

$$\begin{cases} f(x_k, y_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 1; \\ \nabla f(x_k, y_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} (0, 0). \end{cases}$$

Quindi $\{(x_k, y_k)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ è una successione di Palais-Smale per f al livello 1, ma poiché $\|(x_k, y_k)\|$ è divergente, non può ammettere sottosuccessioni convergenti. Per cui f non soddisfa $(PS)_1$; in particolare, il valore $c = 1$ è esattamente il valore definito in (34).

4.3 Applicazioni a PDEs di tipo ellittico. I

Mostriamo ora l'esistenza di una soluzione debole per il problema considerato nell'Esempio 2.2. In particolare abbiamo il seguente

Teorema 4.3. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, con $n \geq 3$. Consideriamo il seguente Problema di Dirichlet, per il Laplaciano, su Ω*

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(u(x)), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (36)$$

dove

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(\xi) = |\xi|^{p-1}\xi, \quad p \in \mathbb{R}, \quad 2 < p+1 < 2^* = \frac{2n}{n-2}.$$

Allora esiste $u_0 \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R})$ soluzione debole non banale ($u_0 \not\equiv 0$) per il problema (36).

Dimostrazione. Poniamo $\mathbb{H} = H_0^1(\Omega; \mathbb{R})$ e, grazie alla disuguaglianza di Poincaré (10), consideriamo su $\mathbb{H}$ la norma equivalente

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in \mathbb{H},$$

e il relativo prodotto scalare

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle dx, \quad \forall u, v \in \mathbb{H}.$$

Consideriamo ora il seguente funzionale $E : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u(x)|^{p+1} dx = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{p+1} \|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}.$$

Dall'Esempio 2.2, sappiamo che il funzionale è ben definito, in particolare $E \in C^1(\mathbb{H}; \mathbb{R})$, ed inoltre $u \in \mathbb{H}$ è soluzione debole del problema (36) se e solo se u è punto critico per E , cioè

$$d_u E(h) = 0, \quad \forall h \in \mathbb{H},$$

dove

$$d_u E(h) = \int_{\Omega} \langle \nabla u(x), \nabla h(x) \rangle - f(u(x))h(x) dx, \quad \forall h \in \mathbb{H}. \quad (37)$$

Per mostrare l'esistenza di punti critici per E utilizziamo il Teorema del passo montano 4.2: bisogna verificare che E ha la struttura del passo montano, cioè esistono $a, b \in \mathbb{R}$ che verificano la condizione (33); infine bisogna mostrare che E soddisfa (PS).

Prima di tutto $E(0) = 0$. Ora, sempre dall'Esempio 2.2, sappiamo che il funzionale E non è limitato inferiormente. Infatti, se $\bar{u} \in \mathbb{H}$, $\|\bar{u}\| \neq 0$, considerando la successione $\{u_k\} \subseteq \mathbb{H}$, con $u_k(x) = k\bar{u}$, si ha

$$E(u_k) = E(k\bar{u}) = \frac{k^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla \bar{u}(x)|^2 dx - \frac{k^{p+1}}{p+1} \int_{\Omega} |\bar{u}(x)|^{p+1} dx \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} -\infty.$$

Quindi, poiché $p+1 > 2$, esiste $\bar{k} \in \mathbb{N}$ tale che $E(\bar{k}\bar{u}) \leq 0$. Poniamo $\bar{v} = \bar{k}\bar{u}$; inoltre non è restrittivo supporre anche $\|\bar{v}\| > 1$. In questo modo

$$a := \max\{E(0), E(\bar{v})\} = 0.$$

Adesso, ricordiamo che dai Teoremi di immersione 1.6, si ottiene in particolare la seguente disuguaglianza di Sobolev

$$\exists C_s > 0 \text{ t.c. } \|u\|_{L^{p+1}} \leq C_s \|u\|, \quad \forall u \in \mathbb{H}. \quad (38)$$

Allora, per ogni $u \in \mathbb{H}$, si ha la seguente stima

$$E(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{p+1} \|u\|_{L^{p+1}}^{p+1} \geq \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{C_s^{p+1}}{p+1} \|u\|^{p+1} = \frac{1}{2} \|u\|^2 \left(1 - \frac{2C_s^{p+1}}{p+1} \|u\|^{p-1} \right).$$

Poiché $p-1 > 0$

$$\exists r > 0 \text{ t.c. } \left(1 - \frac{2C_s^{p+1}}{p+1} r^{p-1} \right) > 0;$$

inoltre non è restrittivo supporre anche $r < 1$, in modo da avere $\|\bar{v}\| > r$. In questo modo, si ottiene

$$b := \inf_{u \in S} E(u) > 0 = a,$$

dove

$$S = \{u \in \mathbb{H} \text{ t.c. } \|u\| = r\}.$$

Quindi la condizione (33) è soddisfatta.

Per quanto riguarda (PS), procederemo in due passi: prima mostreremo che per E vale la proprietà (22) di decomposizione del gradiente, poi proveremo che ogni successione di Palais-Smale per E è limitata; la conclusione seguirà del Corollario 3.1.

A questo scopo, per comodità poniamo le funzioni

$$A : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}, \quad A(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx = \frac{1}{2} \|u\|^2,$$

$$G : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(u) = \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u(x)|^{p+1} dx = \frac{1}{p+1} \|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}.$$

In questo modo

$$E(u) = A(u) - G(u), \quad \forall u \in \mathbb{H}$$

e dalla formula (37) per il differenziale di E , si ha

$$d_u E(h) = d_u A(h) - d_u G(h) = \langle u, h \rangle - \int_{\Omega} f(u(x))h(x)dx, \quad \forall u, h \in \mathbb{H}.$$

In particolare, poiché

$$d_u E(h) = \langle \nabla E(u), h \rangle, \quad \forall u, h \in \mathbb{H},$$

si ottiene

$$\nabla A(u) = u, \quad \forall u \in \mathbb{H}$$

e quindi

$$\nabla E(u) = u - \nabla G(u), \quad \forall u \in \mathbb{H}.$$

Vogliamo mostrare che la mappa

$$d_{(\cdot)}G : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}^*$$

è compatta; ovviamente, dalla Definizione 1.6 e dall'Osservazione 1.3, anche la mappa

$$\nabla G : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H} \tag{39}$$

sarà compatta.

Sia quindi $\{u_k\} \subseteq \mathbb{H}$ una successione limitata, allora esiste una sottosuccessione $\{u_{j_k}\} \subseteq \{u_k\}$ debolmente convergente a qualche $u_0 \in \mathbb{H}$. In particolare, poiché l'immersione

$$\iota : \mathbb{H} \xrightarrow[\text{cpt}]{} L^{p+1}(\Omega; \mathbb{R})$$

è compatta, allora la sottosuccessione $\{u_{j_k}\} \subseteq L^{p+1}(\Omega; \mathbb{R})$ converge a $u_0 \in L^{p+1}(\Omega; \mathbb{R})$, in norma L^{p+1} (si veda l'Osservazione 1.10). Adesso, poiché la mappa

$$\begin{aligned} L^{p+1}(\Omega; \mathbb{R}) &\longrightarrow L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega; \mathbb{R}), \\ u &\longmapsto |u|^{p-1}u \end{aligned}$$

è continua, la sottosuccessione $\{f(u_{j_k})\} \subseteq L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega; \mathbb{R})$ converge a $f(u_0) \in L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega; \mathbb{R})$, in norma $L^{\frac{p+1}{p}}$. Allora, per ogni $h \in \mathbb{H}$, usando le disuguaglianze di Hölder (8) e di Sobolev (38), si ha

$$\begin{aligned} |d_{u_{j_k}}G(h) - d_{u_0}G(h)| &\leq \int_{\Omega} |f(u_{j_k}(x)) - f(u_0(x))| |h(x)| dx \\ &\leq \|f(u_{j_k}) - f(u_0)\|_{L^{\frac{p+1}{p}}} \|h\|_{L^{p+1}} \\ &\leq C_s \|f(u_{j_k}) - f(u_0)\|_{L^{\frac{p+1}{p}}} \|h\| \end{aligned}$$

Quindi

$$\|d_{u_{j_k}}G - d_{u_0}G\|_{\mathbb{H}^*} \leq C_s \|f(u_{j_k}) - f(u_0)\|_{L^{\frac{p+1}{p}}} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0.$$

In questo modo, abbiamo provato che data $\{u_k\} \subseteq \mathbb{H}$ successione limitata, l'immagine $\{d_{u_k}G\} \subseteq \mathbb{H}^*$ ammette una sottosuccessione convergente in $\mathbb{H}^*$; in altri termini la mappa $d_{(\cdot)}G$ è compatta (e anche ∇G).

Una dimostrazione alternativa della compattezza della mappa ∇G , può essere fatta usando un opportuno operatore inverso del Laplaciano, definito utilizzando il Teorema di Lax-Milgram (si veda il Lemma A.1)

Resta ora da provare che ogni successione di Palais-Smale per E è limitata. Sia allora $c \in \mathbb{R}$ arbitrario e $\{u_k\} \subseteq \mathbb{H}$ una successione di Palais-Smale per E , al livello c , cioè:

$$\begin{cases} E(u_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{(\mathbb{R})} c; \\ \nabla E(u_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{(\mathbb{H})} 0. \end{cases}$$

Si ha, per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{p+1} \langle \nabla E(u_k), u_k \rangle = \frac{1}{p+1} \|u_k\|^2 - \frac{1}{p+1} \|u_k\|_{L^{p+1}}^{p+1} = E(u_k) + \left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{2} \right) \|u_k\|^2,$$

cioè

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \|u_k\|^2 = E(u_k) - \frac{1}{p+1} \langle \nabla E(u_k), u_k \rangle. \quad (40)$$

Poiché $2 < p+1$, allora $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) > 0$; inoltre usando le condizioni di Palais-Smale sulla successione, esistono due costanti positive M_1, M_2 , tali che per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$|E(u_k) - c| \leq M_1,$$

$$|\langle \nabla E(u_k), u_k \rangle| \leq \|\nabla E(u_k)\| \|u_k\| \leq M_2 \|u_k\|.$$

Quindi, da (40), possiamo scrivere

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \|u_k\|^2 \leq c + M_1 + \frac{M_2}{p+1} \|u_k\|, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Questo mostra che $\{u_k\} \subseteq \mathbb{H}$ è limitata. A questo punto, dal Corollario 3.1, possiamo concludere che E soddisfa (PS).

Infine, dal Teorema del passo montano 4.2, si ottiene che E ammette un punto critico $u_0 \in \mathbb{H}$; in particolare, poiché

$$E(u_0) \geq b > a = 0 = E(0),$$

allora $u_0 \neq 0$. Questo conclude la dimostrazione. $\square$

Osservazione 4.6. Il precedente risultato di esistenza, Teorema 4.3, si generalizza senza difficoltà a casi più generali (si vedano ad esempio [2], [14]). Ad esempio, dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto regolare, $n \geq 3$, sia L un operatore ellittico del secondo ordine in forma di divergenza, cioè

$$Lu(x) = \operatorname{div}(A(x)\nabla u(x)),$$

dove A è una matrice $n \times n$ con coefficienti regolari su $\overline{\Omega}$, simmetrica e strettamente definita positiva (in particolare, se $A(x) = I_n$, allora $Lu = \Delta u$).

Consideriamo il seguente Problema di Dirichlet su Ω

$$\begin{cases} -Lu(x) = f(x, u(x)), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (41)$$

dove

(i) $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$;

(ii) $\exists a, b \geq 0$ t.c. $|f(x, t)| \leq a + b|t|^p$, con $0 \leq p < 2^* - 1$, $p \in \mathbb{R}$;

(iii) $f(x, t) = o(|t|)$, per $t \rightarrow 0$;

(iv) posto $F(x, \xi) = \int_0^\xi f(x, t)dt$, esistono delle costanti $\mu > 2$, $r \geq 0$, tali che

$$0 < \mu F(x, \xi) \leq \xi f(x, \xi), \quad \text{per } |\xi| \geq r.$$

Allora il problema (41) ammette una soluzione debole non banale $u \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R})$, cioè

$$\int_{\Omega} \langle A(x)\nabla u(x), \nabla h(x) \rangle dx = \int_{\Omega} f(x, u(x))h(x)dx, \quad \forall h \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}).$$

L'idea è applicare il Teorema del passo montano 4.2 al seguente funzionale

$$E : H_0^1(\Omega; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \langle A(x)\nabla u(x), \nabla u(x) \rangle dx - \int_{\Omega} F(x, u(x))dx.$$

Osservazione 4.7. Nelle ipotesi del precedente Teorema 4.3, se Ω è un aperto regolare, mediante un procedimento di tipo "bootstrap" si ha che se $u_0 \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R})$ è soluzione debole del problema (36), allora u_0 è soluzione classica di (36), cioè $u_0 \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$; si veda il Teorema A.6 e l'Osservazione A.1.

Osservazione 4.8. *In contrasto con il risultato di esistenza espresso dal Teorema 4.3, se Ω è un dominio stellato rispetto all'origine e nella funzione f l'esponente della non linearità soddisfa $p + 1 > 2^*$, allora si dimostra che non esistono soluzioni classiche non banali per il problema di Dirichlet (36); l'idea è usare un classico risultato noto come Identità di Pohozaev (si vedano il Teorema A.8 e il Teorema A.9).*

A conclusione di questa sezione, vogliamo mostrare come trattare anche altri tipi di non linearità; si veda ad esempio [2].

Osservazione 4.9. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto regolare, con $n \geq 3$. Poniamo $\mathbb{H} = H_0^1(\Omega; \mathbb{R})$ e consideriamo*

$$G : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(u) = \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u(x)|^{p+1} dx = \frac{1}{p+1} \|u\|_{L^{p+1}}^{p+1},$$

dove

$$1 < p + 1 < 2^* = \frac{2n}{n-2}, \quad p \in \mathbb{R}.$$

Ragionando come nell'Esempio 2.2 e nella dimostrazione del Teorema 4.3, si ha che G è debolmente continua e differenziabile (in particolare $d_{(\cdot)}G : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}^$ è compatta).*

In questo modo i funzionali

$$E_1 : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}, \quad E_1(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u(x)|^{p+1} dx, \quad 1 < p + 1 < 2^*$$

e

$$E_2 : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}, \quad E_2(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u(x)|^{p+1} dx, \quad 1 < p + 1 < 2$$

sono coercivi, deb. inf. semi-cont. e differenziabili. Quindi, dal Teorema 1.1, E_1 ed E_2 ammettono punti critici.

Ovviamente i precedenti funzionali ammettono la soluzione identicamente nulla; comunque questi risultati si generalizzano e valgono anche considerando in modo opportuno

$$G(u) = \int_{\Omega} F(x, u(x)) dx,$$

con F definita come nell'Osservazione 4.6.

5 Teorema di linking

5.1 Link

Vogliamo vedere alcune generalizzazioni dello schema di minimax. Partiamo introducendo una condizione topologica che generalizza la proprietà di intersezione espressa in (35).

Definizione 5.1. (*Link*)

Sia $\mathbb{B}$ uno spazio di Banach e $V \subseteq \mathbb{B}$ un suo sottospazio chiuso. Consideriamo due sottoinsiemi chiusi $S \subseteq \mathbb{B}$, $Q \subseteq V$, e denotiamo con $\partial_V Q$ la frontiera di Q relativa a V . Posto

$$\Gamma = \{\gamma \in C(Q; \mathbb{B}) \text{ t.c. } \gamma(v) = v, \forall v \in \partial_V Q\}, \quad (42)$$

si dice che S e $\partial_V Q$ "**link**" (o creano un link), se:

- (i) $S \cap \partial_V Q = \emptyset$;
- (ii) $S \cap \gamma(Q) \neq \emptyset, \quad \forall \gamma \in \Gamma$.

Al fine di illustrare alcuni risultati ed esempi sul link, richiamiamo le seguenti proprietà del grado topologico; si vedano ad esempio [2], [13].

Teorema 5.1. (*Grado di Brouwer*)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e siano $f \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$, $p \notin f(\partial\Omega)$. Allora è ben definito un numero intero, detto **grado topologico (di Brouwer)** di f in Ω relativo a p , che si indica

$$\deg(f, \Omega, p) \in \mathbb{Z},$$

il quale verifica le seguenti proprietà:

$$(i) \deg(Id, \Omega, p) = \begin{cases} 1, & \text{se } p \in \Omega \\ 0, & \text{se } p \notin \Omega \end{cases}$$

$$(ii) \text{ se } \deg(f, \Omega, p) \neq 0, \text{ allora } \exists x_0 \in \Omega \text{ t.c. } f(x_0) = p;$$

$$(iii) \deg(f, \Omega, p) = \deg(f - p, \Omega, 0);$$

$$(iv) \text{ se } \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \text{ con } \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset \text{ allora}$$

$$\deg(f, \Omega, p) = \deg(f, \Omega_1, p) + \deg(f, \Omega_2, p);$$

(v) sia $\eta \in C([0, 1] \times \overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ una omotopia ammissibile rispetto a $p \notin \eta(t, \partial\Omega)$ per ogni $t \in [0, 1]$, cioè

$$\eta(t, x) \neq p, \quad \forall t \in [0, 1], \quad x \in \partial\Omega,$$

allora $\deg(\eta(t, \cdot), \Omega, p)$ è costante in $t \in [0, 1]$.

Osservazione 5.1. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e siano $f \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$, $p \notin f(\partial\Omega)$. Se p è un valore regolare per f , allora il grado coincide con il seguente valore intero:

$$\deg(f, \Omega, p) = \begin{cases} \sum_{x \in f^{-1}(p)} \operatorname{sgn}(J_f(x)), & \text{se } f^{-1}(p) \neq \emptyset \\ 0, & \text{se } f^{-1}(p) = \emptyset \end{cases}$$

dove J_f denota il determinante della matrice Jacobiana di f .

Lemma 5.1. Sia $\mathbb{B}$ uno spazio di Banach e siano $V, S \subseteq \mathbb{B}$ sottospazi chiusi tali che

$$\mathbb{B} = V \oplus S,$$

e identifichiamo $(v, s) = x \in \mathbb{B}$. Fissiamo $r > 0$ e poniamo

$$Q = \{v \in V \text{ t.c. } \|v\| \leq r\} \subseteq V.$$

Se $\dim(V) < +\infty$, allora S e $\partial_V Q$ link.

Dimostrazione. Prima di tutto

$$S \cap \partial_V Q = \emptyset.$$

Sia ora $\gamma \in \Gamma$, come definito in (42); vogliamo mostrare che $S \cap \gamma(Q) \neq \emptyset$. Denotando con $P : \mathbb{B} \rightarrow V$ la proiezione di $\mathbb{B}$ su V , allora $S \cap \gamma(Q) \neq \emptyset$ è equivalente a mostrare che

$$\exists v_0 \in Q \text{ t.c. } P(\gamma(v_0)) = 0.$$

Poniamo ora

$$f : Q \rightarrow V, \quad f(v) = P(\gamma(v))$$

e consideriamo l'omotopia $\eta \in C([0, 1] \times Q; V)$ data da

$$\eta(t, v) = (1 - t)v + tf(v).$$

Poiché $\gamma \in \Gamma$, osserviamo esplicitamente che $\eta(t, \partial_V Q) = \partial_V Q$ per ogni $t \in [0, 1]$, perciò η è ammissibile rispetto a 0, cioè

$$\eta(t, v) \neq 0, \quad \forall t \in [0, 1], \quad v \in \partial_V Q.$$

Infatti, se $v \in \partial_V Q$, vale

$$f(v) = P(\gamma(v)) = P(v) = v,$$

quindi

$$\eta(t, v) = v \neq 0 \notin \partial_V Q = \eta(t, \partial_V Q), \quad \forall t \in [0, 1].$$

Allora $\deg(\eta(t, \cdot), Q, 0)$ è costante in $t \in [0, 1]$, in particolare

$$\deg(f, Q, 0) = \deg(\eta(1, \cdot), Q, 0) = \deg(\eta(0, \cdot), Q, 0) = \deg(Id, Q, 0) = 1;$$

quindi

$$\exists v_0 \in Q \text{ t.c. } f(v_0) = 0.$$

In conclusione, abbiamo mostrato che S e $\partial_V Q$ link. □

Esempio 5.1. Consideriamo $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = V \times S$, dove

$$V = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2, x \in \mathbb{R}\}, \quad S = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2, y \in \mathbb{R}\}.$$

Sia

$$Q = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2, \text{ t.c. } |x| \leq 1\} \subseteq V, \quad \partial_V Q = \{(-1, 0), (1, 0)\}.$$

Allora S e $\partial_V Q$ link.

Lemma 5.2. Sia $\mathbb{B}$ uno spazio di Banach e siano $Z, W \subseteq \mathbb{B}$ sottospazi chiusi tali che

$$\mathbb{B} = Z \oplus W,$$

e identifichiamo $(z, w) = x \in \mathbb{B}$. Siano

$$z_0 \in Z, \|z_0\| = 1, \delta > 0, \bar{\tau} > 0, r \in (0, \bar{\tau})$$

e poniamo

$$V = \{\tau z_0 + w, \tau \in \mathbb{R}, w \in W\} = \mathbb{R}z_0 \oplus W,$$

$$Q = \{v = \tau z_0 + w, \tau \in [0, \bar{\tau}], w \in W, \|w\| \leq \delta\} \subseteq V,$$

$$S = \{z \in Z, \|z\| = r\} \subseteq Z.$$

Se $\dim(W) < +\infty$, allora S e $\partial_V Q$ link.

Dimostrazione. Prima di tutto

$$S \cap \partial_V Q = \emptyset.$$

Inoltre, notiamo che anche $\dim(V) < +\infty$. Sia ora $\gamma \in \Gamma$, come definito in (42); vogliamo mostrare che

$$S \cap \gamma(Q) \neq \emptyset. \quad (43)$$

Denotando con $P : \mathbb{B} \rightarrow W$ la proiezione di $\mathbb{B}$ su W allora $S \cap \gamma(Q) \neq \emptyset$ è equivalente a mostrare che

$$\exists v_0 \in Q \text{ t.c. } \begin{cases} \|\gamma(v_0) - P(\gamma(v_0))\| = r, \\ P(\gamma(v_0)) = 0. \end{cases}$$

Facciamo ora la seguente identificazione

$$V = \mathbb{R}z_0 \oplus W \simeq \mathbb{R} \times W$$

$$V \ni v = \tau z_0 + w \simeq (\tau, w).$$

Quindi, considerando la funzione

$$f : Q \rightarrow V, \quad f(v) = f(\tau, w) = (\|\gamma(v) - P(\gamma(v))\|, P(\gamma(v))),$$

allora $S \cap \gamma(Q) \neq \emptyset$ è equivalente a mostrare che

$$\exists v_0 = (\tau_0, w_0) \in Q \text{ t.c. } f(v_0) = f(\tau_0, w_0) = (r, 0) =: v_r.$$

Consideriamo l'omotopia $\eta \in C([0, 1] \times Q; V)$ data da

$$\eta(t, v) = (1 - t)v + tf(v),$$

cioè

$$\eta(t, \tau, w) = ((1 - t)\tau + t\|\gamma(v) - P(\gamma(v))\|, (1 - t)w + tP(\gamma(v))).$$

Poiché $\gamma \in \Gamma$, osserviamo esplicitamente che $\eta(t, \partial_V Q) = \partial_V Q$ per ogni $t \in [0, 1]$, perciò η è ammissibile rispetto a v_r , cioè

$$\eta(t, v) \neq v_r, \quad \forall t \in [0, 1], \quad v \in \partial_V Q.$$

Infatti, se $v \in \partial_V Q$, vale

$$f(v) = f(\tau, w) = (\|v - w\|, w) = (\tau, w) = v,$$

quindi

$$\eta(t, v) = \eta(t, \tau, w) = (\tau, w) = v \neq v_r \notin \partial_V Q = \eta(t, \partial_V Q), \quad \forall t \in [0, 1].$$

Allora $\deg(\eta(t, \cdot), Q, v_r)$ è costante in $t \in [0, 1]$, in particolare

$$\deg(f, Q, v_r) = \deg(\eta(1, \cdot), Q, v_r) = \deg(\eta(0, \cdot), Q, v_r) = \deg(\text{Id}, Q, v_r) = 1;$$

quindi

$$\exists v_0 \in Q \text{ t.c. } f(v_0) = v_r.$$

In conclusione, abbiamo mostrato che S e $\partial_V Q$ link. □

Osservazione 5.2. *Se nel Lemma 5.2 si pone $Z = \mathbb{B}$ e $W = 0$, allora scegliendo $z_0 \in \mathbb{B}$ come nell'enunciato, si ha*

$$V = \{\tau z_0, \tau \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}z_0, \quad Q = \{v = \tau z_0, \tau \in [0, \bar{\tau}]\}.$$

Quindi la condizione (43) è equivalente alla proprietà di intersezione (35) (riparametrizzando l'intervallo $[0, 1]$) che appare nella dimostrazione del Teorema del passo montano 4.2, dove $\bar{v} = \bar{\tau}z_0$, $\|\bar{v}\| = \bar{\tau} > r > 0$.

5.2 Teorema di linking

Vediamo ora alcune generalizzazioni del Teorema del passo montano 4.2. Partiamo con il seguente generale risultato.

Teorema 5.2. (*Teorema di linking*)

Sia $f \in C^1(\mathbb{B}; \mathbb{R})$ e siano $V \subseteq \mathbb{B}$ un sottospazio chiuso e $S \subseteq \mathbb{B}$, $Q \subseteq V$, due sottoinsiemi chiusi. Supponiamo

(i) S e $\partial_V Q$ link;

(ii) $b := \inf_{x \in S} f(x) > \sup_{v \in \partial_V Q} f(v) =: a$;

(iii) $d := \sup_{v \in Q} f(v) < +\infty$.

Se f soddisfa (PS), allora f ammette un punto critico $x_0 \in \mathbb{B}$ tale che $f(x_0) \geq b$.

In particolare, definendo Γ come in (42) e ponendo

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{v \in Q} f(\gamma(v)), \quad (44)$$

allora si ha che $c \geq b$ ed inoltre $c \in Vcrit(f)$, cioè

$$\exists x_0 \in \mathbb{B} \text{ t.c. } f(x_0) = c, \quad d_{x_0} f = 0.$$

Dimostrazione. Prima di tutto, da (i) e (ii) si ha $b \leq c$, inoltre da (iii) si ottiene $c \leq d$, quindi $c \in \mathbb{R}$. Supponiamo ora, per assurdo, che $c \notin Vcrit(f)$. Poiché f soddisfa (PS), in particolare $(PS)_c$, allora dal Lemma di deformazione 3.5 esisterebbero $\varepsilon > 0$ ed una deformazione $\varphi \in C(\mathbb{B}; \mathbb{B})$, tali che:

(i) $\varphi(x) = x, \quad \forall x \notin f^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon])$;

(ii) $\varphi(f^{c+\varepsilon}) \subseteq f^{c-\varepsilon}$.

In particolare, poiché $b > a$, possiamo supporre senza perdere di generalità che $c - 2\varepsilon > a$. Dalla definizione di c , come estremo inferiore,

$$\exists \gamma_0 \in \Gamma \text{ t.c. } \sup_{v \in Q} f(\gamma_0(v)) \leq c + \varepsilon,$$

cioè $\gamma_0(Q) \subseteq f^{c+\varepsilon}$. Poniamo $\gamma_1 = \varphi \circ \gamma_0$. In questo modo $\gamma_1 \in C(Q; \mathbb{B})$, in particolare $\gamma_1(Q) \subseteq f^{c-\varepsilon}$, ed inoltre

$$\forall v \in \partial_V Q, \quad \gamma_1(v) = \varphi(\gamma_0(v)) = \varphi(v) = v.$$

Quindi $\gamma_1 \in \Gamma$. Allora si avrebbe

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{v \in Q} f(\gamma(v)) \leq \sup_{v \in Q} f(\gamma_1(v)) \leq c - \varepsilon,$$

cioè $\varepsilon \leq 0$, ma questo è assurdo. □

Osservazione 5.3. Anche in questo caso, come nelle osservazioni 4.3 e 4.5, dalla precedente dimostrazione si nota che basterebbe che f soddisfi $(PS)_c$, con c definito in (44).

Mostriamo ora due casi particolari del Teorema di linking 5.2 che si ottengono come semplici corollari.

Teorema 5.3. *(del punto di sella)*

Sia $f \in C^1(\mathbb{B}; \mathbb{R})$ e siano $V, S \subseteq \mathbb{B}$ sottospazi chiusi tali che

$$\mathbb{B} = V \oplus S,$$

e identifichiamo $(v, s) = x \in \mathbb{B}$. Fissiamo $r > 0$ e poniamo

$$Q = \{v \in V \text{ t.c. } \|v\| \leq r\} \subseteq V.$$

Supponiamo $\dim(V) < +\infty$, e

$$b := \inf_{s \in S} f(s) > \max_{v \in \partial_V Q} f(v)$$

Se f soddisfa (PS) , allora f ammette un punto critico $x_0 \in \mathbb{B}$ tale che $f(x_0) \geq b$.

In particolare, definendo Γ come in (42) e ponendo

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{v \in Q} f(\gamma(v)), \tag{45}$$

allora si ha che $c \geq b$ ed inoltre $c \in V_{crit}(f)$, cioè

$$\exists x_0 \in \mathbb{B} \text{ t.c. } f(x_0) = c, \quad d_{x_0} f = 0.$$

Dimostrazione. Segue dal Lemma 5.1 e dal Teorema di linking 5.2. □

Esempio 5.2. Consideriamo la funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$

$$f(x, y) = -x^2 + y^2$$

Riprendendo l'Esempio 5.1, poiché f soddisfa (PS) , allora il precedente Teorema del punto di sella 5.3 permette di mostrare l'esistenza di un punto critico (di sella) per f .

Teorema 5.4. *(del passo montano generalizzato)*

Sia $f \in C^1(\mathbb{B}; \mathbb{R})$ e siano $Z, W \subseteq \mathbb{B}$ sottospazi chiusi tali che

$$\mathbb{B} = Z \oplus W,$$

e identifichiamo $(z, w) = x \in \mathbb{B}$. Siano

$$z_0 \in Z, \|z_0\| = 1, \delta > 0, \bar{\tau} > 0, r \in (0, \bar{\tau})$$

e poniamo

$$V = \{\tau z_0 + w, \tau \in \mathbb{R}, w \in W\} = \mathbb{R}z_0 \oplus W,$$

$$Q = \{v = \tau z_0 + w, \tau \in [0, \bar{\tau}], w \in W, \|w\| \leq \delta\} \subseteq V,$$

$$S = \{z \in Z, \|z\| = r\} \subseteq Z.$$

Supponiamo $\dim(W) < +\infty$, e

$$b := \inf_{z \in S} f(z) > \max_{v \in \partial_V Q} f(v) =: a. \quad (46)$$

Se f soddisfa (PS), allora f ammette un punto critico $x_0 \in \mathbb{B}$ tale che $f(x_0) \geq b$.

In particolare, definendo Γ come in (42) e ponendo

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{v \in Q} f(\gamma(v)), \quad (47)$$

allora si ha che $c \geq b$ ed inoltre $c \in Vcrit(f)$, cioè

$$\exists x_0 \in \mathbb{B} \text{ t.c. } f(x_0) = c, d_{x_0}f = 0.$$

Dimostrazione. Segue dal Lemma 5.2 e dal Teorema di linking 5.2. □

Osservazione 5.4. *Se nel Teorema del passo montano generalizzato 5.4 si pone $Z = \mathbb{B}$ e $W = 0$, allora scegliendo $z_0 \in \mathbb{B}$ come nell'enunciato, si ha*

$$V = \{\tau z_0, \tau \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}z_0, \quad Q = \{v = \tau z_0, \tau \in [0, \bar{\tau}]\}.$$

Quindi si ritrova il classico Teorema del passo montano 4.2, con $\bar{v} = \bar{\tau}z_0$, $\|\bar{v}\| = \bar{\tau} > r > 0$.

5.3 Applicazioni a PDEs di tipo ellittico. II

Vogliamo ora considerare una generalizzazione del Problema di Dirichlet lineare agli autovalori, ottenendo un risultato analogo al Teorema 4.3; partiamo richiamando alcuni aspetti del caso lineare; si vedano ad esempio [2], [10].

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, con $n \geq 3$. Consideriamo il seguente Problema di Dirichlet lineare agli autovalori, per il Laplaciano, su Ω

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \lambda u(x), & x \in \Omega, \lambda \in \mathbb{R} \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (48)$$

Posto $\mathbb{H} = H_0^1(\Omega; \mathbb{R})$, diciamo che una funzione $u \in \mathbb{H}$ è soluzione debole del problema (48), se esiste $\lambda(\Omega) = \lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u(x), \nabla h(x) \rangle dx = \lambda \int_{\Omega} u(x)h(x)dx, \quad \forall h \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R});$$

in questo caso λ viene detto autovalore per il Laplaciano mentre u è la relativa autofunzione. Si ha che il problema (48) ammette una successione $\{\lambda_k\} \subseteq \mathbb{R}$ di autovalori tali che

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k = +\infty,$$

dove ogni autovalore compare con la propria molteplicità, in particolare il primo autovalore λ_1 è semplice ed è l'unico autovalore ad avere una autofunzione a segno costante.

Chiamiamo $\{\psi_k\} \subseteq \mathbb{H}$ la successione di autofunzioni relative a $\{\lambda_k\} \subseteq \mathbb{R}$, con $\psi_1 > 0$ e tali che

$$\int_{\Omega} \langle \nabla \psi_k(x), \nabla \psi_j(x) \rangle dx = \begin{cases} 1, & \text{se } k = j \\ 0, & \text{se } k \neq j \end{cases}$$

Valgono allora delle caratterizzazioni variazionali usando il seguente quoziente di Rayleigh

$$\mathcal{R}(u) = \frac{\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx}{\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx}, \quad u \in \mathbb{H}, \quad u \neq 0.$$

Per $k \in \mathbb{N}$, poniamo

$$V_k^\perp = \left\{ u \in \mathbb{H} \text{ t.c. } \int_{\Omega} \langle \nabla u(x), \nabla \psi_j(x) \rangle dx = 0, \quad j = 1, \dots, k \right\},$$

allora si ha

$$\lambda_1 = \min_{\substack{u \in \mathbb{H} \\ u \neq 0}} \mathcal{R}(u),$$

$$\lambda_k = \min_{\substack{u \in V_{k-1}^\perp \\ u \neq 0}} \mathcal{R}(u), \quad k \geq 2.$$

Osservazione 5.5. *Con la precedente caratterizzazione del primo autovalore del Laplaciano, la disuguaglianza di Poincaré 10 si riscrive nel seguente modo*

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx, \quad \forall u \in \mathbb{H}. \quad (49)$$

Consideriamo ora il seguente Problema di Dirichlet non lineare agli autovalori, per il Laplaciano,

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \lambda u(x) + f(x, u(x)), & x \in \Omega, \lambda \in \mathbb{R} \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (50)$$

dove f è un'opportuna funzione assegnata. Diciamo che una funzione $u \in \mathbb{H}$ è soluzione debole del Problema di Dirichlet (50), se

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u(x), \nabla h(x) \rangle dx = \int_{\Omega} \lambda u(x)h(x) + f(x, u(x))h(x) dx, \quad \forall h \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}),$$

con f tale che l'ultimo integrale sia finito.

Vale il seguente risultato

Teorema 5.5. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, con $n \geq 3$. Consideriamo il seguente Problema di Dirichlet non lineare agli autovalori, per il Laplaciano, su Ω*

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \lambda u(x) + f(u(x)), & x \in \Omega, \lambda \in \mathbb{R} \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (51)$$

dove

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(\xi) = |\xi|^{p-1}\xi, \quad p \in \mathbb{R}, \quad 2 < p+1 < 2^* = \frac{2n}{n-2}.$$

Allora, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, esiste $u_0 \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R})$ soluzione debole non banale ($u_0 \neq 0$) per il problema (51).

Dimostrazione. Prima di tutto, grazie alla disuguaglianza di Poincaré (10), consideriamo su $\mathbb{H}$ la norma equivalente

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in \mathbb{H},$$

e il relativo prodotto scalare

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle dx, \quad \forall u, v \in \mathbb{H}.$$

Consideriamo ora, dato $\lambda \in \mathbb{R}$, il seguente funzionale $E_{\lambda} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} E_{\lambda}(u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u(x)|^{p+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1} \|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}. \end{aligned}$$

Ragionando come nell'Esempio 2.2, si ha che il funzionale è ben definito, in particolare $E_{\lambda} \in C^1(\mathbb{H}; \mathbb{R})$, ed inoltre $u \in \mathbb{H}$ è soluzione debole del problema (51) se e solo se u è punto critico per E_{λ} , cioè

$$d_u E_{\lambda}(h) = 0, \quad \forall h \in \mathbb{H},$$

dove

$$d_u E_{\lambda}(h) = \int_{\Omega} \langle \nabla u(x), \nabla h(x) \rangle - \lambda u(x)h(x) - f(u(x))h(x) dx, \quad \forall h \in \mathbb{H}. \quad (52)$$

Distinguiamo ora due casi in relazione al valore $\lambda \in \mathbb{R}$.

Se $\lambda < \lambda_1$, allora la quantità

$$\|u\|_{\lambda} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

definisce una norma equivalente su $\mathbb{H}$. Infatti, dall'Osservazione 5.5, usando la disuguaglianza di Poincaré (49) si ha:

- se $\lambda \leq 0$, vale

$$\|u\|^2 \leq \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \|u\|^2, \quad \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) > 0;$$

- se $0 < \lambda < \lambda_1$, vale

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \|u\|^2 \leq \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq \|u\|^2, \quad \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) > 0.$$

Allora si può considerare su $\mathbb{H}$ la norma equivalente $\|\cdot\|_{\lambda}$; in questo modo il funzionale si scrive

$$E_{\lambda}(u) = \frac{1}{2} \|u\|_{\lambda}^2 - \frac{1}{p+1} \|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}$$

e l'esistenza di punti critici non banali per E_λ si può provare utilizzando il classico Teorema del passo montano 4.2.

Se invece $\lambda_1 \leq \lambda$, allora esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che

$$\lambda_k \leq \lambda < \lambda_{k+1}. \quad (53)$$

Per mostrare l'esistenza di punti critici per E_λ vogliamo utilizzare il Teorema del passo montano generalizzato 5.4: bisogna costruire gli opportuni insiemi per creare un link e verificare che esistano $a, b \in \mathbb{R}$ che verificano la condizione (46); infine bisogna mostrare che E_λ soddisfa (PS).

Poniamo allora

$$W = \overline{\text{span}\{\psi_1, \dots, \psi_k\}} \subseteq \mathbb{H}, \quad Z = \overline{\text{span}\{\psi_j, j \geq k+1\}} \subseteq \mathbb{H},$$

così $Z, W \subseteq \mathbb{H}$ sono sottospazi chiusi, con $\dim(W) < +\infty$, tali che

$$\mathbb{H} = Z \oplus W,$$

e identifichiamo $u = (z, w) \in \mathbb{H}$. Notiamo esplicitamente che, per la scelta fatta sulle autofunzioni, si ha che la successione $\{\psi_k\} \subseteq \mathbb{H}$ è ortonormale in $\mathbb{H}$ ed è ortogonale in $L^2(\Omega; \mathbb{R})$, con

$$1 = \|\psi_k\|^2 = \lambda_k \|\psi_k\|_{L^2}^2, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Sia ora $z \in Z$, allora

$$z = \sum_{j=k+1}^{+\infty} a_j \psi_j, \quad a_j \in \mathbb{R}, \quad \forall j \geq k+1.$$

Adesso, usando il fatto che $\lambda < \lambda_{k+1}$ e ricordando la disuguaglianza di Sobolev (38), si ha la seguente stima, per ogni $z \in Z$

$$\begin{aligned} E_\lambda(z) &= \frac{1}{2} \|z\|^2 - \frac{\lambda}{2} \|z\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1} \|z\|_{L^{p+1}}^{p+1} \\ &= \frac{1}{2} \|z\|^2 - \frac{\lambda}{2} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{a_j^2}{\lambda_j} - \frac{1}{p+1} \|z\|_{L^{p+1}}^{p+1} \\ &\geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right) \|z\|^2 - \frac{1}{p+1} \|z\|_{L^{p+1}}^{p+1} \\ &\geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right) \|z\|^2 - \frac{C_s^{p+1}}{p+1} \|z\|^{p+1} \\ &= \frac{1}{2} \|z\|^2 \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k+1}} - \frac{2C_s^{p+1}}{p+1} \|z\|^{p-1}\right). \end{aligned}$$

Poiché $1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k+1}} > 0$, ed anche $p-1 > 0$, allora

$$\exists r > 0 \quad \text{t.c.} \quad \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k+1}} - \frac{2C_s^{p+1}}{p+1} r^{p-1}\right) > 0;$$

inoltre non è restrittivo supporre anche $r < 1$. In questo modo, si ottiene

$$b := \inf_{z \in S} E_\lambda(z) > 0,$$

dove

$$S = \{z \in Z \text{ t.c. } \|z\| = r\}.$$

Sia ora $z_0 \in Z$, $\|z_0\| = 1$ e poniamo

$$V = \{\tau z_0 + w, \tau \in \mathbb{R}, w \in W\} = \mathbb{R}z_0 \oplus W.$$

Per ogni $v \in V$, $\|v\| = 1$, si ha ($\tau > 0$)

$$E_\lambda(\tau v) = \frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau^2 \lambda}{2} \|v\|_{L^2}^2 - \frac{\tau^{p+1}}{p+1} \|v\|_{L^{p+1}}^{p+1} \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} -\infty.$$

Quindi, poiché $p+1 > 2$ e $\dim(W) < +\infty$, allora esiste $\bar{\tau} > 0$, tale che ¹

$$E_\lambda(\tau v) \leq 0, \quad \forall \tau \geq \bar{\tau}, v \in V, \|v\| = 1;$$

inoltre non è restrittivo supporre anche $\bar{\tau} > 1$. Poniamo

$$Q = \{v = \tau z_0 + w, \tau \in [0, \bar{\tau}], w \in W, \|w\| \leq \bar{\tau}\} \subseteq V.$$

In questo modo, dal Lemma 5.2 si ha prima di tutto che S e $\partial_V Q$ link. Inoltre, per costruzione, $E_\lambda \leq 0$ su "tre lati" di $\partial_V Q$, cioè dove $\tau \in (0, \bar{\tau}]$. Per quanto riguarda $\tau = 0$, consideriamo $w \in W$

$$w = \sum_{j=1}^k a_j \psi_j, \quad a_j \in \mathbb{R}, \quad \forall j = 1, \dots, k.$$

Adesso, usando il fatto che $\lambda_k < \lambda$, si ha la seguente stima, per ogni $w \in W$

$$\begin{aligned} E_\lambda(w) &= \frac{1}{2} \|w\|^2 - \frac{\lambda}{2} \|w\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1} \|w\|_{L^{p+1}}^{p+1} \\ &\leq \frac{1}{2} \|w\|^2 - \frac{\lambda}{2} \|w\|_{L^2}^2 \\ &= \frac{1}{2} \|w\|^2 - \frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^k \frac{a_j^2}{\lambda_j} \\ &\leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right) \|w\|^2 \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

¹Per ogni $v \in V$, $\|v\| = 1$, sia $I_v = \{\tau \in [0, +\infty), \text{ t.c. } E_\lambda(\tau v) \geq 0\}$. Poniamo $\tau(v) = \max I_v$. Allora

$$\bar{\tau} = \max_{v \in V, \|v\|=1} \tau(v).$$

Quindi, poiché in particolare $E_\lambda(0) = 0$, si ha

$$a := \max_{v \in \partial_V Q} E_\lambda(v) = 0;$$

in questo modo la condizione (46) è verificata.

Resta da mostrare (PS); procederemo in due passi: prima mostreremo che per E_λ vale la proprietà (22) di decomposizione del gradiente, poi proveremo che ogni successione di Palais-Smale per E_λ è limitata; la conclusione seguirà del Corollario 3.1.

A questo scopo, per comodità poniamo le funzioni

$$f_\lambda(\xi) = \lambda\xi + f(\xi) = \lambda\xi + |\xi|^{p-1}\xi.$$

$$A : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}, \quad A(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx = \frac{1}{2} \|u\|^2,$$

$$G_\lambda : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}, \quad G_\lambda(u) = \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u(x)|^{p+1} dx = \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1} \|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}.$$

In questo modo, dalla formula (52) per il differenziale di E_λ , si ha

$$d_u E_\lambda(h) = d_u A(h) - d_u G_\lambda(h) = \langle u, h \rangle - \int_{\Omega} f_\lambda(u(x))h(x) dx, \quad \forall u, h \in \mathbb{H}.$$

In particolare, poiché

$$d_u E_\lambda(h) = \langle \nabla E_\lambda(u), h \rangle, \quad \forall u, h \in \mathbb{H},$$

si ottiene

$$\nabla A(u) = u, \quad \forall u \in \mathbb{H}$$

e quindi

$$\nabla E_\lambda(u) = u - \nabla G_\lambda(u), \quad \forall u \in \mathbb{H}.$$

Vogliamo mostrare che la mappa

$$d_{(\cdot)} G_\lambda : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}^*$$

è compatta; ovviamente, dalla Definizione 1.6 e dall'Osservazione 1.3, anche la mappa

$$\nabla G_\lambda : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$$

sarà compatta.

Sia allora $\{u_k\} \subseteq \mathbb{H}$ una successione limitata, allora esiste una sottosuccessione $\{u_{j_k}\} \subseteq \{u_k\}$ debolmente convergente a qualche $u_0 \in \mathbb{H}$. In particolare, poiché l'immersione

$$\iota : \mathbb{H} \xrightarrow[\text{cpt}]{} L^{p+1}(\Omega; \mathbb{R})$$

è compatta, allora la sottosuccessione $\{u_{j_k}\} \subseteq L^{p+1}(\Omega; \mathbb{R})$ converge a $u_0 \in L^{p+1}(\Omega; \mathbb{R})$, in norma L^{p+1} (si veda l'Osservazione 1.10). Adesso, poiché la mappa

$$L^{p+1}(\Omega; \mathbb{R}) \longrightarrow L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega; \mathbb{R}),$$

$$u \longmapsto \lambda u + |u|^{p-1}u$$

è continua, la sottosuccessione $\{f_\lambda(u_{j_k})\} \subseteq L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega; \mathbb{R})$ converge a $f_\lambda(u_0) \in L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega; \mathbb{R})$, in norma $L^{\frac{p+1}{p}}$. Allora, per ogni $h \in \mathbb{H}$, usando le disuguaglianze di Hölder (8) e di Sobolev (38), si ha

$$\begin{aligned} |d_{u_{j_k}} G_\lambda(h) - d_{u_0} G_\lambda(h)| &\leq \int_{\Omega} |f_\lambda(u_{j_k}(x)) - f_\lambda(u_0(x))| |h(x)| dx \\ &\leq \|f_\lambda(u_{j_k}) - f_\lambda(u_0)\|_{L^{\frac{p+1}{p}}} \|h\|_{L^{p+1}} \\ &\leq C_s \|f_\lambda(u_{j_k}) - f_\lambda(u_0)\|_{L^{\frac{p+1}{p}}} \|h\| \end{aligned}$$

Quindi

$$\|d_{u_{j_k}} G_\lambda - d_{u_0} G_\lambda\|_{\mathbb{H}^*} \leq C_s \|f_\lambda(u_{j_k}) - f_\lambda(u_0)\|_{L^{\frac{p+1}{p}}} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0.$$

In questo modo, abbiamo provato che data $\{u_k\} \subseteq \mathbb{H}$ successione limitata, l'immagine $\{d_{u_k} G_\lambda\} \subseteq \mathbb{H}^*$ ammette una sottosuccessione convergente in $\mathbb{H}^*$; in altri termini la mappa $d_{(\cdot)} G_\lambda$ è compatta (e anche ∇G_λ).

Resta da provare che ogni successione di Palais-Smale per E_λ è limitata. Sia allora $c \in \mathbb{R}$ arbitrario e $\{u_k\} \subseteq \mathbb{H}$ una successione di Palais-Smale per E_λ , al livello c , cioè:

$$\begin{cases} E_\lambda(u_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{(\mathbb{R})} c; \\ \nabla E_\lambda(u_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{(\mathbb{H})} 0. \end{cases}$$

Ora, poiché $2 < p + 1$, sia $\alpha \in (2, p + 1)$, così per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \langle \nabla E_\lambda(u_k), u_k \rangle &= \frac{1}{\alpha} \|u_k\|^2 - \frac{\lambda}{\alpha} \|u_k\|_{L^2}^2 - \frac{1}{\alpha} \|u_k\|_{L^{p+1}}^{p+1} \\ &= E_\lambda(u_k) + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}\right) \|u_k\|^2 + \\ &\quad + \lambda \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\right) \|u_k\|_{L^2}^2 + \left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{\alpha}\right) \|u_k\|_{L^{p+1}}^{p+1}, \end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\right) \|u_k\|^2 &= E_\lambda(u_k) - \frac{1}{\alpha} \langle \nabla E_\lambda(u_k), u_k \rangle + \\ &\quad + \lambda \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\right) \|u_k\|_{L^2}^2 + \left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{\alpha}\right) \|u_k\|_{L^{p+1}}^{p+1} \end{aligned} \quad (54)$$

Poiché $\frac{1}{p+1} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{2}$, allora

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\right) > 0, \quad \left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{\alpha}\right) < 0;$$

inoltre usando le condizioni di Palais-Smale sulla successione, esistono due costanti positive M_1, M_2 , tali che per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$|E_\lambda(u_k) - c| \leq M_1,$$

$$|\langle \nabla E_\lambda(u_k), u_k \rangle| \leq \|\nabla E_\lambda(u_k)\| \|u_k\| \leq M_2 \|u_k\|.$$

Quindi, da (54), possiamo scrivere per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\right) \|u_k\|^2 \leq c + M_1 + \frac{M_2}{\alpha} \|u_k\| + \lambda \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\right) \|u_k\|_{L^2}^2 + \left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{\alpha}\right) \|u_k\|_{L^{p+1}}^{p+1}. \quad (55)$$

Ora, poiché Ω è limitato e $2 < p+1$, si ha $L^{p+1}(\Omega; \mathbb{R}) \hookrightarrow L^2(\Omega; \mathbb{R})$, quindi esiste una costante positiva M_3 tale che

$$\|u_k\|_{L^2}^2 \leq M_3 \|u_k\|_{L^{p+1}}^2;$$

inoltre, dalla disuguaglianza di Young¹, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $C_\varepsilon > 0$ tale che

$$\|u_k\|_{L^{p+1}}^2 \leq \varepsilon \|u_k\|_{L^{p+1}}^{p+1} + C_\varepsilon,$$

con $C_\varepsilon \rightarrow +\infty$, per $\varepsilon \rightarrow 0$. Allora, da (55), possiamo scrivere per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\right) \|u_k\|^2 \leq c + M_1 + \frac{M_2}{\alpha} \|u_k\| + \left[\lambda \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\right) M_3 \varepsilon + \left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{\alpha}\right) \right] \|u_k\|_{L^{p+1}}^{p+1} + \tilde{C}_\varepsilon,$$

dove $\tilde{C}_\varepsilon = \lambda \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\right) M_3 C_\varepsilon$. A questo punto, possiamo scegliere $\varepsilon > 0$ tale che

$$\left[\lambda \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\right) M_3 \varepsilon + \left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{\alpha}\right) \right] < 0,$$

così

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\right) \|u_k\|^2 \leq c + M_1 + \frac{M_2}{\alpha} \|u_k\| + \tilde{C}_\varepsilon, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Questo mostra che $\{u_k\} \subseteq \mathbb{H}$ è limitata. Finalmente, dal Corollario 3.1, possiamo concludere che E_λ soddisfa (PS).

¹Siano a, b due numeri reali non negativi e $p, q \in (1, +\infty)$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, allora

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

In particolare, per ogni $\varepsilon > 0$, si ha

$$ab \leq \varepsilon a^p + C_\varepsilon b^q, \quad C_\varepsilon = \frac{1}{(\varepsilon p)^{\frac{q}{p}}} \frac{1}{q}.$$

Infine, dal Teorema del passo montano generalizzato 5.4, si ottiene che E_λ ammette un punto critico $u_0 \in \mathbb{H}$; in particolare, poiché

$$E_\lambda(u_0) \geq b > a = 0 = E_\lambda(0),$$

allora $u_0 \neq 0$. Questo conclude la dimostrazione. $\square$

Osservazione 5.6. *Il precedente risultato di esistenza, Teorema 5.5, si generalizza a casi più generali. Ad esempio, come in (41), nel Problema di Dirichlet (51) si può considerare un operatore L ellittico del secondo ordine in forma di divergenza ed una funzione del tipo*

$$f_\lambda(x, u(x)) = \lambda u(x) + f(x, u(x)),$$

dove L ed f sono descritti nell'Osservazione 4.6.

Osservazione 5.7. *Come nell'Osservazione 4.7, nelle ipotesi del precedente Teorema 5.5, se Ω è un aperto regolare, mediante un procedimento di tipo "bootstrap" si ha che se $u_0 \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R})$ è soluzione debole del problema (51), allora u_0 è soluzione classica di (51), cioè $u_0 \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$; si veda ad esempio il Teorema A.6 e l'Osservazione A.1.*

6 Link in dimensione infinita

6.1 Link relativo

In questa sezione vedremo come generalizzare lo schema di minimax per trattare problemi che richiedono una proprietà di intersezione su spazi infinito-dimensionali. Introduciamo una definizione che generalizza la proprietà di link.

Definizione 6.1. (*Link relativo*)

Sia $\mathbb{B}$ uno spazio di Banach e $V \subseteq \mathbb{B}$ un suo sottospazio chiuso. Consideriamo due sottoinsiemi chiusi $S \subseteq \mathbb{B}$, $Q \subseteq V$, e denotiamo con $\partial_V Q$ la frontiera di Q relativa a V . Sia $\Phi \subseteq C(Q; \mathbb{B})$, allora si dice che S e $\partial_V Q$ **link rispetto a Φ** , se:

- (i) $S \cap \partial_V Q = \emptyset$;
- (ii) $S \cap \phi(Q) \neq \emptyset, \quad \forall \phi \in \Phi$.

Richiamiamo le seguenti proprietà del grado topologico, nel caso di sottoinsiemi di spazi di Banach (in generale di dimensione infinita); si vedano ad esempio [2], [13].

Teorema 6.1. (*Grado di Leray–Schauder*)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{B}$ un aperto limitato e sia $f \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{B})$ una perturbazione compatta dell'identità, cioè della forma

$$f(x) = x + K(x),$$

dove K è una funzione compatta. Sia ora $p \notin f(\partial\Omega)$, allora è ben definito un numero intero, detto **grado topologico (di Leray–Schauder)** di f in Ω relativo a p , che si indica

$$\deg(f, \Omega, p) \in \mathbb{Z},$$

il quale verifica le seguenti proprietà:

- (i) $\deg(\text{Id}, \Omega, p) = \begin{cases} 1, & \text{se } p \in \Omega \\ 0, & \text{se } p \notin \Omega \end{cases}$
- (ii) se $\deg(f, \Omega, p) \neq 0$, allora $\exists x_0 \in \Omega$ t.c. $f(x_0) = p$;
- (iii) $\deg(f, \Omega, p) = \deg(f - p, \Omega, 0)$;

(iv) se $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, con $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ allora

$$\deg(f, \Omega, p) = \deg(f, \Omega_1, p) + \deg(f, \Omega_2, p);$$

(v) sia $h \in C([0, +\infty) \times \overline{\Omega}; \mathbb{B})$ una omotopia ammissibile rispetto a $p \notin h(t, \partial\Omega)$ per ogni $t \in [0, +\infty)$, cioè

$$h(t, x) \neq p, \quad \forall t \geq 0, \quad x \in \partial\Omega;$$

supponiamo inoltre che $h(t, \cdot)$ sia una perturbazione compatta dell'identità per ogni $t \in [0, +\infty)$, cioè della forma

$$h(t, x) = x + K(t, x), \quad x \in \overline{\Omega},$$

dove $K(t, \cdot)$ è una funzione compatta per ogni $t \in [0, +\infty)$; allora $\deg(h(t, \cdot), \Omega, p)$ è costante in $t \in [0, +\infty)$.

Definizione 6.2. (*Flusso compatibile*)

Sia $\mathbb{B}$ uno spazio di Banach e siano $Z, W \subseteq \mathbb{B}$ sottospazi chiusi tali che

$$\mathbb{B} = Z \oplus W,$$

e identifichiamo $(z, w) = x \in \mathbb{B}$. Diremo che $\eta \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{B}; \mathbb{B})$ è un **flusso compatibile** (con Z, W) se

$$\eta(t, \cdot) = L(t, \cdot) + K(t, \cdot),$$

dove, per ogni $t \in \mathbb{R}$

(i) $L(t, \cdot) : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ è una mappa lineare, limitata e invertibile, con $L(0, \cdot) = Id$ e che inoltre preserva i sottospazi Z, W , cioè

$$L(t, \cdot) = L_Z(t, \cdot) + L_W(t, \cdot) : Z \oplus W \rightarrow Z \oplus W, \quad L(t, x) = L_Z(t, z) + L_W(t, w);$$

(ii) $K(t, \cdot) : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ è una mappa compatta, con $K(0, \cdot) = 0$.

Inoltre, dato η un flusso compatibile, definiamo la seguente famiglia di deformazioni generate da η

$$\Phi_\eta = \{ \phi \in C(\mathbb{B}; \mathbb{B}) \text{ t.c. } \exists t \geq 0, \text{ per cui } \phi(\cdot) = \eta(t, \cdot) \}. \quad (56)$$

Lemma 6.1. Sia $\mathbb{B}$ uno spazio di Banach e siano $Z, W \subseteq \mathbb{B}$ sottospazi chiusi tali che

$$\mathbb{B} = Z \oplus W,$$

e identifichiamo $(z, w) = x \in \mathbb{B}$. Siano

$$z_0 \in Z, \|z_0\| = 1, \delta > 0, \bar{\tau} > 0, r \in (0, \bar{\tau})$$

e poniamo

$$\begin{aligned} V &= \{\tau z_0 + w, \tau \in \mathbb{R}, w \in W\} = \mathbb{R}z_0 \oplus W, \\ Q &= \{v = \tau z_0 + w, \tau \in [0, \bar{\tau}], w \in W, \|w\| \leq \delta\} \subseteq V, \\ S &= \{z \in Z, \|z\| = r\} \subseteq Z. \end{aligned}$$

Sia ora $\eta \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{B}; \mathbb{B})$ un flusso compatibile tale che

$$S \cap \eta(t, \partial_V Q) = \emptyset, \quad \forall t \geq 0. \quad (57)$$

Allora S e $\partial_V Q$ link rispetto a Φ_η .

Dimostrazione. Prima di tutto

$$S \cap \partial_V Q = \emptyset.$$

Sia ora $\phi \in \Phi_\eta$, vogliamo mostrare che

$$S \cap \phi(Q) \neq \emptyset, \quad (58)$$

cioè

$$S \cap \eta(t, Q) \neq \emptyset, \quad \forall t \geq 0. \quad (59)$$

Denotando con $P : \mathbb{B} \rightarrow W$ la proiezione di $\mathbb{B}$ su W allora (59) è equivalente a mostrare che

$$\forall t \geq 0, \exists v_0 \in Q \text{ t.c. } \begin{cases} \|\eta(t, v_0) - P(\eta(t, v_0))\| = r, \\ P(\eta(t, v_0)) = 0. \end{cases} \quad (60)$$

Facciamo ora la seguente identificazione

$$V = \mathbb{R}z_0 \oplus W \simeq \mathbb{R} \times W$$

$$V \ni v = \tau z_0 + w \simeq (\tau, w).$$

Poniamo inoltre $(r, 0) =: v_r \notin \partial_V Q$. Siano adesso L e K come nella Definizione 6.2, consideriamo l'omotopia $h \in C([0, +\infty) \times Q; V)$ data da

$$h(t, v) = \left(\|\eta(t, v) - P(\eta(t, v))\|, L^{-1}(t, P(\eta(t, v))) \right);$$

Notiamo esplicitamente che

$$L^{-1}(t, P(\eta(t, v))) = w + L^{-1}(t, P(K(t, v))),$$

con $L^{-1}(t, \cdot) \circ P \circ K(t, \cdot) = L^{-1}(t, P(K(t, \cdot)))$ funzione compatta; quindi in particolare $h(t, \cdot)$ è una perturbazione compatta dell'identità per ogni $t \in [0, +\infty)$. Inoltre, dalla condizione (57), si ha che h è ammissibile rispetto a $v_r \notin h(t, \partial_V Q)$ per ogni $t \in [0, +\infty)$, cioè

$$h(t, v) \neq v_r, \quad \forall t \geq 0, \quad v \in \partial_V Q.$$

Allora, dalle proprietà del grado di Leray-Schauder espresse nel Teorema 6.1, si ha che $\deg(h(t, \cdot), Q, v_r)$ è costante in $t \in [0, +\infty)$, in particolare

$$\deg(h(t, \cdot), Q, v_r) = \deg(h(0, \cdot), Q, v_r) = \deg(Id, Q, v_r) = 1, \quad \forall t \geq 0.$$

Quindi

$$\forall t \geq 0, \exists v_0 \in Q \text{ t.c. } h(t, v_0) = v_r,$$

cioè

$$\forall t \geq 0, \exists v_0 \in Q \text{ t.c. } \begin{cases} \|\eta(t, v_0) - P(\eta(t, v_0))\| = r, \\ L^{-1}(t, P(\eta(t, v_0))) = 0; \end{cases}$$

che è equivalente a (60), poiché L è lineare. In conclusione, abbiamo mostrato che S e $\partial_V Q$ link rispetto a Φ_η . □

6.2 Applicazioni a sistemi Hamiltoniani

Consideriamo ora le equazioni Hamiltoniane descritte nell'Esempio 2.3; vogliamo mostrare l'esistenza di soluzioni periodiche per il sistema (20). A questo scopo, partiamo richiamando alcuni aspetti del caso lineare; si vedano ad esempio [14], [17].

Consideriamo il seguente sistema lineare agli autovalori

$$-J\dot{\gamma}(t) = \lambda\gamma(t), \quad \gamma(t) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (61)$$

dove J è la matrice simplettica canonica in $\mathbb{R}^{2n}$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad J^2 = -I_{2n}.$$

Osserviamo che il precedente sistema si riscrive in forma equivalente

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_{j+n}(t) = \lambda\gamma_j(t) \\ \\ -\dot{\gamma}_j(t) = \lambda\gamma_{j+n}(t) \end{cases} \quad j = 1, \dots, n.$$

Allora γ risolve

$$\ddot{\gamma}(t) + \lambda^2\gamma(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

quindi esistono $A, B \in \mathbb{R}^{2n}$ tali che

$$\gamma(t) = A \cos(|\lambda|t) + B \sin(|\lambda|t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (62)$$

In particolare γ è 2π -periodica se $\lambda = k \in \mathbb{Z}$; consideriamo quindi $t \in [0, 2\pi]$ e osserviamo che:

- se $k = 0$, allora $\gamma(t) = A = (A_1, \dots, A_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$;
- se $k \neq 0$, allora vale
$$\begin{cases} JA = B, & \text{se } k > 0, \\ JA = -B, & \text{se } k < 0. \end{cases}$$

Chiamando quindi V_k l'autospazio relativo all'autovalore $k \in \mathbb{Z}$, in particolare si ha

$$\dim(V_k) = 2n, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Osserviamo esplicitamente che, se $\gamma \in V_k$, $\psi \in V_j$, con $k, j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, vale

$$\int_{-\pi}^{\pi} \langle -J\dot{\gamma}(t), \psi(t) \rangle dt = \begin{cases} k \int_{-\pi}^{\pi} \langle \gamma(t), \psi(t) \rangle dt, & \text{se } k = j \\ \\ 0, & \text{se } k \neq j \end{cases} \quad (63)$$

Sia ora $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^{2n}$, definiamo i seguenti sottospazi dello spazio di Sobolev $H^{\frac{1}{2}}(S^1; \mathbb{R}^{2n})$ introdotto in (13)

$$\begin{aligned} H^0 &= \text{span}\{e_1, \dots, e_{2n}\} = \mathbb{R}^{2n}; \\ H^- &= \text{span}\{e_j \cos(kt) - e_{j+n} \sin(kt), e_j \sin(kt) + e_{j+n} \cos(kt), k \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, n\}; \\ H^+ &= \text{span}\{e_j \cos(kt) + e_{j+n} \sin(kt), e_j \sin(kt) - e_{j+n} \cos(kt), k \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

In particolare si ha

$$H^0 = V_0, \quad H^- = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} V_{-k}, \quad H^+ = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} V_k;$$

inoltre vale la seguente decomposizione

$$H^{\frac{1}{2}}(S^1; \mathbb{R}^{2n}) = H^- \oplus H^0 \oplus H^+, \quad \gamma = \gamma^- + \gamma^0 + \gamma^+. \quad (64)$$

Introduciamo ora il seguente funzionale

$$A : H^{\frac{1}{2}}(S^1; \mathbb{R}^{2n}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad A(\gamma) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \langle -J\dot{\gamma}(t), \gamma(t) \rangle dt.$$

In questo modo, si ottiene

$$A(\gamma) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} k |\gamma(t)|^2 dt < 0, & \text{se } \gamma \in V_k \subseteq H^- \\ 0, & \text{se } \gamma \in H^0 \\ \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} k |\gamma(t)|^2 dt > 0, & \text{se } \gamma \in V_k \subseteq H^+. \end{cases}$$

Allora, definiamo la seguente norma su $H^{\frac{1}{2}}(S^1; \mathbb{R}^{2n})$, la quale è equivalente alla norma $\|\cdot\|_{\frac{1}{2}}$ definita in (14):

$$\|\gamma\|^2 = -2A(\gamma^-) + |\gamma^0|_{\mathbb{R}^{2n}}^2 + 2A(\gamma^+), \quad (65)$$

dove $\gamma \in H^{\frac{1}{2}}(S^1; \mathbb{R}^{2n})$ è scritto usando la decomposizione (64). Introduciamo anche una forma bilineare e simmetrica associata ad A . Poniamo per ogni $\gamma, \psi \in H^{\frac{1}{2}}(S^1; \mathbb{R}^{2n})$

$$\begin{aligned} B(\gamma, \psi) &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \langle -J\dot{\gamma}(t), \psi(t) \rangle dt + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \langle -J\dot{\psi}(t), \gamma(t) \rangle dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \langle -J\dot{\gamma}(t), \psi(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

In questo modo H^-, H^0, H^+ , sono ortogonali rispetto al prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ associato alla norma $\|\cdot\|$, cioè dati

$$\gamma = \gamma^- + \gamma^0 + \gamma^+, \quad \psi = \psi^- + \psi^0 + \psi^+,$$

allora

$$\begin{aligned}\langle \gamma, \psi \rangle &= \langle \gamma^- + \gamma^0 + \gamma^+, \psi^- + \psi^0 + \psi^+ \rangle \\ &= -B(\gamma^-, \psi^-) + \langle \gamma^0, \psi^0 \rangle_{\mathbb{R}^{2n}} + B(\gamma^+, \psi^+).\end{aligned}$$

In particolare valgono le seguenti relazioni

$$\begin{aligned}B(\gamma, \psi) &= -\langle \gamma^-, \psi^- \rangle + \langle \gamma^+, \psi^+ \rangle, \\ A(\gamma) &= \frac{1}{2}B(\gamma, \gamma) = -\frac{1}{2}\|\gamma^-\|^2 + \frac{1}{2}\|\gamma^+\|^2.\end{aligned}$$

Infine, da (63), se $\gamma \in V_k$, con $k \in \mathbb{Z}$, si ottiene

$$\|\gamma\|^2 = \begin{cases} -k\|\gamma\|_{L^2}^2, & \text{se } k < 0; \\ |\gamma|_{\mathbb{R}^{2n}}^2, & \text{se } k = 0; \\ k\|\gamma\|_{L^2}^2, & \text{se } k > 0. \end{cases} \quad (66)$$

Enunciamo ora il seguente risultato riguardante l'esistenza di soluzioni deboli, come definite in (21), per il sistema Hamiltoniano non lineare.

Teorema 6.2. *Consideriamo il seguente sistema Hamiltoniano*

$$-J\dot{\gamma}(t) = \nabla\mathcal{H}(\gamma(t)), \quad (67)$$

dove

$$\mathcal{H} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{H}(\xi) = \frac{1}{p+1}|\xi|^{p+1}, \quad \nabla\mathcal{H}(\xi) = |\xi|^{p-1}\xi, \quad p+1 > 2, \quad p \in \mathbb{R}, \quad n \geq 1.$$

Allora esiste $\gamma_0 \in H^{\frac{1}{2}}(S^1; \mathbb{R}^{2n})$ soluzione debole, 2π -periodica e non banale ($\gamma_0 \neq 0$) del sistema (67).

Dimostrazione. L'idea è quella di adattare la dimostrazione del Teorema di linking 5.2, usando il link relativo ad una famiglia di deformazioni generate da un opportuno flusso compatibile decrescente, secondo la Definizione 6.2; ovviamente bisogna provare anche che E soddisfa (PS).

Poniamo $\mathbb{H} = H^{\frac{1}{2}}(S^1; \mathbb{R}^{2n})$, munito della norma equivalente definita in (65). Consideriamo il seguente funzionale

$$E : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}, \quad E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \langle -J\dot{\gamma}(t), \gamma(t) \rangle dt - \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{H}(\gamma(t)) dt.$$

Ragionando come nell'Esempio 2.3, si ha che il funzionale è ben definito, in particolare poiché $p + 1 > 2$, si ha $E \in C^2(\mathbb{H}; \mathbb{R})$, ed inoltre $\gamma \in \mathbb{H}$ è soluzione debole del sistema (67) se e solo se γ è punto critico per E , cioè

$$d_\gamma E(\psi) = 0, \quad \forall \psi \in \mathbb{H},$$

dove

$$d_\gamma E(\psi) = \int_{-\pi}^{\pi} \langle -J\dot{\gamma}(t) - \nabla \mathcal{H}(\gamma(t)), \psi(t) \rangle dt, \quad \forall \psi \in \mathbb{H}.$$

Per comodità poniamo

$$G : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(\gamma) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{H}(\gamma(t)) dt = \frac{1}{p+1} \|\gamma\|_{L^{p+1}}^{p+1};$$

in particolare, analogamente all'Esempio 2.2, si ha che G è debolmente continua. In questo modo, usando la decomposizione (64),

$$E(\gamma) = A(\gamma) - G(\gamma) = -\frac{1}{2} \|\gamma^-\|^2 + \frac{1}{2} \|\gamma^+\|^2 - \frac{1}{p+1} \|\gamma\|_{L^{p+1}}^{p+1}, \quad \forall \gamma \in \mathbb{H}. \quad (68)$$

Inoltre

$$d_\gamma E(\psi) = d_\gamma A(\psi) - d_\gamma G(\psi) = B(\gamma, \psi) - \int_{-\pi}^{\pi} \langle \nabla \mathcal{H}(\gamma(t)), \psi(t) \rangle dt, \quad \forall \gamma, \psi \in \mathbb{H}.$$

In particolare, poiché

$$d_\gamma E(\psi) = \langle \nabla E(\gamma), \psi \rangle, \quad \forall \gamma, \psi \in \mathbb{H},$$

si ottiene

$$\nabla A(\gamma) = -\gamma^- + \gamma^+, \quad \forall \gamma \in \mathbb{H}$$

e quindi

$$\nabla E(\gamma) = -\gamma^- + \gamma^+ - \nabla G(\gamma), \quad \forall \gamma \in \mathbb{H}. \quad (69)$$

Se mostriamo che la mappa ∇G è compatta, allora il gradiente di E ammette una decomposizione simile a quella descritta in (22), osservando però che la funzione $-\gamma^- + \gamma^+$ è lineare e continua, ma è invertibile su $H^- \oplus H^+$; quindi, per mostrare che E soddisfa (PS), bisognerà usare l'idea della dimostrazione del Corollario 3.1 su questi sottospazi. Ora mostriamo che la mappa

$$d_{(\cdot)} G : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}^*$$

è compatta; ovviamente, dalla Definizione 1.6 e dall'Osservazione 1.3, anche la mappa

$$\nabla G : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$$

sarà compatta.

Sia allora $\{\gamma_k\} \subseteq \mathbb{H}$ una successione limitata, allora esiste una sottosuccessione $\{\gamma_{j_k}\} \subseteq \{\gamma_k\}$ debolmente convergente a qualche $\gamma_0 \in \mathbb{H}$. In particolare, poiché l'immersione

$$i : \mathbb{H} \xrightarrow[\text{cpt}]{} L^{p+1}(S^1; \mathbb{R}^{2n})$$

è compatta (15), allora la sottosuccessione $\{\gamma_{j_k}\} \subseteq L^{p+1}(S^1; \mathbb{R}^{2n})$ converge a $\gamma_0 \in L^{p+1}(S^1; \mathbb{R}^{2n})$, in norma L^{p+1} (si veda l'Osservazione 1.10). Adesso, poiché la mappa

$$L^{p+1}(S^1; \mathbb{R}^{2n}) \longrightarrow L^{\frac{p+1}{p}}(S^1; \mathbb{R}^{2n}),$$

$$\gamma \longmapsto |\gamma|^{p-1}\gamma$$

è continua, si ha che la sottosuccessione $\{\nabla\mathcal{H}(\gamma_{j_k})\} \subseteq L^{\frac{p+1}{p}}(S^1; \mathbb{R}^{2n})$ converge a $\nabla\mathcal{H}(\gamma_0) \in L^{\frac{p+1}{p}}(S^1; \mathbb{R}^{2n})$, in norma $L^{\frac{p+1}{p}}$. Allora, per ogni $\psi \in \mathbb{H}$, usando le disuguaglianze di Hölder (8) e di Sobolev (16), si ha

$$\begin{aligned} |d_{\gamma_{j_k}}G(\psi) - d_{\gamma_0}G(\psi)| &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |\nabla\mathcal{H}(\gamma_{j_k}(t)) - \nabla\mathcal{H}(\gamma_0(t))| |\psi(t)| dt \\ &\leq \|\nabla\mathcal{H}(\gamma_{j_k}) - \nabla\mathcal{H}(\gamma_0)\|_{L^{\frac{p+1}{p}}} \|\psi\|_{L^{p+1}} \\ &\leq C_s \|\nabla\mathcal{H}(\gamma_{j_k}) - \nabla\mathcal{H}(\gamma_0)\|_{L^{\frac{p+1}{p}}} \|\psi\| \end{aligned}$$

Quindi

$$\|d_{\gamma_{j_k}}G - d_{\gamma_0}G\|_{\mathbb{H}^*} \leq C_s \|\nabla\mathcal{H}(\gamma_{j_k}) - \nabla\mathcal{H}(\gamma_0)\|_{L^{\frac{p+1}{p}}} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0.$$

In questo modo, abbiamo provato che data $\{\gamma_k\} \subseteq \mathbb{H}$ successione limitata, l'immagine $\{d_{\gamma_k}G\} \subseteq \mathbb{H}^*$ ammette una sottosuccessione convergente in $\mathbb{H}^*$; in altri termini la mappa $d_{(\cdot)}G$ è compatta (e anche ∇G).

Proviamo ora che ogni successione di Palais-Smale per E è limitata. Sia allora $c \in \mathbb{R}$ arbitrario e $\{\gamma_k\} \subseteq \mathbb{H}$ una successione di Palais-Smale per E , al livello c , cioè:

$$\begin{cases} E(\gamma_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{(\mathbb{R})} c; \\ \nabla E(\gamma_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{(\mathbb{H})} 0. \end{cases}$$

Si ha, per $k \rightarrow +\infty$

$$o(1) \|\gamma_k\| = \frac{1}{2} \langle \nabla E(\gamma_k), \gamma_k \rangle = A(\gamma_k) - \frac{1}{2} \|\gamma_k\|_{L^{p+1}}^{p+1} = c + o(1) + \left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{2} \right) \|\gamma_k\|_{L^{p+1}}^{p+1},$$

cioè

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \|\gamma_k\|_{L^{p+1}}^{p+1} = c + o(1) + o(1) \|\gamma_k\|.$$

Poiché $2 < p+1$, si ha che $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) > 0$; quindi esiste una costante positiva M_1 , tale che

$$\|\gamma_k\|_{L^{p+1}}^{p+1} \leq M_1(1 + \|\gamma_k\|), \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (70)$$

Usando la decomposizione (64), scriviamo

$$\gamma_k = \gamma_k^- + \gamma_k^0 + \gamma_k^+ \in H^- \oplus H^0 \oplus H^+.$$

L'idea è stimare separatamente le tre componenti. Partiamo da γ_k^0 . Poiché $[-\pi, \pi]$ è limitato e $2 < p + 1$, si ha $L^{p+1}(S^1; \mathbb{R}^{2n}) \hookrightarrow L^2(S^1; \mathbb{R}^{2n})$, quindi esiste una costante positiva M_2 , tale che

$$\|\gamma_k\|_{L^2} \leq M_2 \|\gamma_k\|_{L^{p+1}}. \quad (71)$$

Adesso, visto che

$$|\gamma_k^0|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\gamma_k^0|^2 dt \leq \frac{1}{2\pi} \|\gamma_k\|_{L^2}^2,$$

allora esistono due costanti positive M_3, M_4 , tali che, usando (70),

$$|\gamma_k^0|^{p+1} \leq M_3 \|\gamma_k\|_{L^{p+1}}^{p+1} \leq M_4 (1 + \|\gamma_k\|),$$

ed in particolare, per la proprietà di subadditività¹, esiste una costante positiva M_5 , tale che

$$|\gamma_k^0| \leq M_5 (1 + \|\gamma_k\|^{\frac{1}{p+1}}), \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (72)$$

Ora consideriamo γ_k^+ . Esiste una costante positiva M_6 , tale che

$$\left| B(\gamma_k, \gamma_k^+) - \int_{-\pi}^{\pi} |\gamma_k(t)|^{p-1} \langle \gamma_k(t), \gamma_k^+(t) \rangle dt \right| = |d_{\gamma_k} E(\gamma_k^+)| \leq M_6 \|\gamma_k^+\|,$$

quindi, usando le disuguaglianze di Hölder (8) e di Sobolev (16), si ha

$$\begin{aligned} \|\gamma_k^+\|^2 = B(\gamma_k, \gamma_k^+) &\leq M_6 \|\gamma_k^+\| + \left| \int_{-\pi}^{\pi} |\gamma_k(t)|^{p-1} \langle \gamma_k(t), \gamma_k^+(t) \rangle dt \right| \\ &\leq M_6 \|\gamma_k^+\| + \|(|\gamma_k|^p)\|_{L^{\frac{p+1}{p}}} \|\gamma_k^+\|_{L^{p+1}} \\ &\leq M_6 \|\gamma_k^+\| + C_s \|\gamma_k\|_{L^{p+1}}^p \|\gamma_k^+\| \end{aligned}$$

cioè

$$\|\gamma_k^+\| \leq M_6 + C_s \|\gamma_k\|_{L^{p+1}}^p.$$

Dalla (70) e di nuovo per la subadditività, esiste una costante positiva M_7 , tale che

$$\|\gamma_k^+\| \leq M_7 (1 + \|\gamma_k\|^{\frac{p}{p+1}}), \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (73)$$

Ragionando allo stesso modo per γ_k^- , esiste una costante positiva M_8 , tale che

$$\|\gamma_k^-\| \leq M_8 (1 + \|\gamma_k\|^{\frac{p}{p+1}}), \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (74)$$

Combinando le stime (72), (73), (74), esiste una costante positiva M_9 , tale che

$$\|\gamma_k\| \leq M_9 (1 + \|\gamma_k\|^{\frac{1}{p+1}} + \|\gamma_k\|^{\frac{p}{p+1}}), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

¹Una funzione $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ si dice subadditiva se

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in [0, +\infty).$$

In particolare ogni funzione concava, con $f(0) \geq 0$, è subadditiva.

In conclusione, poiché $0 < \frac{1}{p+1} < \frac{p}{p+1} < 1$, questo implica che $\{\gamma_k\} \subseteq \mathbb{H}$ è limitata. A questo punto, poiché

$$\|\gamma_k\|^2 = \|\gamma_k^-\|^2 + |\gamma_k^0|_{\mathbb{R}^{2n}}^2 + \|\gamma_k^+\|^2,$$

in particolare tutte le componenti sono limitate. Vogliamo mostrare che da ogni componente si riesce ad estrarre una sottosuccessione convergente. Prima di tutto, si ha che $\{\gamma_k^0\} \subseteq H^0 = \mathbb{R}^{2n}$ è limitata, quindi dal classico teorema di Bolzano-Weierstrass esiste una sottosuccessione di $\{\gamma_k^0\}$ convergente in H^0 . Scriviamo ora il gradiente di E dato da (69), secondo la decomposizione (64),

$$\begin{aligned} \nabla E(\gamma) &= (\nabla E(\gamma_k))^- + (\nabla E(\gamma_k))^0 + (\nabla E(\gamma_k))^+, \\ &\begin{cases} (\nabla E(\gamma))^- &= -\gamma^- - (\nabla G(\gamma))^- \\ (\nabla E(\gamma))^0 &= -(\nabla G(\gamma))^0 \\ (\nabla E(\gamma))^+ &= +\gamma^+ - (\nabla G(\gamma))^+ \end{cases} \end{aligned} \quad (75)$$

Consideriamo ora le mappe

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &\rightarrow H^-, \quad \gamma \mapsto (\nabla E(\gamma))^- = -\gamma^- - (\nabla G(\gamma))^-; \\ \mathbb{H} &\rightarrow H^+, \quad \gamma \mapsto (\nabla E(\gamma))^+ = +\gamma^+ - (\nabla G(\gamma))^+. \end{aligned}$$

Poichè

$$\|(\nabla E(\gamma_k))^- \| + \|(\nabla E(\gamma_k))^0 \| + \|(\nabla E(\gamma_k))^+ \| = \|\nabla E(\gamma_k)\| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0,$$

tutte le componenti di $\nabla E(\gamma_k)$ sono infinitesime, quindi

$$\begin{aligned} -\gamma_k^- &= (\nabla G(\gamma_k))^- + o(1), \quad \text{per } k \rightarrow +\infty; \\ +\gamma_k^+ &= (\nabla G(\gamma_k))^+ + o(1), \quad \text{per } k \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Ora, essendo le mappe di proiezione continue e ∇G compatto, allora ∇G^- e ∇G^+ sono funzioni compatte da $\mathbb{H}$ in H^- e in H^+ rispettivamente. Poiché $\{\gamma_k^-\} \subseteq H^-$ e $\{\gamma_k^+\} \subseteq H^+$ sono limitate, esistono sottosuccessioni di $\{\gamma_k^-\}$ e $\{\gamma_k^+\}$ convergenti rispettivamente in H^- e H^+ . A questo punto usiamo l'esistenza delle tre sottosuccessioni convergenti in maniera iterativa, nel seguente modo: esiste una sottosuccessione $\{\gamma_{j_k}^0\}$ convergente a qualche $\gamma_0^0 \in H^0$; usando lo stesso indice j_k nella successione $\{\gamma_k^-\}$, esiste una sottosuccessione (che continuiamo a denotare con lo stesso indice) $\{\gamma_{j_k}^-\}$ convergente a qualche $\gamma_0^- \in H^-$; di nuovo, usando lo stesso indice j_k nella successione $\{\gamma_k^+\}$, esiste una sottosuccessione (che continuiamo a denotare ancora con lo stesso indice) $\{\gamma_{j_k}^+\}$ convergente a qualche $\gamma_0^+ \in H^+$.

In conclusione abbiamo mostrato l'esistenza di una sottosuccessione $\{\gamma_{j_k}\} \subseteq \{\gamma_k\} \subseteq \mathbb{H}$ convergente a $\gamma_0 = \gamma_0^- + \gamma_0^0 + \gamma_0^+ \in \mathbb{H}$; per l'arbitrarietà di c , si ha che E soddisfa (PS).

Siano ora

$$Z = H^+, \quad W = H^- \oplus H^0,$$

così

$$\mathbb{H} = Z \oplus W.$$

Consideriamo ora il flusso η generato da $-\nabla E$, cioè la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\eta}(t, \gamma) = -\nabla E(\eta(t, \gamma)) \\ \eta(0, \gamma) = \gamma. \end{cases} \quad (76)$$

Osserviamo che, essendo $E \in C^2(\mathbb{H}; \mathbb{R})$, esiste (una unica) soluzione $\eta \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{H}; \mathbb{H})$. Prima di tutto si ha che

$$E(\eta(\cdot, \gamma)) \text{ è decrescente, } \forall \gamma \in \mathbb{H}. \quad (77)$$

Infatti, fissato $\gamma \in \mathbb{H}$, si ha

$$\frac{d}{dt}(E(\eta(t, \gamma))) = \langle \nabla E(\eta(t, \gamma)), \dot{\eta}(t, \gamma) \rangle = -\|\nabla E(\eta(t, \gamma))\|^2 \leq 0$$

Ora vogliamo mostrare che η è un flusso compatibile, secondo la Definizione 6.2. Usando la decomposizione (64), scriviamo

$$\eta(t, \gamma) = \eta^-(t, \gamma) + \eta^0(t, \gamma) + \eta^+(t, \gamma), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall \gamma \in \mathbb{H}.$$

In questo modo, considerando l'espressione del gradiente di E data da (75), si ottengono da (76) i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\eta}^-(t, \gamma) = +\eta^-(t, \gamma) + (\nabla G(\eta(t, \gamma)))^- \\ \eta^-(0, \gamma) = \gamma^- \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\eta}^0(t, \gamma) = +(\nabla G(\eta(t, \gamma)))^0 \\ \eta^0(0, \gamma) = \gamma^0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\eta}^+(t, \gamma) = -\eta^+(t, \gamma) + (\nabla G(\eta(t, \gamma)))^+ \\ \eta^+(0, \gamma) = \gamma^+ \end{cases}$$

Quindi

$$\eta^-(t, \gamma) = e^t \gamma^- + \int_0^t e^{t-s} (\nabla G(\eta(s, \gamma)))^- ds$$

$$\eta^0(t, \gamma) = \gamma^0 + \int_0^t (\nabla G(\eta(s, \gamma)))^0 ds$$

$$\eta^+(t, \gamma) = e^{-t} \gamma^+ + \int_0^t e^{s-t} (\nabla G(\eta(s, \gamma)))^+ ds$$

In questo modo, con le stesse notazioni della Definizione 6.2, si ha

$$\eta(t, \cdot) = L(t, \cdot) + K(t, \cdot),$$

dove, per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$L(t, \cdot) : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, \quad L(t, \gamma) = e^t \gamma^- + \gamma^0 + e^{-t} \gamma^+$$

è una mappa lineare, limitata e invertibile, con $L(0, \cdot) = Id$ e che inoltre preserva i sottospazi Z, W , cioè

$$L(t, \cdot) = L_Z(t, \cdot) + L_W(t, \cdot) : Z \oplus W \rightarrow Z \oplus W, \quad L(t, x) = L_Z(t, z) + L_W(t, w)$$

con

$$L_Z(t, \gamma^+) = e^{-t} \gamma^+, \quad L_W(t, \gamma^- + \gamma^0) = e^t \gamma^- + \gamma^0;$$

inoltre $K(t, \cdot) : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, dato da

$$K(t, \gamma) = \int_0^t e^{t-s} (\nabla G(\eta(s, \gamma)))^- + (\nabla G(\eta(s, \gamma)))^0 + e^{s-t} (\nabla G(\eta(s, \gamma)))^+ ds$$

è una mappa compatta, con $K(0, \cdot) = 0$. In conclusione, η è un flusso compatibile (con Z, W).

Adesso, ricordando la scrittura (68) e usando la disuguaglianza di Sobolev (16), si ha la seguente stima, per ogni $z \in Z$

$$\begin{aligned} E(z) &= \frac{1}{2} \|z\|^2 - \frac{1}{p+1} \|z\|_{L^{p+1}}^{p+1} \\ &\geq \frac{1}{2} \|z\|^2 - \frac{C_s^{p+1}}{p+1} \|z\|^{p+1} \\ &= \frac{1}{2} \|z\|^2 \left(1 - \frac{2C_s^{p+1}}{p+1} \|z\|^{p-1} \right). \end{aligned}$$

Poiché $p - 1 > 0$, allora

$$\exists r > 0 \text{ t.c. } \left(1 - \frac{2C_s^{p+1}}{p+1} r^{p-1} \right) > 0;$$

inoltre non è restrittivo supporre anche $r < 1$. In questo modo, si ottiene

$$b := \inf_{z \in S} E(z) > 0,$$

dove

$$S = \{z \in Z \text{ t.c. } \|z\| = r\}.$$

Ricordando (66), sia ora $z_0 \in V_1 \subseteq Z$, $\|z_0\| = 1 = \|z_0\|_{L^2}$ e consideriamo

$$V = \{\tau z_0 + w, \tau \in \mathbb{R}, w \in W\} = \mathbb{R}z_0 \oplus W,$$

$$Q = \{v = \tau z_0 + w, \tau \in [0, \bar{\tau}], w \in W, \|w\| \leq \bar{\tau}\} \subseteq V$$

con $\bar{\tau} > 0$ da fissare. Sia $v \in V$, usando (71) e la proprietà di superaddittività ¹, abbiamo

$$\begin{aligned} E(v) &= \frac{1}{2}\tau^2 - \frac{1}{2}\|w^-\|^2 - \frac{1}{p+1}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1} \\ &\leq \frac{1}{2}\tau^2 - \frac{1}{2}\|w^-\|^2 - \frac{1}{p+1}\frac{1}{M_2^{p+1}}\|v\|_{L^2}^{p+1} \\ &= \frac{1}{2}\tau^2 - \frac{1}{2}\|w^-\|^2 - \frac{1}{p+1}\frac{1}{M_2^{p+1}}\|\tau z_0 + w^- + w^0\|_{L^2}^{p+1} \\ &\leq \frac{1}{2}\tau^2 - \frac{1}{2}\|w^-\|^2 - \frac{1}{p+1}\frac{1}{M_2^{p+1}}\tau^{p+1} - \frac{1}{p+1}\frac{(2\pi)^{\frac{p+1}{2}}}{M_2^{p+1}}|w^0|_{\mathbb{R}^{2n}}^{p+1}. \end{aligned}$$

Ora, poiché $p + 1 > 2$, e visto che la funzione

$$\frac{1}{2}\|w^-\|^2 + \frac{1}{p+1}\frac{(2\pi)^{\frac{p+1}{2}}}{M_2^{p+1}}|w^0|_{\mathbb{R}^{2n}}^{p+1} \rightarrow +\infty, \quad \|w\| \rightarrow +\infty,$$

allora possiamo scegliere $\bar{\tau} > 0$ tale che su "tre lati" di $\partial_V Q$, cioè per $v = \tau z_0 + w \in \partial_V Q$ con $\tau = \bar{\tau}$ oppure $\|w\| = \bar{\tau}$, valga $E(v) \leq 0$; inoltre non è restrittivo supporre anche $\bar{\tau} > 1$. Per quanto riguarda $\tau = 0$, si ha $E(w) \leq 0$, per ogni $w \in W$. Quindi, poiché in particolare $E(0) = 0$, si ha

$$a := \max_{v \in \partial_V Q} E(v) = 0.$$

In questo modo si ottiene la condizione

$$b := \inf_{z \in S} f(z) > \max_{v \in \partial_V Q} f(v) =: a. \quad (78)$$

¹Una funzione $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ si dice superaddittiva se

$$f(x + y) \geq f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in [0, +\infty).$$

In particolare ogni funzione convessa, con $f(0) \leq 0$, è superaddittiva.

Consideriamo ora il flusso η generato da $-\nabla E$, il quale è compatibile (con Z, W); poichè $E(v) \leq 0$, per ogni $v \in \partial_V Q$, allora da (77) si ottiene

$$E(\eta(t, v)) \leq E(\eta(0, v)) = E(v) \leq 0, \quad \forall t \geq 0, v \in \partial_V Q.$$

Quindi, visto che $b = \inf_{z \in S} E(z) > 0$, si ha

$$S \cap \eta(t, \partial_V Q) = \emptyset, \quad \forall t \geq 0;$$

allora, dal Lemma 6.1 si ha che S e $\partial_V Q$ link rispetto a Φ_η .

A questo punto vogliamo applicare lo schema di minimax e, ragionando per assurdo, mostrare l'esistenza di un punto critico non banale per E . Sia allora

$$c := \inf_{\phi \in \Phi_\eta} \sup_{v \in Q} E(\phi(v)). \quad (79)$$

Prima di tutto, poichè Q è limitato e chiuso, allora da (68) (in particolare G è debolmente continua, si veda l'Osservazione 1.5) si ha che $\sup_{v \in Q} E(v) < +\infty$; quindi, poichè $Id \in \Phi_\eta$, si ha $c \in \mathbb{R}$. Inoltre, dalla condizione (ii) della Definizione 6.1 di link relativo, si ha $c \geq b$. Supponiamo ora, per assurdo, che $c \notin \text{Vcrit}(E)$. Poichè E soddisfa (PS) , in particolare $(PS)_c$, allora dal Lemma 3.1, si ha che

$$\exists \delta > 0 \text{ t.c. } \|\nabla E(\gamma)\| \geq \delta, \quad \forall \gamma \in E^{-1}([c - \delta, c + \delta]). \quad (80)$$

Sia $\varepsilon > 0$ tale che $2\varepsilon \leq \delta^2$, allora dalla definizione di c , come estremo inferiore,

$$\exists \phi_0 \in \Phi_\eta \text{ t.c. } \sup_{v \in Q} E(\phi_0(v)) \leq c + \varepsilon.$$

Poichè $\phi_0 \in \Phi_\eta$, allora esiste $t_0 \geq 0$, per cui $\phi_0(\cdot) = \eta(t_0, \cdot)$. Ora, visto che non è restrittivo supporre $\delta \leq 2$, così $\varepsilon \leq \delta$, sia $\gamma \in E^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$, si ha

$$\begin{aligned} E(\eta(t_0 + 1, \gamma)) &= E(\eta(t_0, \gamma)) + \int_{t_0}^{t_0+1} \frac{d}{dt} (E(\eta(t, \gamma))) dt \\ &= E(\phi_0(\gamma)) - \int_{t_0}^{t_0+1} \|\nabla E(\eta(t, \gamma))\|^2 dt \\ &\leq c + \varepsilon - \delta^2 \leq c - \varepsilon. \end{aligned}$$

Quindi $\eta(t_0 + 1, E^{c+\varepsilon}) \subseteq E^{c-\varepsilon}$. Poniamo $\phi_1(\cdot) = \eta(t_0 + 1, \cdot)$, allora $\phi_1 \in \Phi_\eta$ e si avrebbe

$$c = \inf_{\phi \in \Phi_\eta} \sup_{v \in Q} E(\phi(v)) \leq \sup_{v \in Q} E(\phi_1(v)) \leq c - \varepsilon,$$

cioè $\varepsilon \leq 0$, ma questo è assurdo.

In conclusione $c \in \text{Vcrit}(E)$, cioè E ammette un punto critico $\gamma_0 \in \mathbb{H}$; in particolare, poichè

$$E(\gamma_0) = c \geq b > a = 0 = E(0),$$

allora $\gamma_0 \neq 0$. Questo conclude la dimostrazione. $\square$

Osservazione 6.1. *Anche in questo caso, come nell'Osservazione 4.7, nelle ipotesi del precedente Teorema 6.2, si ha che se $\gamma_0 \in H^{\frac{1}{2}}(S^1; \mathbb{R}^{2n})$ è soluzione debole del sistema (67), allora γ_0 è soluzione classica di (67), cioè $\gamma_0 \in C^1(S^1; \mathbb{R}^{2n})$; si veda ad esempio [14].*

A Appendice

A.1 Alcuni Teoremi di Analisi Funzionale

Ricordiamo gli enunciati di alcuni risultati citati nell'introduzione, per le dimostrazioni si vedano ad esempio [5], [15].

Teorema A.1. (*Lemma di Riesz*)

Sia X uno spazio normato e sia $V \subsetneq X$ un sottospazio chiuso e proprio. Dato $r \in (0, 1)$, allora

$$\exists x \in X, \|x\|_X = 1, \text{ t.c. } \|x - v\|_X \geq r, \forall v \in V .$$

Ricordiamo ora che, dato X uno spazio vettoriale (reale o complesso), una **funzione sub-lineare** su X è una funzione $S : X \rightarrow \mathbb{R}$, tale che

$$S(\lambda x) = \lambda S(x), \quad \forall x \in X, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0 ,$$

$$S(x + y) \leq S(x) + S(y), \quad \forall x, y \in X .$$

Teorema A.2. (*Teorema di Hahn-Banach*)

Sia X uno spazio vettoriale (reale o complesso) e sia $V \subseteq X$ un sottospazio. Sia $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione lineare tale che

$$F(v) \leq S(v), \quad \forall v \in V ,$$

dove S è una qualche funzione sub-lineare su X . Allora esiste una estensione lineare di F su X , cioè esiste una funzione lineare $\tilde{F} : X \rightarrow \mathbb{R}$, tale che

$$\tilde{F}(v) = F(v), \quad \forall v \in V ,$$

$$\tilde{F}(x) \leq S(x), \quad \forall x \in X .$$

Teorema A.3. (*Teorema di Banach-Steinhaus o Principio dell'Uniforme Limitatezza*)

Siano X uno spazio di Banach e Y uno spazio normato. Sia $\mathcal{A} \subseteq L(X, Y)$ una famiglia di operatori lineari e continui da X in Y , tale che

$$\forall x \in X, \quad \sup_{F \in \mathcal{A}} \|F(x)\|_Y < +\infty .$$

Allora

$$\sup_{F \in \mathcal{A}} \|F\|_{XY} < +\infty .$$

Ricordiamo adesso che, dato X uno spazio di Banach, la **topologia debole** su X , che indichiamo con $\sigma(X; X^*)$, è la topologia meno fine su X che rende continue tutte le mappe di X^* . Inoltre, data una successione $\{x_k\} \subseteq X$, si dice che $\{x_k\}$ converge debolmente ad $\ell \in X$, e si scrive

$$x_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \ell,$$

se converge rispetto alla topologia debole $\sigma(X; X^*)$. Ora, poichè negli spazi topologici la continuità implica sempre la continuità sequenziale (in particolare negli spazi metrici sono equivalenti), allora si ha che $\{x_k\}$ converge debolmente ad $\ell \in X$ se e solo se

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} F(x_k) = F(\ell), \quad \forall F \in X^* ,$$

ritrovando così la definizione data in (2). Infine, dato un sottoinsieme $A \subseteq X$, chiamiamo **chiusura debole** di A , la chiusura di A rispetto alla topologia debole $\sigma(X; X^*)$ e diciamo che A è **debolmente compatto** se ogni ricoprimento aperto (in $\sigma(X; X^*)$) di A ammette un sottoricoprimento finito. Il seguente risultato mostra l'equivalenza fra compattezza debole e compattezza debole sequenziale.

Teorema A.4. (*Teorema di Eberlein-Šmulian*)

Siano X uno spazio di Banach e $A \subseteq X$ un sottoinsieme. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (i) *la chiusura debole di A è debolmente compatta,*
- (ii) *ogni successione in A ammette una sottosuccessione debolmente convergente in X .*

A.2 Bootstrap

Qui vogliamo dimostrare che sotto opportune ipotesi, le soluzioni deboli di un problema di Dirichlet sono in realtà soluzioni classiche. A questo scopo richiamiamo due risultati classici di regolarità per le soluzioni di equazioni alle derivate parziali ellittiche (si veda ad esempio [9]).

Teorema A.5. *Consideriamo il seguente Problema di Dirichlet per il Laplaciano, su un aperto limitato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$*

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = h(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (81)$$

con $h \in L^2(\Omega; \mathbb{R})$ assegnata e sia $u \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R})$ una soluzione debole di (81). Valgono le seguenti stime:

(i) (Calderón–Zygmund)

se $h \in L^q(\Omega; \mathbb{R})$, con $1 < q < +\infty$, allora $u \in H^{2,q}(\Omega; \mathbb{R})$; in particolare esiste una costante positiva C indipendente da u , tale che

$$\|u\|_{H^{2,q}} \leq C \|h\|_{L^q};$$

(ii) (Schauder)

supponiamo $\partial\Omega$ di classe $C^{2,\alpha}$, per qualche $\alpha \in (0, 1)$; se $h \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$, allora $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$; in particolare esiste una costante positiva C indipendente da u , tale che

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}} \leq C \|h\|_{C^{0,\alpha}}.$$

Mediante una tecnica di "bootstrap" possiamo ora dimostrare il seguente risultato.

Teorema A.6. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con $\partial\Omega$ di classe $C^{2,\alpha}$, $n \geq 3$. Consideriamo il seguente Problema di Dirichlet, per il Laplaciano, su Ω*

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(u(x)), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (82)$$

dove

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(\xi) = |\xi|^{p-1}\xi, \quad p \in \mathbb{R}, \quad 2 < p+1 < 2^* = \frac{2n}{n-2}.$$

Allora esiste $u \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$ soluzione classica non banale per il problema (82).

Dimostrazione. Dal Teorema 4.3 si ha che esiste $u \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R})$ soluzione debole non banale per il problema (82).

Vogliamo mostrare che esiste $\bar{q} \in \mathbb{R}$, con $2\bar{q} > n$, tale che $u \in H^{2,\bar{q}}(\Omega; \mathbb{R})$. Poniamo

$$r = \frac{2^* - 1}{p} = \frac{1}{p} \cdot \frac{n+2}{n-2} > 1;$$

l'idea è applicare il seguente procedimento iterativo.

Dalle immersione di Sobolev, Teorema 1.6, si ha

$$u \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}) \implies u \in L^{2^*}(\Omega; \mathbb{R}), \quad 2^* = \frac{2n}{n-2}.$$

Poiché

$$u \in L^{2^*}(\Omega; \mathbb{R}) \implies |u|^{p-1}u = f(u) \in L^{q_1}(\Omega; \mathbb{R}), \quad q_1 = \frac{2^*}{p} = r \frac{2n}{n+1} > r,$$

allora dalle stime (i) del Teorema A.5, si ha $u \in H^{2,q_1}(\Omega; \mathbb{R})$.

Ora, ripetiamo l'argomento nel seguente modo.

Dalle immersione di Sobolev, Teorema 1.6, si ha

$$u \in H^{2,q_1}(\Omega; \mathbb{R}) \implies u \in L^{q_1^*}(\Omega; \mathbb{R}), \quad q_1^* = \frac{nq_1}{n-2q_1}.$$

Poiché

$$u \in L^{q_1^*}(\Omega; \mathbb{R}) \implies |u|^{p-1}u = f(u) \in L^{q_2}(\Omega; \mathbb{R}), \quad q_2 = \frac{q_1^*}{p} > r q_1 > r^2,$$

allora dalle stime (i) del Teorema A.5, si ha $u \in H^{2,q_2}(\Omega; \mathbb{R})$.

Iterando ancora, si costruisce una successione $\{q_j\} \in \mathbb{R}$ con $q_j > r^j$ e $u \in H^{2,q_j}(\Omega; \mathbb{R})$. Ora, poiché $r > 1$, si ha che

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} q_j = +\infty,$$

quindi esiste $\bar{j} \in \mathbb{N}$, per cui $2q_{\bar{j}} > n$.

Sia $\bar{q} = q_{\bar{j}}$, allora poiché $u \in H^{2,\bar{q}}(\Omega; \mathbb{R})$ con $2\bar{q} > n$, dalle immersione di Sobolev, Teorema 1.6, si ha $u \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}; \mathbb{R})$, per qualche $\alpha \in (0, 1)$.

Adesso, poiché

$$u \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}) \implies |u|^{p-1}u = f(u) \in C^{0,\beta}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}),$$

per qualche $\beta \in (0, 1)$, allora dalle stime (ii) del Teorema A.5, si ha $u \in C^{2,\beta}(\bar{\Omega}; \mathbb{R})$.

In conclusione, u è soluzione classica del problema (82). $\square$

Osservazione A.1. Il precedente Teorema A.6 si generalizza anche a opportune funzioni f del tipo descritte nell'Osservazione 4.6.

A.3 Invertibilità del Laplaciano

Qui vogliamo mostrare la compattezza della mappa (39), scrivendo esplicitamente ∇G usando l'operatore inverso del Laplaciano. Abbiamo bisogno del seguente classico risultato (si veda ad esempio [5]).

Teorema A.7. *(di Lax-Milgram)*

Sia $\mathbb{H}$ uno spazio di Hilbert e

$$B : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$$

una forma bilineare tale che:

$$(i) \exists C_1 > 0, \quad t.c. \quad |B(u, h)| \leq C_1 \|u\| \|h\|, \quad \forall u, h \in \mathbb{H} \quad (limitata);$$

$$(ii) \exists C_2 > 0, \quad t.c. \quad |B(u, u)| \geq C_2 \|u\|^2, \quad \forall u \in \mathbb{H} \quad (coerciva).$$

Allora

$$\forall F \in \mathbb{H}^*, \exists ! u \in \mathbb{H}, \quad t.c. \quad B(u, h) = F(h), \quad \forall h \in \mathbb{H}.$$

In particolare vale

$$\|u\| \leq \frac{1}{C_2} \|F\|_* \tag{83}$$

Sia ora $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e sia $\mathbb{H} = H_0^1(\Omega; \mathbb{R})$ munito del prodotto scalare definito in (19). Poniamo

$$B : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}, \quad B(u, h) = \int_{\Omega} \langle \nabla u(x), \nabla h(x) \rangle dx;$$

In questo modo le condizioni (i) e (ii) del Teorema A.7 sono soddisfatte (con costanti uguali ad uno), quindi per ogni $F \in \mathbb{H}^*$ esiste una unica $u \in \mathbb{H}$ soluzione del problema

$$B(u, h) = F(h), \quad \forall h \in \mathbb{H}. \tag{84}$$

Definiamo allora la seguente mappa lineare

$$(-\Delta)^{-1} : \mathbb{H}^* \rightarrow \mathbb{H}, \quad (-\Delta)^{-1}(F) = u,$$

dove $u \in \mathbb{H}$ è l'unica soluzione di (84); in particolare, dalla stima (83) si ha che Δ^{-1} è continua.

Osservazione A.2. Ricordiamo la rappresentazione (9); in questo caso significa che se $F \in \mathbb{H}^*$, allora

$$F(h) = \int_{\Omega} f_0(x)h(x) + \langle v(x), \nabla h(x) \rangle dx,$$

dove $v = (f_1, \dots, f_n)$, con $f_0, f_1, \dots, f_n \in L^2(\Omega; \mathbb{R})$. Allora la notazione $(-\Delta)^{-1}$ è motivata dal seguente fatto. Se $f \in L^2(\Omega; \mathbb{R})$ allora $F \in \mathbb{H}^*$, dove

$$F(h) = \int_{\Omega} f(x)h(x)dx;$$

quindi identificando f con F , si ha $(-\Delta)^{-1}(f) = u$, con $u \in \mathbb{H}$ l'unica soluzione debole del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

A questo punto possiamo enunciare il seguente risultato.

Lemma A.1. La mappa $\nabla G : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ definita in (39), è compatta.

Dimostrazione. Dalla dimostrazione del Teorema 4.3, abbiamo

$$d_u G(h) = \int_{\Omega} f(u(x))h(x)dx, \quad \forall u, h \in \mathbb{H},$$

con

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(\xi) = |\xi|^{p-1}\xi, \quad p \in \mathbb{R}, \quad 2 < p+1 < 2^* = \frac{2n}{n-2}, n \geq 3.$$

Osserviamo anche esplicitamente che

$$\frac{p+1}{p} > \frac{2^*}{2^*-1}.$$

Allora, denotando con i e i^* le immersioni di Sobolev espresse in (11) e (12), poiché

$$d_u G(h) = \langle \nabla G(u), h \rangle, \quad \forall u, h \in \mathbb{H},$$

si ottiene

$$\nabla G : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, \quad \nabla G(u) = ((-\Delta)^{-1} \circ i^* \circ f \circ i)(u) = (-\Delta)^{-1}(i^*(f(i(u)))).$$

Quindi la compattezza di ∇G segue dal fatto che la composizione di funzioni continue e compatte è compatta, infatti

$$\nabla G : \mathbb{H} \xrightarrow[\text{cpt}]{i} L^{p+1}(\Omega; \mathbb{R}) \xrightarrow[\text{cont}]{f} L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega; \mathbb{R}) \xrightarrow[\text{cpt}]{i^*} \mathbb{H}^* \xrightarrow[\text{cont}]{(-\Delta)^{-1}} \mathbb{H}$$

□

A.4 Identità di Pohozaev

Qui mediante il Teorema della divergenza (1.2), vogliamo mostrare una relazione valida per le soluzioni di problemi di Dirichlet del tipo (36).

Teorema A.8. (*Identità di Pohozaev*)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto regolare, con $n \geq 3$. Consideriamo il seguente Problema di Dirichlet, per il Laplaciano, su Ω

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(u(x)), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (85)$$

con $f \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ assegnata. Sia $u \in C^2(\bar{\Omega}; \mathbb{R})$ una soluzione classica per il problema (85).

Poniamo $F(\xi) = \int_0^\xi f(t)dt$, allora vale la seguente identità:

$$n \int_{\Omega} F(u(x))dx - \frac{n-2}{2} \int_{\Omega} u(x)f(u(x))dx = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \langle x, \nu \rangle \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 dH^{n-1}, \quad (86)$$

dove $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \langle \nabla u, \nu \rangle$ è la derivata parziale di u lungo ν , la normale unitaria esterna a $\partial\Omega$.

Dimostrazione. L'idea è applicare il Teorema della divergenza ai seguenti campi vettoriali.

$$\begin{aligned} V &\in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}), & V(x) &= \langle x, \nabla u(x) \rangle \nabla u(x), \\ W &\in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}), & W(x) &= \frac{1}{2} \|\nabla u(x)\|^2 x. \end{aligned}$$

Calcoliamo separatamente la divergenza di V e W .

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(V(x)) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} (\langle x, \nabla u(x) \rangle \nabla u(x))_k = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\langle x, \nabla u(x) \rangle \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k^2} \langle x, \nabla u(x) \rangle = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \right)^2 + \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} x_i \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_k} + \Delta u(x) \langle x, \nabla u(x) \rangle = \\ &= \|\nabla u(x)\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \|\nabla u(x)\|^2 + \Delta u(x) \langle x, \nabla u \rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(W(x)) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{2} \|\nabla u(x)\|^2 x \right)_k = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\|\nabla u(x)\|^2 x_k \right) = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \|\nabla u(x)\|^2 \frac{\partial x_k}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial}{\partial x_k} \|\nabla u(x)\|^2 = \\
&= \frac{n}{2} \|\nabla u(x)\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial}{\partial x_k} \|\nabla u(x)\|^2.
\end{aligned}$$

Applichiamo ora il teorema della divergenza a V e W , osservando esplicitamente che su $\partial\Omega$ si ha $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) \nu$, in quanto $u = 0$ su $\partial\Omega$.

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \operatorname{div}(V(x)) dx &= \int_{\Omega} \|\nabla u(x)\|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \|\nabla u(x)\|^2 dx + \int_{\Omega} \Delta u(x) \langle x, \nabla u \rangle dx \\
&= \int_{\partial\Omega} \langle x, \nabla u \rangle \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dH^{n-1} \\
&= \int_{\partial\Omega} \langle x, \nu \rangle \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 dH^{n-1}. \tag{87}
\end{aligned}$$

Calcoliamo anche

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \operatorname{div}(W(x)) dx &= \frac{n}{2} \int_{\Omega} \|\nabla u(x)\|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \|\nabla u(x)\|^2 dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \|\nabla u\|^2 \langle x, \nu \rangle dH^{n-1} \\
&= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \langle x, \nu \rangle \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 dH^{n-1}. \tag{88}
\end{aligned}$$

Ora sottraiamo (88) da (87),

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) \langle x, \nabla u(x) \rangle dx + \left(1 - \frac{n}{2}\right) \int_{\Omega} \|\nabla u(x)\|^2 dx = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \langle x, \nu \rangle \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 dH^{n-1}. \tag{89}$$

Per quanto riguarda il primo integrale, usando l'ipotesi che u sia soluzione di (85) e

integrando per parti (7), abbiamo

$$\begin{aligned}
-\int_{\Omega} \Delta u(x) \langle x, \nabla u(x) \rangle dx &= \int_{\Omega} f(u(x)) \langle x, \nabla u(x) \rangle dx \\
&= \int_{\Omega} f(u(x)) \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} dx \\
&= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial F(u(x))}{\partial x_i} dx \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} x_i \frac{\partial F(u(x))}{\partial x_i} dx = \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega} x_i F(u) \nu_i dH^{n-1} - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} F(u(x)) \frac{\partial x_i}{\partial x_i} dx \\
&= \int_{\partial\Omega} F(u) \langle x, \nu \rangle dH^{n-1} - n \int_{\Omega} F(u(x)) dx.
\end{aligned}$$

Osservando ora che su $\partial\Omega$ si ha anche $F(u) = 0$, in quanto $u = 0$ su $\partial\Omega$, si ottiene

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) \langle x, \nabla u(x) \rangle dx = n \int_{\Omega} F(u(x)) dx. \quad (90)$$

Per quanto riguarda il secondo integrale in (89), usando di nuovo l'ipotesi che u sia soluzione di (85) e integrando per parti, abbiamo

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \|\nabla u(x)\|^2 dx &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right)^2 dx = \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega} u \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \nu_i dH^{n-1} - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u(x) \left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} \right) dx = \\
&= \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \nu} dH^{n-1} - \int_{\Omega} u(x) \Delta u(x) dx = \\
&= \int_{\Omega} u(x) f(u(x)) dx \quad (91)
\end{aligned}$$

Infine, sostituendo (90) e (91) in (89) otteniamo (86). $\square$

Consideriamo ora un aperto regolare che sia stellato rispetto all'origine, cioè per cui

$$\langle x, \nu \rangle \geq 0, \quad \forall x \in \partial\Omega. \quad (92)$$

Allora abbiamo il seguente corollario.

Corollario A.1. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto regolare, con $n \geq 3$. Sia $u \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$ una soluzione classica per il problema (85). Se Ω è stellato rispetto all'origine, allora si ha*

$$n \int_{\Omega} F(u(x)) dx - \frac{n-2}{2} \int_{\Omega} u(x) f(u(x)) dx \geq 0. \quad (93)$$

Dimostrazione. Dall'identità di Pohozaev 86, poiché Ω è stellato rispetto all'origine, usando la relazione (92), si ottiene la tesi. $\square$

Una applicazione dell'identità di Pohozaev e del Corollario A.1 è il seguente teorema di non esistenza per problemi di Dirichlet del tipo (36).

Teorema A.9. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, con $n \geq 3$. Consideriamo il seguente Problema di Dirichlet, per il Laplaciano, su Ω*

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(u(x)), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (94)$$

dove

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(\xi) = |\xi|^{p-1}\xi, \quad p \in \mathbb{R}.$$

Se Ω è stellato rispetto all'origine e

$$p + 1 > 2^* = \frac{2n}{n-2},$$

allora non esistono soluzioni classiche $u \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$ non banali per il problema (94).

Dimostrazione. Prima di tutto, in questo caso si ha $F(\xi) = \frac{1}{p+1}|\xi|^{p+1}$. Supponiamo ora che esista $u \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$ soluzione classica non banale ($u \neq 0$) per il problema (94). Allora dal Corollario A.1 si avrebbe

$$\left(\frac{n}{p+1} - \frac{n-2}{2} \right) \int_{\Omega} |u(x)|^{p+1} dx \geq 0.$$

Questo implica

$$p + 1 \leq \frac{2n}{n-2} = 2^*,$$

che contraddice l'ipotesi. $\square$

Riferimenti bibliografici

- [1] R.A.Adams, J.J.F.Fournier; *Sobolev Spaces. 2nd Edition.* Elsevier, 2003
- [2] A.Ambrosetti, A.Malchiodi; *Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems.* Cambridge University Press, 2007
- [3] A.Ambrosetti, G.Prodi; *A Primer of Nonlinear Analysis.* Cambridge University Press, 1995
- [4] A.Ambrosetti, P.H.Rabinowitz; *Dual variational methods in critical point theory and applications.* J. Functional Analysis, 14, 349-381, 1973
- [5] H.Brezis; *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer, 2011
- [6] H.Brezis, L.Nirenberg; *Remarks on Finding Critical Points.* Communications on Pure and Applied Mathematics, 44, 8-9, 939-963, 1991
- [7] L.C.Evans, R.F.Gariepy; *Measure Theory and Fine Properties of Functions. Revised Edition.* Chapman and Hall/CRC, 2015
- [8] H.Federer; *Geometric Measure Theory.* Springer, 1996
- [9] D.Gilbarg, N.S.Trudinger; *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Springer Verlag, 2001.
- [10] J.Jost; *Partial Differential Equations.* Springer, 2002
- [11] N.G.Meyers, J.Serrin; " $H = W$ ". Proceedings of the National Academy of Sciences, 51 (6): 1055-1056, 1964
- [12] R.S.Palais; *Critical Point Theory and the Minimax Principle.* Proc. Symp. Pure Math., Vol. XV, 185-212, 1970
- [13] B.Pini; *Lezioni di analisi matematica di secondo livello (parte prima),* CLUEB, 1983
- [14] P.H.Rabinowitz; *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations.* AMS-CBMS, 1986
- [15] W.Rudin; *Functional Analysis. 2nd Edition.* McGraw-Hill, 1991
- [16] A.H.Stone; *Paracompactness and product spaces.* Bull. Amer. Math. Soc. Volume 54, Number 10, 977-982, 1948
- [17] M.Struwe; *Variational Methods: Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems. Fourth Edition.* Springer-Verlag, 2008

Indice analitico

- aperto regolare, 16
- biduale, 5
- chiusura debole, 92
- compattezza debole, 92
- compattezza debole sequenziale, 6
- condizione di Palais-Smale, 33
- convergenza debole, 5
- convergenza in norma o forte, 5
- decomposizione del differenziale, 34
- decomposizione del gradiente, 35
- deformazione, 38
- derivata debole, 18
- derivata di Gâteaux, 8, 10
- differenziale di Fréchet, 8
- disuguaglianza di Poincaré, 19
- disuguaglianze di Hölder, 18
- divergenza, 16
- duale topologico, 4
- famiglia η -invariante, 46
- flusso, 46
- flusso compatibile, 76
- funzione coerciva, 12
- funzione compatta, 14
- funzione debolmente continua, 11
- funzione debolmente inferiormente
 semi-continua, 11
- funzione debolmente superiormente
 semi-continua, 11
- funzione Hölderiana, 20
- funzione sub-lineare, 91
- gradiente, 10
- grado di Brouwer, 58
- grado di Leray–Schauder, 75
- identità di Parseval, 7, 23
- immersioni di Sobolev, 19
- insieme di sottolivello, 38
- insieme paracompatto, 41
- integrazione per parti, 17
- link, 58
- link relativo, 75
- norma operatoriale, 4
- omotopia, 38
- pseudo-gradiente, 40
- punto critico, 10
- semiflusso, 46
- soluzione debole del Problema di
 Dirichlet, 28
- soluzione debole del Sistema
 Hamiltoniano, 32
- spazio $L^p(\Omega; \mathbb{R})$, 18
- spazio $L^p(S^1; \mathbb{R})$, 22
- spazio di Banach, 4
- spazio di Hilbert, 6
- spazio di Sobolev $H^s(S^1; \mathbb{R})$, 23
- spazio di Sobolev $H^{\frac{1}{2}}(S^1; \mathbb{R}^{2n})$, 23
- spazio di Sobolev $H^{k,p}(\Omega; \mathbb{R})$, 19
- spazio di Sobolev $H_0^{k,p}(\Omega; \mathbb{R})$, 19
- spazio di Sobolev $W^{k,p}(\Omega; \mathbb{R})$, 18
- spazio normato, 4
- spazio riflessivo, 5
- spazio separabile, 4
- successione di Palais-Smale, 33
- teorema di Kakutani, 6
- teorema di rappresentazione di Riesz, 6
- topologia debole, 92
- valore critico, 10
- valore regolare, 10