Il minimo teorico di Analisi Matematica A

Nicola Arcozzi
Mattia Galeotti

2024

Prefazione

Gli esercizi in queste note non sono finalizzati alla preparazione della prova scritta, ma alla migliore comprensione della teoria. Per la preparazione della prova scritta, vedi il *Minimo pratico.*

Il testo consigliato per il corso è Elementi di Analisi matematica di Giulio Cesare Barozzi, Giovanni Dore e Enrico Obrecht (tra l'altro docenti di analisi matematica nella scuola di ingegneria di Unibo). Queste note coprono il contenuto del corso, ma per avere una visuale più ampia e anche una esposizione più meditata, suggeriamo il libro indicato.

Molta informazione può essere reperita online. Il problema è capire se questa è affidabile o meno. Quasi sempre le voci matematiche di wikipedia sono molto ben curate, anche perché vengono controllate, integrate e corrette da un gran numero di persone, in genere istruite, spesso anche esperte, nell'argomento. Le voci in inglese sono di norma più ricche e varie, avendo alle spalle una comunità più vasta di redattori; ma non sono più rigorose di quelle in italiano. Vi sono altre fonti, siti dove si può discutere di matematica e fare domande, eccetera. Anche qui, occorre spirito critico per verificare che le risposte che ci vengono date siano utili e corrette.

Ai fini dello studio per l'esame, però, bisogna fare attenzione. Un corso universitario di matematica non è solo un catalogo di fatti, ma è un *discorso matematico*, con legami consequenziali tra un fatto e l'altro. Questo discorso può essere svolto in maniere diverse; alcune relazioni di consequenzialità possono essere invertite; ciò che in una versione del discorso è una definizione può essere un'ipotesi o tesi di teorema in un'altra, e viceversa. Va fatta una scelta, insomma, di come ordinare in discorso gli elementi del catalogo. In queste note diamo una versione, sostanzialmente identica a quella del testo consigliato.

Va benissimo integrare elementi da altre fonti alla teoria che viene qui svolta, anche usarli per riscriverne diversamente dei capitoli. Però bisogna che l'architettura complessiva sia coerente: che ogni termine sia definito in base a termini già noti; che ogni affermazione segua da affermazioni di cui conosciamo la verità.

(Insomma: non è facilissimo tenere tutto assieme quando si vuole adattare la teoria al proprio gusto; lo diciamo per esperienza diretta).

Indice

1 Numeri, operazioni, insiemi, funzioni

1.1 Numeri naturali, interi, razionali

I numeri sono gli oggetti più importanti della matematica. In questa sottosezione rivediamo alcune tipologie di numeri ("insiemi di numeri") che avete incontrato nei vostri studi precedenti. Sia concettualmente che storicamente, diverse tipologie di numeri vennero introdotte via via per svolgere diverse funzioni: i numeri naturali per contare (lo zero è una tarda innovazione), i numeri interi con segno per registrare guadagni e perdite in maniera unificata, i numeri razionali per misurare quantità geometriche. Già i matematici della scuola pitagorica avevano scoperto che i numeri razionali non erano sufficienti a esprimere i rapporti tra semplici e ben visibili quantità geometriche, come per esempio la diagonale e il lato di un quadrato. L'idea che il sistema numerico potesse essere esteso per accomodare questi rapporti arrivò molti secoli dopo e il suo sviluppo fu lento e graduale. Solo alla fine del XIX secolo venne sviluppata una teoria che desse conto in piena generalità di cosa è un "numero reale". Nel frattempo, per ragioni oramai quasi dimenticate, erano stati introdotti i "numeri complessi", che sono oggi un sistema numerico centrale in fisica e in ingegneria, oltre che in matematica.

I numeri, come tutti gli altri oggetti matematici, nascono per svolgere certe funzioni, rappresentare certi concetti, risolvere certi problemi. E' notevole e sorprendente che, una volta che un sistema numerico è stato sviluppato, esso si sveli essere lo strumento adatto per rappresentare aspetti della realtà, o per applicazioni, lontanissimi da quelli per cui era stato inventato. Questa "irragionevole efficacia"[1] dei numeri (della matematica in generale) nel descrivere e

[1] The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences di Eugene Wigner (1960).

prevedere i fenomeni, e nel controllarli, viene confermata continuamente. Pur non dovendola prendere acriticamente come un dogma, essa costituisce un ottimo motivo per prendere sul serio la matematica negli studi di ingegneria e per cercare di capirla bene.

1.1.1 Numeri naturali

I *numeri naturali* sono

$$0, 1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots \tag{1}$$

L'insieme dei numeri naturali è indicato con $\mathbb{N}$. In $\mathbb{N}$ sono definite l'operazione $+$ di *somma* e l'operazione $\cdot$ di *prodotto* (quando ciò non genera confusione, si può omettere il simbolo dell'operazione di prodotto: $m \cdot n = mn$). Ogni numero naturale può essere ottenuto da 0 sommando ripetutamente 1:

$$0, 0+1 = 1, 0+1+1 = 1+1 = 2, 0+1+1+1 = 2+1 = 3, \dots, 0+1+\dots+1 = n, \dots$$

Il numero $n+1$ è diverso da tutti quelli che lo precedono, $0, 1, 2, \dots, n$, quindi l'insieme dei numeri naturali è infinito.

Nei numeri naturali la *sottrazione* non è sempre definita: $5 - 2 = 3$ ha senso in $\mathbb{N}$, ma $2 - 5$ non definisce un numero naturale.

La divisione in $\mathbb{N}$ presenta anch'essa dei problemi. Essa dovrebbe fungere da operazione inversa della moltiplicazione, così che $1 : 2 = x$ varrebbe se $2 \cdot x = 1$. Nessun numero $x \in \mathbb{N}$ soddisfa questa relazione. E' invece definita in $\mathbb{N}$ l'operazione di *divisione con resto*. Se m, n sono numeri naturali, $n \neq 0$, allora esistono (e sono unici) due numeri naturali q e r per cui

$$m = nq + r \text{ e } 0 \leq r < n. \tag{2}$$

Scriviamo talvolta $m : n = q$ con resto r: il *dividendo* è m, il *divisore* è n, il *quoziente* è q e il *resto* è r. Per esempio, $13 = 5 \cdot 2 + 3$ può essere letta come $13 : 5 = 2$ con resto 3, ma non come $13 : 2 = 5$ con resto 3 (perché $3 > 2$). Quando il resto è $r = 0$, diciamo che $m = nq$ è *divisibile* per n e che n è un *divisore* di m. Un numero naturale $p \neq 0, 1$ è *primo* se ha come unici divisori p e 1. Per esempio, $6 = 2 \cdot 3$ e $4 = 2 \cdot 2$ non sono primi (sono *composti*): i divisori di 6 sono $1, 2, 3, 6$, mentre quelli di 4 sono $1, 2, 4$. I numeri 2 e 3, invece, sono primi.

I numeri primi sono infiniti, anche se la maniera in cui sono distribuiti non è stata a oggi del tutto chiarita e probabilmente non lo sarà mai. I numeri primi tra 1 e 100 sono:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.$$

Un numero naturale $n > 1$ può essere scomposto in maniera unica come prodotto di numeri primi. Per esempio, $12 = 2^2 \cdot 3$. In generale, indicando con p_j il j-esimo numero primo (così che $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$), ogni $n \geq 1$ può essere scritto in maniera unica nella forma:

$$n = p_1^{m_1} p_2^{m_3} \dots p_j^{m_j},$$

dove gli esponenti $m_1, m_2, \ldots, m_{j-1} \geq 0$ e $m_j > 0$ sono numeri naturali. In questa scrittura, p_j è il più grande numero primo che divide n.

1.1.2 I numeri interi

I numeri interi sono $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$. Il loro insieme è indicato con $\mathbb{Z}$ (dal tedesco *Zahlen*, "numeri"). I numeri naturali sono un sottoinsieme dei numeri interi, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. I numeri $1, 2, 3, \ldots$ vengono anche chiamati *interi positivi*, mentre $-1, -2, -3, \ldots$ sono *interi negativi*. Alla scuola dell'obbligo impariamo la definizione di somma e prodotto per numeri interi, con curiose regole per determinare il segno del prodotto in base al segno dei suoi fattori. Per esempio,

$$1 \cdot 1 = 1,\ 1 \cdot (-1) = (-1) \cdot 1 = -1,\ (-1) \cdot (-1) = 1.$$

In realtà, le regole sui segni sono del tutto sensate. Se -2 è un debito di due euro, allora $3 \cdot (-2)$ significa acquisire tre volte un debito di due euro, cioè un debito di sei: $3 \cdot (-2) = -6$. Analogamente, $(-3) \cdot (-2)$ può essere interpretato come vedersi condonato (non attribuito!) un debito di due euro per tre volte, ciò che produce un miglioramento della nostra posizione finanziaria per sei euro, $(-3) \cdot (-2) = 6$. Vedremo più avanti che queste definizioni dettate dal "buon senso" (cioè, dalle particolarissime applicazioni da cui queste definizioni hanno orgine) sono le uniche possibili se si vogliono avere le usuali proprietà delle operazioni di somma e prodotto.

In $\mathbb{Z}$ possiamo calcolare le differenze senza imporre condizioni sorta: $5-2 = 3$ come in $\mathbb{N}$, ma in $\mathbb{Z}$ ha senso anche $2 - 5 = -3$. In $\mathbb{Z}$ abbiamo la divisione con resto, definita come in (2). Per avere una divisione senza resto, bisogna estendere ulteriormente il nostro campo numerico.

1.1.3 I numeri razionali

I numeri razionali sono quelli che possono essere espressi nella forma $q = \frac{m}{n}$, dove $m, n \in \mathbb{Z}$ ($n \neq 0$) e dove $\frac{mp}{np} = \frac{m}{n}$ se $p \neq 0$ è intero. L'insieme dei numeri razionali è indicato con $\mathbb{Q}$ e possiamo pensare $\mathbb{Z}$ come a un sottoinsieme di $\mathbb{Q}$, identificando $m = \frac{m}{1}$ quando m è un intero. Somma e prodotto di numeri razionali sono definiti da:

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq},\ \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq}{nq} + \frac{np}{nq} = \frac{mq + np}{nq}.$$

Somma e prodotto verificano le "proprietà di campo". Per ogni scelta di x, y, z in $\mathbb{Q}$, cioè,

1. (*proprietà associativa di* $+$) $(x+y)+z = x+(x+y)$ (quindi nell'espressione $x+y+z$ il risultato non dipende dall'ordine in cui svolgiamo le operazioni);

2. (*esistenza dell'elemento neutro di* $+$) $x + 0 = 0 + x = x$;

3. (*esistenza dell'elemento inverso rispetto a* $+$) esiste x' in modo che $x+x' = 0$ (indichiamo $x' = -x$, l'*opposto* di x);

4. (*proprietà commutativa di* $+$) $x + y = y + z$;
5. (*proprietà associativa di* $\cdot$) $(xy)z = x(xy)$;
6. (*esistenza dell'elemento neutro di* $\cdot$) $x1 = 1x = x$;
7. (*esistenza dell'elemento inverso rispetto a* $\cdot$) se $x \neq 0$, esiste x' in modo che $x \cdot x' = 1$ (indichiamo $x' = x^{-1} = 1/x$, il *reciproco* di x);
8. (*proprietà commutativa di* $\cdot$) $xy = yx$;
9. (*proprietà distributiva di* $\cdot$ *rispetto a* $+$) $(x + y)z = (xz) + (yz)$ (abbiamo poi la convenzione per cui i prodotti vengono calcolati prima delle somme, per cui possiamo scrivere anche $(x + y)z = xz + yz$).

Il reciproco di $x = \frac{m}{n}$ (con $m, n \neq 0$) è $x^{-1} = \frac{n}{m}$: $\frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m} = \frac{mn}{nm} = 1$.

Se X è un insieme in cui sono definite due operazioni $+$ e $\cdot$ che soddisfano le proprietà della lista, dove 0 e 1 sono particolari elementi di X, diciamo che X è un *campo*.

In $\mathbb{Q}$ (in un campo, più in generale), abbiamo la divisione senza resto. Scriviamo $a : b = q$ se $a = bq$ (la divisione è l'operazione inversa del prodotto). Ora, se $b \neq 0$ e a sono razionali, abbiamo che:

$$a = bq \text{ se e solo se } b^{-1}a = b^{-1}(bq) = (b^{-1}b)q = 1q = q,$$

cioè, definiamo $q = b^{-1}a$. Abbiamo così che $a : b = b^{-1}a$ è ben definita ed è l'operazione inversa della moltiplicazione.

Dalle sole proprietà di campo possiamo ricavare molte proprietà delle operazioni di somma e prodotto tra numeri razionali. Vediamo un esempio.

Proposizione 1.1 (Legge di annullamento del prodotto)**.** *Se $x, y \in \mathbb{Q}$, allora $xy = 0$ se e solo se $x = 0$ o $y = 0$.*

Dimostrazione. Iniziamo mostrando che $x \cdot 0 = 0$. Abbiamo che

$$x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0, \tag{3}$$

dove abbiamo usato la proprietà dello 0 e la proprietà distributiva. Sommando a sinistra e destra l'opposto $-x \cdot 0$ di $x \cdot 0$, abbiamo che

$$\begin{aligned} 0 &= x \cdot 0 + (-x \cdot 0) \\ &= [x \cdot 0 + x \cdot 0] + (-x \cdot 0) \\ &= x \cdot 0 + [x \cdot 0 + (-x \cdot 0)] \\ &= x \cdot 0 + 0 \\ &= x \cdot 0, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la definizione di opposto, (3), la proprietà associativa della somma, ancora la definizione di opposto e la proprietà di 0. Per la proprietà commutativa del prodotto, abbiamo quindi che se $y = 0$ o $x = 0$, allora $xy = 0$.

Mostriamo ora l'implicazione inversa. Se $xy = 0$ e $x \neq 0$, allora x ha reciproco, quindi

$$0 = x^{-1} \cdot 0 = x^{-1}(xy) = (x \cdot x^{-1})y = 1y = y,$$

quindi $y = 0$. Abbiamo usato qui la proprietà diretta ($x^{-1}0 = 0$), l'ipotesi, la proprietà associativa del prodotto, la definizione di reciproco e la proprietà che definisce 1. $\square$

Non dimostreremo in questa maniera le proprietà dei numeri razionali che avete visto a scuola e daremo per scontato che le stesse proprietà valgono per i numeri reali. E' però interessante, utile e gratificante provare a dimostrare alcune di queste proprietà.

Esercizio 1.1. *Mostrare alcune delle seguenti proprietà usando le proprietà di campo.*

(i) *Se x e y sono razionali, allora $(-x)y = -(xy)$.*

(ii) *Se x e y sono razionali, allora $(-x)(-y) = xy$.*

(iii) *Se x e y sono razionali e non nulli, allora $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.*

(iv) *Se x è razionale, allora $-(-x) = x$ e, se x è non nullo, allora x^{-1} è non nullo è $[x^{-1}]^{-1} = x$.*

Nei razionali (quindi negli interi e nei naturali) abbiamo una *relazione d'ordine* $\leq$ (*minore o uguale*). Per esempio,

$$-5/3 \leq -1 \leq 0 \leq 1/2 \leq 1/2 \leq 7/5.$$

Scriviamo $x < y$ se $x \leq y$ e $x \neq y$. Le principali proprietà di questa relazione d'ordine (da cui, per inciso, tutte le altre possono essere dedotte) sono le seguenti. Per ogni scelta di x, y, z in $\mathbb{Q}$, si hanno le seguenti proprietà:

1. (*riflessiva*) $x \leq x$;
2. (*antisimmetrica*) se $x \leq y$ e $y \leq x$, allora $x = y$;
3. (*transitiva*) se $x \leq y$ e $y \leq z$, allora $x \leq z$;
4. (*ordine e somma*) se $x < y$, allora $x + z < y + z$;
5. (*ordine e prodotto*) se $x < y$ e $z > 0$, allora $xz < yz$.

Se su un campo è definita una relazione d'ordine con queste proprietà, diciamo che il campo è *ordinato*.

Vediamo come alcune proprietà legate alla relazione d'ordine seguano facilmente da queste proprietà di base.

Proposizione 1.2. *Siano x, y razionali. Se $x > 0$ e $y > 0$, o se $x < 0$ e $x < 0$, allora $xy > 0$. Se $x < 0 < y$, allora $xy < 0$.*

In particolare, se $x \neq 0$, allora $x^2 > 0$. Quindi, $1 = 1^2 > 0$.

Dimostrazione. 1. Se $0 < x$ e $0 < y$, allora $0 = 0 \cdot y < x \cdot y$ per la proprietà che lega ordine e prodotto.

2. Se $x < 0$, allora $0 = (-x) + x < (-x) + 0 = -x$, cioè $-x > 0$. Quindi, $0 < (-x)y = -(xy)$ (vedi esercizio 1.1 (i)), da cui $xy < 0$.

3. Esercizio .

□

L'insieme dei numeri razionali è *denso* rispetto alla proprietà d'ordine. Se $x < y$, esiste un razionale z tale che $x < z < y$.[2] Un numero z con la proprietà voluta è $z = \frac{x+y}{2}$. Da un lato, $x < \frac{x+y}{2}$ se e solo se $2x < x + y$ se e solo se $x < y$, che è la nostra ipotesi. Alla stessa maniera si mostra che $\frac{x+y}{2} < y$.

Una conseguenza della densità è che vi sono infiniti numeri razionali compresi tra due numeri razionali distinti. Con tutto ciò, i numeri razionali non sono sufficienti a esprimere rapporti tra semplici oggetti geometrici; meno che mai a rappresentare efficacemente il mondo dei fenomeni. Vediamo un esempio famoso.

Se un quadrato ha lato 1 e $x > 0$ è la misura della sua diagonale, per il teorema di Pitagora

$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

Supponiamo che $x = \frac{m}{n}$, dove m e n sono naturali positivi che non hanno fattori primi in comune (cioè, sono *primi tra loro*). Abbiamo che $2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m^2}{n^2}$, cioè $m^2 = 2n^2$ è pari. Se m fosse dispari, anche m^2 sarebbe dispari, quindi $m = 2k$ con k naturale positivo. Allora,

$$4k^2 = (2k)^2 = m^2 = 2n^2, \text{ da cui } 2k^2 = n^2.$$

Per lo stesso ragionamento, l'ultima relazione implica che anche n è pari, quindi che m e n non sono primi tra loro: assurdo.

Vedremo più avanti come espandere ulteriormente il nostro campo numerico per accomodare $\sqrt{2}$ e altre quantità importanti, senza rinunciare alle proprietà di campo ordinato. Vediamo qui come $x = \sqrt{2}$ può essere approssimata da numeri razionali, ammettendo che esista. Scegliamo come "margine di errore" 1. Poiché $1^2 = 1 < 2 < 2^2 = 4$, abbiamo che $1 < \sqrt{2} < 2$. Passiamo al margine d'errore $1/10 = 0,1$. Abbiamo che $(1.4)^2 = 1,96 < 2 < (1,5)^2 = 2,25$, quindi

$$1 < 1,4 < \sqrt{2} < 1,5 < 2.$$

Procedendo in questa maniera (ve ne sono di molto più efficienti!), per ogni margine di errore $1/10^n$ (con n naturale) troviamo due numeri decimali (quindi razionali) $a_n < b_n$ con n cifre dopo la virgola, tali che $b_n = a_n + 1/10^n$ e $a_n^2 < 2 < b_n^2$. Inoltre,

$$a_0 = 1 < a_1 = 1,4 < a_2 < \cdots < a_n < \sqrt{2} < b_n < \cdots < b_2 < b_1 = 1,5 < b_0 = 2.$$

[2] Questa proprietà non vale in $\mathbb{Z}$! Non esiste un numero intero n tale che $2 < n < 3$.

Il numero reale-non-razionale $\sqrt{2}$ è approssimabile da sotto e da sopra mediante numeri razionali, con margini di errore sempre più piccoli. Nel nostro caso, le approssimazioni da sotto crescono, mentre quelle da sopra decrescono.

Questa maniera di procedere verrà meglio spiegata quando parleremo delle successioni e dei loro limiti.

1.2 Insiemi e funzioni

1.2.1 Linguaggio e logica

Il linguaggio della matematica (delle scienze esatte in generale) ha un alto livello di formalizzazione.

- Ogni termine o simbolo usato deve avere un significato preciso.
- Ogni frase deve potere essere interpretata in maniera non ambigua.

Per esempio,

(a) 17 *è un numero sfortunato*

non è una frase matematicamente corretta, a meno che non si abbia un criterio preciso (una *definizione*) per determinare cosa sia un numero sfortunato. Invece, la frasi

(b) ogni numero naturale divisibile per 6 *è divisibile anche per* 2 *e per* 3

e

(c) ogni numero naturale divisibile per 6 *è divisibile anche per* 4

sono frasi perfettamente lecite (una è vera, l'altra è falsa).

In matematica c'è una preferenza per l'uso di simboli al posto delle parole. Le ragioni sono diverse:

- quando definiamo i simboli, siamo obbligati a rendere il loro significato preciso;
- i simboli sono più facili da manipolare (provate a immaginare un calcolo algebrico "a parole") ed è più semplice verificare la correttezza di una frase scritta in maniera simbolica;
- i simboli sono indipendenti dalla lingua in cui si scrive.

Lo sviluppo di linguaggi altamente simbolici ha preceduto lo sviluppo dei computer e ne è stata una delle premesse. Chiunque di voi ha esperienza di programmazione, sa che il livello di formalizzazione di un linguaggio di programmazione è superiore a quello di un testo di matematica (ciò che, tra l'altro, rende il codice informatico difficile da leggere).

Le frasi matematiche contengono *variabili.* Di seguito alcuni esempi.

(i) *Il numero naturale x è divisibile per* 2.

(ii) *Ogni numero naturale x che sia divisibile per* 2 *è anche divisibile per* 4.

(iii) *Esistono terne x, y, z di numeri naturali positivi tali che $x^2 + y^2 = z^2$.*

(iv) *Esistono infinite coppie x, y di numeri primi tali che $y = x + 2$.*

(v) *Ogni student* x immatricolat* a Unibo nell'anno accademico 2024/25 ha un numero di matricola y, che è intero e positivo.*

Alcune di di queste frasi sono vere, altre false, altre non sono formulate in maniera che le si possa classificare come vere o false. Le frasi vere sono i *teoremi.*

Quantificatori. Mentre le frasi (ii-v) sono formulate in maniera da essere vere o false, la frase (i) di per sé non è né vera né falsa, perché è vera per alcuni valori di x (per esempio $x = 6$) e falsa per altri (per esempio $x = 3$). La differenza tra la frase (i) e le altre è che le variabili che appaiono in (ii-v) sono precedute da *quantificatori* "per ogni" o "esiste": l'affermazione non riguarda il singolo valore di x, ma l'insieme di tutte le possibili x.

Più o meno consapevolmente, la differenza tra variabili quantificate e non quantificate la s'incontra quando si studiano le equazioni e le disequazioni. La frase

$$x \text{ \emph{è razionale e} } 3x + 2 = 0$$

non è di per sé vera né falsa. Posso interpretarla come una *equazione* nella variabile non quantificata x. L'insieme dei numeri razionali per cui la frase è vera ($x = -2/3$) è l'insieme delle *soluzioni* dell'equazione. Lo stesso discorso vale per la frase

$$x \text{ \emph{è razionale e} } 3x + 2 > 0,$$

che ha come soluzioni tutti i razionali $x > -2/3$.

Delle restanti frasi della lista, (ii) è falsa, (iii) è vera ("terne pitagoriche"), di (iv) al momento non si sa ("problema dei numeri primi gemelli"), (v) è vera.

Quantificare le variabili in una frase è così importante che si sono creati dei simboli per i quantificatori, che si usano da decenni in tutto il mondo. Il simbolo per "per ogni" è $\forall$ (dal tedesco *alle*, "tutti") e quello per "esiste" è $\exists$ ("non esiste" viene anche usato a volte, $\nexists$). In queste note li useremo di tanto in tanto.[3]

Congiunzioni in matematica. Le frasi di base della matematica contengono numeri, relazioni, funzioni, insiemei, eccetera, come possono essere le frasi "$x + y = 1$" o "$\forall x \in \mathbb{Q} \exists y \in \mathbb{Q} : x + y = 1$". Possiamo formare frasi più complesse (in genere più interessanti) legando queste frasi elementari mediante *congiunzioni* (o *connettivi logici*). Le congiunzioni che si usano sono *non* ($\neg$), *e* ($\wedge$), *o* ($\vee$), *se ... allora* ($\Longrightarrow$), *se e solo se* ($\Longleftrightarrow$). In italiano, come in molte lingue, "o" ha due significati. In matematica, "o" è usato nel senso del latino *vel* (in inglese

[3] Si potrebbero introdurre altri quantificatori, come per esempio "esiste ed è unico", o "ne esistono al più due", eccetera. Ciascuno di questi può essere definito in base a $\forall$ e $\exists$. Per esempio, "fissati a e b razionali, l'equazione della variabile x: $x^2 + ax + b = 0$, ha al più due soluzioni razionali" può essere tradotta in "per ogni x_1 e x_2 razionali, se $x = x_1$ e $x = x_2$ sono soluzioni di $x^2 + ax + b = 0$ e $x_1 \neq x_2$ (cioè, sono due soluzioni distinte), allora per ogni x_3 razionale, se $x_3 \neq x_1$ e $x_3 \neq x_2$, allora x_3 non è soluzione di $x^2 + ax + b$". Con un po' di esperienza, si riconoscono facilmente i quantificatori leciti e non c'è bisogno di ricondurli ai due quantificatori standard $\forall$ e $\exists$.

tecnico vi si riferisce come *inclusive or*). Date due frasi P e Q di cui possiamo dire se sono vere o false:

($\neg$) la frase $\neg P$ è vera se e solo se la frase P è falsa;

($\wedge$) la frase $P \wedge Q$ è vera se e solo se entrambe P e Q sono vere;

($\vee$) la frase $P \vee Q$ è vera se e solo se almeno una delle frasi P e Q è vera;

($\implies$) la frase $P \implies Q$ è vera se e solo se Q è vera o se P e Q sono entrambe false (!);

($\iff$) la frase $P \iff Q$ è vera se e solo se P e Q sono entrambe vere, o false.

Una maniera efficace per sintetizzare quanto abbiamo appena visto sono le *tavole di verità*, in cui le congiunzioni diventano operazioni sull'insieme $\{V, F\}$ (V sta per "vero", F per "falso").

p	$\overline{p}$
V	F
F	V

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \dot{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Figura 1: Da https://www.testbusters.it/logica-delle-proposizioni/, dove $\neg P = \bar{P}$.

L'uso matematico dell'implicazione ("se ... allora", $\implies$) sembra essere diverso da quello comune. La frase "se i cavalli hanno quattro zampe, allora Bologna è in Emilia-Romagna" è vera, così come "se i cavalli hanno tre zampe, allora Bologna è in Emilia-Romagna", o "se i cavalli hanno tre zampe, allora Bologna è nelle Marche". In questa fiera dell'assurdo, l'unica frase falsa è "se i cavalli hanno quattro zampe, allora Bologna è nelle Marche". La buona notizia è che nel concreto ragionare matematico, nelle scienze esatte in genere, frasi di questo tipo non si presentano mai[4].

Vediamo un esempio più convenzionale. Supponiamo di volere validare la frase "sia x un intero positivo: se x è divisibile per 6, allora x è divisibile per

[4]Frasi di questo tipo appaiono spesso nelle scienze più empiriche. Per esempio, "sia x un topo: se x non dorme per tre giorni di fila, allora x smette di produrre l'enzima A". Nella frase non si cerca di trovare un nesso causale tra il sonno e la produzione dell'enzima A; nemmeno vi si accenna. Si dice semplicemente che ogni volta che a un topo è stato impedito di dormire per 72 ore, la produzione di quell'enzima è cessata. Quando non glielo s'è impedito, stando alla frase, la produzione può essere cessata o meno.

3", verificandone la verità caso per caso. L'unica possibilità di confutarne la verità è di trovare un numero x che sia divisibile per 6 (ipotesi vera), ma che non sia divisibile per 3 (tesi falsa). In tutti gli altri casi, l'implicazione non viene invalidata: non se $x = 5$ o $x = 9$ (in cui l'ipotesi non vale), non se $x = 12$ (in cui l'ipotesi vale, ma vale anche la tesi).

Rivedremo le congiunzioni quando parleremo di insiemi.

La negazione, i quantificatori e le altre congiunzioni La frase "non tutti i cani abbaiano" è equivalente a "esiste un cane che non abbaia": la prima frase è vera se e solo se è vera la seconda. Analogamente, "non esistono mammiferi con le branchie" equivale a "ogni mammifero è privo di branchie".

Scriviamo $Q \equiv R$ se due enunciati Q e R sono equivalenti. Data una proprietà $P(x)$ che dipende dalla variabile x abbiamo, in generale

$$\neg(\forall x \in A: \ P(x)) \quad \equiv \quad \exists x \in A: \ \neg P(x), \tag{4}$$

$$\neg(\exists x \in A: \ P(x)) \quad \equiv \quad \forall x \in A: \ \neg P(x): \tag{5}$$

la negazione $\neg$ "attraversa" i quantificatori scambiandoli tra loro (!). E' veramente curioso che la logica dei nostri discorsi quotidiani abbia delle proprietà di tipo algebrico.

La frase "non è vero che Mario è nato a Bologna e risiede a Casalecchio" equivale a "Mario non è nato a Bologna, o Mario non risiede a Casalecchio":

$$\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q). \tag{6}$$

Analogamente,

$$\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q): \tag{7}$$

"non è vero che Maria ha un'auto o un motoscafo" equivale a "Maria non ha né un'auto, né un motoscafo".

La negazione, cioè, si "distribuisce" su *e* e *o*, scambiandoli tra loro (!).

Definizioni, teoremi e dimostrazioni Una *definizione* è una frase in cui viene introdotto un nuovo oggetto, termine, o simbolo, spiegandone il significato utilizzando oggetti, termini e simboli di cui già conosciamo il significato. Vediamo subito un esempio che già conoscete: la definizone di potenza.

Definizione 1.1 (di potenza intera di un numero)**.** *Siano $q \in \mathbb{Q}$ e $n \in \mathbb{N}$. Se $n \geq 1$, la* **potenza n-esima di** *q è*

$$q^n = q \cdot q \dots q \textit{dove il fattore } q \textit{ appare } n \textit{ volte.} \tag{8}$$

Se $q \neq 0$, definiamo

$$q^0 = 1.$$

L'espressione 0^0 non è definita.

Nell'espressione q^n, q è la **base** *della potenza e n è l'***esponente***.*

Per esempio,

$$q^3 = q \cdot q \cdot q$$

In questa definizione, la nuova espressione è q^n e i nuovi termini sono *potenza (con esponente naturale), base, esponente*. Sono definiti in termini del prodotto in $\mathbb{Q}$. L'espressione 0^0 non viene definita, quindi non ha significato.

Esercizio 1.2. *Definire la sottrazione e la divisione utilizzando le operazioni di somme e prodotto, e le nozioni di opposto e reciproco.*

In matematica, tutti i termini e gli oggetti che si usano devono essere definiti... con poche eccezioni. Il problema è che in questa maniera dovremmo, a ritroso, avere infinite definizioni. Per esempio, dovremmo definire *numero razionale, numero intero, moltiplicazione* in termini di altri oggetti e operazioni. Ma questi altri oggetti e operazioni dovrebbero a loro volta essere definiti in termini di oggetti ancora più elementari, e così via, senza fine. Alcuni oggetti e termini vengono introdotti senza definirli: sono gli **oggetti e termini primitivi** di una teoria.

Questa maniera precisa e gerarchica di strutturare il linguaggio matematico risale a Euclide e ai suoi *Elementi* e fu sviluppata in maniera simbolica tra la metà dell'Ottocento e i primi vent'anni del Novecento. Con l'avvento dei calcolatori elettronici emerse la necessità di sviluppare "linguaggi" in cui scrivere le istruzioni che i calcolatori avrebbero dovuto eseguire. Questi linguaggi sono strutturati secondo il modello del linguaggio matematico. In particolare, essi comprendono una serie di oggetti, operazioni e nomi definiti a priori (primitivi). Altri oggetti, operazioni e nomi vengono *definiti* da sviluppatori e sviluppatrici, tipicamente mediante *algoritmi* (procedure). Questi nuovi oggetti possono essere a loro volta usati da altri per definire oggetti sempre più complessi, esattamente come accade in matematica. Nella programmazione, la gerarchia non è solo interna a un linguaggio di programmazione, ma coinvolge diversi linguaggi! Il linguaggio A, più primitivo e "vicino alla macchina", viene usato per definire un linguaggio B, a un livello più alto. Le istruzioni del linguaggio B vengono "tradotte" nel linguaggio A, quindi passate alla macchina. Si possono avere linguaggi $A, B, C, \dots$, con programmi che traducono gli uni negli altri... Per noi le cose saranno più semplici.

Un *enunciato* è una frase in linguaggio matematico di cui si possa dire se è vera o se è falsa. Per esempio,

(i) per ogni triangolo ABC nel piano, le misure dei lati soddisfano $AB+BC \geq AC$.

(ii) se in un quadrangolo $ABCD$ le misure dei lati soddisfano $AB + CD = AC + BD$, allora il quadrangolo è un rombo,

sono enunciati, mentre

(iii) il triangolo ABC ha un angolo retto in A

non lo è. Più precisamente, (i) è vera (è la *disuguaglianza triangolare*); (ii) è falsa (perché si trovano facilmente quadrangoli per cui l'ipotesi è vera, ma la tesi è falsa); (iii) contiene una "variabile non quantificata" (il triangolo ABC) e la sua verità dipende dal valore della variabile (dal particolare triangolo). La frase (ii) potrebbe essere riscritta come

(ii') per ogni quadrangolo $ABCD$: se le misure dei lati soddisfano $AB+CD = AC + BD$, allora $ABCD$ è un rombo.

La variabile $ABCD$ (il quadrangolo) era (implicitamente) quantificata. E' buona norma esplicitare sempre la quantificazione ($\exists, \forall$). Come vedremo, questo ci aiuta molto nel dimostrare, o nel confutare, un enunciato.

Un enunciato vera è un *teorema*. Quasi tutti i teoremi possono essere scritti nella forma

$$\textit{Ipotesi} \implies \textit{Tesi.}$$

Il teorema (i), per esempio, può essere scritto come segue.

Teorema 1.3 (Disuguaglianza triangolare nel piano)**.** *Se* ***(ipotesi)*** *ABC è un triangolo nel piano,*

allora

(tesi) *$AB + BC \geq AC$.*

Le ipotesi contengono le conoscenze che abbiamo del nostro oggetto, le tesi contengono nuove conoscenze che lo riguardano.

1.2.2 Insiemi

Un *insieme* è un oggetto matematico con la proprietà che, per un altro oggetto matematico a, si possa decidere se *a appartiene* ad A o se *a non appartiene* ad A [5],

$$a \in A \text{ o } a \notin A.$$

Diciamo che *a è un elemento di A*.

Le due maniere più comuni di definire insiemi sono:

(i) *l'elenco* dei suoi elementi, come in

$$A = \{1, a, \sqrt{2}, \square\},$$

l'insieme i cui (quattro) elementi sono $1, a, \sqrt{2}, \square$;

(ii) come l'insieme A degli elementi x tali che una data proprietà $P(x)$ è vera, come in

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : \ 3x - 2 > 0\}.$$

Si noti come la frase $P(x) = x \in \mathbb{Q}$ e $3x - 2 > 0$ contenga la variabile x *non quantificata*, così che la domanda se per un dato x $P(x)$ è vera o $P(x)$ è falsa ha senso.

[5]Senza restrizioni sugli oggetti a di cui ci si chiede se appartengano o meno ad A si incorre in paradossi; vedi Paradosso di Russell su Wikipedia. Nell'universo in cui noi ci muoveremo, questi paradossi non possono generarsi.

Nel caso (i), l'ordine con cui gli elementi sono elencati non ha importanza,

$$\{1, a, \sqrt{2}, \square\} = \{\sqrt{2}, a, \square, 1\} = \dots$$

L'elencazione può essere usata solo per insiemi finiti, ma a volte usiamo una scrittura simile anche per insiemi infiniti, quando è chiaro a cosa si riferisce. Per esempio, l'insieme dei numeri pari è

$$\{n \in \mathbb{N} : \ \exists m \in \mathbb{N} \ n = 2m\} = \{0, 2, 4, \dots, 2m, 2(m+1), \dots\}.$$

Due insiemi A, B sono *uguali*, $A = B$, se e solo se hanno gli stessi elementi,

$$\forall x : \ x \in A \iff x \in B.$$

Definizione 1.2 (di sottoinsiem)**.** *Siano A, B insiemi. Diciamo che A è un* **sottoinsieme** *di B, $A \sqsubseteq B$, se ogni elemento di A è anche elemento di B,*

$$\forall x \in A \implies x \in B.$$

Definizione 1.3 (di unione, intersezione, differenza)**.** *Siano A, B insiemi:*

(cup) la loro **unione** *$A \cup B$ è*

$$A \cup B = \{x : x \in A \ o \ x \in B\};$$

($\cap$) la loro **intersezione** *$A \cap B$ è*

$$A \cup B = \{x : x \in A \ e \ x \in B\};$$

($\setminus$) la loro **differenza** *$A \setminus B$ è*

$$A \setminus B = \{x : x \in A \ e \ x \notin B\}.$$

Definizione 1.4. *Una* **coppia ordinata** *(a, b) di elementi a, b è un oggetto definito dai due elementi e dall'ordine in cui vengono scritti,*

$$(a, b) = (b, a) \ \textbf{\textit{se e solo se}} \ a = b.$$

Il **prodotto cartesiano** *$A \times B$ di due insiemei A e B è*

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \ e \ b \in B\}.$$

Esercizio 1.3. *Mostrare che $A \times B = B \times A$ se e solo se $A = B$.*

1.2.3 Funzioni

Definizione 1.5. *Siano A, B insiemi. Una* **funzione** $f : A \to B$ *associa a ogni elemento $x \in A$ uno e un solo elemento $y = f(x)$.*

Chiamiamo A il **dominio** *(o* **insieme di partenza***) di f e B il* **codominio** *(o* **insieme di arrivo***) di f. Se $f(x) = y$, diciamo che y è la* **immagine** *di x mediante f e che x è una* **controimmagine** *di x mediante f.*

Se $C \subseteq A$,

$$f(C) = \{f(x) : x \in C\}$$

*è l'***immagine di** C **mediante** f. *In particolare, $f(A)$ è detta l'***immagine** *di f.*

Quando vogliamo mettere in rilievo l'azione di f su un singolo elemento x di A scriviamo $x \mapsto f(x)$, o $x \mapsto y$ (se y è l'immagine di x). Per esempio, se la funzione $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ è data da $f(x) = x^2$, scriviamo $f : x \mapsto x^2$ o, in un caso particolare, $f : -2 \mapsto 4$.

Le espressioni chiave della definizione sono *per ogni* (riferita agli elementi del dominio) e *uno e uno solo* (riferita agli elementi del dominio). Per esempio (anticipando i numeri reali),

$$y = f(x) \text{ se } y \in \mathbb{R} \text{ e } y^2 = x,$$

che cerca di definire $y = \sqrt{x}$, non definisce una funzione. Se $x < 0$, infatti, non esiste y tale che $y^2 = x$ (abbiamo violato la condizione per cui si deve poter definire $f(x)$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$). Se $x > 0$ e $y^2 = x$, anche $(-y)^2 = x$, così abbiamo due scelte per l'immagine di x, ciò che non è ammesso.

Una nozione importante è quella di controimmagine di un insieme.

Definizione 1.6. *Siano $f : A \to B$ una funzione e $D \subseteq B$. La* **controimmagine di** D *mediante f è:*

$$f^{-1}(D) = \{x \in A : f(x) \in D\}. \tag{9}$$

In particolare, la *controimmagine di un elemento $y \in B$* è un insieme!

$$f^{-1}(\{y\}) = \{x \in A : f(x) = y\}. \tag{10}$$

Conosciamo dalle superiori cos'è il grafico di una funzione reale di una variabile reale. La nozione di grafico si estende a tutte le funzioni.

Definizione 1.7. *Il* **grafico** *di una funzione $f : A \to B$ tra due insiemi A e B è:*

$$\mathit{Grafico}(f) = \{(a, f(a)) : a \in A\} \subseteq A \times B.$$

L'operazione più importante tra funzioni è la *composizione*.

Definizione 1.8 (Composizione di funzioni)**.** *Siano $f : A \to B$, $g : C \to D$, e supponiamo che $f(A) \subseteq B$. La* **composizione** $g \circ f : A \to D$ *di f e g è definita da*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

La condizione $f(A) \subseteq C$ è di fondamentale importanza: per ogni $x \in A$, $f(x) \in f(A)$ e, se vogliamo calcolare $g(f(x))$, sarà bene che $f(x) \in C$.

La composizione è associativa,

Esercizio 1.4. *Siano $f : A \to B$, $g : C \to D$ e $h : E \to F$ funzioni per cui $g \circ f$ e $h \circ (g \circ f)$ sono definite. Allora, anche $h \circ g$ e $(h \circ g) \circ f$ sono definite e*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Vediamo ora alcune funzioni particolari.

Definizione 1.9 (Funzione identica)**.** *Sia A un insieme. La funzione $I_A : A \to A$ definita da $I_A(x) = x$ per ogni x in A, è la* **funzione identica su** *A.*

Definizione 1.10 (Funzione costante)**.** *Siano A, B insiemi e sia $b \in B$ fissato. La* **funzione costante** *$K_b : A \to B$ è quella per cui $K_b(x) = b$ per ogni x in A.*

Facendo attenzione a non confondere funzioni e elementi, indicheremo semplicemente $K_b = b$.

Definizione 1.11 (Funzione iniettiva)**.** *Sia $f : A \to B$ una funzione tra gli insiemi A, B. La funzione f è* **iniettiva** *(o $1-1$) se per ogni scelta di $x_1, x_2 \in A$,*

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

Equivalentemente,

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) = f(x_2).$$

Una funzione $f : A \to B$ è iniettiva se e solo se, per ogni $y \in B$, $f^{-1}(\{y\})$ contiene al più un elemento (cioè, contiene un elemento o è vuoto).

Definizione 1.12 (Funzione suriettiva)**.** *Sia $f : A \to B$ una funzione tra gli insiemi A, B. La funzione f è* **suriettiva** *se $f(A) = B$. Cioè, per ogni $y \in B$ esiste $x \in A$ tale che $f(x) = y$: ogni elemento di B è immagine di qualche elemento di A.*

Una funzione $f : A \to B$ è iniettiva se e solo se, per ogni $y \in B$, $f^{-1}(\{y\})$ non è vuoto.

Definizione 1.13 (Funzione biunivoca)**.** *Sia $f : A \to B$ una funzione tra gli insiemi A, B. La funzione f è* **biunivoca** *se è sia iniettiva che suriettiva.*

Una funzione $f : A \to B$ è iniettiva se e solo se, per ogni $y \in B$, $f^{-1}(\{y\})$ contiene esattamente un elemento.

Bisogna qui fare attenzione. Che f sia biunivoca non vuol dire che "a ogni elemento di B viene associato da f uno e un solo elemento di A", perché f va da A a B, non viceversa. Vuold dire, invece, che *ogni elemento di B è immagine di uno e un solo elemento di A.*

La composizione di funzioni ci dà una visuale diversa su iniettività e suriettività.

Definizione 1.14 (Funzione inversa a sinistra e a destra)**.** *Sia $f : A \to B$ una funzione. Una funzione $g : B \to A$ è* **inversa a sinistra per** f *se*

$$g \circ f = I_A; \tag{11}$$

cioè, $g(f(x)) = x$ per ogni $x \in A$.

Una funzione $h : B \to A$ **inversa a destra per** f *se*

$$f \circ h = I_B; \tag{12}$$

cioè, $f(h(y)) = y$ per ogni $y \in B$.

Teorema 1.4. *Sia $f : A \to B$ una funzione. Allora,*

(i) f è suriettiva se e solo se f ha inversa a destra.

(ii) f è iniettiva se e solo se f ha inversa a sinistra.

(iii) f è biunivoca se solo ha una funzione inversa bilatera (che è inversa sia a destra che a sinistra).

Dimostrazione. (i) Sia f suriettiva e sia $y \in B$. Allora esistono $x \in A$ tale che $f(x) = y$. Ne scegliamo uno, e poniamo $x = h(y)$. Abbiamo quindi $f(h(y)) = f(x) = y$, cioè h è inversa a destra.

Viceresa, se h è inversa a destra per f e $y \in B$, allora $x = h(y) \in A$ soddisfa $f(x) = f(h(y)) = y$, quindi f è suriettiva.

(ii) Sia f iniettiva. Fissiamo un elemento a di A. Sia $y \in B$. Se $y = f(x)$ per qualche $x \in A$ (che è unico perché f è iniettiva), poniamo $g(y) = x$. Altrimenti, poniamo $g(y) = a$. Abbiamo quindi: $g(f(x)) = g(y) = x$, cioè g è inversa sinistra per f.

Viceversa, se g è sinistra a destra per f e se $f(x_1) = f(x_2)$, allora $x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$, quindi f è iniettiva.

(iii) Se f è biunivoca, la funzione h definita in (i) con la funzione g definita in (ii). □

Nel caso di una funzione biunivoca $f : A \to B$, chiamiamo $f^{-1} : B \to A$ la sua funzione inversa:

$$f \circ f^{-1} = I_B, \; f^{-1} \circ f = I_A.$$

Quando studieremo funzioni di una variabile reale, ci servirà definire una nozione funzione inversa di funzioni che non sono iniettive, né suriettive.

2 Il principio di induzione e cenni di matematica discreta

2.1 Il principio di induzione

Il *principio di induzione* formalizza matematicamente l'idea di "proprietà ereditaria". Se una certa caratteristica dei batteri si conserva durante la mitosi e se i batteri inizialmente messi in coltura avevano quella proprietà, l'avranno anche tutte le successive generazioni della coltura[6].

Assioma 1 (Principio di induzione matematica)**.** *Sia $A \subseteq \mathbb{N}$. Se:*

(i) $0 \in A$ *e*

(ii) per ogni $n \in A$, anche $n+1 \in A$,

allora $A = \mathbb{N}$.

Questa formulazione del principio di induzione è alquanto ovvia. Il problema è capire come usarla in situazioni concrete. Prima di vedere alcuni esempi, vediamone una formulazione più "semantica".

Corollario 2.1. *Sia $P(n)$ una proprietà che ha senso se la variabile n è un numero naturale. Se*

(i) $P(0)$ è vera e

(ii) per ogni $n \in \mathbb{N}$, se $P(n)$ è vera, anche $P(n+1)$ è vera,

allora $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. Basta applicare il principio di induzione all'insieme $A = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ è vera}\}$. □

L'ipotesi in (ii) che $n \in A$, o che $P(n)$ sia vera, è chiamata *ipotesi induttiva.*

2.2 A cosa serve? Come lo si usa?

Nella sua ovvietà, non è chiaro quando il principio d'induzione possa essere di una qualche utilità. Diamo qui un paio di esempi classici.

Cerchiamo una formula per calcolare

$$f(n) = 0 + 1 + 2 + \cdots + n. \tag{13}$$

Ragionamenti di tipo grafico, come quello nella figura 2.2, suggeriscono che la formula sia

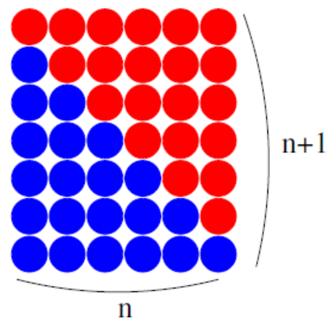
$$f(n) = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{14}$$

In effetti, la figura potrebbe essere considerata una dimostrazione vera e propria, ma vediamo comunque se riusciamo a mostrare (14) col solo ausilio di logica e proprietà dei numeri. Ciò che vogliamo mostrare è che le due espressioni per $f(n)$ coincidono per ogni naturale n: $\forall n \in \mathbb{N} \implies P(n)$, dove

$$P(n) \text{ è la frase "} 0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{"}. \tag{15}$$

[6]E l'evoluzione? L'evoluzione dei batteri prevede che alcune proprietà possano andare perdute (o venire acquistate) durante la mitosi, per esempio a causa di errori nella trascrizione del DNA.

Figura 2: da fR0DDY



(i) $P(0)$ è vera: $0 = \frac{0(0+1)}{2}$.

(ii) Supponiamo che $P(n)$ sia vera e verifichiamo che $P(n+1)$ pure è vera:

$$\begin{aligned} 0+1+\cdots+n+(n+1) &= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) \text{ per } P(n) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}. \end{aligned}$$

Abbiamo mostrato che $0+1+\cdots+n+(n+1) = \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}$, che è appunto $P(n+1)$.

Per il principio di induzione, $P(n)$ è vera per ogni naturale n.

In questo esempio, per trovare la formula da dimostrare abbiamo usato l'intuizione geometrica. Per dimostrarla senza geometria, abbiamo utilizzato l'induzione. La parte "creativa" consiste in problemi come questo nel trovare la formula: il principio d'induzione e alcuni calcoli ci danno la dimostrazione "a colpo sicuro"[7].

Cerchiamo ora una formula per:

$$g(n) = 0^2+1^2+\cdots+n^2, \tag{16}$$

la somma dei quadrati primi n numeri naturali. Per trovare una formula chiusa, torniamo al caso precedente. La figura ci diceva che $0+1+\cdots+n$ può essere utilmente rappresentato come l'area di una porzione d'un rettangolo avente area $n(n+1)$. Per questo l'espressione risulta essere un polinomio di grado 2 in n. Nel nuovo caso non stiamo accostando rettangoli di lato 1, ma parallelepipedi

[7] In molti problemi l'induzione non ci dice nulla, o usarla è molto più complesso: il "colpo sicuro" non è la norma.

a base quadrata di altezza 1 (immaginae o disegnate la figura), ottenendo un solido. E' naturale pernsare che l'area del solido abbia il termine n^3 (volume del cubo di lato n): incrociamo le dita e speriamo che sia un polinomio.

Cioè, cerchiamo una formula del tipo:

$$g(n) = an^3 + bn^2 + cn + d, \tag{17}$$

dove a, b, c, d devono essere trovati. Vediamo come devono essere fatti a, b, c, d per fare funzionare la dimostrazione per induzione. La frase la cui validità da mostrare per ogni naturale n è:

$$Q(n) \equiv \text{"}0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = an^3 + bn^2 + cn + d\text{"}. \tag{18}$$

(i) Ponendo $n = 0$, abbiamo $0 = d$, che subito ci dà uno dei quattro coeficienti.

(ii) Supponendo che (18) per uno specifico valore di n (ipotesi induttiva), per $n + 1$ abbiamo:

$$\begin{aligned} 0^2 + 1^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 &= an^3 + bn^2 + cn + d + (n+1)^2 \text{ per (18)} && (19) \\ &= an^3 + (b+1)n^2 + (c+2)n + 1, && (20) \end{aligned}$$

che vogliamo coincidere con

$$\begin{aligned} g(n+1) &= a(n+1)^3 + b(n+1)^2 + c(n+1) && (21) \\ &= an^3 + (3a+b)n^2 + (3a+2b+c)n + a + b + c. && (22) \end{aligned}$$

Uguagliando le espressioni in (19) e (21), abbiamo il sistema:

$$\begin{cases} a = a \\ b + 1 = 3a + b \\ c + 2 = 3a + 2b + c \\ 1 = a + b + c, \end{cases}$$

che ha soluzioni: $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{6}$.

In conclusione, l'unica formula per cui l'induzione è valida è:

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n. \tag{23}$$

Se ripercorrete il ragionamento, realizzerete che con esso la formula (23) è stata allo stesso tempo trovata e dimostrata (per induzione). Comunque, non è inutile procedere per una volta almeno con i piedi di piombo.

Esercizio 2.1. *Dimostrare (23) per induzione.*

Se volete cimentarvi co la parte creativa, potete fare l'esercizio che segue.

Esercizio 2.2. *Trovare una formula per*

$$0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3,$$

e dimostratela per induzione.

2.3 Elementi di calcolo combinatorio

2.3.1 Permutazioni, disposizioni e fattoriale di un numero

Il *fattoriale di* n è l'espressione $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 2 \cdot 1$. Si definisce $0! = 1$. Nello spirito dell'induzione, possiamo definire il fattoriale *ricorsivamente*:

(i) $0! = 1$,

(ii) $n! = n \cdot (n-1)!$ se $n \geq 1$.

Abbiamo quindi

Sia $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un insieme con n elementi. Una *permutazione* di A è funzione biunivoca $f : A \to A$.

Problema: quante sono le permutazioni di un insieme con n elementi? Poiché il problema dipende solo dal numero di elementi, possiamo supporre $A = \{1, \dots, n\}$. Possiamo inoltre identificare una permutazione di A con una n-upla **ordinata** avente come elementi tutti gli elementi di A: la funzione f può essere rappresentata dalla n-upla

$$(f(1), f(2), \dots, f(n)) :$$

a ogni n-upla in cui ogni elemento di A appare una e una sola volta corrisponde una ben determinata permutazione di A, e viceversa.

Proposizione 2.2. *Il numero di permutazioni di un insieme con* n *elementi è* $n!$.

Dimostrazione senza induzione. L'immagine $f(1)$ di 1 può essere scelta in n maniere diverse. Per ciascuna di esse, l'immagine $f(2)$ di 2 può essere scelta in $n-1$ maniere diverse, perché un elemento è già immagine di 1: quindi l'immagine di 1 e 2 può essere scelta in $n(n-1)$ maniere diverse.Secondo lo stesso ragionamento, l'immagine di $1, 2, 3$ può essere scelta in $n(n-1)(n-2)$ maniere diverse, eccetera.

L'immagine di tutti gli n elementi di A, quindi, può essere scelta in

$$n(n-1) \dots 2 \cdot 1 = n!$$

diverse maniere. □

Esercizio 2.3 $(*)$**.** *Trova:*

(i) il numero di funzioni **iniettive** $f : A \to B$ *da un insieme di* m *elementi in un insieme di* n *elementi*[8]*;*

(ii) il numero di tutte le funzioni $f : A \to A$*, dove* A *ha* n *elementi;*

[8] La funzione f può essere pensata come una m-upla di elementi di n. Se $A = \{1, \dots, m\}$, possiamo identificare f con la m-upla $(f(1), \dots, f(m))$, in cui nessun elemento appare due volte perché f è iniettiva. Queste m-uple sono anche chiamate *disposizioni semplici* di m elementi presi da un insieme di n elementi.

(iii) il numero di tutte le funzioni $f : A \to B$ dove A ha m elementi e B ne ha n.[9]

A ogni sotto insieme C di A possiamo associare la funzione $\chi_C : A \to \{0,1\}$, dove $\chi_C(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in C, \\ 0 \text{ se } x \notin C. \end{cases}$. Verifica che la funzione $C \mapsto \chi_C$ è una biiezione dalla classe dei sottoinsiemi di A alle funzioni $f : A \to \{0,1\}$. A cosa corrispondono $C = A$ e $C = \emptyset$?

Usa ciò e (iii) per calcolare quanti sottoinsiemi ha l'insieme A.[10]

Dimostrazione per induzione. Sia $P(n)$ il numero delle permutazioni di un insieme di n elementi. Chiaramente $P(1) = 1$.

Siano $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ e $A' = \{1, 2, \ldots, n-1\} \subset A$. Ogni permutazione di A è determinata dalla sua restrizione ad A', quindi ci basta trovare il numero delle funzioni iniettive da A' ad A. Se f è una permutazione, l'immagine $f(A') \subset A$ di A' è un insieme B di $n-1$ elementi e di essi ve ne sono in A esattamente n. Per ciascuno di questi B, vi sono esattamente $P(n-1)$ applicazioni biunivoche $f : A \to B$, quindi $P(n) = n \cdot P(n-1)$.

Applicando l'ipotesi induttiva $P(n-1) = (n-1)!$, abbiamo che

$$P(n) = n \cdot P(n-1) = n \cdot (n-1)! = n!,$$

come volevamo. □

La dimostrazione sopra ci dice che $P(n) = nP(n-1)$ per ogni $n \geq 1$, quindi

$$P(n) = nP(n-1) = n(n-1)P(n-1) = \cdots = n(n-1) \ldots 2P(1) = n(n-1) \ldots 2 \cdot 1,$$

perché $P(1) = 1$. Questo è sempre un ragionamento induttivo, sostanzialmente simile a quello sopra, in cui però non si usa in maniera esplicita l'ipotesi induttiva (è un ragionamento di tipo *ricorsivo*, che procede a ritroso da n verso 1).

2.3.2 Combinazioni e il triangolo di Tartaglia

Le *combinazioni* di m elementi su un insieme A di n elementi sono i sottoinsiemi di A aventi m elementi. Il numero di tali combninazioni è denotato da $\binom{n}{m}$.

Lemma 2.3 (Tartaglia)**.** *(i) Per $n \geq 0$, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ e $\binom{n}{m} = 0$ per $m > n$.*

(ii) Per $1 \leq m \leq n$ e $n \geq 1$, $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$.

Queste relazioni ci permettono di calcolare $\binom{n}{m}$ per ogni scelta di $0 \leq m \leq n \leq 0$.

---

[9] Ciascuna di queste f è (può essere identificata con) una *disposizione con ripetione*: come in (i) sono m-uple di elementi da un insieme con n elementi, ma contrariamente a (i) qui un elemento può apparire più volte.

[10] Le risposte sono: (i) $n(n-1)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$; (ii) n^n; (iii) n^m. Il numero di sottoinsiemi di un insieme con n elementi è 2^n.

Dimostrazione. Il punto (i) è ovvio. Mostriamo (ii). Sia $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ e $A' = \{1, \dots, n-1\}$ Un sottoinsieme B con m elementi di A che non contenga $x_n n$ è un sottoinsieme di A' con m elementi: ve ne sono $\binom{n}{m}$ di questo tipo. Un sottonsieme C di A con m elementi contiene x_n se solo se $C \cap A' = C'$ ha $m-1$ elementi, nel qual caso $C = C' \cup \{x_n\}$. Di questi insiemi ve ne sono quanti sono gli insiemi con $m-1$ elementi in A', cioè $\binom{n-1}{m-1}$. Quindi $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$. $\square$

I numeri $\binom{n}{m}$ sono chiamati *coefficienti binomiali*, per via dell'applicazione all'algebra che vedremo in teorema 2.5. Raffigurandoli in uno schema a triangolo, n corrisponde a una "riga" dello schema. Vero è che lemma 2.3 ci permette di

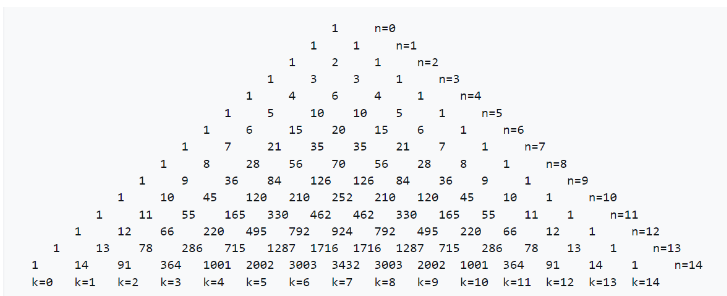


Figura 3: da wikipedia

calcolare $\binom{n}{m}$ per ogni m, n, ma per calcolare i coefficienti relativi a un n fissato dobbiamo avere calcolato quelli relativi ai precedenti $n-1, n-2, \dots, 2, 1$. Fortunatamente, possiamo calcolare $\binom{n}{m}$ in "forma chiusa", senza dover calcolare i coefficienti binomiali delle righe precedenti.

Teorema 2.4. *Siano* $0 \leq m \leq n$. *Allora,*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Dimostrazione. Per $m = 0$, (i) del lemma implica che $\binom{n}{0} = 1 = \frac{n!}{0!n!}$. Dimostriamo la relazione per $m \geq 1$ per induzione su n. Supponiamo che la proprietà sia stata dimostrata per $n-1$. Per n, allora, usando (ii) del lemma,

$$\begin{aligned}
\binom{n}{m} &= \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m} \\
&= \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} + \frac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m-1)!}\left(\frac{1}{n-m} + \frac{1}{m}\right) \\
&= \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m-1)!}\frac{n}{m(n-m)} \\
&= \frac{n!}{m!(n-m)!} \\
&= \binom{n}{m}.
\end{aligned}$$

$\square$

Il teorema 2.4 si può anche dimostrare in maniere più "concettuali", che da un certo punto di vista sono preferibili (perché sono dimostrazioni da cui si capisce da dove venga l'espressione per $\binom{n}{m}$), ma che sono anche leggermente più complicate: qui abbiamo solo dovuto svolgere un calcolo algebrico.

Una maniera diversa e utile per scrivere i coefficienti binomiali è

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{[n(n-1)\dots 2\cdot 1]}{m!\cdot[(m-n)(m-n-1)\dots 2\cdot 1]} = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!}. \tag{24}$$

Teorema 2.5 (Teorema binomiale)**.** *Per $n \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}$,*

$$(1+x)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \dots + \binom{n}{n} x^n.$$

Esplicitando i coefficienti,

$$(1+x)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3} x^3 + \dots.$$

Dimostrazione. Espandendo $(1+x)^n = (1+x)(1+x)\dots(1+x)$ mediante la proprietà distributiva, il termine x^j appare tante volte quante volte possiamo scegliere $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_j \leq n$, dove prendiamo l'addendo x dai fattori in posizione $k_1, \dots, k_j$, e l'addendo 1 da tutti gli altri. Cioè, x^j appare tante volte quanti sono i sottoinsiemi di j elementi in $\{1, 2, \dots, n\}$, che sono le combinazioni di j elementi in un insieme che ne ha n, che sappiamo essere in numero di $\binom{n}{j}$. $\square$

Esercizio 2.4. *Dimostrazione alternativa del teorema binomiale. Per $n = 0, 1$ è ovvio. E' anche facile mostrare che, se $a(n,m)$ è il coefficiente di x^m in $(1+x)^m$, allora i numeri $a(n,m)$ soddisfano le stesse relazioni di $\binom{n}{m}$ in Lemma 2.3. Allora, $a(n,m) = \binom{n}{m}$. Completa i dettagli.*

2.4 La disuguaglianza di Bernoulli

Teorema 2.6. *Se $x \geq -1$ e $n \geq 1$ è intero, allora*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx. \tag{25}$$

Dimostrazione. Lo dimostriamo per induzione. Per $n = 1$ abbiamo una identità. Supponiamo che la disuguaglianza valga per $n-1$. Allora,

$$\begin{aligned}
(1+x)^n &= (1+x)(1+x)^{n-1} \\
&\geq (1+x)(1+(n-1)x) = 1 + nx + (n-1)x^2 \\
&\geq 1 + nx,
\end{aligned}$$

come volevamo. Nella prima disuguaglianza abbiamo usato $1 + x \geq 0$, cioè $x \geq -1$. $\square$

Come ha fatto Bernoulli a indovinare la disuguaglianza? Se $x \geq 0$, per il teorema binomiale

$$(1+x)^n = 1 + nx + \sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j} x^j \geq 1 + nx,$$

poiché tutti i termini nella sommatoria sono positivi o nulli. E' normale chiedersi se la disuguaglianza non valga anche per un intervallo di x negativi. Il ragionamento per induzione ci dà un tale intervallo. In maniera simile, si può indovinare la tesi dell'esercizio qui sotto.

Esercizio 2.5. *Mostrare (per induzione) che per $x \geq -1$ e $n \geq 1$ vale la (più forte) disuguaglianza*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx + (n-1)x^2.$$

3 Numeri reali

3.1 Numeri reali

I numeri reali, il cui insieme viene chiamato $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$), sono un campo ordinato $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$, in cui vale una ulteriore *proprietà di completezza*. Copiamo qui le proprietà di campo ordinato.

Per ogni scelta di x, y, z in $\mathbb{R}$,

1. (*proprietà associativa di* $+$) $(x+y)+z = x+(x+y)$ (quindi nell'espressione $x+y+z$ il risultato non dipende dall'ordine in cui svolgiamo le operazioni);

2. (*esistenza dell'elemento neutro di* $+$) $x + 0 = 0 + x = x$;

3. (*esistenza dell'elemento inverso rispetto a* $+$) esiste x' in modo che $x+x' = 0$ (indichiamo $x' = -x$, l'*opposto* di x);

4. (*proprietà commutativa di* $+$) $x + y = y + z$;

5. (*proprietà associativa di* $\cdot$) $(xy)z = x(xy)$;

6. (*esistenza dell'elemento neutro di* $\cdot$) $x1 = 1x = x$;

7. (*esistenza dell'elemento inverso rispetto a* $\cdot$) se $x \neq 0$, esiste x' in modo che $x \cdot x' = 1$ (indichiamo $x' = x^{-1} = 1/x$, il *reciproco* di x);

8. (*proprietà commutativa di* $\cdot$) $xy = yx$;

9. (*proprietà distributiva di* $\cdot$ *rispetto a* $+$) $(x + y)z = (xz) + (yz)$ (abbiamo poi la convenzione per cui i prodotti vengono calcolati prima delle somme, per cui possiamo scrivere anche $(x + y)z = xz + yz$).

10. (*riflessiva*) $x \leq x$;

11. (*antisimmetrica*) se $x \leq y$ e $y \leq x$, allora $x = y$;

12. (*transitiva*) se $x \leq y$ e $y \leq z$, allora $x \leq z$;

13. (*ordine e somma*) se $x < y$, allora $x + z < y + z$;

14. (*ordine e prodotto*) se $x < y$ e $z > 0$, allora $xz < yz$.

Definizione 3.1. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$.*

- *$M \in \mathbb{R}$ è il* **massimo** *di A se*

  (i) $M \in A$,

  (ii) $\forall x \in A \implies x \leq M$.

- *$m \in \mathbb{R}$ è il* **minimo** *di A se*

  (i) $m \in A$,

  (ii) $\forall x \in A \implies x \geq m$.

- *A è* **superiormente limitato** *se esiste $Q \in \mathbb{R}$ tale che $Q \geq x$ per ogni $x \in A$. In tal caso, diciamo che Q è un* **maggiorante** *di A.*

- *A è* **inferiormente limitato** *se esiste $P \in \mathbb{R}$ tale che $P \leq x$ per ogni $x \in A$. In tal caso, diciamo che P è un* **minorante** *di A.*

- *A è* **limitato** *se è sia inferiormente che superiormente limitato.*

E' facile verificare che A è limitato se e solo se esiste $R > 0$ tale che $-R \leq x \leq R$ per ogni $x \in A$.

Non è detto che gli insiemi superiormente limitati abbiamo massimo, né che quelli inferiormentelimitati abbiano minimo. Per esempio,

$$(0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$$

è superiormente limitato ($Q = 1$, o in generale qualunque $Q > 1$, sono maggioranti), ma non ha massimo.

Esercizio 3.1. *Dimostrare questa ultima affermazione.*

Eppure, il numero $Q = 1$ ha evidentemente una posizione privilegiata rispetto all'insieme $(0,1)$. Cerchiamo di catturarla con la seguente definizione.

Definizione 3.2. *Sia $A \subset \mathbb{R}$. Il numero $Q \in \mathbb{R}$ è l'***estremo superiore** *di A se*

(i) Q è un maggiorante di A: $\forall x \in A \implies x \leq Q$;

(ii) Q è il minimo tra tutti i maggioranti di A: se Q' è un altro maggiorante di A ($\forall x \in A \implies x \leq Q'$), allora $Q \leq Q'$.

Scriviamo $Q = \sup A$.

Simmetricamente, Il numero $P \in \mathbb{R}$ *è l'***estremo inferiore** *di* A *se*

(i) Q *è un minorante di* A*;*

(ii) Q *è il massimo tra tutti i maggioranti di* A.

Scriviamo $Q = \sup A$.

I sottoinsiemi limitati di $\mathbb{Q}$ non è detto che abbiano sup o inf in $\mathbb{Q}$. Per esempio, la successione delle approssimazioni per difetto di $\sqrt{2}$ è superiormente limitato (un maggiorante ne è $Q = 2$), ma, se avesse un estremo superiore, questo sarebbe $\sqrt{2}$, che non sta in $\mathbb{Q}$. (Questa ultima affermazione andrebbe dimostrata: lo faremo in seguito).

Assioma 2 (proprietà del sup)**.** *Sia* $A \subset \mathbb{Q}$ *limitato. Allora, esiste* $\sup A \in \mathbb{R}$.

I numeri reali, cioè, sono un campo ordinato in cui vale la proprietà del sup. Questo è tutto ciò che ci serve per fare della buona analisi matematica.

3.2 Una diversa caratterizzazione di $\sup A$

Teorema 3.1. *Sia* $A \subseteq \mathbb{R}$. *Allora,* $a = \sup A \in \mathbb{R}$ *se e solo se valgono (i) e (ii):*

(i) a *è un maggiorante di* A*:* $\forall x \in A \implies x \leq a$*;*

(ii) $\forall \epsilon > 0 \exists x \in A : a - \epsilon < x \leq a$.

Dimostrazione. Supponiamo che $a = \sup A$. Allora (i) è parte della definizione di $\sup A$. Supponiamo che (ii) non valga. Allora, esiste $\epsilon > 0$ tale che per ogni $x \in A$, non vale che $a - \epsilon < x \leq a$. Ora, poiché a è un maggiorante di A, non può essere che $x > a$, quindi deve essere $x \leq a - \epsilon$. Poiché ciò vale per ogni $x \in A$, $a - \epsilon$ è un maggiorante di A e $a - \epsilon < a$, quindi $a > \sup A$.

Supponiamo che, viceversa, valgano (i) e (ii). Da (i) segue che $\sup A \leq a$. Supponiamo per assurdo che $\sup A < a$. Per (ii), con $\epsilon = a - \sup A$, sappiamo che esiste $x \in A$ tale che $\sup A < x \leq a$, ma questo contraddice il fatto che $\sup A$ sia un maggiorante di A, assurdo. □

3.3 Intervalli e la retta reale estesa

Ricordiamo la definizione di intervalli di vario tipo in $\mathbb{R}$.

Definizione 3.3. *(i) Siano* $a < b$ *numeri reali,*

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

*è l'***intervallo aperto** *avente* **estremo inferiore** a *e* **estremo superiore** b.

(ii) *Siano* $a \leq b$ *numeri reali,*

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

*è l'***intervallo chiuso** *avente estremi* a *e* b*.*

(iii) *L'intervallo* **chiuso a destra e aperto a sinistra** *con estremi* $a < b$ *è*

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\},$$

mentre quello **chiuso a sinistra e aperto a destra** *è*

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\},$$

(iv) *Se* $a \in \mathbb{R}$*,*

$$\begin{aligned} (-\infty, a) &= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}, \\ (-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}, \\ (a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}, \\ [a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}, \\ (-\infty, +\infty) &= \mathbb{R}. \end{aligned}$$

I simboli $+\infty, -\infty$ verranno utilizzati spesso in seguito. La *retta estesa* è $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Sono simboli suggestivi e le suggestioni sono utili per farsi venire delle idee; ma bisogna sempre ricordare che sono simboli, non manifestazioni di quantità metafisiche.

Convenzionalmente prescriviamo alcune proprietà algebriche ai simboli $\pm\infty$. **Non sono convenzioni arbitrarie!** Vedremo che ciascuna di esse è la forma stenografata di una proprietà algebrica dei limiti.

(i) $-\infty < x < +\infty$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;

(ii) $x + \infty = +\infty$ e $x - \infty = -\infty$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;

(iii) $+\infty + \infty = +\infty$ e $-\infty - \infty = -\infty$;

(iv) $\frac{x}{\pm\infty} = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;

(v) $x(+\infty) = +\infty$ per ogni $x > 0$ reale, e $x(+\infty) = -\infty$ per ogni $x < 0$ reale;

(vi) $(-1)(+\infty) = -\infty$.

Quasi più interessante ancora è la lista delle espressioni algebriche con $\pm\infty$ che *non* definiamo: esse corrispondono ai limiti più interessanti e utili.

$$\frac{\infty}{\infty}, +\infty - \infty, 0 \times (\pm\infty),$$

oltre alla già nota espressione *non* definita $\frac{x}{0}$, con $x \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

3.4 Radici di numeri reali positivi e potenze con esponente reale

Proposizione 3.2. *Esiste ed è unico $a > 0$ tale che $a^2 = 2$.*

Dimostrazione. Consideriamo $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ e } x^2 < 2\}$. L'insieme A è superiormente limitato, poiché $x \in A$ soddisfa

$$x^2 < 2 < 4,$$

quindi, risolvendo la disequazione, $x < 2$: un magiorante di A è 2.

Poniamo $1 \leq a = \sup A < 2$ (dove $\sup A \geq 1$ perché $1^2 < 2$). Vogliamo mostrare che $a^2 = 2$. Se $a^2 \neq 2$, può essere $a^2 < 2$ o $a^2 > 2$. Verifichiamo che in entrambi i casi $a \neq \sup A$.

Se $a^2 < 2$, se troviamo $h > 0$ tale che $(a+h)^2 < 2$, allora $a < a + h \in A$, così che $a \neq \sup A$ perché a non è un maggiorante di A. Restringiamo la ricerca a $0 < h < 1$:

$$(a+h)^2 = a^2 + 2ah + h^2 < a^2 + 2ah + h = a^2 + h(2a+1),$$

e $a^2 + h(2a+1) < 2$ se $h \leq \frac{2-a^2}{2a+1}$, ciò che è possibile perché il membro a destra della disuguaglianza è positivo per ipoesi. Abbiamo trovato h con le proprietà volute, quindi $a \neq \sup A$.

L'altra possibilità è che $a^2 > 2$. Se troviamo $h > 0$ tale che $(a-h)^2 > 0$, allora $a - h$ è un maggiorante di A e $a - h < a$, quindi $a \neq \sup A$ perché a non è il minimo dei maggioranti. Se $0 < h$,

$$(a-h)^2 = a^2 - 2ah + h^2 > a^2 - 2ah,$$

e $a^2 - 2ah > 2$ se e solo se $h < \frac{a^2-2}{2a}$, ciò che è possibile perché, come sopra, il membro a destra della disuguaglianza è positivo per ipoesi. Abbiamo così trovato h con le proprietà richieste. In conclusione, $a^2 = 2$.

L'unicità segue da un semplice ragionamento di algebra, che non dipende dal sup (dipende dalle sole proprietà di campo ordinato, infatti). Se $x = a > 0$ è una soluzione di $x^2 = 2$, allora $x^2 - 2 = x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$, che si annulla solo se $x = a$ o $x = -a < 0$. Quindi $x = a$ è l'unica soluzione positiva di $x^2 = 2$. □

Modificando in maniera non sostanziale, ma nemmeno del tutto banale, la dimostrazione, possiamo infatti mostrare un risultato più generale, con cui avete certamente familiarità dalle scuole superiori.

Teorema 3.3. *Siano $a \geq 0$ un numero reale e $n \geq 1$ un intero positivo. Allora, l'equazione*

$$x^n = a \tag{26}$$

ha un'unica soluzione $x \geq 0$. Tale soluzione può anche essere caratterizzata come:

$$x = \sup\{y \geq 0 : y^n \leq a\} = \inf\{z \geq 0 : z^n \geq a\}.$$

Definizione 3.4. *Siano $a \geq 0$ reale e $n \geq 1$ intero. L'unica soluzione non negativa x di (26) è la radice n-esima di a,*

$$x = \sqrt[n]{a}, \tag{27}$$

cioè, $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Bisogna fare una certa attenzione quando passiamo da equazioni a radici e viceversa. L'equazione $x^2 = 4$ ha *due* soluzioni reali, $x = \pm 2$, ma $\sqrt{4}$ denota solo quella positiva. L'equazione $x^2 = -4$ non ha invece soluzioni reali. Con gli esponenti dispari le cose cambiano: $x^3 = 8$ e $x^3 = -8$ hanno entrambe una e suna sola soluzione *reale*. In generale,

(i) se $a > 0$ e $n = 2m$ è un numero naturale pari, allora $x^{2m} = a$ ha due soluzioni reali, $x = \pm \sqrt[2m]{a}$ (una se $a = 0$);

(ii) se $a < 0$ e $n = 2m$ è un numero naturale pari, allora $x^{2m} = a$ non ha soluzioni reali;

(iii) se $a \in \mathbb{R}$ e $n = 2m + 1$ è un numero naturale dispari, allora $x^{2m+1} = a$ ha una soluzioni reale;

$$x = \begin{cases} \sqrt[2m+1]{a} \text{ se } a \geq 0, \\ -\sqrt[2m+1]{-a} \text{ se } a < 0. \end{cases}$$

Estendiamo la definizione di *potenza di un numero positivo con esponente razionale*. Siano $a \geq 0$ reale e $q = \frac{m}{n}$ un numero razionale ($n \geq 1$, $m \in \mathbb{Z}$):

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}. \tag{28}$$

La definizione ha senso se dà lo stesso numero per $\frac{m}{n}$ e $\frac{mp}{np}$ con $p \geq 1$ intero. Verifichiamolo nel caso $m \geq 0$. Siano $x = \sqrt[n]{a^m}$ e $y = \sqrt[np]{a^{mp}}$. Allora,

$$x^{np} = \left([\sqrt[n]{a^m}]^n\right)^p = (a^m)^p = a^{mp} = y^{np},$$

dove abbiamo usato la definizione di radice due volte e la proprietà delle potenze $(\alpha^n)^p = \alpha^{np}$. Cioè, x e y sono soluzioni dell'equazione $z^{np} = a^{mp}$, che per il teorema 3.3 ha una sola soluzione; quindi $x = y$.

Le potenze con esponente razionale hanno proprietà analoghe alle potenze con esponente intero.

Proposizione 3.4. *Siano $a, b > 0$ numeri reali e p, q numeri razionali. Allora,*

(i) $a^p a^q = a^{p+q}$*;*

(ii) $(a^p)^q = a^{pq}$*;*

(iii) $(ab)^p = a^p b^p$*;*

(iv) se $a < b$ e $q > 0$, allora $a^p < b^q$ e, se $a < b$ e $q < 0$, allora $a^p > b^q$;

(v) se $a > 1$ e $p < q$, allora $a^p < a^q$, e se $0 < a < 1$ e $p < q$, allora $a^p > a^q$.

Dimostrazione. Le dimostrazioni di (i), (ii), (iii) seguono facilmente dalle definizioni e dalle proprietà delle potenze con esponente intero. Vediamo la dimostrazione di (iv). Sia $0 < q = \frac{m}{n}$ con $m, n \geq 1$ interi. Allora $0 < a^m < b^m$ per le proprietà della relazione d'ordine. Per le stesse proprietà, se $\sqrt[n]{a^m} \geq \sqrt[n]{b^m}$, avremmo $a^m = (\sqrt[n]{a^m})^n \geq (\sqrt[n]{b^m})^n = b^m$, assurdo. Quindi $\sqrt[n]{a^m} < \sqrt[n]{b^m}$. La seconda affermazione in (iv) segue facilmente dalla prima.

Vdiamo or (v). Consideriamo il caso $a > 1$: $a^p < a^q$ se e solo se $1 < a^q : a^p = a^{q-p}$.. Se $a > 1$, per (iv) abbiamo $a^{q-p} > 1^{q-p} = 1$ perché $q - p > 0$ per ipotesi, quindi la proprietà è dimostrata. Se $0 < a < 1$, allora $1/a > 1$ e, per la prima parte di (v),

$$1/a^p = (1/a)^p < (1/a)^q = 1/a^q,$$

da cui $a^q < a^p$. □

Possiamo ora utilizzare la proprietà del sup per definire potenze con esponente reale.

Definizione 3.5. *Sia $x \in \mathbb{R}$ e sia $a > 0$. Poniamo:*

$$a^x = \begin{cases} \sup\{a^q : q \in \mathbb{Q}, q < x\} & \text{se } a \leq 1 \\ \inf\{a^q : q \in \mathbb{Q}, q < x\} & \text{se } 0 < a < 1. \end{cases} \tag{29}$$

La quantità a^x è un numero reale positivo, perché $\{a^q : q \in \mathbb{Q}, q < x\}$ è superiormente limitato se $a \geq 1$ e inferiormente limitato se $0 < a < 1$. Come è prevedibile (ma non facilissimo da dimostrare), le proprietà delle potenze si estendono alle potenze con esponente reale.

Proposizione 3.5. *Siano $a, b > 0$ numeri reali e p, q numeri reali. Allora,*

(i) $a^p a^q = a^{p+q}$;

(ii) $(a^p)^q = a^{pq}$;

(iii) $(ab)^p = a^p b^p$;

(iv) se $a < b$ e $q > 0$, allora $a^p < b^q$ e, se $a < b$ e $q < 0$, allora $a^p > b^q$;

(v) se $a > 1$ e $p < q$, allora $a^p < a^q$, e se $0 < a < 1$ e $p < q$, allora $a^p > a^q$.

Non dimostriamo questa proposizione.

3.5 Le funzioni "valore assoluto" e "segno"

Definizione 3.6. *La funzione* **valore assoluto** *$x \mapsto |x|$, $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, è*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x \leq 0. \end{cases} \tag{30}$$

Dalla definizione è chiaro che, se $r > 0$,

$$|x| < r \iff -r < x < r. \tag{31}$$

Definizione 3.7. *La funzione* **segno** $x \mapsto sign(x)$*,* $sign : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$*, è*

$$sign(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x > 0, \\ -1 \text{ se } x < 0. \end{cases} \tag{32}$$

Proposizione 3.6 (Proprietà fondamentali di valore assoluto e segno)**.** *(i)* $|x| \geq 0$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$ *e* $|x| = 0$ *se e solo se* $x = 0$*.*

(ii) $|xy| = |x| \cdot |y|$ *per ogni* $x, y \in \mathbb{R}$*.*

(iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ *per ogni* $x, y \in \mathbb{R}$*.*

(vi) $|x - y| \geq ||x| - |y||$ *per ogni* $x, y \in \mathbb{R}$*.*

(v) Se $x \neq 0$ *è reale,*

$$x = sign(x) \cdot x. \tag{33}$$

(vi) $sign(x \cdot y) = sign(x) \cdot sign(y)$ *per ogni* $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*.*

Proposizione 3.7 (Altre proprietà di valore assoluto e segno)**.** *(i)* $||x|| = |x|$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$*.*

(ii) Se $n = 2m + 1$ *è un numero naturale dispari, allora* $x^{2m+1} = a \neq 0$ *se e solo se* $a = sign(a) \sqrt[2m+1]{|a|}$*.*

3.6 Funzioni potenza e funzioni esponenziali

Le *funzioni potenza* sono quelle della forma $x \mapsto x^\alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Nel caso in cui α è naturale e positivo, esse sono definite per $x \in \mathbb{R}$, ma per altri esponenti bisogna fare attenzione.

(i) Se $n \in \mathbb{N}$, allora $f : x \mapsto x^n$ è definita su $\mathbb{R}$ (escluso 0, se $n = 0$). Se $0 < x < y$, allora $0 < x^n < y^n$. Per $x < 0$, abbiamo comportamenti diversi per n pari e n dispari.

(ii) Se $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, allora $f : x \mapsto x^{-n} = 1/x^n$ è definita su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Se $0 < x < y$, allora $0 < y^{-n} < x^{-n}$. Anche qui, per $x < 0$ la funzione ha comportamenti che dipendono dalla parità o meno di n.

(iii) Se $\alpha > 0$ è reale e non intero, allora $f : x \mapsto x^\alpha$ è definita su $[0, +\infty)$. Se $0 < x < y$, allora $0 < x^\alpha < y^\alpha$.

(iv) Se $\alpha < 0$ è reale e non intero, allora $f : x \mapsto x^\alpha$ è definita su $(0, +\infty)$. Se $0 < x < y$, allora $0 < y^\alpha < x^\alpha$.

Le *funzioni esponenziali* sono quelle della forma $g(x) = a^x$, dove $a > 0$ è la *base* e il dominio di g è $x \in \mathbb{R}$.

(i) Se $a > 1$ e se $x < y$ sono reali, allora $0 < a^x < a^y$.

(ii) Se $0 < a < 1$ e se $x < y$ sono reali, allora $0 < a^y < a^x$.

3.7 Logaritmi

Definizione 3.8. *Sia $A > 1$ e, per ogni $x > 0$, si consideri l'insieme*

$$E = \{y \in \mathbb{R} : A^y \leq x\}.$$

Il **logaritmo di x in base A** *è $\log_A(x) = \sup E$.*

Proposizione 3.8 (Proprietà dei logaritmi)**.** *Sia $A > 1$.*

(i) *Se $x > 0$, allora $\log_A(x) = y$ è l'unico numero reale y tale che $A^y = x$; cioè,*
$$A^{\log_A(x)} = x.$$

(ii) *Se $x, y > 0$, allora $\log_A(xy) = \log_A(x) + \log_A(y)$.*

(iii) *Siano $x > 0$ e $a \in \mathbb{R}$. Allora, $\log_A(x^a) = a \log_A(x)$.*

(iv) *Siano $x > 0$ e $B > 1$. Allora,*
$$\log_A(x) = \log_A(B) \log_B(x). \tag{34}$$

(v) *Se $0 < x < y$, allora $\log_A(x) < \log_A(y)$.*

(vi) *Se $A < B$, allora $\log_A(x) < \log_B(x)$ se $x > 1$, e $\log_A(x) > \log_B(x)$ se $0 < x < 1$.*

Avendo definito il logaritmo mediante estremo superiore, la proprietà fondamentale è (i), che è intuitiva, ma che non dimostriamo. Le altre proprietà seguono da (i) e da proprietà dell'esponenziale.

3.8 Funzioni monotone

Definizione 3.9. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : E \to \mathbb{R}$. Allora,*

(i) *f è* **crescente** *su E se per ogni $x, y \in E$, $x < y \implies f(x) \leq f(y)$;*

(ii) *f è* **strettamente crescente** *su E se per ogni $x, y \in E$, $x < y \implies f(x) < f(y)$;*

(iii) *f è* **decrescente** *su E se per ogni $x, y \in E$, $x < y \implies f(x) \geq f(y)$;*

(iv) *f è* **strettamente decrescente** *su E se per ogni $x, y \in E$, $x < y \implies f(x) > f(y)$.*

Nei casi (i-iv) diciamo che f è **monotona** *su E e nei più particolari casi (ii), (iv) diciamo che f è* **strettamente monotona** *su E.*

In attesa di vedere alcuni fatti di analisi matematica che le riguardano, trovate nel *Minimo Pratico* alcuni esercizi sulle funzioni monotone che utilizzano solo la definizione.

4 Successioni e limiti di successioni

Una *successione* in un insieme X è una funzione $f : \mathbb{N} \to X$: $f : n \mapsto f(n)$. Spesso le successioni vengono indicate come $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, che, dal punto di vista delle funzioni, vanno pensate come $n \mapsto a_n$.

Per esempio, la successione $\{n^2\}_{n=0}^{\infty}$ in $\mathbb{R}$ può essere pensata come $f : n \mapsto n^2$ (una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$) e, viceversa, la funzione $f(n) = \frac{1}{n+1}$ può essere scritta $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}_{n=0}^{\infty}$.

In questo corso saremo quasi sempre interessati in *proprietà asintotiche* della successione: proprietà, cioè, che valgono per $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ se e solo se, quale che sia l'intero positivo N, valgono per $\{a_n\}_{n=N}^{\infty}$ (dove l'ultima espressione è la restrizione di $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ all'insieme $\{n \in \mathbb{N} : n \geq N\}$). In altri contesti, invece, è importante sapere tutti i valori della successione.

Diciamo che una proprietà $P(x)$ della variabile x *vale definitivamente* per la successione $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$,

$$P(a_n) \text{ vale definitivamente,}$$

se esiste $P > 0$ tale che $P(a_n)$ vale per ogni $n > P$. Per esempio, non è vero che $n - 10 \geq 0$ per ogni $n \geq 0$, ma è vero che $n - 10 \geq 0$ *definitivamente* (infatti, ciò vale per ogni $n \geq 10$).

4.1 Definizione di limite di successione e prime proprietà

Definizione 4.1 (Limite di una successione)**.** *Siano $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una successione in $\mathbb{R}$ e $L \in \mathbb{R}$. Diciamo che L è il* **limite di $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ per n che tende a infinito** *se*

$$\forall \epsilon > 0 \exists R > 0 : \forall n \geq R \implies |a_n - L| \leq \epsilon.$$

Scriviamo anche

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

e diciamo che $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ è **convergente***.*

Teorema 4.1 (Unicità del limite)**.** *Sia $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una successione in $\mathbb{R}$. Se il suo limite esiste, allora è unico.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ abbia due limiti $L < M$. Per definizione, esistono $P > 0$ tale che $|a_n - L| \leq \frac{M-l}{4}$ se $n \geq P$, e esiste $Q > 0$ tale che $|a_n - M| \leq \frac{M-l}{4}$ se $n \geq Q$. Per $n \geq \max(P, Q)$, allora,

$$M - L \leq |M - a_n| + |a_n - L| \leq \frac{M-L}{4} + \frac{M-L}{4} = \frac{M-L}{2},$$

che è assurdo. □

Teorema 4.2 (Limite di una somma di successioni)**.** *Siano $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ successioni convergenti, $\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} b_n = M \in \mathbb{R}$. Allora, $\{a_n + b_n\}_{n=0}^{\infty}$ è convergente e*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = L + M. \tag{35}$$

La relazione (35) può essere scritta più brevemente come

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n. \tag{36}$$

Dimostrazione. Fissiamo $\epsilon > 0$, qualsiasi. Esistono $P > 0$ tale che per ogni $n \geq P$ si ha $|a_n - L| \leq \epsilon$ e $Q > 0$ tale che per ogni $n \geq Q$ si ha $|b_n - M| \leq \epsilon$. Per ogni $n \geq \max\{P, Q\}$, usando la proprietà triangolare del valore assoluto,

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (L + M)| &= |(a_n - L) + (b_n - M)| \leq |a_n - L| + |b_n - M| \\ &\leq \epsilon + \epsilon = 2\epsilon. \end{aligned}$$

Ciò mostra che $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = L + M$. □

Non ci deve preoccupare il fatto che nella dimostrazione abbiamo $|(a_n + b_n) - (L + M)| \leq 2\epsilon$ e non $|(a_n + b_n) - (L + M)| \leq \epsilon$: se possiamo rendere $|(a_n + b_n) - (L + M)|$ minore di 2ϵ per ogni $\epsilon > 0$, possiamo renderlo minore di ϵ. Spesso sul lato destro della disuguaglianza che appare nella definizione di limite avremo espressioni diverse da ϵ, che però possono essere rese piccole quanto si vuole purché ϵ sia abbastanza piccolo.

Definizione 4.2 (Definizione di successione limitata)**.** *Una successione $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ in $\mathbb{R}$ è* **superiormente limitata** *(rispettivamente,* **inferiormente limitata, limitata***) se l'insieme $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ dei suoi valori è superiormente limitato (rispettivamente, inferiormente limitato, limitato).*

Più esplicitamente, una successione $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ in $\mathbb{R}$ è:

- **superiormente limitata** se esiste $C > 0$ tale che $a_n \leq C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
- **inferiormente limitata** se esiste $C > 0$ tale che $a_n \geq C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
- **limitata** se esiste $C > 0$ tale che $|a_n| \leq C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 4.3. *Sia $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una successione in $\mathbb{R}$. Se essa è convergente, allora è limitata.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$. Scegliendo $\epsilon = 1$ nella definizione di limite, abbiamo che esiste $P > 0$ tale che, per ogni $n > P$, $|a_n - L| \leq 1$, cioè $L - 1 \leq a_n \leq L + 1$. D'altra parte, l'insieme $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_P\}$ dei primi P valori di $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ è finito, quindi limitato. Allora, per ogni $n \geq 0$,

$$\min\{L - 1, a_0, a_1, \ldots, a_P\} \leq a_n \leq \max\{L + 1, a_0, a_1, \ldots, a_P\},$$

quindi $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ è limitata. □

E' facile verificare che $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ è limitata se e solo se esiste $C > 0$ tale che $|a_n| \leq C$ per ogni $n \geq 0$.

Teorema 4.4 (Limite del prodotto di successioni e quozienti)**.** *Siano $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ successioni convergenti,* $\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$*,* $\lim_{n\to\infty} b_n = M \in \mathbb{R}$*. Allora,* *(i)* $\{a_n \cdot b_n\}_{n=0}^{\infty}$ *è convergente e*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n; \tag{37}$$

(ii) se $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=0}^{\infty}$ *è convergente e*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}. \tag{38}$$

Dimostrazione. Siano $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = M$.

(i) Come nella dimostrazione del teorema sul limite della somma di successioni, per ogni $\epsilon > 0$ possiamo trovare $P > 0$ tale che, per ogni $n > P$, $|a_n - L| \leq \epsilon$ e $|n_n - M| \leq \epsilon$. Inoltre, essendo $\{b_n\}$ convergente, esiste $C > 0$ tale che $|b_n| \leq C$ per ogni $n \geq 0$. Quindi,

$$\begin{aligned} |a_n b_n - LM| &= |a_n b_n - L b_n + b_n L - LM| = |(a_n - L)b_n + (b_n - M)L| \\ &\leq |a_n - L| \cdot |b_n| + |b_n - M| \cdot |L| \\ &\leq \epsilon(C + |L|). \end{aligned}$$

Poiché ciò vale per ogni scelta di $\epsilon > 0$ (e $\epsilon(C + |L|)$ può essere reso minore di ogni numero positivo se $\epsilon > 0$ è scelto abbastanza piccolo), abbiamo la tesi.

(ii) Iniziamo a stimare la quantità che vogliamo mostrare essere piccola:

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{L}{M}\right| &= \left|\frac{a_n M - b_n L}{b_n M}\right| \\ &= \left|\frac{a_n M - LM + LM - b_n L}{b_n M}\right| \\ &\leq \frac{|a_n - L| \cdot |M| + |L| \cdot |M - b_n|}{|b_n| \cdot |M|}. \end{aligned}$$

Poiché $\lim_{n\to\infty} b_n = M \neq 0$, esiste $Q > 0$ tale che se $n > Q$, allora $|b_n| \geq |M|/2$. Per ogni $\epsilon > 0$ fissato, poi, esiste $P > 0$ tale che per ogni $n > P$ si ha che $|a_n - L| \leq \epsilon$ e $|b_n - M| \leq \epsilon$. Se $n \geq \max\{P, Q\}$, allora,

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{L}{M}\right| &\leq \frac{|a_n - L| \cdot |M| + |L| \cdot |M - b_n|}{|b_n| \cdot |M|} \\ &\leq \frac{\epsilon|M| + \epsilon|L|}{|L| \cdot |M|/2} \\ &= 2\frac{|M| + |L|}{|M| \cdot |L|}\epsilon. \end{aligned}$$

Come sopra, ciò significa che $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L}{M}$. $\square$

4.2 Limiti a $\pm\infty$

Definizione 4.3 (Definizione di limite infinito per una successione)**.** *Sia* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *una successione in* $\mathbb{R}$*. Diciamo che* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ **diverge a più infinito***,*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty,$$

se per ogni $R > 0$ *esiste* $P > 0$ *tale che, per ogni* $n > p$ *si ha che* $a_n > R$*.*

Diciamo che $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ **diverge a meno infinito***,*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty,$$

se per ogni $R > 0$ *esiste* $P > 0$ *tale che, per ogni* $n > P$ *si ha che* $a_n < -R$*.*

Teorema 4.5. *Siano* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *e* $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ *successioni in* $\mathbb{R}$*,* $\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$*,* $\lim_{n\to\infty} b_n = M \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$*. Allora, valgono ciascuna delle seguenti relazioni, a condizione che l'espressione a destra abbia senso;*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = L + M$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = L \cdot M$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L}{M}.$$

La dimostrazione di queste relazioni è simile alle dimostrazioni delle proprietà algebriche dei limiti. La si trova sul testo e può essere un utile esercizio studiarla, o scriverne una versione in proprio.

Le *forme di indeterminazione* sono quelle espressioni a cui non abbiamo attribuito sognificato e ora possiamo spiegarci perché. Quelle che abbiamo visto sino ad ora sono:

$$(i)\ \infty - \infty;\ (ii)\frac{\infty}{\infty};\ (iii)\ 0 \cdot \infty;\ (iv)\ \frac{0}{0};\ (v)\ \frac{a}{0} \text{ con } 0 \neq a \in \mathbb{R}. \tag{39}$$

Abbiamo diviso il caso con denominatore pari a zero nei due casi (iv) e (v), perché nel caso (v) è possibile dire qualcosa se si sa che la successione che tende a zero a segno costante. Verifichiamo ora caso per caso che le espressioni indefinite non possono essere definite in modo da mantenere la validità del teorema 4.5.

(i) Se $a_n = n \to +\infty$ e $b_n = n^2 \to +\infty$, allora $a_n - b_n \to -\infty$; ma se scambiamo l'ordine, $b_n - a_n \to +\infty$. Cioè, sapere che due successioni tendono a $+\infty$ non permette di stabilire il limite (ammesso che esista) della loro differenza.

(ii) Sempre con $a_n = n \to +\infty$ e $b_n = n^2 \to +\infty$, $\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n} \to 0$; ma scambiando le successioni tra loro $\frac{b_n}{a_n} \to +\infty$.

(iii) L'esempio (ii) può essere reinterpretato come un limite $0 \cdot \infty$: $a_n = n \to +\infty$ e $b_n = \frac{1}{n^2} \to 0$ danno $a_n b_n \to 0$, imponendo $0 \cdot \infty = 0$; ma $a_n = \frac{1}{n} \to 0$ e $b_n = n \to +\infty$ impongono di porre $0 \cdot (+\infty) = +\infty$.

(iv) Anche qui, possiamo reinterpretare l'esempio (ii): $a_n = \frac{1}{n} \to 0$ e $b_n = \frac{1}{n^2} \to 0$ danno $\frac{a_n}{b_n} \to +\infty$ e $\frac{b_n}{a_n} \to 0$.

(v) Qui il problema riguarda i segni. Sia $a_n = 1 \to 1$. Se $b_n = 1/n \to 0$, allora $\frac{a_n}{b_n} \to +\infty$; ma se $b_n = -1/n \to 0$, allora $\frac{a_n}{b_n} \to -\infty$.

Il problema per $\frac{a}{0}$ con $a \neq 0$ consistendo solo nei segni, possiamo aggirarlo se sui segni abbiamo qualche informazione.

Definizione 4.4. *Siano $\{a_n\}$ una successione in $\mathbb{R}$ e $L \in \mathbb{R}$. Scriviamo che $\lim_{n\to\infty} a_n = L^+$ se*

(i) $\lim_{n\to\infty} a_n = L^+$*;*

(ii) $a_n > L$ *definitivamente.*

Analogamente definiamo l'espressione $\lim_{n\to\infty} a_n = L^-$.

Se $a > 0$, abbiamo allora:

$$\frac{a}{0^+} = +\infty \text{ e } \frac{a}{0^-} = -\infty. \tag{40}$$

Se $a < 0$, i segni a destra vanno ovviamente scambiati.

4.3 Equivalenza asintotica e o-piccoli

Intoduciamo qui due definizioni assai utili nei calcoli.

Definizione 4.5. *Siano $\{a_n\}, \{b_n\}$ successioni in $\mathbb{R}$.*

*(o) Diciamo che $\{a_n\}$ è o-**piccolo** di $\{b_n\}$ se $\{b_n\}$ è definitivamente non nulla e*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

Scriviamo $a_n = o_{n\to\infty}(b_n)$, o semplicemente $a_n = o(b_n)$.

*($\sim$) Diciamo che $\{a_n\}$ è **asintoticamente equivalente** a $\{b_n\}$ se le due successioni sono definitivamente non nulle e*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

Scriviamo $a_n \sim_{n\to\infty} b_n$, o semplicemente $a_n \sim b_n$.

Proposizione 4.6 (proprietà di o-piccolo)**.** *(i) Se $a_n = o(b_n)$ e $b_n = o(c_n)$, allora $a_n = o(c_n)$.*

(ii) Se $a_n = o(c_n)$ e $b_n = o(c_n)$, allora $a_n + b_n = o(c_n)$. Ciò può anche essere scritto

$$o(c_n) + o(c_n) = o(c_n).$$

(iii) $a_n = o(1)$ *se e solo se* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(iv) *Se* $a_n = o(b_n)$ *e* $\{c_n\}$ *è una successione, allora* $c_n a_n = o(c_n b_n)$. *Che possiamo sintetizzare come*

$$c_n \cdot o(b_b) = o(c_n b_n).$$

(v) *Un caso particolare di (iv) è*

$$o(a_n) = a_n \cdot o(1).$$

Proposizione 4.7 (proprietà dell'equivalenza asintotica)**.** *Siano* $\{a_n\}$*,* $\{b_n\}$*,* $\{c_n\}$ *e* $\{d_n\}$ *successioni in* $\mathbb{R}$*, definitivamente non nulle.*

(i) *Se* $a_n \sim b_n$ *e* $\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$*, allora* $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

(ii) *Se* $a_n \sim b_n$ *e* $b_n \sim c_n$*, allora* $a_n \sim c_n$

(iii) *Se* $a_n \sim b_n$ *e* $c_n \sim d_n$*, allora* $a_n c_n \sim b_n d_n$ *e* $\frac{a_n}{c_c} \sim \frac{b_n}{d_n}$.

(iv) *Se* $a_n \sim b_n$*, le due successioni sono a termini positivi e* $\lambda \in \mathbb{R}$*, allora* $a_n^\lambda \sim b_n$.

Anche qui, omettiamo le dimostrazioni, che sono semplici applicazioni delle proprietà dei limiti.

4.4 Limiti di successioni potenza e di successioni esponenziali

4.4.1 Limiti di potenze

Proposizione 4.8. *Se* $a > 0$*, allora* $\lim_{n\to\infty} n^a = +\infty$.

Dimostrazione. Fissiamo $M > 0$, qualsiasi. Cerchiamo $P > 0$ tale che, se $n > P$, allora $n^a > M$. Ciò equivale a $n > M^{1/a}$, quindi $P = M^{1/a}$ soddisfa la nostra richiesta, dunque vale la tesi. □

Per le proprietà che legano limiti e operazioni, abbiamo che se $a > 0$, allora $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^a} = 0$.

4.4.2 Limiti di esponenziali

Proposizione 4.9. *Se* $A > 1$*, allora* $\lim_{n\to\infty} A^n = +\infty$.

Dimostrazione. Fissiamo $M > 0$, qualsiasi. Cerchiamo $P > 0$ tale che, se $n > P$, allora $A^n > M$. Ciò equivale a $n > \log_A(M)$, quindi $P = \log_A(M)$ soddisfa la nostra richiesta, dunque vale la tesi. □

Per le proprietà che legano limiti e operazioni, abbiamo che se $0 < A < 1$, allora $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$.

4.5 I grandi classici

4.5.1 Successioni monotone

Definizione 4.6. *Una successione reale $\{a_n\}$ è* **crescente** *se per ogni $n \geq 0$ si ha che $a_{n+1} \geq a_n$. È* **strettamente crescente** *se $a_{n+1} > a_n$ per ogni $n \geq 0$.*

La successione reale $\{a_n\}$ è **decrescente** *se per ogni $n \geq 0$ si ha che $a_{n+1} \leq a_n$. E'* **strettamente decrescente** *se $a_{n+1} < a_n$ per ogni $n \geq 0$.*

Teorema 4.10. *Sia $\{a_n\}$ una successione crescente. Allora, esiste*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq 0\}.$$

Se invece $\{a_n\}$ è decrescente, allora esiste

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \geq 0\}.$$

Dimostrazione. Supponiamo che la successione sia crescente (il caso opposto si mostra allo stesso modo). Supponiamo che $\sup\{a_n : n \geq 0\} = +\infty$. Allora, per ogni $M > 0$ esiste un qualche intero non negativo n_0 tale che $a_{n_0} > M$. Poiché la successione è crescente, per ogni $n \geq n_0$ abbiamo che $a_n \geq a_{n_0} > M$, ciò che mostra che $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Se invece $\sup\{a_n : n \geq 0\} = L \in \mathbb{R}$, abbiamo mostrato in precendeza che per ogni $\epsilon > 0$ esiste un elemento a_{n_0} dell'insieme tale che $L - \epsilon < a_{n_0} \leq L$. Ma la successione è crescente e L è un maggiornate dei suoi valori, quindi, per $n \geq n_0$, abbiamo che

$$L - \epsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq L,$$

ciò che mostra che per $n \geq n_0$ si ha

$$|L - a_n| \leq \epsilon.$$

Quindi, $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. □

4.5.2 Teoremi del confronto

Teorema 4.11 (Permanenza del segno)**.** *Sia $\{a_n\}$ una successione in $\mathbb{R}$.*

(i) Se $a_n \geq 0$ definitivamente e se esiste $\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, allora $L \geq 0$.

(ii) Viceversa, supponiamo che esista $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ e che $L > 0$. Allora, $a_n > 0$ definitivamente.

Dimostrazione. (i) Supponiamo per assurdo che $L < 0$. Esiste allora $P > 0$ tale che $a_n \leq \frac{L}{2}$ per ogni $n > P$ (basta porre $\epsilon = |L|/2$ nella definizione di limite). Ciò è incompatibile con l'ipotesi che $a_n \geq 0$ definitivamente, poiché $L/2 < 0$.

(ii) Ponendo $\epsilon = L/2 > 0$ nella definizione di limite, abbiamo che $L - a_n \leq L/2$ definitivamente, cioè $a_n \geq L/2 > 0$ definitivamente. □

Teorema 4.12 (Teorema del confronto)**.** *Siano* $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *due successioni in* $\mathbb{R}$*.*

(i) Se $a_n \leq b_n$ *definitivamente e esistono* $\lim_{n\infty} a_n = L$ *e* $\lim_{n\infty} b_n = M$*, allora* $L \leq M$*.*

(ii) Viceversa, se esistono $\lim_{n\infty} a_n = L$ *e* $\lim_{n\infty} b_n = M$ *e* $L < mM$*, allora* $a_n < b_n$ *definitivamente.*

Dimostrazione. Sia in (i) che in (ii), basta porre $c_n = b_b - a_n$ ed applicare a questa successione i risultati del teorema 4.11. □

Teorema 4.13 (Teorema dei due carabinieri)**.** *Siano* $\{a_n\}$*,* $\{b_n\}$ *e* $\{c_n\}$ *successioni reali tali che* $a_n \leq c_n \leq b_n$ *definitivamente. Se* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$*, allora esiste anche* $\lim_{n\to\infty} c_n$ *e* $\lim_{n\to\infty} c_n = L$*.*

Dimostrazione. Supponiamo che L sia reale e fissiamo $\epsilon > 0$. Esiste $P > 0$ tale che $a_n \geq L - \epsilon$ per $n > P$, e esiste $Q > 0$ tale che $b_n \leq L + \epsilon$ per $n > Q$. Se $n > \max\{P, Q\}$, allora,

$$L - \epsilon \leq a_n \leq c_n \leq b_n \leq L + \epsilon,$$

quindi $-\epsilon \leq c_n - L \leq \epsilon$, cioè $|c_n - L| \leq \epsilon$, come volevamo.

La dimostrazione per $L = \pm\infty$ è lasciata come esercizio. □

Nel caso infinito, una delle due disuguaglianze nell'ipotesi e sufficiente. Per esempio, se $a_n \leq b_n$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$, ne segue che esiste $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Fissiamo infatti $M > 0$ qualsiasi e sia $P > 0$ tale che per ogni $n \geq P$ si abbia $b_n > M$ (tale P deve esistere perché $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$). A maggior ragione, $a_n \geq b_n > M$ per gli stessi n, quindi $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

4.5.3 Criteri del rapporto per i limiti

Teorema 4.14. *Sia* $\{a_n\}$ *una successione in* $(0, +\infty)$*.*

(i) Se esiste $0 \leq \lambda < 1$ *tale che* $a_{n+1} \leq \lambda a_n$ *definitivamente, allora* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$*.*

(ii) Se esiste $\lambda > 1$ *tale che* $a_{n+1} \geq \lambda a_n$ *definitivamente, allora* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$*.*

Dimostrazione. (i) Possiamo supporre che $a_{n+1} \leq \lambda a_n$ per ogni $n \geq 0$ (perché?). Quindi,

$$a_n \leq \lambda a_{n-1} \leq \lambda^2 a_{n-2} \leq \cdots \leq \lambda^{n-2} a_2 \leq \lambda^{n-1} a_1 \leq \lambda^n a_0.$$

Abbiamo quindi $0 < a_n \leq a_0 \lambda^n$. Per il teorema dei due carabinieri, poiché $\lim_{n\to\infty} \lambda^n = 0$, si ha che esiste $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(ii) Procedendo come in (i), abbiamo $a_n \geq \lambda^n a_0$ e, poiché $\lambda > 1$, $\lim_[n \to \infty] \lambda^n = +\infty$. Per l'osservazione che segue il teorema dei due carabinieri, ne segue che esiste $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. □

4.5.4 Sottosuccessioni e il teorema di Bolzano-Weierstrass

Data una successione $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, possiamo considerare successioni ottenuta da esse considerando la sua restrizione a un sottoinsieme degli indici. Queste sono *sottosuccessioni* di $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Per esempio, se $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ è la successione dei reciproci dei numeri naturali ($f(n) = \frac{1}{n}$, $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$), una sua sottosuccessione è $\left\{\frac{1}{m^2}\right\}_{m=1}^{\infty}$, la successione dei reciproci dei quadrati, che si ottieme dalla prima selezionando gli indici $n = m^2$. Un'altra maniera per inquadrare questa sottosuccessione è di considerare la mappa $\varphi(m) = m^2$ ($\varphi : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ è strettamente crescente e la sua immagine consiste nei quadrati dei numeri interi positivi) e di considerare la successione $f(\varphi(m)) = \frac{1}{\varphi(m)} = \frac{1}{m^2}$, $f \circ \varphi : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$.

Più in generale, abbiamo la seguente definizione.

Definizione 4.7. *Sia $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una successione in un insieme X, $f : n \mapsto a_n \in X$. Una sua* **sottosuccessione** *è una successione della forma $f \circ \varphi : \mathbb{N} \to X$, dove $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è strettamente crescente. La nuova successione può essere indicata $\{a_{\varphi(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ o, se non ci sono ambiguità, $\{a_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$, dove $n_k = \varphi(k)$.*

Teorema 4.15 (teorema di Bolzano-Weierstrass)**.** *Sia $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ una successione In $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Allora, esiste una sua sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ che converge a un punto di $[a, b]$.*

Dimostrazione. Costruiremo due successioni $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ (crescente) e $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ (decrescente), che faranno da "carabinieri" per la sottosuccessione che andiamo a scavare in quella orginale. Poniamo $a_0 = a$, $b_0 = b$, e poniamo $x_{n_0} = x_0$. Consideriamo $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$, il punto medio dell'intervallo. Almeno uno dei due intervalli $[a_0, c_0]$ o $[c_0, b_0]$ contiene infiniti termini della successione. Lo scegliamo (se sono entrambi, scegliamo quello più a sinistra); ridenominiamo i suoi estremi in maniera che l'intervallo sia $[a_1, b_1]$,[11] quindi scegliamo $n_1 > n_0$ in modo che $x_{n_1} \in [a_1, b_1]$. Procediamo allo stesso modo: posto $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$, $[a_1, c_1]$ o $[c_1, b_1]$ contengono infiniti termini della successione, prendiamo x_{n_2} con $n_2 > n_1$ in quello che abbiamo scelto (se c'era da scegliere), che ridenominiamo $[a_2, b_2]$. Eccetera.

In questa maniera abbiamo costruito successioni $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ e $\{x_{n_k}\}$ con:

$$
\begin{aligned}
(i)\ & a_k \le a_{k+1} \text{ per } k \ge 0, \\
(ii)\ & b_k \ge b_{k+1} \text{ per } k \ge 0, \\
(iii)\ & a_k \le b_j \text{ per } j, k \ge 0, \\
(iv)\ & b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} \text{ per } k \ge 0, \\
(v)\ & a_k \le x_{n_k} \le b_k \text{ per } k \ge 0.
\end{aligned}
$$

Per (i) e (ii) $\alpha := \lim_{k\to\infty} a_k = \sup_{k\ge 0} a_k$ e $\beta := \lim_{k\to\infty} b_k = \inf_{k\ge 0} b_k$ esistono, per (iii) $\alpha \le \beta$ e per confronto con le costanti a e b, $\alpha, \beta \in [a, b]$. Per (iii), $\alpha \le \beta$.

[11] Cioè, se abbiamo scelto l'intervallo a sinistra, poniamo $a_1 = a_0$ e $b_1 = c_0$; se abbiamo scelto quello a destra poniamo $a_1 = c_0$ e $b_1 = b_0$.

Per (iv), $\alpha = \beta$:

$$\beta - \alpha = \lim_{k\to\infty} a_k - \lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} \frac{b-a}{2^k} = 0.$$

Per (v), il fatto che $\alpha = \beta$ e il teorema dei due carabinieri, esiste $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \alpha = \beta \in [a, b]$. $\square$

4.6 Alcuni limiti speciali

4.6.1 Gerarchie di infinito: logaritmi, potenze e esponenziali

Proposizione 4.16. *Abbiamo le seguenti classi di limiti.*

(i) Se $A > 1$ *e* $a \in \mathbb{R}$*, allora*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^a}{A^n} = 0.$$

(ii) Se $A > 1$ *e* $a > 0$*, allora*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_A(n)}{n^a} = 0.$$

Dimostrazione. Mostriamo solo (i). Consideriamo la successione $a_n = \frac{n^a}{A^n}$ e calcoliamo:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^a}{A^{n+1}} \frac{A^n}{n^a} = \frac{1}{A}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^a \to \frac{1}{A} < 1$$

per $n \to \infty$. Applichiamo il criterio del rapporto per limiti di successioni. $\square$

4.6.2 Il fattoriale e altre successioni speciali

Consideriamo qui due limiti che coinvolgono il fattoriale.

Proposizione 4.17. *Sia* $A > 0$*.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A^n}{n!} = 0.$$

Dimostrazione. Sia $a_n = \frac{A^n}{n!}$. Allora,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{A}{n+1} \to 0$$

per $n \to \infty$. Applichiamo il criterio del rapporto per limiti di successioni. $\square$

D'altra parte, abbiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0. \tag{41}$$

Infatti,

$$\begin{aligned} \frac{n!}{n^n} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 2 \cdot 1}{n \cdot n \cdot n \ldots n \cdot n} \\ &\leq \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

che tende a zero se $n \to \infty$. Possiamo applicare il teorema dei due carabinieri, poiché $\frac{n!}{n^n} > 0$.

4.6.3 La serie geometrica

Teorema 4.18. *Per $x \in \mathbb{R}$ si ponga*

$$s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n.$$

La successione $\{s_n\}$ (la **serie geometrica di ragione** *x) converge se e solo se $|x| < 1$, nel qual caso*

$$\lim_{n\to\infty} [1 + x + x^2 + \cdots + x^n] = \frac{1}{1-x}.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} (1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n]) &= [1 - x + \cdots + x^n] - [x + x^2 + \cdots + x^{n+1}] \\ &= 1 - x^{n+1}, \end{aligned}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} x^{n+1} = \begin{cases} 0 \text{ se } |x| < 1, \\ +\infty \text{ se } x > 1 \\ \text{non esiste se } x \leq 1 \\ 1 \text{ se } x = 1. \end{cases}$$

Nel caso $x \neq 1$, quindi

$$\lim_{n\to\infty} [1+x+x^2+\cdots+x^n] = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \begin{cases} \frac{1}{1-x} \text{ se } |x| < 1, \\ \text{non esiste in } \mathbb{R} \text{ se } |x| \geq 1, \ x \neq 1. \end{cases}$$

D'altra parte, per $x = 1$,

$$\lim_{n\to\infty} [1 + x + x^2 + \cdots + x^n] = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty,$$

e ciò completa la dimostrazione. □

4.6.4 La costante di Neper

La costante di Neper nasce dal problema dell'*interesse composto* in matematica finanziaria: se a un deposito si riconosce un tasso di interesse del 100% in un anno, quale interesse va riconosciuto dopo sei mesi? E dopo un mese? La matematica che nasce da questo problema trova subito applicazioni di ogni tipo, perché molti fenomeni naturali hanno a che fare con un *tasso di crescita/decrescita*: la crescita demografica, le curve epidemiche, il decadimento radioattivo, la fissione nucleare...

Vediamo il problema dal punto di vista dell'*interesse semplice*. Supponiamo che al nostro deposito si applichi un interesse semplice: dopo t anni ($t \in [0, \infty)$) ci viene riconosciuto un interesse t, così che un capitale pari a 1 diventa, dopo un anno, $1 + 1$. Però noi possiamo ritirate il capitale dopo $1/2$ anno (avremo $1 + 1/2$), ridepositarlo immediatamente, così che dopo un altro mezzo anno avremo maturato:

$$(1 + 1/2) + 1/2(1 + 1/2) = (1 + 1/2)^2 = 2 + 1/4 > 2.$$

Il fatto è che nella seconda metà dell'anno l'interesse maturava non su un capitale di 1, ma su un capitale di $1 + 1/2$! Possiamo cercare di guadagnare di più e ritirare e ridepositare il capitale ogni $1/3$ di anno. Un breve conto mostra che dopo un anno abbiamo maturato

$$(1 + 1/3)^3 = 1 + 1 + 1/3 + 1/27 > 2 + 1/4.$$

Le domande che insorgono sono: (i) il capitale a fine anno aumenta sempre al diminuire degli intervalli di tempo tra un'operazione e l'altra?; (ii) aumenta "indefinitamente"? Il teorema che segue dà una risposta positiva a (i) e una negativa a (ii)[12].

Teorema 4.19. *La successione*

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \ n \geq 1, \tag{42}$$

è crescente, è limitata e converge a un numero e *con* $2 < e < 3$.

Il numero
$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$
è la *costante di Neper*.

[12] Una versione più facile della dimostrazione mostra una versione più debole, ma sempre utile del teorema. Poiché:

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} = \left[\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^2\right]^n = \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^2}\right]^n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

per induzione si ha che $\left(1 + \frac{1}{2^m}\right)^{2^m}$ cresce con m.

Dimostrazione. Iniziamo a espandere la potenza del binomio,

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \binom{n}{0}+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\binom{n}{3}\frac{1}{n^3}+\dots \\
&\quad +\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}+\dots \\
&= 1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\dots \\
&\quad +\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}+\dots \\
&= 1+1+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots \\
&\quad +\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\dots
\end{aligned}$$

L'ultima espressione ha $n+1$ addendi, ciascuno dei quali dipende da n mediante i fattori $1-\frac{k-1}{n}$, con $2\le k\le n$. Per ciascuno di essi abbiamo la elementare disuguaglianza

$$1-\frac{k-1}{n}<1-\frac{k-1}{n+1},$$

da cui segue che la somma degli $n+1$ addendi dell'espansione di $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è minore della somma dei primi $n+1$ addendi dell'espansione di $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ (che ha un ulteriore addendo, positivo). Quindi,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Poiché la successione è crescente, il suo limite e esiste in $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ e coincide con l'estremo superiore dei suoi valori. Inoltre, $e>(1+1)^1=2$. Dobbiamo mostrare che la successione è superiormente limitata (da 3, infatti). Tornando ai calcoli sopra, da essi ricaviamo che

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+1+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots \\
&\quad +\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\dots \\
&< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{k!}+\dots+\frac{1}{n!} \\
&< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}} \\
&< 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \\
&= 3,
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato la serie geometrica di ragione $1/2$. $\square$

5 Funzioni trigonometriche e funzioni trigonometriche inverse

5.1 Funzioni trigonometriche

Nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2 \ni (x, y)$, consideriamo la *circonferenza unitaria* γ: quella di raggio 1 e centro nell'origine O, avente quindi equazione $x^2 + y^2 = 1$. Misureremo gli angoli in *radianti* (un angolo di 1 radiante con centro O stacca sulla circonferenza un arco di lunghezza 1: l'angolo giro misura quindi 2π radianti). Consideriamo qui *angoli orientati.* L'angolo AOB (in questo ordine), con $A, B \in \gamma$, è *orientato positivamente* se in esso si va OA a OB in senso antiorario. E' *orientato negativamente* si va OA a OB in senso orario. Gli angoli orientati sono meglio visti come *rotazioni del piano*, aventi *centro di rotazione* O. Un angolo di θ radianti corrisponde alla rotazione che muove la semiretta OA in senso antiorario (se $\theta \geq 0$) o orario (se $\theta \leq 0$) di un angolo di $|\theta|$ radianti. Con questa interpretazione è naturale avere angoli orientati di θ radianti per qualunque valore di θ in $\mathbb{R}$.

Fissiamo $D = (1, 0)$ e sia $A = (x, y)$ un punto sulla circonferenza unitaria. Se Θ è un angolo orientato DOA, poniamo

$$\cos(\theta) = x, \ \sin(\theta) = y : \tag{43}$$

x è il *coseno* e y è il *seno* del numero θ (noi diremo: *dell'angolo* θ, anche se θ è una misura [nell'unità di misura data dal radiante], non una quantità geometrica). Mettiamo in lista alcune delle proprietà di queste *funzioni trigonometriche* su cui alle superiori si passano lunghi mesi di lezione.

Proposizione 5.1 (Proprietà di coseno e seno)**.** *Per ogni scelta di* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*.*

(i) $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$.

(ii) $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$.

(iii) $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$.

(iv) $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ *e* $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$.

(v) $\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin(\alpha)$ *e* $\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos(\alpha)$.

(vi) $\cos(\alpha + 2\pi k) = \cos(\alpha)$ *e* $\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin(\alpha)$ *per ogni* $k \in \mathbb{Z}$*.*

La proprietà (vi) dice che coseno e seno sono 2π-*periodiche.* Il fatto che (vi) non valga per ogni α se sostituiamo a 2π una più piccola constante T, $0 < T < 2\pi$, si esprimono dicendo che coseno e seno hanno *periodo* 2π. Per sapere i valori di coseno e seno su tutta la retta eale, cioè, ci basta saperli su una *regione fondamentale*: un intervallo di lunghezza 2π come possono esserlo $(-\pi, \pi]$ o $[0, 2\pi)$[13].

[13]In entrambi i casi abbiamo considerato solo uno dei due estremi, poiché la conoscenza di cos e sin a un estremo è sufficiente, avendo le funzioni lo stesso valore ai due estremi.

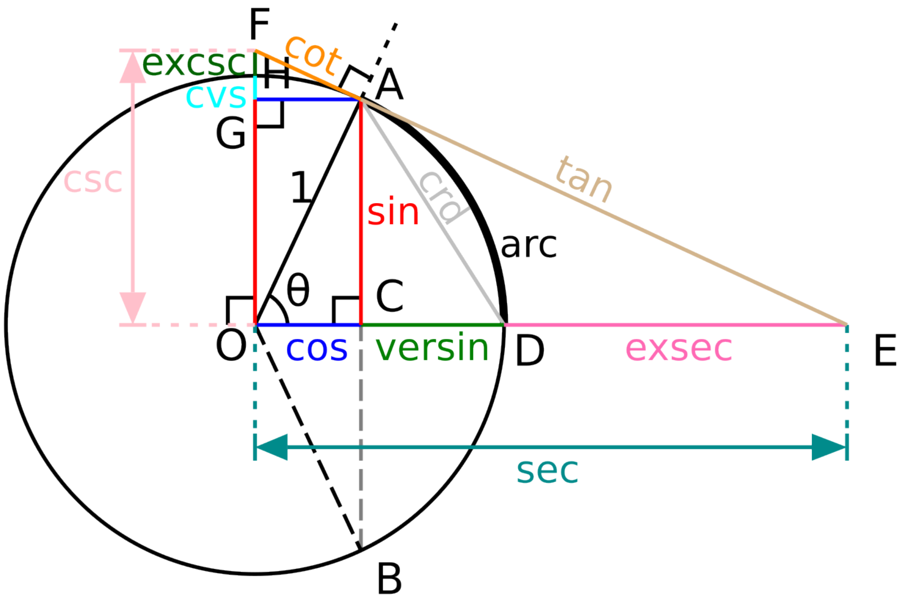


Figura 4: da wikipedia

Le relazioni (ii) e (iii) "stanno in natura" ma la loro asimmetria è sorprendente e anche fastidiosa. Nel capitolo sui numeri complessi, vedremo che queste relazioni si inseriranno perfettamente in un quadro semplice, elegante, utile nei calcoli e facile da ricordare.

Segue una tabella con coseni e seni di alcini angoli.

θ	$\cos\theta$	$\sin\theta$
0	1	0
$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
$\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$\pi/3$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/2$	0	1
π	-1	0

Quanto a crescita e decrescita delle funzioni seno e coseno abbiamo la seguente.

Proposizione 5.2. *La funzione* $\theta \mapsto \cos(\theta)$ *cresce su* $[-\pi, 0]$ *e decresce su* $[0, \pi]$*; la funzione* $\theta \mapsto \sin(\theta)$ *cresce su* $[-\pi/2, \pi/2]$ *e decresce su* $[\pi/2, 3/2\pi]$.

Gli altri intervalli su cui cos e sin crescono o decrescono si trovano per periodicità:

- per ogni $k \in \mathbb{Z}$, $\theta \mapsto \cos(\theta)$ cresce su $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ e decresce su $[2k\pi, (2k+1)\pi]$;
- per ogni $k \in \mathbb{Z}$, $\theta \mapsto \sin(\theta)$ cresce su $[(2k-1/2)\pi, (2k+1/2)\pi]$ e decresce su $[(2k+1/2)\pi, (2k+3/2)\pi]$.

Un'altra importante funzione trigonometrica è la *tangente*,

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \tag{44}$$

che è definita per $\cos\theta \neq 0$, cioè, $\tan : \mathbb{R} \setminus \{\pi(1/2 + k) : k \in \mathbb{Z}\}$. La tangente ha periodo π, la metà del periodo di cos e sin:

$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x).$$

Inoltre, la tangente è crescente nel suo dominio fondamentale $(-\pi/2, \pi/2)$ (quindi, per periodicita, in $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$. Lo è in $[0, \pi/2)$ perché lì sin cresce, cos decresce e sono entrambi positivi; lo è in $(-\pi/2, 0]$ perché la tangente è dispari,

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x).$$

A volte si usa anche la *cotangente*, A noi bastano seno, coseno e tangente. L'antichità e importanza della trigonometria ha lasciato il segno anche in un ricco lessico, con termini che denotano funzioni derivate da queste tre, che reputiamo essere quelle essenziali.

$$\cot(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

5.2 Funzioni trigonometriche inverse

Usiamo qui proprietà delle funzioni trigonometriche (la suriettività da alcuni intervalli in altri) che mostreremo solo in seguito. In particolare,

(i) la funzione $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ è biunivoca e strettamente decrescente;

(ii) la funzione $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ è biunivoca e strettamente crescente;

(iii) la funzione $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ è biunivoca e strettamente crescente.

Definizione 5.1. *Le funzioni inverse delle funzioni trigonometriche sono:*

(i) la funzione **arcocoseno**, $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$:

$$\arccos(x) = y \iff 0 \leq y \leq \pi \text{ e } x = \cos(y);$$

(ii) la funzione **arcoseno**, $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$:

$$\arcsin(x) = y \iff -\pi/2 \leq y \leq \pi/2 \text{ e } x = \sin(y);$$

(iii) la funzione **arcotangente**, $\arctan : \mathbb{R} \to [-\pi/2, \pi/2]$:

$$\arctan(x) = y \iff -\pi/2 \leq y \leq \pi/2 \text{ e } x = \tan(y).$$

Dalle proprietà di monotonia di coseno, seno e tangente, segue che:

(i) la funzione $\arccos : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ è strettamente decrescente e ha immagine $[0, \pi]$;

(ii) la funzione $\arcsin : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ è strettamente crescente e ha immagine $[-\pi/2, \pi/2]$;

(iii) la funzione $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è strettamente crescente e ha immagine $(-\pi/2, \pi/2)$.

Vediamo ora le soluzioni dell'equazione $f(x) = y$ quando f è una funzione trigonometrica, partendo dalla più semplice.

(i) L'equazione $\tan x = y$ ha le (inifinite) soluzioni $\{x = \arctan(y) + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

(ii) L'equazione $\cos x = y$ ha le (inifinite) soluzioni $\{x = \arccos(y) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x = -\arccos(y) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

(iii) L'equazione $\sin x = y$ ha le (inifinite) soluzioni $\{x = \arcsin(y) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x = \pi - \arcsin(y) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

6 Numeri complessi

L'equazione

$$x^2 + 1 = 0$$

non ha soluzioni reali. Con questo fatto l'umanità convisse tranquillamente nei molti secoli che intercorrono tra la maturità della matematica ellenica, la fioritura dell'algebra indo-araba e il tardo Rinascimento; così come anche oggi si convive col fatto che, nel loro moto libero, i gravi non tendono ad allontanarsi dal centro della Terra e altri fatti di natura. Nel tardo Cinquecento alcuni matematici italiani trovarono una formula per risolvere le equazioni di terzo grado che, per alcune scelte dei coefficienti, richiedeva di calcolare la radice quadrata di un numero negativo (questo numero "immaginario" appariva e spariva nel calcolo, quindi le soluzioni dell'equazione risultavano essere comunque reali). Rafael Bombelli, nella sua *Algebra* (Bologna, 1572), sviluppò un calcolo coerente per numeri *complessi*, cioè contenenti sia una parte reale che una parte immaginaria. Vedi L'algebra nel Settecento e l'emergere dei numeri complessi di Raffaella Franci, o I numeri complessi di G. Valentini per brevi, ma informati resoconti di questa storia.

Per un lungo periodo i numeri complessi rimasero un capitolo della matematica più pura e la loro teoria venne sviluppata come tale. Nel corso di questa fase, però, risultò che essi erano legati a molti capitoli di matematica assai più applicabile, in cui dispiegavano una "irragionevole efficacia" nel modellare fenomeni, trovare soluzioni di problemi, svolgere calcoli. In particolare, si rivelarono essenziali nella descrizione dei fenomeni di tipo periodico, che sono gli elementi costitutivi, per esempio, della radiazione elettromagnetica. Quando nei primi decenni del XX secolo furono elaborate le basi teoriche della meccanica quantistica, emerse che esse richiedevano una sofisticata algebra lineare sul campo complesso, buona parte della quale era stata sviluppata dalle due precedenti generazioni di matematici.

Per questi e altri motivi, il calcolo con i numeri complessi è centrale in quasi tutte le branche dell'ingegneria.

6.1 Definizione e proprietà algebriche

Vedi anche la pagina wikipedia Numeri complessi per avere una introduzione a volo d'uccello.

Definizione 6.1. *Un* **numero complesso** *è una espressione della forma* $z = x + iy$*, dove* $x, y \in \mathbb{R}$ *e dove il simbolo* i *(l'***unità immaginaria***) soddisfa l'equazione* $i^2 = -1$.[14] *Le operazioni di somme a prodotto tra i numeri complessi* $z = x + iy$ *e* $w = u + iv$ *sono quindi definite da:*

$$\begin{aligned} z + w &= (x + iy) + (u + iv) = (x + y) + i(y + v), \\ zw &= (x + iy) + (u + iv) = xu + iyu + xiv + i^2 yv = (xu - yv) + i(yu + xv). \end{aligned}$$

L'insieme dei numeri complessi è indicato con $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$*. L'insieme* $\mathbb{R}$*, quando considerato come sottoinsieme di* $\mathbb{R}$*, è chiamato la* **retta reale***, mentre* $i\mathbb{R} = \{iy : y \in \mathbb{R}\}$ *è l'***asse immaginario***.*

Il numero complesso $z = x + iy$ può essere rappresentato geometricamente come il punto (x, y) del piano cartesiano $\mathbb{R}^2$. Alla somma dei numeri complessi $z = x + iy$ e $w = u + iv$ corrisponde il vettore $(x + u, y + v)$, che è la somma dei vettori di $\mathbb{R}^2$ corrispondenti a z e w. Avendo a mente questa rappresentazione, $\mathbb{C}$ è chiamato anche *piano complesso*.

La moltiplicazione del numero complesso $z = x + iy$ e del numero reale λ si comporta come la moltiplicazione vettore per scalare in $\mathbb{R}^2$,

$$\lambda z = \lambda(x + iy) = (\lambda x) + i(\lambda y). \tag{45}$$

[14] Nel romanzo di Robert Musil *I turbamenti del giovane Törless* (1906) troviamo il seguente dialogo tra due studenti di un collegio militare:

“ Hai capito tutto? ”

“ Cosa? ”

“ La storia dei numeri immaginari. ”

“ Sì. Che c'è di difficile? Basta pensare che l'unità di calcolo è data dalla radice quadrata di meno uno. ”

“ È questo il punto. Quell'unità, non esiste. Ogni numero, positivo o negativo, elevato a quadrato, da qualcosa di positivo. Quindi non ci può essere un numero reale che sia la radice quadrata di qualcosa di negativo. ”

“ Giusto. Ma perché non si dovrebbe provare a estrarre una radice quadrata anche da un numero negativo? Il numero negativo, naturalmente, non può produrre nessun valore reale, per questo si dice che il risultato è immaginario. È come se uno dicesse: qui si sedeva sempre una persona, mettiamo la seggiola al solito posto; anche se la persona è morta, facciamo come se dovesse venire. ”

Definizione 6.2. *Sia $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Il* **complesso coniugato** *di z è $\bar{z} = x - iy \in \mathbb{C}$; il* **modulo** *di z è $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$; la* **parte reale** *di z è $Re z = x \in \mathbb{R}$ e la* **parte immaginaria** *di z è $Im z = y \in \mathbb{R}$.*

Modulo e coniugato di un numero complesso sono legati dalla relazione

$$|z|^2 = z\bar{z}. \tag{46}$$

Infatti, $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$.

L'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ con le operazioni di somma e prodotto soddisfa le proprietà di campo.

Per ogni scelta di z, w, ξ in $\mathbb{R}$,

1. $(z + w) + \xi = z + (w + \xi)$;
2. $z + 0 = 0 + z = z$, dove $0 = 0 + i0 \in \mathbb{C}$;
3. ponendo $-z = -x - iy$ se $z = x + iy$, $z + (-z) = 0$;
4. $z + w = w + z$;
5. $(zw)\zeta = z(w\zeta)$;
6. $z1 = 1z = x$, dove $1 = 1 + i0 \in \mathbb{C}$;
7. se $z \neq 0$, ponendo $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, si ha che $z \cdot z^{-1} = \frac{z\bar{z}}{|z|^2} = 1$;
8. $zw = wz$;
9. $(z + w)\xi = (z\xi) + (w\xi)$.

Possiamo quindi svolgere in $\mathbb{C}$ tutti i calcoli algebrici che svolgiamo in $\mathbb{R}$, definire polinomi della variabile complessa z (con coefficienti in $\mathbb{C}$) e operare su di essi come sui polinomi di una variabile reale, aventi coefficienti reali: possiamo sommare e moltiplicare polinomi, e calcolare divisioni con resto. Nel *Minimo pratico* trovate esercizi per la manipolazione algebrica dei numeri complessi.

Teorema 6.1. *L'equazione*

$$z^2 = w \tag{47}$$

ha due soluzioni in $\mathbb{C}$ per ogni $w \in \mathbb{C}$ (coincidenti se e solo se $w = 0$).

Vedremo un'altra dimostrazione del teorema nella successiva sottosezione. Nel caso delle radici quadrate, però, a volte è più semplice trovare le soluzioni algebricamente, come facciamo qui sotto.

Dimostrazione. Sia $w = u+iv$ il termine noto e $z = x+iy$ la variabile complessa. L'uguaglianza (47) diventa:

$$u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy,$$

cioè, la coppia (x, y) è soluzione del sistema di equazioni reali:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = u \\ 2xy = v \end{cases}$$

Sostituendo $y = \frac{v}{2x}$ nella prima equazione (supponendo che $x = 0$ non sia la prima componente di una soluzione) e poi moltiplicando per $4x^2$ otteniamo

$$4x^4 - 4ux^2 - v^2 = 0.$$

Poiché $x^2 \geq 0$, dopo elementari manipolazioni otteniamo due soluzioni reali del sistema:

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{u^2+v^2}+u}{2}} \\ y = \pm\frac{v}{\sqrt{2}(\sqrt{u^2+v^2}+u)} = \pm\frac{v}{|u|}\sqrt{\frac{\sqrt{u^2+v^2}-u}{2}}. \end{cases}$$

I due valori di x sono distinti, a meno che $v = 0$ e $u \leq 0$, cioè $x = 0$, che avevamo escluso all'inizio del calcolo.

Il caso in cui una soluzione del sistema abbia $x = 0$ va però considerato. Ciò si presenta solo se $v = 0$ e $u \leq 0$, che ci dà le soluzioni reali

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \pm\sqrt{-u}. \end{cases}$$

Esse sono coincidenti se e solo se $u = 0 = v$ (cioè, $w = 0$). $\square$

6.2 Rappresentazione trigonometrica e esponenziale dei numeri complessi

Sia $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Allora, $z = |z| \cdot \frac{z}{|z|}$ e $\frac{z}{|z|} = c + is$, pensato come punto (c, s) del piano cartesiano, appartiene alla circonferenza unitaria γ che avevamo introdotto nel capitolo sulla trigonometria. Quindi, esistono infiniti valori di $\theta \in \mathbb{R}$ tali che $c = \cos\theta$ e $s = \sin\theta$. Se chiamiamo $r = |z| > 0$, abbiamo che

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta). \tag{48}$$

L'equazione (48) è la *rappresentazione trigonometrica* del numero z; $r = |z|$ è il modulo di z (già visto sopra) e θ è UN *argomento* di θ. Viceversa, ogni numero z della forma (48) con $r > 0$ e $\theta \in \mathbb{R}$ è un numero complesso $z \neq 0$.

Dalla trigonometria abbiamo il seguente fatto.

Proposizione 6.2. *Sia $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Se θ è un argomento di z e $\alpha \in \mathbb{R}$, allora α è un argomento di z se e solo se esiste $k \in \mathbb{Z}$:*

$$\alpha = \theta + 2k\pi.$$

Talvolta, l'*argomento principale* di un numero complesso $z \neq 0$ viene considerato quello che appartiene all'intervallo $[0, 2\pi)$.

Osserviamo che anche $z = 0$ è rappresentabile come in (48), con $r = |0| = 0$. Però θ non è più determinato nemmeno a meno di fattori del tipo $2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$: ogni valore di θ va bene.

Grandi gratificazioni vengono dalla scrivere del prodotto di numeri complessi in coordinate trigonometriche.

Teorema 6.3. *Siano* $z = p(\cos\alpha + i \sin\alpha)$ *e* $w = q(\cos\beta + i\sin\beta)$ *numeri complessi in forma trigonometrica. Allora,*

$$zw = pq[\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)]. \tag{49}$$

Cioè, nel prodotto si moltiplicano i moduli e si sommano gli argomenti (!).

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} zw &= pq(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) \\ &= pq[(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)] \\ &= pq[\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)]. \end{aligned}$$

□

Oltre che a provvederci di un trucco per ricostruire velocemente le formule di coseno e seno di somma di archi, il teorema 6.3 ci aiuta molto nei conti.

Corollario 6.4. *Siano* $z = p(\cos\alpha + i \sin\alpha)$ *e* $w = q(\cos\beta + i\sin\beta)$ *numeri complessi in forma trigonometrica. Allora,*

(i) se $n \in \mathbb{N}$*, allora*
$$z^n = p^n[\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)]; \tag{50}$$

(ii) $\bar{z} = p[\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)]$*;*

(iii) la formula (50) *vale per ogni* $n \in \mathbb{Z}$*;*

(iv) se $w \neq 0$*,* $\frac{z}{w} = \frac{p}{q}[\cos(\alpha - \beta) + i\sin(\alpha-\beta)]$*.*

La verifica di tutte queste proprietà segue facilmente da (49).

Dal punto di vista geometrico, il fatto che nella formula per il prodotto appaia la somma degli argomenti suggerisce che le rotazioni c'entrino qualcosa. Chiedete al* vostr* docente di algebra e geometria lumi in merito. Dal punto di vista algebrico, siamo in una situazione analoga alle funzioni esponenziali, che che a una somma fanno corrispondere un prodotto. Ciò giustifica la seguente definizione.

Definizione 6.3. *Sia* $z = x + iy$ *un numero complesso. Allora,*

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \tag{51}$$

*è l'***esponenziale** *di* z*.*

La parte più caratterizzante della definizione riguarda i numeri immaginari,

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

Una buona ragione per dare questa definizione è che la proprietà fondamentale delle funzioni esponenziali è conservata.

Teorema 6.5. *Siano $z, w \in \mathbb{C}$. Allora, $e^{z+w} = e^z e^w$.*

Dimostrazione. Se $z = x + iy$ e $w = u + iv$, allora

$$\begin{aligned} e^{z+w} &= e^{(x+u)+i(y+v)} = e^{x+u}(\cos(y+v) + i\sin(y+v)) \\ &= e^x e^u (\cos(y) + i\sin(y))(\cos(v) + i\sin(v)) \\ &= e^z e^w. \end{aligned}$$

□

Rimarrebbe da giustificare perché come base abbiamo messo e e non un altro numero. La motivazione risiede in un limite notevole (nel campo complesso), che vedremo più tardi (nel campo reale).

Teorema 6.6. *Per ogni $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, esiste $z \in \mathbb{C}$ tale che $e^z = w$.*

Se $\zeta \in \mathbb{C}$, allora $e^\zeta = e^z$ se e solo se $\zeta = z + 2k\pi i$ per qualche valore di $k \in \mathbb{Z}$.

Dimostrazione. Scriviamo $w = q(\cos y + i \sin y) = q \cdot e^{iy}$ in forma trigonometrica, con $q > 0$ e $y \in \mathbb{R}$ un argomento di w. Posto $x = \ln(q)$, abbiamo $w = e^x e^{iy} = e^{x+iy}$ per la nostra definizione di esponenziale complesso. Mentre la parte reale x di $z = x + iy$ è univocamente determinata da $q = |w|$, la parte immaginaria, y, è determinata a meno di un multiplo di 2π, come abbiamo visto sopra. □

Il caso speciale più "pop" di (51) corrisponde a $z = i\pi$,

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Dalla forma esponenziale si deducono facilmente le formule:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \ \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \tag{52}$$

6.3 Radici n-esime di un numero complesso

Nei numeri complessi hanno soluzioni non solo tutte le equazioni di secondo grado, ma qualsiasi equazione della forma $p(z) = 0$, dove p è un polinomio a coefficienti complessi (*teorema fondamentale dell'algebra*). Vediamo qui il caso particolare, ma interessante, delle equazioni della forma $z^n = w$, con $w \in \mathbb{C}$ ($w \neq 0$ è il caso interessante). Le soluzioni sono i vertici di un n-agono nel piano complesso. Ciò non è solo bello, ma anche centrale in numerose applicazioni. Per $w = 1$, infatti, questi punti sono legati alla *trasformata di Fourier discreta* e, in particolare, alla *trasformata di Fourier veloce* (FFT), che sono strumenti d'uso universale in elettronica, teoria dei segnali, calcolo numerico e oltre. Qui ovviamente non possiamo entrare in questi sviluppi e ci limitiamo al semplice risultato algebrico che costituisce una delle loro basi principali.

Teorema 6.7. *Siano $w = re^{i\alpha} = r[\cos\alpha + i\sin\alpha] \in \mathbb{C}$ ($n \geq 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$) e $n \geq 1$ intero. Le soluzioni di*

$$z^n = w$$

sono $z = z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$, dove

$$z_j = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+2\pi\frac{j}{n}\right)} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + 2\pi\frac{j}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n} + 2\pi\frac{j}{n}\right)\right]. \tag{53}$$

Le soluzioni $z_0, \ldots, z_{n-1}$ sono vertici di un n-agono regolare inscritto nella circonferenza con centro 0 e raggio $\sqrt[n]{r}$ nel piano complesso, in cui uno dei vertici è

$$z_0 = \sqrt[n]{r} e^{\frac{i\alpha}{n}} = \sqrt[n]{r} \left[\cos\left(\frac{\alpha}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{n}\right) \right].$$

Le soluzioni di $z^n = 1$, in particolare, sono

$$z_j = e^{\frac{2\pi i j}{n}} = \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi j}{n}\right), \ j = 0, \ldots, n-1 :$$

i vertici dell'n-agono regolare inscritto nella circonferenza unitaria nel piano complesso, avente uno dei vertici in 1.

Dimostrazione. Consideriamo il caso non banale $w \neq 0$. Scriviamo $z = \rho e^{it}$, con $\rho \geq 0$ e $t \in \mathbb{R}$. L'equazione allora diventa:

$$r e^{i\alpha} = [\rho e^{it}]^n = \rho^n e^{int},$$

che vale se e solo se $\rho^n = r$ (con $\rho \geq 0$) e, per la periodicità dell'esponenziale immaginario, $nt = \alpha + 2j\pi$ per qualche $j \in \mathbb{Z}$, cioè $t = \frac{\alpha + 2\pi j}{n}$. Questo ci dà le soluzioni *distinte* $z_0, \ldots, z_{n-1}$ e, in effetti, soluzioni per ogni $j \in \mathbb{Z}$. Sempre per 2π-periodicità dell'esponenziale immaginario, $z_{j+n} = z_j$, ma questo mostra che non ci sono altre radici distinte. $\square$

7 Limiti di funzioni e continuità

7.1 Proprietà definitive

La nozione di **definitività** è fondamentale per introdurre i limiti. Questa nozione è associata al comportamento di una variabile x, per il quale distinguiamo tre casi,

- la variabile x cresce indefinitamente, cioè x tende all'infinito (si scrive $x \to +\infty$),
- oppure la variabile x decresce indefinitamente, cioè x tende a meno infinito (si scrive $x \to -\infty$),
- oppure x si avvicina a un numero reale finito x_0, cioè x tende a x_0 (si scrive $x \to x_0$).

Per ognuno di questi comportamenti, che descriveremo più precisamente nelle prossime definizioni, si dice che una certa funzione $f(x)$ può rispettare in maniera definitiva una proprietà.

Definizione 7.1. *Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ illimitato superiormente. Una funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$ verifica una certa proprietà P* ***definitivamente per $x \to +\infty$*** *se esiste un numero reale $M \in \mathbb{R}$ tale che*

$$\boxed{f(x) \textit{ rispetta } P \textit{ per ogni } x \geq M.}$$

Esempio 7.1. Se P è la proprietà

$$P(y) = \text{“}y \geq 103\text{”}$$

allora la funzione $f(x) = x^2$ rispetta definitivamente la proprietà P per $x \to +\infty$, poiché per ogni $x \geq 12$ (ma è possibile scegliere anche un valore inferiore di M) la proprietà è rispettata.

Esempio 7.2. La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ rispetta definitivamente (per $x \to +\infty$) la proprietà di essere $< \frac{1}{2}$ poiché per ogni $x \geq M = 3$ si ha $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{M} < \frac{1}{2}$.

Definizione 7.2. *Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ illimitato inferiormente. Una funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$ verifica una certa proprietà P* ***definitivamente per $x \to -\infty$*** *se esiste un numero reale $M \in \mathbb{R}$ tale che*

$$\boxed{f(x) \textit{ rispetta } P \textit{ per ogni } x \leq M.}$$

Esempio 7.3. Se P è la proprietà

$$P(y) = \text{“}y \geq 103\text{”}$$

allora la funzione $f(x) = x^2$ rispetta definitivamente la proprietà P per $x \to -\infty$, poiché per ogni $x \leq -11$ la proprietà è rispettata.

Definizione 7.3. *Un sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{R}$ si dice **aperto** se per ogni elemento $x \in X$ esiste un intervallo aperto (a, b) contenente x e tale che $(a, b) \subseteq X$.*

Definizione 7.4. *Un sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{R}$ si dice **chiuso** se il suo complementare X^c è un insieme aperto.*

Esempio 7.4. Alcuni esempi di insiemi aperti e chiusi:

- ogni intervallo aperto (a, b), con $a < b$ numeri reali, è un insieme aperto;
- l'unione di due intervalli aperti $(a, b) \cup (c, d)$ con $a < b < c < d$ numeri reale, è un insieme aperto;
- l'unione di un numero finito di intervalli aperti disgiunti è un insieme aperto;
- ognni intervallo chiuso $[a, b]$, con $a < b$ numeri reali, è un insieme chiuso;
- l'unione di un numero finito di intervalli chiusi disgiunti è un insieme chiuso;
- gli intervalli $(a, b]$ e $[a, b)$ non sono né aperti né chiusi.

Definizione 7.5. *Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e $X \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}$ che contiene x_0.*

*Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ verifica una certa proprietà P **definitivamente per** $x \to x_0$ se esiste un numero reale positivo $\delta \in \mathbb{R}^+$ tale che*

$$\boxed{f(x) \text{ rispetta } P \text{ per ogni } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}.}$$

NOTA BENE. *Si è tolto il punto x_0 dall'intervallo. L'insieme preso in considerazione è detto "intervallo bucato".*

Esempio 7.5. Se P è la proprietà

$$P(y) = \text{“}y \leq \frac{5}{4}\text{”}$$

allora la funzione $f(x) = x^2$ rispetta definitivamente la proprietà P per $x \to x_0 = 1$, poiché se $\delta = \frac{1}{2}$, per ogni $x \in (1 - \delta, 1 + \delta) \setminus \{1\}$ la proprietà è rispettata.

Esempio 7.6. Sia P la proprietà

$$P(y) = \text{“}|y| > 100\text{”}$$

allora la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ rispetta definitivamente P per $x \to 0$, lo si vede scegliendo $\delta = \frac{1}{100}$, e quindi prendendo $x \in \left(-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\right) \setminus \{0\}$.

7.2 Definizioni di limite

Definizione 7.6. *Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ illimitato superiormente. Data una funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$, il suo limite per $x \to +\infty$ è il numero reale ℓ, e si scrive*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R},$$

se per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vale definitivamente (per $x \to +\infty$) la disuguaglianza

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Quindi per ogni possibile scelta di $\varepsilon > 0$ (non importa quanto piccolo), la differenza $|f(x) - \ell|$ è definitivamente più piccola di ε per $x \to +\infty$.

Definizione equivalente,

$$\boxed{\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+\ \exists M \in \mathbb{R}\ t.c.\ \forall x \geq M,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon.}$$

Esempio 7.7. Mostriamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, prendiamo $M \in \mathbb{R}$ numero reale tale che $M > \frac{1}{\varepsilon}$. Allora, se $x \geq M$, per le proprietà delle disuguaglianze $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{M} < \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon$, che è esattamente la definizione di limite cercata.

NOTA BENE. *Questa definizione si generalizza anche al caso $x \to -\infty$. Quindi si ha*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$$

se per ogni scelta di $\varepsilon > 0$, la differenza $|f(x) - \ell|$ è definitivamente più piccola di ε per $x \to -\infty$. In modo equivalente,

$$\boxed{\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+\ \exists M \in \mathbb{R}\ t.c.\ \forall x \leq M,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon.}$$

Definizione 7.7. *Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ illimitato superiormente. Una funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$, tende al **limite** $+\infty$ per $x \to +\infty$ e si scrive*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

se per ogni $N \in \mathbb{R}$, f è definitivamente $\geq N$ per $x \to +\infty$. Quindi per ogni possibile scelta di N numero reale (cioè non importa quanto N sia grande), resta *vero che f supera N e resta maggiore di N definitivamente.*

Definizione equivalente,

$$\boxed{\forall N \in \mathbb{R}\ \exists M \in \mathbb{R}\ t.c.\ \forall x \geq M,\ f(x) \geq N.}$$

Definizione 7.8. *Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ illimitato inferiormente. Una funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$, tende al **limite** $+\infty$ per $x \to -\infty$ e si scrive*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty,$$

se per ogni $N \in \mathbb{R}$, f è definitivamente $\geq N$ per $x \to -\infty$.

Definizione equivalente,

$$\boxed{\forall N \in \mathbb{R}\ \exists M \in \mathbb{R}\ t.c.\ \forall x \leq m,\ f(x) \geq N.}$$

NOTA BENE. *Queste due definizioni di limite possono essere facilmente generalizzate al caso di limite $-\infty$, semplicemente sostituendo la proprietà di essere $\leq N$ per ogni $N \in \mathbb{R}$. In tal caso si scriverà,*

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty.$$

Esempio 7.8. Sia $f(x) = x^3$ allora mostriamo che

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty.$$

Per il primo caso osserviamo che dato $N \in \mathbb{R}$, se scegliamo $M = N^{\frac{1}{3}}$ allora per ogni $x \geq N$, $x^3 \geq N^3 = M$, rispettando la definizione di limite $+\infty$.

Nel secondo caso, dato $N \in \mathbb{R}$, scegliamo $M = N^{\frac{1}{3}}$ e ancora osserviamo che per ogni $x \leq N$, $x^3 \leq N^3 = M$, rispettando la definizione di limite $-\infty$. In particolare questa relazione sarà verificata nel caso in cui $N < 0$, e quindi $N^{\frac{1}{3}} < 0$.

Tutte le definizioni di limiti considerate in questa sezione sono generalizzazioni dei limiti di successioni. Infatti, una successione è una funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$ in cui il dominio X è l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$. Si tratta quindi di un dominio illimitato superiormente, e perciò è possibile applicare la defnzione di limite per $x \to \infty$.

Andiamo adesso a esporre una nozione di limite che invece non ha un analogo nel caso delle successioni.

Definizione 7.9. *Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e $X \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che contiene un intervallo bucato di x_0, cioè esiste $\delta_0 > 0$ tale che $((x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \setminus \{x_0\}) \subseteq X$. Data una funzione $f \colon X \to \mathbb{R}$, si ha*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty,$$

se per ogni $N \in \mathbb{R}^+$, vale definitivamente (per $x \to x_0$, vedi Definizione 7.5) la disuguaglianza $f(x) > N$.

Definizione equivalente,

$$\boxed{\forall M \in \mathbb{R}\ \exists \delta \in \mathbb{R}^+\ t.c.\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\},\ f(x) > N.}$$

NOTA BENE. *Osserviamo che la condizione $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ è equivalente a richiedere che $|x - x_0| < \delta$.*

NOTA BENE. *In maniera analoga si può definire $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.*

Esempio 7.9. Consideriamo la funzione $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Allora

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Infatti, dato $N \in \mathbb{R}^+$, possiamo scegliere $\delta = \frac{1}{\sqrt{N}}$ ottenendo che per ogni $x \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$, vale che $\frac{1}{x^2} > N$.

Definizione 7.10. *Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e $X \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che contiene un intervallo bucato di x_0, cioè esiste $\delta_0 > 0$ tale che $((x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \setminus \{x_0\}) \subseteq X$. Data una funzione $f \colon X \to \mathbb{R}$, si ha*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R},$$

se per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, vale definitivamente (per $x \to x_0$, vedi Definizione 7.5) la disuguaglianza

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Definizione equivalente,

$$\boxed{\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+\ \exists \delta \in \mathbb{R}^+\ t.c.\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\},\ |f(x) - \ell| < \varepsilon.}$$

NOTA BENE. *Si dice che una funzione $f(x)$ **converge** o **diverge** per $x \to x_0$ oppure per $x \to \pm\infty$ se il suo limite è rispettivamente un numero reale $\ell \in \mathbb{R}$ oppure è $\pm\infty$.*

7.3 Operazioni coi limiti

Consideriamo due funzioni $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ dove $X \subseteq \mathbb{R}$ è un opportuno insieme di numeri reali. In questa sezione enunceremo una serie di risultati che permettono di sapere il limite di $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ oppure f/g a partire dai limiti di f e g. Come vedremo questi risultati sono validi per $x \to x_0$ oppure $x \to \pm\infty$, ma non tutte le combinazioni permettono di avere una risposta univoca, per cui in certi casi avremo bisogno di risultati più fini che saranno enunciati nelle prossime sezioni.

Teorema 7.1. *Date due funzioni f e g come sopra, se esistono $\lim f$ e $\lim g$ allora è possibile dire qual è il limite della funzione $f+g$ seguendo la seguente tabella, dove sulla prima riga è indicato $\lim f$ e sulla prima colonna è indicato $\lim g$.*

$\boxed{f+g}$	$\ell_1 \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 \in \mathbb{R}$	$\ell_1 + \ell_2$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

Dove abbiamo lasciato un "?" si tratta di casi con una forma indefinita per cui non può essere enunciato un risultato univoco.

NOTA BENE. *Non abbiamo specificato se $x \to \pm\infty$ oppure $x \to x_0$ perché i risultati in tabella sono veri in tutti i casi. Comunque ogni scelta del limite porta con sé le opportune condizioni sul dominio X della funzione: se $x \to +\infty$ è necessario che X sia illimitato superiormente; se $x \to -\infty$ che X sia illimitato inferiormente. Se $x \to x_0$, che esista $\delta_0 > 0$ tale che $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \setminus \{x_0\} \subseteq X$.*

Dimostrazione. Ci limitiamo al caso in cui $\lim f = \ell_1$ e $\lim g = \ell_2$ per $x \to +\infty$, gli altri si fanno analogamente. Dato un certo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vogliamo mostrare che esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $x \geq M$ e $x \in X$, vale $|f(x) + g(x) - (\ell_1 + \ell_2)| < \varepsilon$. Scegliamo $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$, allora per definizione di limite, esiste $M_1 \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $x \geq M_1$,

$$|f(x) - \ell_1| < \varepsilon'$$

ed esiste $M_2 \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $x \geq M_2$

$$|g(x) - \ell_2| < \varepsilon'.$$

Quindi, se scegliamo $M_3 = \max(M_1, M_2)$, allora entrambe le disuguaglianze sopra sono vere, e allora

$$|f(x) + g(x) - (\ell_1 + \ell_2)| \leq |f(x) - \ell_1| + |g(x) - \ell_2| < 2\varepsilon' = \varepsilon,$$

dove abbiamo utilizzato la disuguaglianza triangolare e la definizione di ε'. Questo conclude la dimostrazione. $\square$

Facciamo ora alcuni esempi che riguardano i casi indefiniti.

Esempio 7.10. Consideriamo $f(x) = x$ e $g(x) = -\frac{x}{2}$, che hanno limite $+\infty$ e $-\infty$ rispettivamente per $x \to +\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) + g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty.$$

Se invece consideriamo $f(x) = x$ e $g(x) = -2x$, le due funzioni hanno gli stessi limiti per $x \to +\infty$, ma per il limite della somma si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) + g(x) = \lim_{x\to+\infty} -x = -\infty.$$

Quindi nei casi indefiniti marcati da "?", non è effettivamente possibile dare una risposta univoca.

Teorema 7.2. *Date due funzioni f e g come sopra, se esistono* $\lim f$ *e* $\lim g$ *allora è possibile dire qual è il limite della funzione $f \cdot g$ seguendo la seguente tabella, dove sulla prima riga è indicato* $\lim f$ *e sulla prima colonna è indicato* $\lim g$.

$\boxed{f \cdot g}$	$\ell_1 > 0$	$\ell_1 < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 > 0$	$\ell_1 \cdot \ell_2$	$\ell_1 \cdot \ell_2$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 < 0$	$\ell_1 \cdot \ell_2$	$\ell_1 \cdot \ell_2$	0	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	?	?
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$

Dove abbiamo lasciato un "?" si tratta di casi con una forma indefinita per cui non può essere enunciato un risultato univoco.

Dimostrazione. Consideriamo il caso in cui $\lim f = \ell_1 \in \mathbb{R}$ e $\lim g = \ell_2 \in \mathbb{R}$ dove il limite è considerato per $x \to x_0$.

Scegliamo $\varepsilon' > 0$ e consideriamo $\delta_1 > 0$ tale che per ogni $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ vale la disuguaglianza

$$|f(x) - \ell_1| < \varepsilon',$$

e analogamente $\delta_2 > 0$ tale che per $x \in (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2)$ vale la disuguaglianza

$$|f(x) - \ell_2| < \varepsilon'.$$

Adesso vogliamo controllare la grandezza $|f(x)g(x) - \ell_1\ell_2|$ e lo facciamo usando il "trucco" di aggiungere e sottrarre uno stesso termine,

$$|f(x)g(x) - \ell_1\ell_2| = |f(x)g(x) - f(x)\ell_2 + f(x)\ell_2 - \ell_1\ell_2|.$$

Adesso utilizzando la disuguaglianza triangolare otteniamo

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - \ell_1\ell_2| &= |f(x)g(x) - f(x)\ell_2 + f(x)\ell_2 - \ell_1\ell_2| \\ &\leq |f(x)g(x) - f(x)\ell_2| + |f(x)\ell_2 - \ell_1\ell_2| \\ &= |f(x)||g(x) - \ell_2| + |\ell_2||f(x) - \ell_1| \\ &< |f(x)| \cdot \varepsilon' + |\ell_2| \cdot \varepsilon'. \end{aligned}$$

L'ultima disuguaglianza è verificata se scegliamo $\delta_3 = \min(\delta_1, \delta_2)$ e $x \in (x_0 - \delta_3, x_0 + \delta_3)$.

Il termine $|f(x)|$ nell'ultima espressione è limitato, quindi per ogni $\varepsilon > 0$, se scegliamo ε' sufficientemente piccolo, l'ultima espressione ci permette di verificare che $|f(x)g(x) - \ell_1\ell_2| < \varepsilon$. Infatti, se $K \in \mathbb{R}^+$ è un maggiorante di $|f(x)|$, cioè $|f(x)| \leq K$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e scegliamo

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{K + |\ell_2|},$$

allora $|f(x)g(x) - \ell_1\ell_2| < |f(x)|\varepsilon' + |\ell_2|\varepsilon' \leq \varepsilon$ e questo conclude la dimostrazione. □

Enunciamo un esempio relativo a un caso indefinito.

Esempio 7.11. Consideriamo la funzione $f(x) = x^2$ e la funzione $g(x) = \frac{1}{x}$ per $x \to +\infty$. Allora $\lim_{x\to+\infty} f \cdot g = +\infty$. Se invece $g(x) = \frac{1}{2x^2}$, $\lim_{x\to+\infty} f \cdot g = \frac{1}{2}$.

Il caso della differenza si ottiene a partire da quello della somma semplicemente osservando che $-g$ è la funzione $g(x)$ moltiplicata per la funzione costante -1, e quindi utilizzando i risultati legati al prodotto di limiti si ottiene facilmente la generalizzazione cercata.

Teorema 7.3. *Date due funzioni f e g come sopra, se esistono* $\lim f$ *e* $\lim g$ *allora è possibile dire qual è il limite della funzione $f - g$ seguendo la seguente tabella, dove sulla prima riga è indicato* $\lim f$ *e sulla prima colonna è indicato* $\lim g$.

$\boxed{f - g}$	$\ell_1 \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 \in \mathbb{R}$	$\ell_1 - \ell_2$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?

Dove abbiamo lasciato un "?" si tratta di casi con una forma indefinita per cui non può essere enunciato un risultato univoco.

Teorema 7.4. *Date due funzioni f e g come sopra, se esistono* $\lim f$ *e* $\lim g \neq 0$ *allora è possibile dire qual è il limite della funzione $\frac{f}{g}$ seguendo la seguente tabella, dove sulla prima riga è indicato* $\lim f$ *e sulla prima colonna è indicato* $\lim g$.

$\boxed{\frac{f}{g}}$	$\ell_1 \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 > 0$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 < 0$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	0	?	?
$-\infty$	0	?	?

Dove abbiamo lasciato un "?" si tratta di casi con una forma indefinita per cui non può essere enunciato un risultato univoco.

Se in più sappiamo che $\lim g = 0$ *e* g *è definitivamente positiva o negativa, allora possiamo scrivere* $\lim g = 0^+$ *oppure* $\lim g = 0^-$ *e abbiamo degli ulteriori risultati*

$\boxed{\frac{f}{g}}$	$\ell_1 > 0$	$\ell_1 < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
0^+	$+\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$
0^-	$-\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$

Una variante di questi teoremi ci permette di dire cosa accade quando la seconda funzione non ha limite ma è limitata

Teorema 7.5. *Se* $\lim f = \pm\infty$ *e* g *è una funzione limitata, allora*

$$\exists \lim f + g = \lim f = \pm\infty.$$

Se $\lim f = 0$ *e* g *è una funzione limitata, allora*

$$\exists \lim f \cdot g = 0.$$

Dimostrazione. Ci limitiamo al caso $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e g limitata. In tal caso, esiste $K \in \mathbb{R}^+$ tale che $|g(x)| < K$ per ogni x nel dominio. Per definizione di limite per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, esiste $M \in\ R$ tale che per ogni $x \geq M$, $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{K}$. Quindi

$$|f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| < \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon \quad \forall x \geq M.$$

Per la definizione di limite questo prova il nostro risultato. □

7.4 Primi teoremi coi limiti

Il primo teorema che enunciamo è necessario per poter affermare che la definizione di limite è "ben posta", cioè che nomina univocamente un numero reale preciso.

Teorema 7.6 (Unicità del limite)**.** *Data una funzione* $f(x)$*, se un numero* ℓ *che soddisfa la definizione di limite esiste (per* $x \to x_0$ *oppure* $x \to \pm\infty$*), allora tale numero è univocamente definito.*

NOTA BENE. *Analogamente se* $\lim f(x) = \pm\infty$*, allora questo limite è univocamente definito.*

Dimostrazione. Ci limitiamo al caso $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, gli altri sono analoghi.

Supponiamo che esistano ℓ_1, ℓ_2 numeri reali distinti che soddisfano la definizione di limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$, e mostriamo che questo produce una contraddizione. Tramite la disuguaglianza triangolare abbiamo la seguente,

$$\begin{aligned}|\ell_1 - \ell_2| &= |\ell_1 - f(x) + f(x) - \ell_2| \\ &\leq |\ell_1 - f(x)| + |\ell_2 - f(x)|.\end{aligned}$$

Per definizione di limite, per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $x \geq M$, vale la disuguaglianza $|f(x) - \ell_i| < \varepsilon$, per $i = 1, 2$ poiché per ipotesi la definizione di limite vale per entrambi.

Osserviamo che se $\ell_1 \neq \ell_2$, allora è possibile scegliere ε sufficientemente piccolo perché la disuguaglianza di sopra produca una contraddizione. Se infatti scegliamo $\varepsilon = \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3}$ allora

$$|\ell_1 - \ell_2| \leq |f(x) - \ell_1| + |f(x) - \ell_2| \leq 2\varepsilon = \frac{2}{3}|\ell_1 - \ell_2|,$$

che è un assurdo se $\ell_1 \neq \ell_2$. Quindi necessariamente $\ell_1 = \ell_2$. □

Adesso enunciamo un teorema che ci permette di guardare a ogni limite in maniera analoga a un limite di successioni

Teorema 7.7. *Sia $f(x)\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione per cui esiste $\lim_{x\to x_0} f(x)$, e supponiamo esista una successione $(a_n) \subset X$ tale che $\lim a_n = x_0$, allora*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_n).$$

Sia $f(x)\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione per cui esiste $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$, e supponiamo che esista una successione $(a_n) \subset X$ tale che $\lim a_n = \pm\infty$, allora

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_n).$$

Dimostrazione. Consideriamo il caso $x \to x_0$ e $\lim f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Allora fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che se $|x - x_0| < \delta$ allora $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Consideriamo una successione (a_n) tale che $\lim a_n = x_0$. Allora per definizione di limite di una successione, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_0$, vale che $|a_n - x_0| < \delta$.

Quindi unendo i due fatti che abbiamo enunciato, otteniamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_0$ vale che $|f(a_n) - \ell| < \varepsilon$. Questo corrisponde all'enunciato del teorema. □

I prossimi teoremi riguardano il comportamento di funzioni di cui è possibile valutare il limite, oppure funzioni continue.

Teorema 7.8 (di permanenza del segno)**.** *Sia f una funzione e supponiamo che* $\lim f$ *esista e sia diverso da* 0*, per $x \to x_0$ oppure $x \to \pm\infty$. Allora il segno di f è definitivamente lo stesso segno di* $\lim f$*.*

Quindi se stiamo considerando $\lim_{x\to x_0} f$*, allora esiste un intorno $(x_0 - \delta, x_0+\delta)$ in cui il segno di f è lo stesso del limite. Se invece stiamo considerando* $\lim_{x\to+\infty} f$*, allora esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che il segno di $f(x)$ è lo stesso di* $\lim f$ *per ogni $x \geq M$, e analogamente se $x \to -\infty$.*

Dimostrazione. Dimostriamo il caso $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, gli altri sono analoghi. Possiamo supporre senza perdita di generalità che $\ell > 0$.

Data la definizione di limite, per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Se scegliamo ε sufficientemente piccolo, possiamo dimostrare che $f(x)$ deve essere positivo per ogni x che soddisfa la condizione di sopra. Supponiamo infatti di prendere $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$, allora $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ significa

$$f(x) \in \left(\frac{\ell}{2}, \frac{3\ell}{2}\right),$$

che è un intervallo interamente incluso in $\mathbb{R}^+$, quindi $f(x) > 0$. □

Teorema 7.9. *Sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione con dominio X illimitato superiormente. Supponiamo che f sia monotona, cioè crescente o descrente, allora*

1. *se $f(x)$ è crescente allora esiste il limite* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sup(f(X))$
2. *se $f(x)$ è decrescente allora esiste il limite* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \inf(f(X))$*.*

NOTA BENE. *Il teorema è analogamente vero se X è illimitato inferiormente e in tal caso*

1. *se $f(x)$ è crescente, allora* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \inf(f(X))$
2. *mentre se $f(x)$ è decrescente, allora* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \sup(f(X))$*.*

NOTA BENE. *Osserviamo che se vale la limitatezza dall'alto o dal basso di $f(x)$, allora* $\sup(f(X))$ *o* $\inf f(X)$ *rispettivamente sono numeri reali. Quindi questo teorema permette di dimostrare la convergenza delle funzioni monotone limitate.*

Dimostrazione. Dimostreremo il caso con $f(x)$ crescente e limitata dall'alto, cioè con $\sup(f(X)) \in \mathbb{R}$.

Consideriamo $\ell = \sup(f(X))$, allora grazie al Teorema 3.1 sappiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $M \in X$ con la proprietà che $\ell - \varepsilon < f(M) \leq \ell$. Poiché $f(x)$ è crescente, questo implica che $f(x) \geq f(M) > \ell - \varepsilon$ per ogni $x \geq M$. In più,

$f(x) \leq \ell$ per ogni $x \in X$ per definizione di estremo superiore. Quindi per la definizione di limite abbiamo appena dimostrato che

$$\exists \lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell = \sup(f(X)).$$

□

Esempio 7.12. Questo teorema viene utilizzato particolarmente per dimostrare l'esistenza di limiti di successioni. Osserviamo per esempio la successione $a_n = \frac{1}{n}$. In questo caso la successione è decrescente perché per ogni $n \geq 1$ si ha $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$. In più, la successione (a_n) è limitata dal basso da 0 poiché tutti i termini sono strettamente positivi.

Questo è sufficiente per concludere l'esistenza del limite $\lim a_n$, che coinciderà con l'estremo inferiore dell'insieme $\{a_n : \ n \geq 1\}$.

Esempio 7.13. Consideriamo il caso di una funzione non limitata come $f(x) = x^2$. Se guardiamo la funzione sui numeri positivi essa è crescente (strettamente), quindi $\lim_{x \to +\infty} x^2 = \sup(f(\mathbb{R})) = +\infty$.

Esempio 7.14. Esistono anche funzioni limitate ma *non* convergenti. Prendiamo la funzione trigonometrica $\sin(x)$, che è chiaramente limitata perché $|\sin(x)| \leq 1$ ovunque.

Per dimostrare che $\sin(x)$ non è convergente per $x \to +\infty$, consideriamo due successioni $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ tale che $\lim a_n = \lim b_n = +\infty$. Prendiamo le successioni

$$a_n = 2n \cdot \pi + \frac{\pi}{2}$$
$$b_n = 2n \cdot \pi + \frac{3\pi}{2}.$$

Allora,

$$\sin(a_n) = 1 \ \forall n \ \Rightarrow \ \lim_{n \to \infty} \sin(a_n) = 1$$
$$\sin(b_n) = -1 \ \forall n \ \Rightarrow \ \lim_{n \to \infty} \sin(b_n) = -1.$$

Per il Teorema 7.7, se esiste il limite $\lim_{x \to +\infty} \sin(x)$ allora anche le due successioni $\sin(a_n)$ e $\sin(b_n)$ dovrebbero avere lo stesso limite. Poiché questo è falso, allora il limite di $\sin(x)$ per $x \to +\infty$, non esiste.

Teorema 7.10 (Primo teorema del confronto)**.** *Siano f, g due funzioni tali che $f(x) \leq g(x)$ in ogni punto del dominio. Allora se esistono $\lim f$ e $\lim g$ (per $x \to x_0$ oppure $x \to \pm\infty$), abbiamo*

$$\lim f(x) \leq \lim g(x)$$

La dimostrazione è lasciata come esercizio.

NOTA BENE. *Osserviamo che la versione "stretta" di questo teorema, non è vera. Infatti se* $f(x) < g(x)$ *non possiamo dire con certezza che* $\lim f(x) < \lim g(x)$. *Ad esempio per* $f(x) = -\frac{1}{x}$ *e* $g(x) = \frac{1}{x}$ *allora* $f(x) < g(x)$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$*, però*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0.$$

Teorema 7.11 (Del confronto o "dei carabinieri")**.** *Sia* $f \colon X \to \mathbb{R}$ *e supponiamo che esistano* $g, h \colon X \to \mathbb{R}$ *tali che* $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ *per ogni* x *nel dominio. Supponiamo in più che i seguenti limiti siano definiti per* $x \to x_0$ *oppure* $x \to \pm\infty$*,*

$$\exists \lim g(x) = \lim h(x) = \ell \in \mathbb{R},$$

allora esiste anche l'analogo limite per $f(x)$ *e vale*

$$\exists \lim f(x) = \ell.$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che $\lim(h(x) - g(x)) = 0$ per i risultati di algebra dei limiti. Inoltre, consideriamo la differenza $|f(x) - \ell|$ e tramite l'uso della disuguaglianza triangolare otteniamo la seguente disuguaglianza,

$$\begin{aligned} |f(x) - \ell| &= |f(x) - g(x) + g(x) - \ell| \\ &\leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - \ell| \\ &\leq (h(x) - g(x)) + |g(x) - \ell|, \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che $g \leq f \leq h$ in ogni punto del dominio. Poiché $g(x) \to \ell$ e $(h - g) \to 0$, allora esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $x \geq M$,

$$h(x) - g(x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad |g(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Allora, per la disuguaglianza sopra questo implica

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall x \geq M,$$

e questo conclude la dimostrazione. □

Esempio 7.15. Prendiamo le funzioni $h(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$ e la funzione costante $g(x) = 0$ che rispettano le condizioni del teorema per ogni $x \geq 1$. In effetti $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} h(x) = 0$ e quindi $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

NOTA BENE. *La variante del teorema dei carabinieri per funzioni divergenti afferma che se* $g \leq f$ *e* $\lim g(x) = +\infty$*, allora esiste* $\lim f(x) = +\infty$*.*

Se $f \leq g$ *e* $\lim g(x) = -\infty$*, allora esiste* $\lim f(x) = -\infty$*.*

7.5 Continuità

Tramite la nozione di limite siamo pronti per definire formalmente la nozione di continuità.

La continuità è la nozione formale che corrisponde all'intuizione di una funzione con un grafico che può essere disegnato "senza staccare la penna dal foglio". Dietro all'idea di continuità c'è la trasposizione matematica dei movimenti (continui, appunto) degli oggetti nello spazio fisico. Al contrario un movimento discontinuo è qualcosa che procede "per salti". Daremo adesso due definizioni equivalenti di continuità, la prima è senza dubbio quella che viene più utilizzata.

Definizione 7.11. *Sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un insieme aperto $X \subseteq \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in X$, f si dice **continua in** x_0 se esiste il limite di $f(x)$ per $x \to x_0$ e vale*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Formalmente possiamo scrivere,

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I, \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.}$$

*Una funzione si dice **continua** se è continua in x_0 per ogni punto x_0 del dominio X.*

Definizione 7.12. *Una funzione si dice continua in $x_0 \in A$ se per ogni successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$, vale che*

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0).$$

Esempio 7.16. La maggior parte delle funzioni con cui abbiamo lavorato fino ad adesso sono continue, come i polinomi, le funzioni trigonometriche $\sin(x)$ e $\cos(x)$ o la funzione esponenziale e^x.

Esempio 7.17. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Allora tale funzione non è continua perché non è continua in 0. Infatti $f(x) = 1$ per ogni $x \in (0, \delta)$, $f(x) = -1$ per ogni $x \in (-\delta, 0)$ e $f(0) = 0$, quindi $\nexists \lim_{x\to 0} f(x)$.

Esempio 7.18. Somma, differenza, prodotto e quoziente (quando il numeratore è $\neq 0$) di funzioni continue, sono ancora una funzione continua. Per esempio nel caso della somma questo si vede sfruttando i risultati relativi all'algebra dei limiti. Infatti

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0)+g(x_0).$$

Mostrare per esercizio la continuità di $f(x)\cdot g(x)$ e di $f(x)/g(x)$ nei punti in cui $g(x)\neq 0$.

NOTA BENE. *Grazie al Teorema 7.7 si riesce a dimostrare che la definizione di continuità 7.11 implica la definizione 7.12. Per dimostrare che le due definizioni sono equivalenti, rimane da dimostrare che la seconda definizione implica la prima, ma non lo faremo in queste note.*

7.6 Limiti unilateri

Consideriamo una funzione come $\frac{1}{x}$ per $x\to 0$. In questo caso il limite non esiste, perché $\frac{1}{|x|}\to +\infty$, ma per quanto si scelga $\delta > 0$ piccolo, in ogni intervallo $(-\delta,\delta)$, $\frac{1}{x}$ assume sia valori positivi che negativi. Osserviamo però che se ci limitiamo a osservare il comportamento negli intervalli $[0,\delta)$ o $(-\delta,0]$, in effetti la successione ha di nuovo un comportamento analogo all'esistenza di un limite. Definiamo un nuovo tipo di limiti.

Definizione 7.13. *Consideriamo $f\colon (x_0,x_0+\delta_0)\to\mathbb{R}$, esiste il limite di per f per x che converge a x_0 **da destra**, e si scrive*

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell,$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x\in(x_0,x_0+\delta)$, vale la disuguaglianza

$$|f(x)-\ell| < \varepsilon.$$

Tale definizione si generalizza facilmente a $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$.

*Consideriamo $f\colon (x_0-\delta_0,x_0)\to\mathbb{R}$, esiste il limite di per f per x che converge a x_0 **da sinistra**, e si scrive*

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell,$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x\in(x_0-\delta,x_0)$, vale la disuguaglianza

$$|f(x)-\ell| < \varepsilon.$$

Tale definizione si generalizza facilmente a $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$.

Esempio 7.19. Consideriamo la funzione $\frac{1}{3-x}$. Per ogni $M > 0$ considero $\delta = \frac{1}{M}$. Allora, se $x \in (3, 3+\delta)$, si ha

$$\frac{1}{3-x} < \frac{1}{3-\left(3+\frac{1}{M}\right)} = -M,$$

mentre se $x \in (3-\delta, 3)$, si ha

$$\frac{1}{3-x} > \frac{1}{3-\left(3-\frac{1}{M}\right)} = M.$$

Quindi,

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{3-x} = -\infty, \quad \lim_{x\to 3^-} \frac{1}{3-x} = +\infty.$$

NOTA BENE. *Data una funzione* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *dove* X *è un insieme aperto e* $x_0 \in X$, *esiste il limite* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *se e solo se esistono i due limiti unilateri per* $x \to x_0^{\pm}$ *e coincidono. In formule,*

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) \;\Leftrightarrow\; \exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x).$$

Grazie alla nozione di limite unilatero possiamo estendere la definizione di continuità.

Definizione 7.14. *Una funzione definita su un intervallo chiuso* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *si dice continua se è continua sull'intervallo aperto* (a,b) *e in più*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$
$$\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b).$$

7.7 Proprietà delle funzioni continue

Teorema 7.12 (Limite della composizione o con cambio di variabile)**.** *Consideriamo due insiemi aperti* $X \subseteq \mathbb{R}$ *e* $Y \subseteq \mathbb{R}$. *Consideriamo due funzioni* $f\colon (X\backslash\{x_0\}) \to \mathbb{R}$ *e* $g\colon (Y\backslash\{y_0\}) \to \mathbb{R}$ *tali che* $f(X\backslash\{x_0\}) \subseteq Y\backslash\{y_0\}$.

Se

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$$

e in più

$$\exists \lim_{y\to y_0} g(y)$$

allora

$$\exists \lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim_{y\to y_0} g(y).$$

Questo teorema, che non dimostreremo nella sua forma generale, implica immediatamente il seguente teorema per le funzioni continue.

Teorema 7.13 (Di sostituzione)**.** *Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ e $Y \subseteq \mathbb{R}$ due insiemi aperti.*

Consideriamo $f\colon (X \backslash \{x_0\}) \to \mathbb{R}$ e $g\colon (Y \backslash \{y_0\}) \to \mathbb{R}$ con $f(X \backslash \{x_0\}) \subseteq (Y \backslash \{y_0\})$. Se g è continua e $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$, allora

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to y_0} g(y)$$

Lo stesso risultato è valido se $\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = y_0$ oppure $\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = y_0$.

Se X è illimitato superiormente o inferiormente e $\exists \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = y_0$, allora

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(f(x)) = \lim_{y \to y_0} g(y).$$

Se in uno dei casi precedenti si ha $\lim f(x) = \pm\infty$ e Y è illimitato superiormente o inferiormente, allora

$$\lim g(f(x)) = \lim_{y \to \pm\infty} g(y).$$

Se invece g è definita e continua in y_0, allora in tutti i casi già trattati si ha

$$\lim g(f(x)) = g(\lim f(x)) = g(y_0).$$

Dimostrazione. Ci limitiamo a dimostrare l'ultima formula nel caso $x \to x_0$.

Per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, esiste $\delta \in \mathbb{R}^+$ tale che per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, vale la disuguaglianza

$$|f(x) - y_0| < \varepsilon.$$

Ora osserviamo che per la definizione di funzione continua, per ogni $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$, esiste $\delta' \in \mathbb{R}^+$ tale che se $y \in (y_0 - \delta', y_0 + \delta')$, allora

$$|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon'.$$

Visto che il primo ε era scelto in modo arbitrario, osserviamo che imponendo $\varepsilon = \delta'$, si ottiene che per definizione

$$|g(f(x)) - g(y_0)| < \varepsilon' \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

che è esattamente la tesi che stavamo cercando di dimostrare. □

Esempio 7.20. Consideriamo la funzione composta $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, in questo caso la funzione interna $\frac{1}{x}$ è definita su $(0, +\infty) \to (0, +\infty)$, mentre $\sin(x)$ è definita

$(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ed è continua. Per il teorema sopra, poiché $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ e $\sin(0) = 0$, abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to 0} \sin(y) = 0.$$

Osserviamo che un semplice corollario del Teorema 7.13 è la continuità della funzione inversa. Supponiamo infatti che $f\colon X \to Y$ sia una funzione biiettiva tra due aperti $X \subseteq \mathbb{R}$ e $Y \subseteq \mathbb{R}$. Denominiamo $f^{-1}\colon Y \to X$ la sua inversa.

Proposizione 7.14. *Allora la funzione f^{-1} è continua, cioè*

$$\exists \lim_{y\to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) \quad \forall y_0 \in Y.$$

Dimostrazione. Sia $y_0 \in Y$ e $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Allora $f(x_0) = y_0$ e per la continuità di f sappiamo che $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = y_0$. Allora per il Teorema 7.13 si ha

$$x_0 = \lim_{x\to x_0} x = \lim_{x\to x_0} f^{-1}(f(x)) = \lim_{y\to y_0} f^{-1}(y).$$

□

Teorema 7.15 (di Bolzano, o degli Zeri)**.** *Consideriamo una funzione continua $f\colon X \to \mathbb{R}$ con l'intervallo $[a, b] \subseteq X$ (ricordare che si può definire una funzione continua su un intervallo chiuso, vedi Definizione 7.14).*

In più, supponiamo che f è non nulla e di segno opposto nei punti a e b, cioè $f(a) \cdot f(b) < 0$. Allora esiste $z \in (a, b)$ tale che $f(z) = 0$.

Sketch della dimostrazione. Supponiamo senza perdita di generalità che $f(a) < 0 < f(b)$. Nel caso in cui si avesse invece $f(b)$ negativa e $f(a)$ positiva, il ragionamento sarebbe del tutto analogo.

Costruiamo due successioni $x_0, x_1, x_2, \dots$ e $y_0, y_1, y_2, \dots$ come segue. Sia $x_0 = a$ e $y_0 = b$, allora vogliamo costruire x_i, y_i in modo che sia vero che

$$f(x_i) < 0, \quad f(y_i) > 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots$$

Supponiamo di aver costruito le due successioni fino agli indici i_1 e i_2 rispettivamente, sempre verificano l'ipotesi sopra. Consideriamo adesso il punto medio $m = \frac{x_{i_1}+y_{i_2}}{2}$.

Se $f(m) < 0$ allora scriviamo $x_{i_1+1} = m$.

Se $f(m) = 0$ allora abbiamo individuato il punto $x = m$ cercato.

Infine, se $f(m) > 0$ fissiamo $y_{i_2+1} = m$.

Sfruttando il teorema di permanenza del segno possiamo dimostrare che questa costruzione continua indefinitamente se non incappiamo nel caso $f(m) = 0$, e entrambe le successioni vengono costruire per $i_1, i_2 \to +\infty$.

Osserviamo che x_i è una successione crescente e limitata dall'alto da b, mentre y_i è decrescente e limitata dal basso da a, quindi entrambe hanno limite finito, denominati ℓ_x e ℓ_y rispettivamente. In più per costruzione $f(\ell_x) \leq 0$ mentre $f(\ell_y) \geq 0$. Osserviamo inoltre che $0 < (y_i - x_i) \leq \frac{b-a}{2^i}$, quindi $\lim(y_i - x_i) = 0$ e dunque $\ell_x = \ell_y = z$. Unendo tutte queste informazioni otteniamo la tesi cercata, $f(z) = 0$. $\square$

Il Teorema di Bolzano ha due corollari che saranno molto utili nel resto di queste note

Corollario 7.16 (Teorema dei valori intermedi)**.** *Sia $f: X \to \mathbb{R}$ continua su $[a, b] \subseteq X$ e $y \in \mathbb{R}$ tale che $f(a) < y$ e $f(b) > y$ (o viceversa). Allorsa, esiste $x \in (a, b)$ tale che $f(x) = y$.*

Dimostrazione. Questo fatto discende dal Teorema di Bolzano se si considera la funzione $g(x) := f(x) - y$. Infatti, $g(a) < 0$, $g(b) > 0$ e g è continua su $[a, b]$. Quindi esiste $x \in (a, b)$ tale che $g(x) = 0$, che è equivalente a $f(x) = y$. $\square$

Corollario 7.17. *Sia $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polinomio di grado dispari, allora esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $p(x) = 0$.*

Dimostrazione. Scriviamo il polinomio nella forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

dove gli $a_i \in \mathbb{R}$ sono coefficienti reali con $a_n \neq 0$ e quindi $n = \deg(p)$. Poiché n è dispari, allora $\lim_{x\to\pm\infty} x^n = \pm\infty$ (mentre se n fosse stato pari, il limite sarebbe stato sempre $+\infty$).

Sappiamo che $\lim_{x\to\pm\infty} p(x)$ dipende dal termine di grado massimo, infatti

$$\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n \cdot \left(1 + \frac{a_{n-1}x^{n-1}}{a_n x^n} + \cdots + \frac{a_1 x}{a_n x^n} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right).$$

Osserviamo che valgono le uguaglianze $\frac{a_i x^i}{a_n x^n} = \frac{a_i}{a_n} \cdot \frac{1}{x^{n-i}}$ per ogni i compreso tra 0 e $n-1$, quindi tutti i termini del fattore di destra tendono a 0 per $x \to \pm\infty$. Quindi

$$\lim_{x\to\pm\infty} = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n \cdot (1 + 0 + 0 + \cdots) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n.$$

Il limite di $a_n x^n$ dipende soltanto dal segno di a_n, e in ogni caso sarà di segno opposto se $x \to +\infty$ oppure $x \to -\infty$. Quindi per definizione di limite esiste $M \in \mathbb{R}^+$ tale che $p(M) > 0$ e $p(M) < 0$ (o viceversa). Quindi p soddisfa le ipotesi del teorema di Bolzano sull'intervallo $[-M, M]$, e pertanto esiste $x \in (-M, M)$ tale che $p(x) = 0$. $\square$

7.8 Alcuni limiti notevoli

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1.}$$

Per mostrare questo risultato utilizziamo Teorema dei Carabinieri 7.11. Osserviamo che per x sufficientemente piccolo (cioè in un intervallo contenente 0) vale la seguente disuguaglianza, che può essere verificata direttamente nella Figura 5,

$$\sin(x) < x < \tan(x).$$

Questa disuguaglianza resta vera anche per $x < 0$ se x è sufficientemente piccolo. Dividiamo tutti e tre i termini della disuguaglianza per $\sin(x)$ (questa divisione si può fare $\forall x \neq 0$). Otteniamo,

$$1 < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)}.$$

Le espressioni sul lato sinistro e destro hanno limite $= 1$ per $x \to 0$, poiché si tratta di due funzioni continue che sono ben definite nel punto $x = 0$. Quindi per il Teorema dei Carabinieri, anche la funzione compresa tra le due deve avere lo stesso limite per $x \to 0$. $\square$

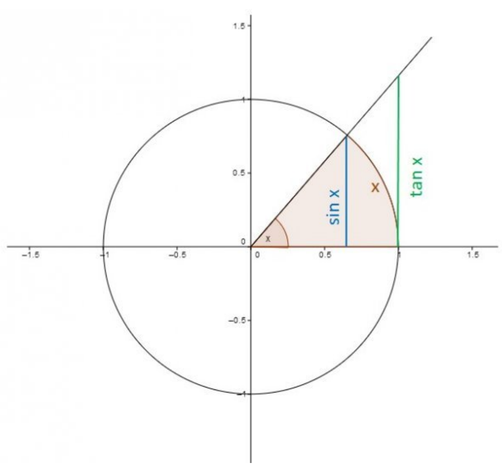


Figura 5: Se x è la misura dell'angolo, allora l'arco di circonferenza (unitaria) intercettato ha lunghezza x, i due segmenti indicati in figura hanno lunghezza $\sin(x)$ e $\tan(x)$.

$$\boxed{\lim_{n\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \in \mathbb{R}}$$

Questo limite è un numero reale che viene denominato Numero di Nepero. Questo numero è definito precisamente dal risultato appena esposto. Si verifica (ma non è importante per la nostra trattazione), che e è un numero irrazionale (e trascendente), il cui valore approssimato è

$$e \approx 2,71828\ldots$$

Passiamo a dimostrare l'esistenza di tale limite. Enunciamo senza dimostrarla la disuguaglianza valida per ogni $x \geq -1$, se $0 < r < 1$ è un numero reale,

$$(1+x)^r \leq 1 + rx. \tag{54}$$

Vale l'uguaglianza solo se $x = 0$.

Consideriamo la successione definita come

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}.$$

Allora vogliamo dimostrare che esiste il limite di a_n per $n \to \infty$. Cominciamo mostrando la monotonia, cioè per ogni $n \geq 1$, $a_{n+1} > a_n$, che è equivalente a

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Facendo la radice $(n+1)$-esima di entrambi i lati della disuguaglianza (possiamo farlo perché la radice $(n+1)$-esima è una funzione monotona crescente su $\mathbb{R}^+$) otteniamo che la formula qui sopra è equivalente a

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}} < 1 + \frac{1}{n+1}.$$

Quest'ultimo risultato si ottiene applicando la Disuguaglianza (54) con $x = \frac{1}{n}$ e $r = \frac{n}{n+1}$. Infatti

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}} < 1 + \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n+1}$$

Consideriamo una seconda successione definita da

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$$

e mostriamo che questa successione è decrescente, cioè per ogni $n \geq 1$ $b_{n+1} < b_n$, che è equivalente a mostrare che $\frac{1}{b_n} < \frac{1}{b_{n+1}}$, cioè

$$\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1} < \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}\right)^{n+2}.$$

Riscrivendo questa disuguaglianza si ottiene

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n+2}.$$

Come prima questa disuguaglianza si ottiene applicando la Disuguaglianza (54), stavolta con $x = -\frac{1}{n+1}$ e $r = \frac{n+1}{n+2}$. Infatti,

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n+2}} < 1 - \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+2}.$$

In più $b_n = a_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ quindi $b_n > a_n$ per ogni $n \geq 1$. Quindi a_n è crescente e limitata dall'alto da b_1, mentre b_n è decrescente e limitata dal basso da a_1. Pertanto grazie al Teorema 7.9 sappiamo che per entrambe esiste un limite finito, e poiché $\lim \frac{b_n}{a_n} = 1$, allora il limite è lo stesso,

$$\exists \lim a_n = \lim b_n = e.$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}} = 1$$

Ricordiamo che $\ln(x)$ è il **logaritmo naturale**, cioè il logaritmo in "base e", $\ln(x) = \log_e(x)$. In quanto funzione inversa dell'esponenziale e^x, per la Proposizione 7.14 $\ln(x)$ è una funzione continua.

Per le proprietà del logaritmo, vale che

$$\frac{1}{x} \cdot \ln(1+x) = \ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right).$$

In più, per la continuità del logaritmo,

$$\lim_{x \to 0} \ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \ln\left(\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \ln(e) = 1.$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.}$$

In questo caso utilizziamo una sostituzione, vogliamo in particolare ottenere che il numeratore di questa espressione diventi uguale a una nuova variabile y, quindi poniamo

$$x := g(y) = \ln(1+y).$$

Osserviamo che $\lim_{y\to 0} g(y) = 0$, quindi per il Teorema 7.13

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{e^{g(y)} - 1}{g(y)} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(1+y)}.$$

L'ultima espressione è l'inverso di $\frac{\ln(1+y)}{y}$ e abbiamo appena dimostrato che questa funzione ha limite 1 per $y \to 0$.

NOTA BENE. *Per ogni base positiva $b \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$, si osserverà nelle prossime sezione che esiste*

$$\lim_{x\to 0} \frac{b^x - 1}{x}$$

e questo sarà centrale nel calcolo della derivata della funzione esponenziale b^x. La base $b = e$ è l'unico caso in cui il limite qui sopra vale esattamente 1.

7.9 Simboli di Landau e gerarchia degli infiniti/infinitesimi

In questa sezione introduciamo i simboli

- di equivalenza asintotica $\sim$,
- di o-piccolo,

entrambi questi simboli servono a descrivere un particolare tipo di "comportamenti" al limite che possono essere considerati per $x \to \pm\infty$, $x \to x_0$ o anche nel caso dei limiti unilateri $x \to x_0^{\pm}$. Poiché queste definizioni si possono enunciare per ognuno di questi casi, non li distingueremo a meno che non sia strettamente necessario.

Definizione 7.15. *Date due funzione f, g, si dice che* ***sono asintoticamente equivalenti*** *o che hanno lo stesso comportamento asintotico, se*

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

In tal caso si scrive $f(x) \sim g(x)$. D'abitudine se stiamo considerando i limiti per $x \to x_0$, si aggiunge questa informazione indicando $f(x) \sim_{x_0} g(x)$.

Esempio 7.21. Come abbiamo visto, $sin(x)$ è asintoticamente equivalente a x per $x \to 0$.

Esempio 7.22. Come abbiamo già detto, un polinomio $p(x)$ è asintoticamente equivalente al suo termine di grado massimo per $x \to \pm\infty$. Infatti se $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, allora

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{p(x)}{a_n x^n} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \frac{a_{n-2} a_n x^2}{+} \cdots\right) = 1.$$

Analogamente, un polinomio $p(x)$ è asintoticamente equivalente al suo termine di grado **minimo** per $x \to 0$.

Si chiamano "infiniti" o "infinitesimi" quelle funzioni che hanno come limite rispettivamente $\pm\infty$ o 0. In questo senso si può parlare di "ordine di infinito" o "ordine di infinitesimo" per parlare della velocità con cui una certa funzione si avvicina al proprio limite $\pm\infty$ oppure 0.

Quello di **ordine di crescita** (o di convergenza a 0) è un concetto relativo, nel senso che ci dice se una funzione ha ordine maggiore **di un'altra**. Consideriamo ad esempio due funzioni che divergono a $+\infty$ come x e x^2, si dice che

x ha un ordine di infinito, o di divergenza, maggiore di x^2 per $x \to +\infty$, perché $x \to +\infty$ e $x^2 \to +\infty$ e in più

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty.$$

Analogamente si dice che x^2 ha un ordine di infinitesimo maggiore di x per $x \to 0$ perché $x \to 0$ e $x^2 \to 0$ e in più

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0.$$

Definizione 7.16. *Consideriamo due funzioni $f(x) \to \pm\infty$ e $g(x) \to \pm\infty$, allora si dice che $f(x)$ è un o-piccolo di $g(x)$ se*

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

In questo caso si scrive $f = o(g)$.

Esempio 7.23. Consideriamo una funzione derivabile $f(x)$, allora per definizione di derivata in x_0,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + o(h).$$

Infatti, per definizione di derivata

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0),$$

e quindi per definizione $f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + R(h)$ dove $R(h) = o(h)$, cioè $\frac{R(h)}{h} \to 0$ per $h \to 0$. Questa espressione è il primo step per lo sviluppo di Taylor di f in x_0.

Questa uguaglianza talvolta viene riscritta prendendo $x = x_0 + h$ e considerando il comportamento della funzione per $x \to x_0$. Allora,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0).$$

NOTA BENE. *Chiaramente se $f(x) \to \ell \in \mathbb{R}$ e $g(x) \to \pm\infty$ allora $f = o(g)$.*

Possiamo adesso elencare una serie di "infiniti" e "infinitesimi" ordinandoli secondo maggiore o minore ordine.

- Per ogni coppia di numeri reali $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, se $x \to +\infty$ allora tra gli elevamenti x^{r_1} e x^{r_2}, ha ordine di infinito maggiore la funzione con esponente maggiore, cioè se $r_1 > r_2$ allora
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{r_1}}{x^{r_2}} = \lim_{x\to+\infty} x^{r_1-r_2} = +\infty,$$
perché in tal caso $r_1 - r_2 > 0$. Quindi se $x \to +\infty$ e $r_1 > r_2$, allora $x^{r_2} = o(x^{r_1})$.

- Analogamente, se $x \to 0$, è ancora l'elemento con esponente maggiore a avere ordine di infinitesimo maggiore, poiché
$$\lim_{x\to0} \frac{x^{r_1}}{x^{r_2}} = \lim_{x\to0} x^{r_1-r_2} = 0.$$
Quindi se $x \to 0$ e $r_1 > r_2$ allora $x^{r_1} = o(x^{r_2})$.

- L'esponenziale e^x "vince" su tutti gli elevamenti x^r per $x \to +\infty$, nel senso che per ogni numero reale $r \in \mathbb{R}$, $x^r = o(e^x)$. Dimostreremo questo risultato formalmente più avanti grazie al Teorema di de l'Hôpital 8.17, in particolare
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^r}{e^x} = 0 \quad \forall r \in \mathbb{R}.$$

- Se $x \to -\infty$ allora $e^x \to 0$, cioè lo stosso comportamento di $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ dove n è un naturale positivo. Allora,
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^{-n}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{(-x)^{-n}} = \lim_{x\to+\infty} \pm\frac{x^n}{e^x} = 0.$$
Quindi $e^x = o(x^{-n})$ per $x \to -\infty$ e n naturale positivo.

- Dal fatto che $x = o(e^x)$ per $x \to +\infty$ si può ricavare che $\ln(x) = o(x)$. Entrambe le funzioni tendono a $\to +\infty$, in più con la sostituzione $y = \ln(x)$, si ottiene
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^y} = 0.$$

- Vogliamo infine paragonare il comportamento di $\frac{1}{x}$ e $\ln(x)$ per $x \to 0^+$. La prima tende a $\to +\infty$ mentre la seconda a $\to -\infty$. Vogliamo ora cercare il termine che ha ordine di infinito maggiore. Con il cambio di variabile $y = -\ln(x)$, cioè $x = e^{-y}$, si ha che $y \to +\infty$ quando $x \to 0^+$, allora per la regola dei limiti con le sostituzioni si ottiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) &= \lim_{y\to+\infty} e^{-y}\cdot y \\ &= \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^y} = 0.\end{aligned}$$

  Quindi $\ln(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$.

Proposizione 7.18 (Alcune proprietà degli o-piccoli)**.** *Elenchiamo tre proprietà degli o-piccoli*

1. $o(f)+o(f) = o(f)$, *cioè se* $g = o(f)$ *e* $h = o(f)$ *allora anche* $g+h = o(f)$*;*
2. $o(f)\cdot o(g) = o(fg)$, *cioè se* $h_1 = o(f)$ *e* $h_2 = o(g)$ *allora* $h_1 \cdot h_2 = o(f\cdot g)$*;*
3. $$\lim \frac{f+o(f)}{g+o(g)} = \lim \frac{f}{g}.$$

Dimostrazione. Dimostriamo solo la terza proprietà e lasciamo le prime due come esercizi. Riscriviamo il rapporto mettendo in evidenza i termini di sinistra sia al numeratore che al denominatore

$$\frac{f+o(f)}{g+o(g)} = \frac{f\cdot\left(1+\frac{o(f)}{f}\right)}{g\cdot\left(1+\frac{o(g)}{g}\right)}.$$

Per definizione di o-piccolo, al limite i termini $\frac{o(f)}{f}$ e $\frac{o(g)}{g}$ vanno a 0, e quindi la prova è conclusa. □

Esempio 7.24. Grazie alla terza proprietà si osserva che il limite di una funzione razionale per $x \to \pm\infty$ è determinato dai termini di grado massimo al numeratore e denominatore. Infatti se

$$\begin{aligned}p(x) &= a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \\ q(x) &= b_m x^m + \cdots + b_1 + b_0,\end{aligned}$$

allora $p(x) = a_n x^n + o(x^n)$ e $q(x) = a_m x^m + o(x^m)$, quindi

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{a_m x^m}.$$

7.10 Classificazione dei punti di discontinuità

Data una funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$ distinguiamo quattro tipologie differenti di possibili punti di discontinuità, cioè di punti (solitamente indicati con x_0) in cui la funzione **non** è continua.

1. **Discontinuità eliminabile.** Si tratta di quei casi in cui $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ esiste ma è diverso dal valore $f(x_0)$ oppure f non è definita in x_0. Si dice che tali discontinuità sono eliminabile perché è possibile "ridefinire" la funzione, creando una funzione $\widetilde{f}(x)$ che coincide con f per ogni punto diverso da x_0 e che in più è continua in x_0

   Esempio 7.25. La funzione $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ non è definita nel punto $x_0 = 0$ ma si può estendere per continuità a tale valore imponendo $f(0) = 1$, come abbiamo visto nel paragrafo sui limiti notevoli.

   Esempio 7.26. La funzione $g(x) = sgn(x^2)$ ha valore 1 in tutti i punti di $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ mentre vale 0 nel punto $x = 0$. Si tratta di una discontinuità eliminabile poiché $\lim_{x\to 0} sgn(x^2) = 1$.

2. **Discontinuità a salto finito.** In questo caso esistono i limiti unilateri per $x \to x_0$ da destra e da sinistra, e sono finiti ma distinti,

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell_1 \neq \ell_2 = \lim_{x\to x_0^-} f(x).$$

   Esempio 7.27. La funzione $\lfloor x \rfloor$ ha un discontinuità a salto finito in ogni valore $x_0 = n \in \mathbb{Z}$, i numeri interi. Infatti

$$\lim_{x\to n^-} \lfloor x \rfloor = n - 1$$
$$\lim_{x\to n^+} \lfloor x \rfloor = n.$$

3. **Discontinuità a salto infinito.** In questo caso esistono i limiti unilateri per $x \to x_0$ ma almeno uno è uguale a $\pm\infty$.

   Esempio 7.28. La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ ha una discontinuità a salto infinito nel punto $x_0 = 0$

   Esempio 7.29. La funzione $f(x) = \max(0, \frac{1}{x})$ ha anch'essa una discontinuità a salto infinito in 0.

4. L'ultima tipologia di discontinuità è quella in cui almeno uno dei due limiti unilateri **non** esiste. Si tratta di funzioni con un comportamento particolarmente inadatto al calcolo differenziale che non saranno oggetto di queste note

   Esempio 7.30. La funzione $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ha una discontinuità di questo tipo in 0.

   Esempio 7.31. La funzione

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

viene detta funzione “indicatrice” dei numeri razionali $\mathbb{Q}$. Questa funzione ha una discontinuità del quarto tipo in ogni punto $x \in \mathbb{R}$.

8 Derivate

La **derivazione** è un'operazione sulle funzioni: data una funzione di partenza $f\colon X \to \mathbb{R}$, dove $X \subseteq \mathbb{R}$, tramite la derivazione si ottiene un'altra funzione $f'\colon X' \to \mathbb{R}$ dove $X' \subseteq X$. Nella nostra trattazione X sarà quasi sempre un intervallo o un'unione di intervalli.

Parlando informalmente, la derivata f' di una funzione f calcolata nel punto x ci restituisce in output il valore $f(x)$ dell'inclinazione del grafico di f nel punto di coordinate $(x, f(x))$, in Figura 6 abbiamo cercato di restituire questo concetto informale.

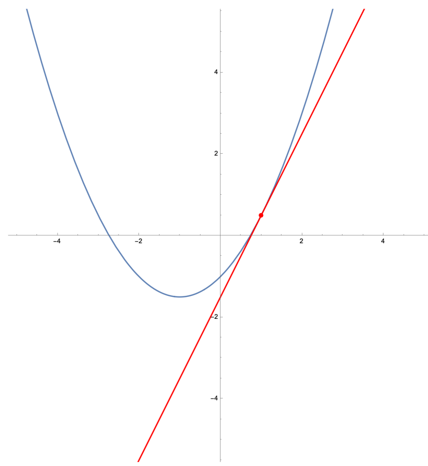


Figura 6: Grafico della funzione $y = f(x) = \frac{x^2}{2} + x - 1$. Nel punto di coordinate $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ è indicata la retta tangente al grafico della funzione in quel punto. L'equazione di questa retta è $y = 2x - \frac{3}{2}$, il coefficiente 2 come abbiamo già visto parametrizza l'inclinazione della retta e corrisponde in effetti alla derivata f' calcolata nel punto $x = 1$.

Per formalizzare questo concetto, dobbiamo prima definire cosa sia in generale l'inclinazione di una retta. Vediamo che nel caso della funzione $L(x) = a \cdot x + b$ con a, b numeri reali, l'inclinazione della retta è descritta dal parametro a. Abbiamo infatti che per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, vale che

$$\frac{L(x_2) - L(x_1)}{x_2 - x_1} = a.$$

Più in generale.

Definizione 8.1. *Data una funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$, chiamiamo **rapporto incrementale** tra i punti $x_1, x_2 \in X$ il numero*

$$r_f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Il rapporto incrementale descrive l'inclinazione "media" della funzione f tra i punti x_1 e x_2. Osserviamo che per definire il rapporto incrementale è necessario che $x_1 \neq x_2$.

Un'altra notazione (equivalente) che viene utilizzata per il rapporto incrementale è

$$r_f(x_0, h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \tag{55}$$

tra i punti x_0 e $x_0 + h$.

8.1 La derivata (prima) come limite

Tramite i limiti possiamo definire formalmente l'inclinazione della retta tangente a un grafico.

Consideriamo una funzione $f \colon X \to \mathbb{R}$ dove X è un insieme aperto. Allora grazie alla notazione (55) per il rapporto incrementale, possiamo scrivere

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot r_f(x_0, h), \quad \forall h \in (-\delta, \delta) \backslash \{0\}$$

per un certo $x_0 \in X$ e $\delta > 0$. Se risulta chiaro dal contesto, toglieremo f e x_0 dalla notazione, indicando il rapproto incrementale semplicemente come

$$r(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Definizione 8.2. *La funzione $f \colon X \to \mathbb{R}$ è **derivabile** in x_0 se la funzione rapporto incrementale $r(h)$ associata a $f(x)$ può essere estesa per continuità in $h = 0$, cioè se esiste ed è finito il seguente limite*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Una funzione è derivabile se è derivabile in x_0 per ogni punto x_0 del suo dominio.

NOTA BENE. *Se una funzione è definita su un intervallo chiuso $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$, allora si può definire la derivata anche agli estremi prendendo il limite da destra o da sinistra,*

$$f'(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}, \quad f'(b) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Teorema 8.1. *Una funzione $f \colon X \to \mathbb{R}$ se è derivabile allora è continua.*

Dimostrazione. Fissiamo $x_0 \in X$, allora

$$f(x_0 + h) = f(x) + h \cdot r(h),$$

dove r è una funzione continua in $h = 0$, quindi per le proprietà delle funzioni continue esiste il limite di $f(x_0 + h)$ per $h \to 0$, ed è necessariamente

$$\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = f(x_0) + 0 \cdot \lim_{h\to 0} r(h) = f(x_0),$$

che è la definizione di funzione continua in x_0. Visto che l'argomentazione può essere ripetuta per ogni $x_0 \in X$, la dimostrazione è conclusa. □

Esempio 8.1. La funzione valore assoluto $|x|$ è l'esempio di una funzione continua ma non derivabile. Infatti, $|x|$ è continua ma per $x = 0$ si ha

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1, \quad \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1.$$

Esempio 8.2. Dal teorema precedente ricaviamo anche che se f è derivabile nel punto x, allora $f(x+h) = f(x)+f'(x)\cdot h+o(h)$. Infatti se definiamo il "residuo"

$$R(h) := f(x + h) - f(x) - f'(x) \cdot h,$$

allora si dimostra (esercizio) che $\lim_{h\to 0} \frac{R(h)}{h} = 0$.

8.2 Primi esempi di calcolo della derivata

1. Se $f(x) \equiv c$ è una funzione costante allora $f'(x) = 0$, infatti

   $$\lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim \frac{c - c}{h} = 0.$$

   Se invece $f(x) = a \cdot x$ con $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, allora $f'(x) = a$, infatti

   $$\lim_{h\to 0} \frac{a(x + h) - ax}{h} = \lim \frac{ah}{h} = a.$$

2. Sia $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ numero naturale positivo, questa funzione è ovunque derivabile e la derivata vale

   $$\boxed{(x^n)' = n \cdot x^{n-1}.}$$

   Ci concentriamo sul caso $n \geq 2$. Per sviluppare i calcoli abbiamo bisogno del seguente lemma

   Lemma 8.2. *Dato il binomio $a + b$, per ogni numero naturale $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ vale l'uguaglianza*

   $$(a+b)^n = a^n + n\cdot a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + nab^{n-1} + b^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i}b^i.$$

NOTA BENE. *Osserviamo che* $\binom{n}{0} = 1$ *per ogni* n *e* $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$*, in particolare* $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$.

Si tratta di una generalizzazione diretta del Teorema 2.5, svolgere per esercizio.

Applichiamo la formula direttamente al nostro caso con $a = x$ e $b = h$,

$$(x+h)^n = x^n + n \cdot x^{n-1}h + \binom{n}{2} \cdot x^{n-2}h^2 + \binom{n}{3} x^{n-3}h^3 + \cdots + n \cdot xh^{n-1} + h^n.$$

Allora

$$\begin{aligned}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} &= \frac{x^n + n \cdot x^{n-1}h + \binom{n}{2} \cdot x^{n-2}h^2 + \cdots - x^n}{h} \\ &= \frac{h \cdot \left(nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \cdots\right)}{h} \\ &= nx^{n-1} + h \cdot (\text{un'espressione ben definita}).\end{aligned}$$

Quindi se si fa tendere $h \to 0$, il limite del rapporto indicato sopra è chiaramente nx^{n-1}.

3. Consideriamo le funzioni trigonometriche, in particolare

$$\boxed{\sin'(x) = \cos(x)}$$

$$\boxed{\cos'(x) = \sin(x)}$$

Per dimostrare questi risultati abbiamo bisogno di un ulteriore lemma in cui è indicato un limite notevole non affrontato precedentemente.

Lemma 8.3. *Vale il seguente limite*

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0.$$

Per ottenere questo risultato, è sufficiente riscrivere il rapporto moltiplicando e dividendo per $1 + \cos(x)$,

$$\frac{1 - \cos(x)}{x} \cdot \frac{1 + \cos(x)}{1 - \cos(x)} = \frac{1 - \cos(x)^2}{1 + \cos(x)} = \frac{\sin(x)^2}{x \cdot (1 + \cos(x))}.$$

Per le proprietà di algebra dei limiti il risultato al limite è 0 per $x \to 0$.

Quindi per valutare la derivata di $\sin(x)$ si calcola

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \sin(x) \cdot \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \cdot \frac{\sin(h)}{h}.\end{aligned}$$

Passando al limite e grazie ai limiti notevoli di $\frac{\sin(h)}{h}$ e $\frac{1-\cos(h)}{h}$ si ottiene il risultato voluto. Il calcolo per la derivata di $\cos(x)$ è analogo.

4. Se consideriamo la funzione esponenziale si ottiene

$$\boxed{(e^x)' = e^x.}$$

In questo caso è sufficiente sfruttare un limite notevole e le proprietà dell'esponenziale,

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} = e^x.$$

NOTA BENE. *In seguito vedremo che per ogni base $b \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$, esiste la derivata della funzione b^x, ma solo nel caso della base $b = e$ vale l'uguaglianza tra la derivata e la funzione stessa.*

8.3 Proprietà delle derivate

Teorema 8.4 (Linearità della derivata)**.** *Se $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ sono due funzioni derivabili e $a, b \in \mathbb{R}$ due numeri reali, allora $af + bg$ è una funzione derivabile e*

$$(a \cdot f + b \cdot g)' = a \cdot f' + b \cdot g'.$$

Dimostrazione. Scriviamo le funzioni f e g tramite i loro rispettivi rapporti incrementali r_1, r_2 definiti in un punto $x \in X$. Ricordiamo che per definizione di rapporto incrementale nel punto x,

$$f(x+h) = f(x) + hr_1(h)$$
$$g(x+h) = g(x) + hr_2(h).$$

Per essere più precisi, poiché f e g sono derivabili, con r_1, r_2 intendiamo la prolungazione continua dei rapporti incrementali, nel senso che r_1, r_2 sono definiti anche in $h = 0$, e in particolare

$$r_1(0) = f'(x)$$
$$r_2(0) = g'(x).$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned} af(x+h) + bg(x+h) &= a(f(x) + hr_1(h)) + b(g(x) + hr_2(h)) \\ &= af(x) + ahr_1(h) + bg(x) + bhr_2(h) \\ &= (af(x) + bg(x)) + h \cdot (ar_1(h) + br_2(h)). \end{aligned}$$

Quindi $ar_1(h) + br_2(h)$ è il rapporto incrementale di $af + bg$ per definizione, e per costruzione anche questa combinazione è prolungabile in $h = 0$, dunque

$$(af + bg)'(x) = ar_1(0) + br_2(0) = af'(x) + bg'(x) \quad \forall x \in X.$$

□

Esempio 8.3. Ogni polinomio è una combinazione lineare di funzioni del tipo x^n con $n \in \mathbb{N}$. Il teorema appena enunciato ci permette di calcolare agilmente la derivata di un polinomio combinando le derivate dei singoli termini

$$\begin{aligned} p(x) &= x^4 + 7x^3 + x + 3 \\ p'(x) &= 4 \cdot x^3 + 7 \cdot 3 \cdot x^2 + 1 + 0 \\ &= 4x^3 + 21x^2 + 1. \end{aligned}$$

Osserviamo che per ogni polinomio p di grado almeno 1, la derivata è un polinomio di grado $\deg p'(x) = \deg p(x) - 1$.

Teorema 8.5 (Derivata del prodotto)**.** *Siano $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili. Allora la funzione prodotto $f \cdot g$ è derivabile e in particolare*

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x), \quad \forall x \in X.$$

Dimostrazione. Come prima scriviamo f, g tramite il ricorso ai rapporti incrementali r_1, r_2.

$$\begin{aligned} f(x+h) \cdot g(x+h) &= (f(x) + hr_1(h)) \cdot (g(x) + hr_2(h)) \\ &= f(x)g(x) + hr_1(h)g(x) + f(x)hr_2(h) + h^2 r_1(h) r_2(h) \\ &= f(x)g(x) + h \cdot (g(x)r_1(h) + f(x)r_2(h) + hr_1(h)r_2(h)). \end{aligned}$$

Quindi $f(x)r_2(h) + g(x)r_1(h) + hr_1(h)r_2(h)$ è il rapporto incrementale di fg in x, che per costruzione può essere prolungato in $h = 0$ ottenendo

$$(f \cdot g)'(x) = f(x)r_2(0) + g(x)r_1(0) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x).$$

□

Esempio 8.4. Consideriamo $f(x) = x^2$ come prodotto $x \cdot x$, abbiamo allora

$$f'(x) = x \cdot 1 + 1 \cdot x = 2x,$$

ottenendo nuovamente il risultato già noto.

Esempio 8.5. Una qualsiasi funzione prodotto come $f(x) = x\cos(x)$ può essere derivata conoscendo le derivate dei suoi fattori,

$$f'(x) = 1 \cdot \cos(x) + x \cdot (-\sin(x)) = \cos(x) - x\sin(x).$$

Teorema 8.6 (Derivata del quoziente)**.** *Siano $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ due funzioni, allora la funzione $\frac{f}{g}$ è definita e derivabile in ogni punto di I dove $g(x) \neq 0$ e*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Dimostrazione. Per dimostrare questo fatto è sufficiente utilizzare la derivata del prodotto. Infatti

$$\frac{f}{g} \cdot g = f$$

quindi

$$\left(\frac{f}{g} \cdot g\right)' = f'.$$

Svolgendo il termine a sinistra si ottiene

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) \cdot g(x) + \frac{f}{g}(x) \cdot g'(x).$$

Riordinando i termini si ottiene il risultato cercato. $\square$

Esempio 8.6. Tramite questa regola è possibile calcolare la derivata di qualsiasi funzione razionale. Prendiamo ad esempio, $f(x) = \frac{x^2+1}{x+3}$, allora

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x) \cdot (x+3) - (x^2+1) \cdot 1}{(x+3)^2} \\ &= \frac{x^2+6x+1}{(x+3)^2}. \end{aligned}$$

NOTA BENE. *La derivata della funzione $\frac{1}{f}$ per una certa funzione $f \colon I \to \mathbb{R}$ è un caso particolare del teorema precedente,*

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}.$$

Esempio 8.7. Consideriamo la funzione tangente $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

$$\tan'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos(x)^2} = \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}.$$

Esempio 8.8. Possiamo ora calcolare la derivata di x^{-n} dove n è un qualsiasi numero naturale positivo $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Infatti

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right) = -\frac{n \cdot x^{n-1}}{x^{2n}} = -n \cdot x^{-n-1}.$$

Osserivamo che questo risultato ci permette di generalizzare la derivata di x^m per ogni $m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, ottenendo

$$(x^m)' = m \cdot x^{m-1}.$$

Teorema 8.7 (Derivata di una funzione composta)**.** *Siano* $f\colon X \to Y$ *e* $g\colon Y \to \mathbb{R}$ *due funzioni derivabili. Allora la funzione composta* $g \circ f$ *è derivabile e in particolare*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Dimostrazione. Come nei casi precedenti, scriviamo le due funzioni tramite l'uso dei rapporti incrementali r_1, r_2, ma in questo caso r_1 è il rapporto incrementale di f in $g(x)$ mentre r_2 è il rapporto incrementale di g in x.

$$\begin{aligned} f(g(x+h)) &= f\left(g(x) + hr_2(h)\right) \\ &= f(g(x)) + hr_2(h)r_1(hr_2(h)). \end{aligned}$$

Il rapporto incrementale di $f \circ g$ calcolato in x è quindi $r_2(h) \cdot r_1(hr_2(h))$, che si può prolungare a $h = 0$ ottenendo

$$r_2(0) \cdot r_1(0) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

□

Esempio 8.9. Consideriamo la funzione $\sin(2x)$ ottenuta componendo $2x$ e $\sin(x)$. Allora la derivata è

$$\sin(2x)' = \sin'(2x) \cdot 2 = 2\cos(2x).$$

NOTA BENE. *L'ultimo teorema permette di calcolare la derivata di una funzione inversa. Consideriamo* $f\colon X \to Y$ *biiettiva, e sia* $f^{-1}\colon Y \to X$ *la sua funzione inversa (vedere Teorema 7.14 per la definizione). Se* f *è derivabile, allora* f^{-1} *è derivabile e*

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Infatti $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$ *e la derivata dell'identità è semplicemente la costante* 1. *Questo permette di dimostrare il risultato precedente (lasciato per esercizio).*

Esempio 8.10. Consideriamo la funzione $g(y) = y^{\frac{1}{n}}$ definita per $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ su $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Questa è la funzione inversa di $f(x) = x^n$, dunque se $y = f(x) = x^n$ si ha

$$\begin{aligned} g'(y) &= \frac{1}{f'(x)} \\ &= \frac{1}{n \cdot x^{n-1}} \\ &= \frac{1}{n} \cdot y^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1}{n}-1}. \end{aligned}$$

Conseguentemente è possibile dimostrare che per ogni numero razionale $q = \frac{m}{n} \neq 0$ vale la regola

$$(x^q)' = q \cdot x^{q-1}.$$

Infine, per estensione questa stessa proprietà è vera per ogni reale $r \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$,

$$(x^r)' = r \cdot x^{r-1},$$

dove entrambe le funzioni sono considerate sui loro domini massimali.

8.4 Teorema di Fermat e altri teoremi utili

Definizione 8.3. *Si dice punto di **massimo (o minimo) globale** di una funzione $f: X \to \mathbb{R}$ il punto (o i punti) $x \in X$ dove $f(x)$ assume il valore massimo (o minimo) di tutta l'immagine $f(X)$.*

Esempio 8.11. Consideriamo un polinomio di grado 1, $f(x) = ax + b$ definito su un intervallo $[x_0, x_1]$, allora questa funzione assume i suoi valori massimo e minimo globali agli estremi, in particolare se $a > 0$ allora

$$\max f(x) = f(x_1) \quad \min f(x) = f(x_0).$$

Se invece $a < 0$ allora

$$\max f(x) = f(x_0) \quad \min f(x) = f(x_1).$$

Esempio 8.12. Se considero la stessa funzione $f(x) = ax + b$ su tutto $\mathbb{R}$, allora la funzione non è limitata né superiormente, né inferiormente,

$$\sup f(X) = +\infty, \quad \inf f(X) = -\infty,$$

dunque non esistono massimi o minimi globali di $f(x)$.

Esempio 8.13. Se $f(x) = x^2$, il dominio massimale è $\mathbb{R}$ e $\sup f(\mathbb{R}) = +\infty$ mentre $\inf f(\mathbb{R}) = 0$. Quindi per definizione x^2 non può avere un massimo globale, mentre $x = 0$ è l'unico punto in cui viene toccato l'estremo inferiore $f(x) = 0$, dunque 0 è un punto di minimo globale.

Come vedremo, in un punto x di massimo e minimo globale, se f è una funzione derivabile allora $f'(x) = 0$.

Abbiamo però dei casi in cui $f'(x)$ si annulla pur non trovandoci in un punto di massimo o minimo globale, è il caso per esempio della funzione $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$ che ha derivata $f' = 0$ nei punti $x = \pm 1$, ma $\sup f(\mathbb{R}) = +\infty$ e $\inf f(\mathbb{R}) = -\infty$.

Definizione 8.4. *Sia $f: X \to \mathbb{R}$, un punto $x \in X$ è un punto **di massimo (o minimo) locale** se esiste un reale positivo $\delta \in \mathbb{R}^+$ tale che x è un punto di massimo (o minimo) per f sull'insieme $(x - \delta, x + \delta) \cap X$.*

NOTA BENE. *Osserviamo che un punto di massimo o minimo globale è anche un massimo o minimo locale, perché se x è il massimo su tutto il dominio, lo sarà necessariamente anche su un qualsiasi intervallo contenente x.*

Definizione 8.5. *Sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile, si dice **punto stazionario** di f un punto x tale che $f'(x) = 0$.*

Teorema 8.8 (di Fermat)**.** *Sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile con X insieme aperto. Se $x \in X$ è un punto di massimo o minimo locale per f, allora x è un punto stazionario per f.*

Dimostrazione. Dimostreremo il risultato per il caso di un massimo locale, il caso di un minimo locale è analogo. Poiché f è derivabile allora per h sufficientemente piccolo abbiamo

$$f(x+h) = f(x) + h \cdot r(h),$$

dove $r(h)$ è il rapporto incrementale di f in x, prolungato per continuità anche a $h = 0$. Per definizione di massimo locale esiste $\delta \in \mathbb{R}^+$ sufficientemente piccolo tale che $f(x+h) \le f(x)$ per ogni $h \in (-\delta, \delta)$, quindi

$$\begin{aligned}
&\text{se } h > 0 \Rightarrow f(x) \ge f(x) + h \cdot r(h) \Rightarrow h \cdot r(h) \le 0 \Rightarrow r(h) \le 0 \\
&\text{se } h < 0 \Rightarrow f(x) \ge f(x) + h \cdot r(h) \Rightarrow h \cdot r(h) \le 0 \Rightarrow r(h) \ge 0.
\end{aligned}$$

Quindi poiché $r(0)$ è un valore ben definito e la funzione r è continua in 0, allora tale valore deve essere necessariamente $r(0) = 0$. □

Esempio 8.14. Togliamo una delle ipotesi del Teorema di Fermat, in particolare consideriamo $X = [x_0, x_1]$ intervallo **chiuso**. Ad esempio se consideriamo $f(x) = ax + b$ su un intervallo chiuso come nell'Esempio 8.11, allora f assume un massimo e un minimo locale negli estremi. Quindi la tesi del Teorema di Fermat non è valida se togliamo l'ipotesi di apertura dell'insieme X.

Esempio 8.15. Togliamo un'altra ipotesi del Teorema di Fermat, cioè la derivabilità sul dominio X. Prendiamo il caso della funzione $|x|$ che non è derivabile nel punto $x = 0$. In effetti in tale punto si trova un minimo locale che è anche un minimo globale, anche se la derivata in tale punto non esiste. Quindi la tesi del Teorema di Fermat non è valida se togliamo l'ipotesi di derivabilità ovunque sul dominio.

NOTA BENE. *Osserviamo che un punto di massimo o minimo locale deve essere un punto stazionario ma* ***non*** *è vero il viceversa. Infatti per la funzione $f(x) = x^3$, il punto $x = 0$ è un punto stazionario ma non è un massimo né un minimo locale.*

Adesso introduciamo alcuni teoremi classici del calcolo differenziale che si riveleranno strumenti molto utili

Teorema 8.9 (di Weierstrass)**.** *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, allora esistono il massimo e il minimo di f sull'intervallo chiuso $[a,b]$, cioè esistono $x_0, x_1 \in [a,b]$ tali che*

$$f(x_0) = \min_{[a,b]} f(x), \quad f(x_1) = \max_{[a,b]} f(x).$$

NOTA BENE. *Non sviluppiamo la dimostrazione di questo teorema. Osserviamo comunque che grazie al Teorema di Fermat 8.8 se f è continua su $[a, b]$ e derivabile su (a, b) abbiamo completamente classificato i punti da controllare per cercare massimo e minimo globali. Infatti per Weierstrass il minimo e massimo x_0, x_1 esistono, se uno di essi appartiene a (a, b) allora va cercato tra i punti stazionari, altrimenti restano da controllare gli estremi a e b.*

Teorema 8.10 (di Rolle)**.** *Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, in più supponiamo f derivabile su (a, b). Se $f(a) = f(b)$ allora esiste un punto $x \in (a, b)$ tale che $f'(x) = 0$.*

Dimostrazione. Per il Teorema di Weierstrass 8.9 esistono il massimo e il minimo di f su $[a, b]$. Denominiamo questi valori rispettivamente M e m. Abbiamo due casi,

1. se $M = m$, allora $f(a) = f(b) = M = m$ e la funzione è costante su tutto $[a, b]$, quindi in un qualsiasi punto $x \in (a, b)$ vale $f'(x) = 0$;
2. se $M > m$, allora almeno uno di questi valori è raggiunto in un punto $x \in [a, b]$ diverso dagli estremi, quindi $x \in (a, b)$. Si tratta di un massimo o minimo globale della funzione, quindi per il Teorema di Fermat 8.8 $f'(x) = 0$.

□

Teorema 8.11 (di Lagrange)**.** *Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e in più supponiamo f derivabile su (a, b). Allora, esiste $x \in (a, b)$ tale che il valore della derivata $f'(x)$ coincide con il rapporto incrementale tra gli estremi a e b, cioè,*

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

NOTA BENE. *Come si può vedere nella Figura 7, il significato geometrico di questo teorema è che esiste un punto $x \in (a, b)$ (denominato c nella figura) tale che la tangente al grafico in quel punto è parallela alla retta che congiunge i punti di coordinate $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Il significato del rapporto incrementale $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ è infatti l'inclinazione di tale retta.*

Dimostrazione. Consideriamo la funzione

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

definita $[a, b] \to \mathbb{R}$. Osserviamo che $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. In più, $g(x)$ è continua su $[a, b]$ e derivabile su (a, b) perché è composizione lineare di funzioni con queste stesse proprietà.

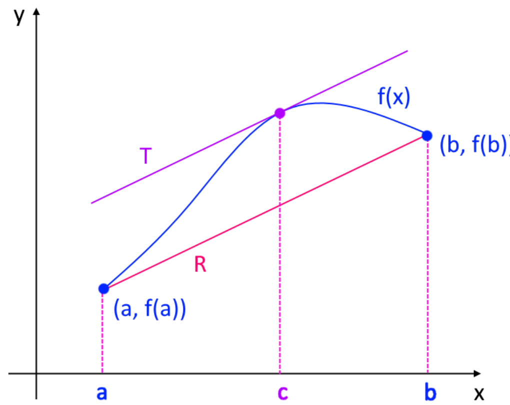


Figura 7: Nella figura, R è la retta che congiunge $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$, mentre T è la tangente in $(c, f(c))$.

Pertanto sono verificate le ipotesi del Teorema di Rolle 8.10 per la funzione φ e quindi esiste $x \in (a, b)$ tale che $\varphi'(x) = 0$, cioè

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

che è precisamente la tesi che volevamo dimostrare. □

Corollario 8.12 (Funzioni a derivata nulla)**.** *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua e derivabile su* (a, b) *con derivata costantemente nulla su tutto l'intervallo* (a, b)*. Allora* f *è costante sull'intervallo* $[a, b]$*.*

Dimostrazione. Dimostriamo che $f(x) = f(a)$ per ogni $x \in (a, b)$. Per il teorema di Lagrange per ogni $x \in (a, b)$ esiste $z \in (a, x)$ tale che

$$f'(z) = 0 = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Quindi il numeratore qui sopra deve essere nullo, quindi $f(x) = f(a)$. Resta da verificare che $f(b) = f(a)$, che è vero per continuità perché $f(x) = f(a)$ per ogni x in un intorno di b. □

8.5 Monotonia tramite le derivate

Come abbiamo appena visto, i punti di massimo e minimo locale sono necessariamente punti in cui la derivata si annulla. Questo ci suggerisce di guardare la derivata per comprendere il comportamento di crescenza o decrescenza di una funzione.

Teorema 8.13. *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Allora,*

1. *$f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a,b]$ se e solo se f è crescente su $[a,b]$*
2. *$f'(x) > 0$ per ogni $x \in [a,b]$ implica che f è strettamente crescente su $[a,b]$*
3. *$f' \leq 0$ per ogni $x \in [a,b]$ se e solo se f è decrescente su $[a,b]$*
4. *$f' < 0$ per ogni $x \in [a,b]$ implica f strettamente decrescente.*

NOTA BENE. *I punti* (1) *e* (3) *riguardano un'equivalenza: una funzione è crescente (o decrescente) se e solo se la sua derivata è ovunque non negativa (o non positiva).*

Invece non è valido il viceversa di (2) *e* (4)*: esistono funzioni strettamente crescenti per cui la derivata non è sempre strettamente positiva, un esempio è la funzione $f(x) = x^3$ che è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$ ma per cui $f'(0) = 0$.*

Dimostrazione.

1. Se f è crescente allora per ogni coppia $x_0, x \in [a,b]$ si ha che $f(x) \geq f(x_0)$ se $x > x_0$ e $f(x) \leq x_0$ se $x < x_0$, quindi il rapporto incrementale
$$r_f(x) = \frac{f(x) - f(x_0}{x - x_0}$$
è sempre ≥ 0. Andando al limite per $x \to x_0$ (o eventualmente $x \to x_0^{\pm}$) si ottiene $f'(x_0) = \lim r_f(x) \geq 0$.

   Viceversa, supponiamo che $f' \geq 0$ e consideriamo x_0, x_1 con $x_0 < x_1$. Per il Teorema di Lagrange 8.11 esiste $x_* \in (x_0, x_1)$ tale che
$$f'(x_*) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$
Come abbiamo detto, $f'(x_*) \geq 0$, quindi $f(x_1) - f(x_0) \geq 0$ cioè $f(x_1) \geq f(x_0)$. Poiché avevamo scelto x_0 e x_1 in modo arbitrario su $[a,b]$, questo è equivalente alla crescenza di f sull'intervallo.

2. Se supponiamo $f' > 0$ su $[a,b]$, come al punto precedente per ogni $x_0, x_1 \in [a,b]$ tali che $x_0 < x_1$, troviamo $x_* \in (x_0, x_1)$ tale che
$$f'(x_*) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} > 0.$$
Quindi $f(x_1) > f(x_0)$ e abbiamo concluso.

I punti (3) e (4) si dimostrano in modo del tutto analogo ai precedenti. □

Il teorema precedente, unito al Teorema di Fermat, ci permette di avere un primo metodo per riconoscere massimi e minimi locali.

Corollario 8.14. *Supponiamo di lavorare con una funzione* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *derivabile, tale che la derivata* $f'(x)$ *è una funzione continua.*

1. *Se* $x_0 \in (a, b)$ *e* $f'(x_0) = 0$ *supponiamo che esista un intervallo* $I := (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (a, b)$ *tale che*

   - $f'(x) \leq 0$ *quando* $x < x_0$ *e* $x \in I$
   - $f'(x) \geq 0$ *quando* $x > x_0$ *e* $x \in I$.

   Allora f *è decrescente prima di* x_0 *e crescente dopo* x_0*. Il punto* x_0 *è un punto di minimo locale.*

2. *Se* $x_0 \in (a, b)$ *e* $f'(x_0) = 0$ *supponiamo che esista* $I := (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (a, b)$ *tale che*

   - $f'(x) \geq 0$ *per* $x < x_0$ *e* $x \in I$
   - $f'(x) \leq 0$ *per* $x > x_0$ *e* $x \in I$.

   Allora f *è crescente prima di* x_0 *e decrescente dopo* x_0*. Il punto* x_0 *è un punto di massimo locale.*

3. *Se* x_0 *è uno dei due estremi* a *o* b *allora*

   - *se* $f'(x_0) > 0$ *allora per un intorno sufficientemente piccolo di* x_0*, la funzione* f *è strettamente crescente (per continuità di* f' *e per il Teorema di permanenza del segno). Quindi* x_0 *è un massimo locale.*
   - *se* $f'(x_0) < 0$ *con un ragionamento analogo si dimostra che* x_0 *è un minimo locale.*

Esempio 8.16. Come abbiamo già visto un polinomio di primo grado $f(x) = ax + b$ è strettamente crescente se $a > 0$ mentre è strettamente decrescente se $a < 0$. Questo è coerente con il Teorema 8.13 perché $f' \equiv a$ costante.

Esempio 8.17. Come abbiamo visto la derivata della funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. La funzione f' quindi è strettamente negativa su tutto il dominio massimale, e pertanto f è strettamente decrescente sugli intervalli su cui è definita.

Attenzione! Questo non significa che f sia strettamente decrescente, infatti il suo dominio massimale è $\mathbb{R}\setminus\{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ che non è un intervallo, ma l'unione di due intervalli. Su questi intervalli f è strettamente decrescente ma dal teorema non possiamo dire niente sulla sua decrescenza globale e in effetti si osserva che f **non** è globalmente decrescente, ad esempio notando che $f(1) > f(-1)$.

Esempio 8.18. Consideriamo il polinomio di secondo grado $p(x) = x^2 + x + 1$. La sua derivata è il polinomio di primo grado $p'(x) = 2x + 1$. Si osserva che

$$\begin{cases} p'(x) < 0 & \text{se } x < -1/2 \\ p'(x) = 0 & \text{se } x = -1/2 \\ p'(x) > 0 & \text{se } x > -1/2 \end{cases}$$

quindi $p(x)$ è crescente nell'intervallo $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ e decrescente nell'intervallo $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$. Nel punto $x = -\frac{1}{2}$ ha un punto stazionario che è un minimo globale. Tutto questo è sintetizzato nella Figura 8.

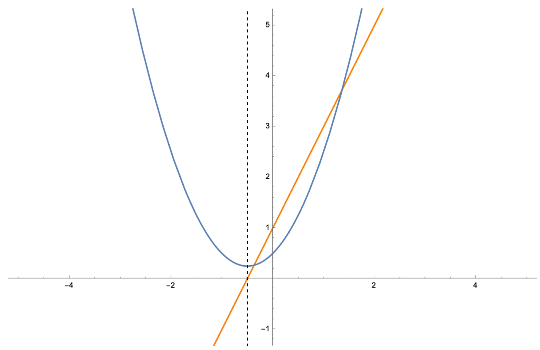


Figura 8: In blu la parabola che è grafico del polinomio $p(x) = x^2 + x + 1$. In arancione il grafico della derivata $p'(x) = 2x + 1$. La retta verticale indica il punto $x = -\frac{1}{2}$ in cui la derivata è nulla. A destra di questa retta $p'(x) > 0$ e quindi $p(x)$ è crescente. A sinistra $p'(x) < 0$ e quindi $p(x)$ è decrescente.

Esempio 8.19. Con lo stesso approccio dell'esempio precedente, osserviamo che se $f(x) = x^3$ allora $f'(x) = 3x^2$. La derivata quindi si annulla in $x = 0$ ma è strettamente positiva sia per $x > 0$ che per $x < 0$. Quindi la funzione è strettamente crescente sugli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$, e pertanto il punto stazionario $x = 0$ non può essere né un punto di massimo locale né un punto di minimo locale.

Esempio 8.20. Nel caso del polinomio di grado 3, $q(x) = \frac{x^3}{3} - x$, abbiamo come derivata il polinomio di grado 2, $q'(x) = x^2 - 1$. Quindi i punti stazionari di $q(x)$ sono $x = \pm 1$, mentre il segno della derivata è

$$q'(x) > 0 \text{ se } x > 1 \text{ or } x < -1$$
$$q'(x) < 0 \text{ se } -1 < x < 1.$$

Pertanto la funzione cresce strettamente su $(-\infty, -1)$, poi decresce strettamente su $(-1, 1)$, e infine cresce strettamente su $(1, +\infty)$. Il punto $x = -1$ è un massimo locale e il punto $x = 1$ è un minimo locale. In entrambi i casi non si tratta di un massimo o minimo globale, poiché si possono individuare casi con valori maggiori/minori, ad esempio $x = \pm 100$.

Esempio 8.21. Un esempio molto importante è quello della funzione

$$f(x) = 1 + ax - (1+x)^a, \quad a \in \mathbb{R}$$

definita per $x > -1$. Osserviamo che se $a = 1$ allora la funzione è identicamente uguale a 0 Distinguiamo due casi da analizzare, il caso $0 < a < 1$ e il caso $a > 1$. In entrambi i casi ovviamente la funzione è ovunque derivabile e

$$f'(x) = a - a \cdot (1+x)^{a-1} = a \cdot \left(1 - (1+x)^{a-1}\right).$$

- se $0 < a < 1$, allora $a - 1 < 0$ e quindi abbiamo il seguente diagramma dei segni per la derivata

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{se } -1 < x < 0 \\ f'(x) = 0 & \text{se } x = 0 \\ f'(x) > 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

  quindi $x = 0$ è un minimo globale su $(-1, +\infty)$

- se $a > 1$ allora $a - 1 > 0$ e il diagramma dei segni della derivata si ribalta,

$$\begin{cases} f'(x) < 0 & \text{se } -1 < x < 0 \\ f'(x) = 0 & \text{se } x = 0 \\ f'(x) > 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

  quindi $x = 0$ è un massimo global su $(-1, +\infty)$

Vedere la Figura 9 per il grafico della funzione per differenti valori di a.

8.6 Derivata seconda (e derivate successive)

La derivata prima f' di una funzione f è anch'essa una funzione, possiamo quindi chiederci se sia anch'essa derivabile. Se f' è derivabile, la sua derivata si chiama **derivata seconda** di f e viene indicata con la notazione f''. Ricorsivamente, possiamo ripetere questo ragionamento ottenendo la derivata terza, quarta, ecc.

Esempio 8.22. Un polinomio di grado d è derivabile infinite volte ma la derivata dopo la d-esima sono identicamente nulle. Consideriamo ad esempio $f(x) = x^3 - x + 4$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 1 \\ f''(x) &= 6x \\ f'''(x) &= 6 \\ f''''(x) &= 0. \end{aligned}$$

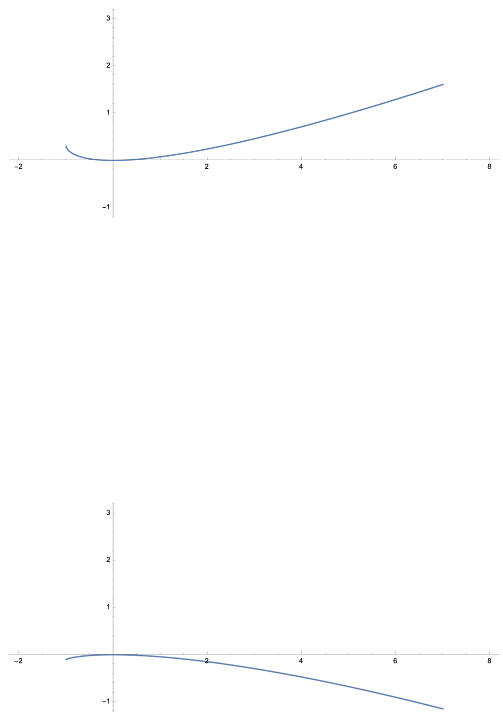


Figura 9: Grafico della funzione $f(x) = 1 + ax - (1 + x)^a$ nel caso $a = 0.7$ e $a = 1.1$.

Esempio 8.23. Le funzioni seno e coseno sono entrambe derivabili infinite volte e la loro derivata ha un comportamento "ciclico",

$$\begin{aligned}
\sin'(x) &= \cos(x)\\
\sin''(x) &= \cos'(x) = -\sin(x)\\
\sin'''(x) &= -\cos(x)\\
\sin''''(x) &= \sin(x)\\
\cdots &\cdots
\end{aligned}$$

Come abbiamo visto la derivata prima rappresenta la "variazione" di una funzione, quindi la derivata seconda rappresenta la variazione della derivata prima. Abbiamo visto precedentemente che sapere l'andamento della derivata prima ci permette di classificare i punti stazionari. Questo ci permette di dedurre il prossimo teorema.

Teorema 8.15. *Data una funzione derivabile due volte $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ con derivata seconda continua, se x è un punto stazionario di f, allora*

1. *se $f''(x) > 0$, in x c'è un minimo locale*
2. *se $f''(x) < 0$, in x c'è un massimo locale*

Dimostrazione. Consideriamo il primo caso, l'altro si fa in modo analogo. Abbiamo quindi $f'(x) = 0$ e $f''(x) > 0$. La derivata seconda si può scrivere come il limite dei rapporti incrementali della derivata prima. Chiamiamo $r_{f'}$ questo rapporto incrementale,

$$f''(x) = \lim_{h\to 0} r_{f'}(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}.$$

Poiché $f''(x) > 0$ allora per il Teorema di permanenza del segno 4.11, esiste δ tale che per ogni $h \in (-\delta,\delta)\backslash\{0\}$, il rapporto incrementale è strettamente positivo, $r_{f'}(h) > 0$.

Quindi, sfruttando anche l'ipotesi che $f'(x) = 0$, otteniamo

$$r_{f'}(h) = \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}\frac{f'(x+h)}{h} > 0, \quad \forall h \in (-\delta,\delta)\backslash\{0\}.$$

Questo significa che $f'(x+h) > 0$ per ogni $h \in (0,\delta)$ e $f'(x+h) < 0$ per ogni $h \in (-\delta, 0)$. Ci troviamo quindi nel caso in cui f è decrescente nell'intervallo $(-\delta, 0)$ e crescente nell'intervallo $(0,\delta)$. Come diretta conseguenza del Corollario 8.14 abbiamo che x è un minimo locale. □

NOTA BENE. *Se $f''(x) = 0$ non possiamo dire niente sul punto stazionario x. Infatti abbiamo sia casi in cui si tratta di un minimo locale (come la funzione*

$f(x) = x^4$), sia casi in cui si tratta di un massimo locale (come per $f(x) = -x^4$), sia infine casi in cui il punto stazionario non è né un massimo né un minimo (come $f(x) = x^3$).

Esempio 8.24. Consideriamo un polinomio di grado due $f(x) = x^2 - x$. La derivata è $f'(x) = 2x - 1$ quindi l'unico punto stazionario è in $x = \frac{1}{2}$. La derivata seconda è $f''(x) = 2$ quindi si tratta di un minimo locale.

8.7 Convessità

L'altra nozione importante collegata alla derivata seconda è quella di convessità.

Definizione 8.6. *Una funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$, dove X è un intervallo, si dice **convessa** se dati due punti qualsiasi del grafico di f, di coordinate $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$, il segmento che li unisce si trova completamente al di sopra del grafico.*

*Una tale funzione si dice **concava** se il segmento che unisce tali due punti (qualsiasi) si trova completamente al di sotto del grafico. Vedere anche Figura 10.*

NOTA BENE. *Se $x_1 < x_2$ consideriamo l'intervallo $[x_1, x_2] \subset \mathbb{R}$. Un punto di tale intervallo può essere scritto in funzione di un parametro $t \in [0, 1]$. Infatti se $x \in [x_1, x_2]$ allora $x = x_1 + t \cdot (x_2 - x_1)$ con $0 \leq t \leq 1$. Se $t = 0$ allora $x = x_1$, se $t = 1$ allora $x = x_2$. Il punto corrispondente del segmento che unisce $(x_1, f(x_1))$ a $(x_2, f(x_2))$ ha quindi le seguenti coordinate,*

$$(x_1 + t \cdot (x_2 - x_1),\ f(x_1) + t \cdot (f(x_2) - f(x_1)))\,.$$

La condizione di convessità si può quindi scrivere come

$$f(x_1 + t \cdot (x_2 - x_1)) \leq f(x_1) + t \cdot (f(x_2) - f(x_1)) \quad \forall t \in [0, 1].$$

Analogamente la condizione di concavità si può scrivere come

$$f(x_1 + t \cdot (x_2 - x_1)) \geq f(x_1) + t \cdot (f(x_2) - f(x_1)) \quad \forall t \in [0, 1].$$

La definizione di convessità è equivalente a richiedere che il rapporto incrementale $r_f(x)$ della funzione f rispetto a un certo punto x_0, sia una funzione crescente.

Infatti se $x_0 < x_1 < x_2$ (gli altri casi si fanno in modo analogo), allora esiste $t \in (0, 1)$ tale che

$$(x_1 - x_0) = t \cdot (x_2 - x_0). \tag{56}$$

Allora la crescenza del rapporto incrementale si scrive

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}.$$

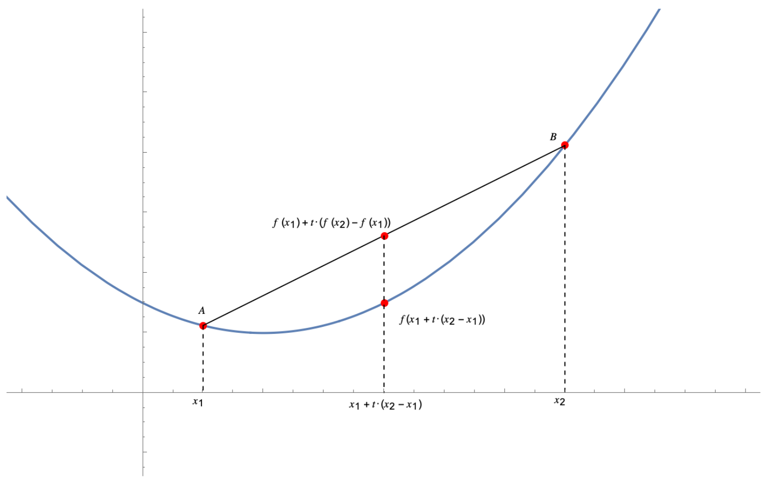


Figura 10: I punti A e B in figura hanno coordinate $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ rispettivamente. La funzione rappresentata è convessa, infatti tutti i punti del segmento AB si trovano sopra al grafico della funzione stessa.

In conseguenza della (56), questa implica

$$f(x_1) - f(x_0) \leq t \cdot (f(x_2) - f(x_0)) \tag{57}$$

che è precisamente una riscrittura della definizione di convessità.

A queste due definizioni equivalenti di convessità ne aggiungiamo una terza valida per le funzioni derivabili.

Definizione 8.7. *Una funzione derivabile f si dice convessa se*

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x, x_0 \in X. \tag{58}$$

NOTA BENE. *È facile dimostrare che per ogni funzione convessa (cioè tale che il rapporto incrementale è una funzione decrescente), deve valere la (58). Il viceversa è un esercizio meno banale e lo lasciamo come esercizio (hint: potrebbe servire il Teorema di Lagrange).*

Teorema 8.16. *Data una funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$ derivabile due volte, dove X è un intervallo,*

1. *f è convessa se e solo se $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in X$*
2. *f è concava se e solo se $f''(x) \leq 0$ per ogni $x \in X$.*

Dimostrazione. Facciamo il primo caso, l'altro è analogo. Sappiamo che per definizione di convessità vale la (58), quindi per ogni $x, y \in X$ valgono entrambe le seguenti,

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(y) + f'(y)(x - y) \\ f(y) &\geq f(x) + f'(x)(y - x). \end{aligned}$$

Sommandole si ottiene

$$f(x) + f(y) \geq f(x) + f(y) + (x - y)(f'(y) - f'(x)).$$

E quindi f' è crescente perché se $x < y$ la formula sopra implica $f'(y) \geq f'(x)$ (e viceversa). Quindi $f'(x)$ è una funzione crescente, che è equivalente a chiedere $f''(x) \geq 0$.

Viceversa poniamo che $f''(x) \geq 0$ e quindi $f'(x)$ è una funzione crescente. Scegliamo $x_0 < x$ allora per il Teorema di Lagrange 8.11, esiste $x_* \in (x_0, x)$ tale che

$$f'(x_*) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \;\Rightarrow\; f(x) = f(x_0) + f'(x_*)(x - x_0).$$

Per crescenza di f', si ha $f'(x_*) \geq f'(x_0)$ e quindi

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Questo è vero per ogni $x, x_0 \in X$, che è la definizione di convessità. $\square$

Esempio 8.25. La convessità di ogni polinomio di secondo grado $f(x) = ax^2 + bx + c$ è determinata dal primo coefficiente a. Infatti $f''(x) = 2a$ costante, quindi se $a > 0$ la funzione f è convessa, se $a < 0$ la funzione f è concava.

Esempio 8.26. Consideriamo il polinomio di terzo grado $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$, allora la derivata seconda del polinomio è $f''(x) = 6x$. Dal Teorema 8.16 ricaviamo che la funzione f è convessa sull'intervallo $[0, +\infty)$, è concava sull'intervallo $(-\infty, 0]$, mentre non è né concava né convessa se guardiamo tutto il dominio $\mathbb{R}$.

8.8 Sviluppo di Taylor

Introduciamo un ulteriore teorema che sarà necessario per ricavare importanti proprietà dello sviluppo di Taylor.

Nell'enunciato del teorema ci riferiamo indifferentemente a dei limiti per $x \to x_0$ (o anche unilateralmente $x \to x_0^{\pm}$) oppure $x \to \pm\infty$. Il risultato del teorema è il medesimo in entrambi i casi.

Teorema 8.17 (di de l'Hôpital)**.** *Siano f, g funzioni derivabili entrambe infinite o infinitesime, cioè $\exists \lim f = \lim g = \pm\infty$ oppure $\exists \lim f = \lim g = 0$. Allora*

$$\left(\exists \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}\right) \Rightarrow \left(\exists \lim \frac{f(x)}{g(x)}\right),$$

cioè l'esistenza del limite del rapporto tra le derivate implica l'esistenza del limite del rapporto tra le due funzioni nei casi indeterminati che erano rimasti marcati con "?" nelle tabelle della Sezione 7.3.

In più se tale limite esiste, allora

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dimostrazione. Dimostriamo il caso per $x \to x_0$ con $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0) = f(x_0) = g(x_0)$. Per farlo ci serve una generalizzazione del Teorema di Lagrange che lasciamo per esercizio. Questa generalizzazione si chiama "Teorema di Cauchy". La generalizzazione asserisce che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $[a, b]$ fa parte del dominio di f e g, esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

NOTA BENE. *Nel caso del Teorema di Lagrange, la funzione g è la funzione identità $g(x) = x$.*

Consideriamo quindi un punto x_0 e due funzioni f e g derivabili tali che $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Denominiamo $y(x)$ (o semplicemente y) il punto $y \in (x_0, x)$ tale che

$$\frac{f'(y)}{g'(y)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}.$$

Allora,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(y(x))}{g'(y(x))}.$$

Poiché $y(x)$ è sempre compreso tra x_0 e x, l'ultimo limite coincide con

$$\lim_{y \to x_0} \frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

□

Esempio 8.27. Consideriamo uno dei limiti notevoli che abbiamo visto in precedenza, cioè il rapporto $\frac{\sin(x)}{x}$ per $x \to 0$. In questo caso ci troviamo nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$, cioè sia il numeratore che il denominatore convergono a 0. Il limite del rapporto tra le due derivate è più facile da calcolare, infatti

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Abbiamo dimostrato nuovamente lo stesso risultato.

Esempio 8.28. Consideriamo le funzioni $f(x) = x$ e $g(x) = e^x$ per $x \to +\infty$. In questo caso ci troviamo di fronte a due infiniti, quindi nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Il limite del rapporto tra le due derivate esiste,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$$

Esempio 8.29. L'uso del Teorema di de l'Hôpital ci permette di dimostrare che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e quindi di conseguenza lo stesso risultato è vero per ogni esponente reale r. Prendiamo $f(x) = x^n$ e $g(x) = e^x$. Il rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$ è in una forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ per $x \to +\infty$. Prendendo le derivate di numeratore e denominatore otteniamo $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{nx^{n-1}}{e^x}$, e se $n > 1$ si tratta ancora di una forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Continuiamo a derivare, e dopo n passaggi otteniamo

$$\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1}{e^x} = \frac{n!}{e^x},$$

che non è più una forma indeterminata. Abbiamo indicato con $f^{(n)}(x)$ la derivata n-esima di f. Il numero al numeratore è detto **fattoriale di** n e indica il prodotto dei primi n numeri naturali.

A questo punto osserviamo che

$$\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = 0,$$

e quindi applicando "come in un effetto domino" n volte il Teorema di de l'Hôpital, si ottiene

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)} = \cdots = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Data una funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$ derivabile, con X aperto, consideriamo un punto $x \in X$. Possiamo definire il **primo polinomio di Taylor** di f in x, anche detto polinomio di Taylor di ordine 1,

$$P_{1,f,x}(h) := f(x) + h \cdot f'(x).$$

In questo caso quindi $f(x)$ e $f'(x)$ sono due coefficienti costanti.

Come abbiamo visto nell'Esempio 7.23, se consideriamo $h \to 0$, allora

$$f(x+h) = P_{1,f,x}(h) + o(h),$$

formalizzando l'idea secondo cui $P_{1,f,x}$ si comporta come una approssimazione di $f(x+h)$ per h vicino a 0.

Un'altra maniera equivalente di scrivere il comportamento del polinomio di Taylor è fissare $x_0 \in X$ e lasciare x come nome per la variabile, allora $\widetilde{P}_{1,f,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ e

$$f(x) = \widetilde{P}_{1,f,x_0}(x) + o(x - x_0).$$

Alcuni testi indicano $T_{1,f}$ come notazione per il polinomio di Taylor.

Per ogni grado n cerchiamo un polinomio di grado n che approssimi una funzione derivabile n volte. Prima di raggiungere questo risultato, osserviamo che relazione c'è tra un polinomio e le sue derivate.

Lemma 8.18. *Sia $p(x)$ è un polinomio di grado d tale che*

$$p(x) = c_d x^d + c_{d-1} x^{d-1} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

allora per ogni $k = 1, 2, \ldots, d$, la derivata k-esima di p valutata in 0 è

$$p^{(k)}(0) = k! \cdot c_k.$$

Dimostrazione. Si osserva che la derivata k-esima di un elevamento a potenza vale

$$(x^n)^{(k)} = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+2) \cdot (n-k+1) \cdot x^{n-k},$$

dove nel prodotto appaiono i più grandi k numeri naturali $\leq n$. Se $k > n$ allora la derivata qui sopra fa costantemente 0.

Quindi se deriviamo k volte il polinomio $p(x)$, otteniamo

$$p^{(k)}(x) = (\text{vari termini di grado } \geq 1) + k! \cdot c_k = (\text{vari termini}) \cdot x + k! \cdot c_k.$$

Quindi valutando tale espressione in $x = 0$ si raggiunge il risultato. □

Un modo equivalente per scrivere il risultato del lemma precedente, è la riscrittura del polinomio $p(x)$,

$$p(x) = \sum_{k=0}^{d} \frac{1}{k!} p^{(k)}(0) \cdot x^k.$$

oppure anche centrando lo sviluppo polinomiale attorno a $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$p(x) = \sum_{k=0}^{d} \frac{1}{k!} p^{(k)}(x_0) \cdot (x - x_0)^k.$$

Definizione 8.8. *Data una funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$ derivabile d volte in x_0, si chiama **polinomio di Taylor di grado** d sviluppato intorno a x_0, il polinomio*

$$P_{d,f,x_0}(h) = \frac{1}{d!} f^{(d)}(x_0) \cdot h^d + \frac{1}{(d-1)!} f^{(d-1)}(x_0) \cdot h^{d-1} + \cdots + f'(x_0) \cdot h + f(x_0).$$

o equivalentemente

$$\widetilde{P}_{d,f,x_0}(x) = \frac{1}{d!} f^{(d)}(x_0) \cdot (x - x_0)^d + \cdots + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

Teorema 8.19. *Se f è una funzione derivabile d volte in x_0, allora per $h \to 0$,*

$$f(x_0 + h) = P_{f,d,x_0}(h) + o(h^d),$$

in più P_{f,d,x_0} è l'unico polinomio di grado $\leq d$ che rispetta questa proprietà.

NOTA BENE. *Equivalentemente,*

$$f(x) = \widetilde{P}_{f,d,x_0}(x) + o((x - x_0)^d).$$

Dimostrazione. Per dimostrare questo risultato utilizzeremo un lemma tecnico, che dimostreremo alla conclusione di tutto il procedimento.

Supponiamo che $g\colon X \to \mathbb{R}$ sia una funzione derivabile k volte.

Lemma 8.20. *Una funzione $g(h)$ derivabile k volte è un o-piccolo di h^k per $h \to 0$, cioè $g(h) = o(h^k)$, se e solo se*

$$g(0) = g'(0) = g''(0) = \cdots = g^{(k)}(0).$$

Cerchiamo un polinomio $Q(x)$ di grado $\leq d$ tale che

$$f(x_0 + h) - Q(h) = o(h^d), \quad h \to 0. \tag{59}$$

Denotiamo i coefficienti del polinomio Q come

$$Q(h) = c_d h^d + c_{d-1} h^{d-1} + \cdots + c_1 d + c_0,$$

e denominiamo $g(h) = f(x_0+h) - Q(h)$. Allora grazie al Lemma 8.20 sappiamo che $g(h) = o(h^d)$ se e solo se $g(h)$ e le sue prime d derivate sono uguali a 0. Ma per quanto visto precedentemente, per ogni $k = 1, \ldots, d$

$$g^{(k)}(0) = f^{(k)}(x_0) - \frac{1}{k!} c_k.$$

Esiste quindi unico un polinomio $Q(h)$ di grado $\leq d$ che soddisfi l'Equazione (59), e calcolando coefficiente per coefficiente osserviamo che

$$Q(h) = P_{1,f,x_0}(h).$$

Resta da dimostrare il Lemma, lo faremo per induzione su k.

Il caso $k = 0$ è banale.

Supponiamo che il teorema sia vero per un certo k e consideriamo $g(h) = o(h^{k+1})$. Allora si può scrivere $g(h) = h^{k+1} f(h)$ dove $f(h)$ è una funzione continua tale che $f(0) = 0$, definita come $f(h) := \frac{g(h)}{h^{k+1}}$ quando $h \neq 0$ e estesa per continuità in 0. Derivando successivamente si ottiene

$$\begin{gathered} g'(h) = (k+1) h^k f(h) + h^{k+1} f'(h) \\ \ldots \\ g^{(k+1)}(h) = (k+1)! f(h) + h \cdot (altritermini). \end{gathered}$$

Quindi $g(0) = g'(0) = \cdots = g^{(k+1)}(0) = 0$.

Se invece è verificata quest'ultima uguaglianza, per ipotesi induttiva si ha che $g'(h) = o(h^k)$ e che il rapporto $\frac{g(h)}{h^{k+1}}$ è in forma indeterminta $\frac{0}{0}$ per $h \to 0$. Quindi per sfruttare il il Teorema di De l'Hôpital consideriamo

$$\frac{g'(h)}{(h^{k+1})'} = \frac{g'(h)}{(k+1) h^k}.$$

Poiché $g'(h) = o(h^k)$ il limite di quest'ultimo rapporto per $h \to 0$ esiste, ed è $= 0$. Quindi $g(h) = o(h^{k+1})$. □

Esempio 8.30. Lo sviluppo di Taylor del seno per $x \to 0$ si esprime come

$$P_{2k+1,\sin(x),0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Quindi per esempio lo sviluppo di Taylor di $\sin(x)$ al grado 5 è

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5).$$

Nella Figura 11, si vede la funzione $\sin(x)$ e il suo sviluppo di Taylor al grado 5 messi a confronto intorno a $x = 0$.

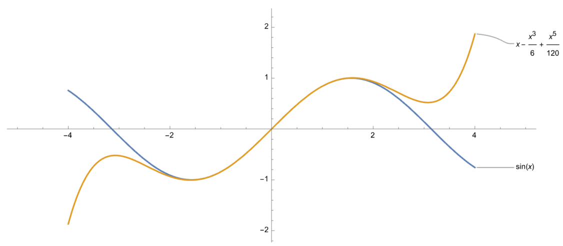


Figura 11: Il comportamento approssimante dello sviluppo di Taylor è perfettamente visibile.

Esempio 8.31. Lo sviluppo di Taylor di $\cos(x)$ per $x \to 0$ si calcola analogamente,

$$P_{2k,\cos(x),0} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Quindi per esempio lo sviluppo di Taylor al grado 5 è

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5).$$

Lo sviluppo di Taylor permette di calcolare agilmente i limiti. Consideriamo per esempio lo sviluppo al grado 2 di $\cos(x)$ per $x \to 0$, e calcoliamo il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2},$$

che è nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Sostituendo a $\cos(x)$ il suo sviluppo di Taylor al grado 2 il numeratore diventa

$$(1-(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)))=\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

quindi

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2}\\&=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{o(x^2)}{x^2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

per definizione di o-piccolo.

Esempio 8.32. Lo sviluppo di Taylor dell'esponenziale e^x al grado d è,

$$P_{d,e^x,0}(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^d}{d!}.$$

Quindi per esempio lo sviluppo di Taylor al grado 5 è

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+o(x^5).$$

Esempio 8.33. Il calcolo della derivata k-esima della funzione $\ln(1+x)$ è il seguente,

$$\ln^{(k)}(1+x)=\frac{(-1)^{k+1}\cdot(k-1)!}{k\cdot(1+x)^k}.$$

Questo fatto può essere dimostrato per induzione,

1. il passo base per $k=1$ è ovvio poiché $\ln'(1+x)=\frac{1}{1+x}$ è un risultato già visto

2. il passo induttivo richiede di supporre che la tesi sia vera per un certo k, allora

$$\begin{aligned}\ln^{(k+1)}(1+x)&=(-1)^{k+1}(k-1)!\cdot\frac{-k}{(1+x)^{k+1}}\\&=\frac{(-1)^{k+2}\cdot k!}{(1+x)^{k+1}}.\end{aligned}$$

   Che era il risultato cercato per $k+1$

Quindi a partire dalle derivate valutate in $x=0$ è possibile calcolare lo sviluppo di Taylor di $\ln(1+x)$ per $x\to 0$, in particolare

$$P_{k,\ln(1+x),0}(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{d+1}x^d}{d}.$$

8.9 Classificazione dei punti di non-derivabilità di una funzione

Così come nel caso dei punti di discontinuità, individuiamo tre categorie di punti in cui una funzione è continua ma non derivabile.

NOTA BENE. *Non tutti i punti dove una funzione non è derivabile (dove cioè non esiste un limite del rapporto incrementale per $h \to 0$) rientrano in queste tre casistiche. Si tratta comunque dei tre casi principali e vogliamo dar loro una denominazione specifica.*

1. I **punti angolosi** sono quei punti in cui i limiti al rapporto incrementale da destra e da sinistra esistono e sono finiti, ma non coincidono

$$\exists \ell = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \neq \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \ell'.$$

Un esempio classico di un punto angoloso è il punto $x = 0$ nella funzione valore assoluto $|x|$.

2. I **flessi a tangente verticale** (o punti di flesso a tangente verticale), sono quei punti in cui il limite del rapporto incrementale esiste ma è uguale a $\pm\infty$, e pertanto definire il valore $f'(x)$ è impossibile.

$$\exists \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \pm\infty.$$

Un esempio di flesso a tangente verticale si ha nel caso della funzione $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ nel punto $x = 0$.

3. Una **cuspide** è un punto in cui esistono i limiti dei rapporti incrementali da destra e da sinistra, essi sono infiniti e l'uno l'opposto dell'altro,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \pm\infty \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \mp\infty.$$

Un esempio di cuspide si ha nel caso della funzione $f(x) = |x|^{\frac{1}{3}}$ nel punto $x = 0$.

8.10 Alcuni appunti sugli studi di funzione

Chiudiamo la sezione sul calcolo differenziale elencando alcune proprietà che possono interessare in uno studio di funzione.

Cominciamo con alcune proprietà di simmetria.

- Una funzione $f(x)$ si dice **pari** se $f(x) = f(-x)$ per ogni x del suo dominio. Si dice **dispari** se $f(x) = -f(-x)$ per ogni x del suo dominio.

- Una funzione $f(x)$ si dice **periodica** se esiste $T \in \mathbb{R}^+$ tale che $f(x+T) = f(x)$ per ogni x nel suo dominio. Il massimo valore di T per cui è verificata la proprietà qui sopra è detto **periodo** di $f(x)$.

Esempio 8.34. Sono pari tutte le funzioni x^k con k esponente pari, mentre sono dispari quelle con k esponente dispari. Le funzioni trigonometriche $\sin(x), \cos(x), \tan(x)$ sono periodiche di periodo rispettivamente $2\pi, 2\pi, \pi$.

Si chiama **asintoto** di una funzione una retta che è definitivamente vicina al grafico della funzione.

Definizione 8.9. *Supponiamo che una funzione f sia definita su un intervallo privato di un punto $I \backslash \{x_0\}$. Allora f ha un **asintoto verticale** in x_0 se*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty,$$

questo include anche il caso in cui il limite di f per $x \to x_0$ esista e sia $\pm\infty$. In tutti questi casi l'asintoto è la retta verticale di equazione $x = x_0$.

Definizione 8.10. *Se $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ allora la funzione $f(x)$ ha un **asintoto orizzontale**, cioè la retta orizzontale di equazione $y = \ell$.*

Definizione 8.11. *La funzione $f(x)$ ha come **asintoto obliquo** la retta di equazione $y = ax + b$ se*

$$f(x) \sim a \cdot x, \quad x \to \pm\infty,$$

cioè $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{ax} = 1$, e in più

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = b.$$

9 Integrali

Prima di approfondire la definizione di integrale (secondo Riemann), guardiamo da vicino una questione di notazione.

Data una funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$ derivabile, abbiamo finora indicato con $f'(x)$ la sua funzione derivata, un'altra notazione utilizzata per la derivata è quella con i cosiddetti **differenziali**, cioè $\frac{df}{dx}(x)$. Questa notazione si comprende meglio se definiamo una variabile Δx e definiamo $\Delta f := f(x + \Delta x) - f(x)$. In questo modo il rapporto incrementale in x può essere riscritto come

$$r(\Delta x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x},$$

e la derivata diviene

$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Il differenziale dx è quindi una notazione per indicare il passaggio al limite $\Delta x \to 0$, e il differenziale df indica Δf sempre quando $\Delta x \to 0$.

L'obiettivo di questa sezione è definire l'**integrale di Riemann**, cioè una funzione che dato un intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ permette di calcolare l'area della superficie del piano cartesiano che sta sotto al grafico della funzione f ed è compresa tra le coordinate $x = a$ e $x = b$, come nell'esempio della Figura 12. Se si considera l'estremo a dell'intervallo come un numero fissato e facciamo variare b, possiamo allora indicare questo valore come una funzione di b.

$$F(b) = \int_a^b f(x)dx$$

è la notazione per l'integrale di f definito tra a e b.

Il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale 9.9, risultato centrale della seconda parte del nostro corso, afferma che F è una funzione derivabile e in particolare

$$F'(b) = f(b).$$

9.1 Definizione dell'integrale di Riemann

In questa prima sezione definiremo formalmente la nozione di integrale di Riemann concetti e le ipotesi necessarie a enunciare il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale.

Data una funzione $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, per definire il suo integrale sull'intervallo $[a, b]$ (se esiste), consideriamo la suddivisione di $[a, b]$ in n intervalli di uguale lunghezza, dove n è un qualsiasi numero naturale ≥ 1. Prendiamo quindi

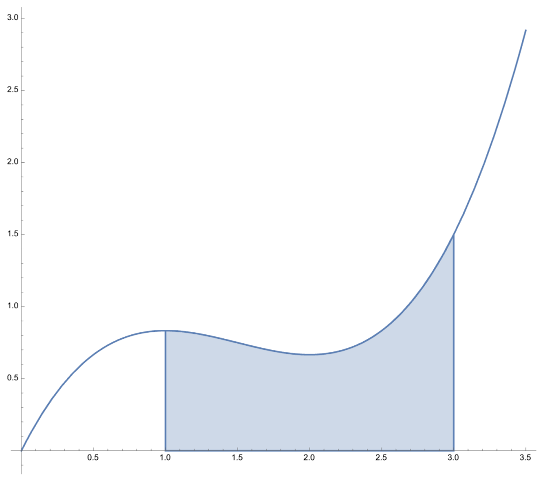


Figura 12: Il grafico di una funzione $f(x)$ con evidenziata la superficie sotto al grafico e compresa tra gli estremi $x = 1$ e $x = 3$. L'area di questa superficie è il valore dell'integrale $\int_1^3 f(x)dx$.

$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, b]$ tali che $x_0 = a$, $x_n = b$ e per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$ valga

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}.$$

A questo punto abbiamo

$$[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-1}, x_n].$$

Su ognuno di questi intervalli costruiamo una colonna in modo che l'unione delle colonne sia un'approssimazione della superficie sotto al grafico di $f(x)$ tra gli estremi $x = a$ e $x = b$. In particolare per ogni $i = 1, \ldots, n$ scegliamo un punto $z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ e consideriamo la colonna che ha come base l'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ e di altezza $f(z_i)$. Nella Figura 13 osserviamo una schematizzazione approssimativa di questa procedura.

Passiamo adesso al calcolo dell'area della sequenza di colonne ottenuta in questo modo. Ogni colonna avrà area,

$$(x_i - x_{i-1}) \cdot f(z_i) = \frac{b-a}{n} \cdot f(z_i),$$

quindi l'area complessiva sarà

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b-a}{n} \cdot f(z_i) \right) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(z_i).$$

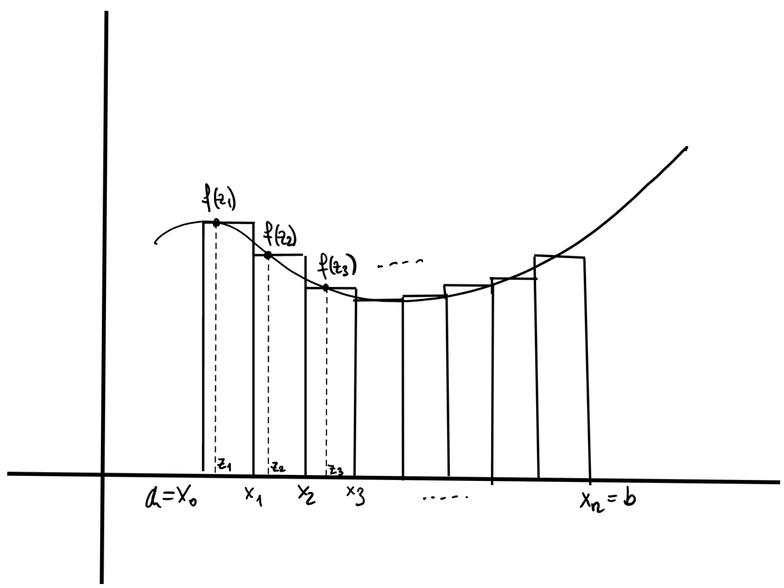


Figura 13: Disegno dell'autore per schematizzare la suddivisione in intervalli della stessa lunghezza di $[a, b]$ e la costruzione di una sequenza di colonne che approssimano la superficie sottesa dal grafico.

La misura dell'area sottesa dall'integrale si ottiene come limite (se esiste) per $n \to +\infty$, cioè costruendo intervalli sempre più piccoli e quindi sistemi di colonne che approssimano il grafico sempre meglio. Osserviamo che per costruire la sequenza di colonne abbiamo dovuto scegliere una sequenza di z_i per ogni n, questi z_i però non appaiono in nessun modo nella Figura 12, quindi la definizione dell'integrale deve in qualche modo renderli "ridondanti".

Definizione 9.1. *Una funzione limitata $f\colon X \to \mathbb{R}$ è integrabile sull'intervallo $[a,b] \subseteq X$ se*

$$\exists \left(\lim_{n\to+\infty} S_n \right) \in \mathbb{R}$$

e in più tale limite non dipende dalla scelta degli z_i che abbiamo fatto nella costruzione delle varie sequenze di colonne.

Se questo limite esiste, viene detto ***integrale definito tra*** *a* ***e*** *b* ***della funzione*** *$f(x)$ e si usa la notazione*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} S_n.$$

Esempio 9.1. Consideriamo la funzione integrabile $f(x) = x$ (non dimostreremo qui che questa funzione è integrabile). Dividiamo l'intervallo $[0,b]$ in n intervalli identici

$$[x_{i-1}, x_i] = \left[\frac{(i-1)b}{n}, \frac{ib}{n} \right], \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Per ogni intervallo scegliamo $z_i = x_i = \frac{ib}{n}$, otteniamo pertanto

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{b}{n} \cdot f(z_i) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{b}{n} \cdot \frac{ib}{n} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} i \right) \cdot \frac{b^2}{n^2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{b^2}{n^2}. \end{aligned}$$

Osserviamo che $\lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{n^2} = 1$, e quindi

$$\int_0^b x dx = \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{b^2}{2}.$$

Esempio 9.2. Svolgiamo adesso il caso di una funzione non-integrabile. In generale, le funzioni con comportamenti "buoni" (come la continuità o la monotonia) sono quasi sempre integrabili, come vedremo in seguito. La funzione $\chi_{\mathbb{Q}}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, l'indicatrice dei razionali, ha un comportamento altamente discontinuo,

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{se } x \in [0,1] \backslash \mathbb{Q}. \end{cases}$$

In questo caso abbiamo quindi $b = 1$ e $a = 0$, suddiviamo $[0, 1]$ in n intervalli di lunghezza $\frac{1}{n}$ e per ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ è sempre possibile scegliere

$$z_i \in \mathbb{Q} \cap [x_{i-1}, x_i]$$

oppure

$$z'_i \in [x_{i-1}, x_i] \backslash \mathbb{Q}$$

perché per definizione dei numeri razionali entrambi gli insiemi sopra sono sempre non vuoti. Pertanto possiamo fare le due scelte ottenendo

$$S_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(z_i) = \frac{1}{n} \cdot n = 1$$
$$S'_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(z'_i) = \frac{1}{n} \cdot 0 = 0.$$

Quindi in un caso abbiamo $\lim S_n = 1$ e nell'altro $\lim S'_n = 0$. Il limite delle sommatorie costruite tramite la suddivisione in colonne esiste in ogni caso, ma dipende dalla particolare scelta degli z_i che facciamo nella nostra costruzione. Questo non rispetta la definizione di funzione integrabile, quindi f non è integrabile.

9.2 Funzioni integrabili

Teorema 9.1. *Se $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora è integrabile.*

Questo teorema ci assicura che possiamo integrare la maggior parte delle funzioni che abbiamo utilizzato fino a questo punto, cioè funzioni continue definite su intervalli chiusi. Non svolgeremo in queste note la dimostrazione.

Teorema 9.2. *Se $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione monotona (crescente o decrescente) allora è integrabile.*

NOTA BENE. *Osserviamo che questo teorema allarga l'insieme delle funzioni integrabili, infatti esistono funzioni monotone che* ***non*** *sono continue, come la funzione $\lfloor x \rfloor$.*

Dimostrazione. Dimostreremo il caso di una funzione crescente. Osserviamo che f è limitata e in particolare $\max_{[a,b]} f = f(b)$ e $\min_{[a,b]} = f(a)$.

Cominciamo costruendo la successione $S_n^{(1)}$ per ogni $n \geq 1$ scegliendo per ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i]$, $z_i = x_i$, cioè l'estremo destro, il punto dell'intervallo considerato in cui f ha valore massimo.

Allora, per costruzione

$$S_n^{(1)} = \frac{b - a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

Mostriamo che $S_n^{(1)}$ è convergente. Sia $S^{(1)} := \inf_n S_n^{(1)}$. Allora per ogni ε esiste N tale che

$$S_N^{(1)} < S + \varepsilon \tag{60}$$

per il Teorema 3.1. Prendiamo adesso $m = N \cdot k + r$ lasciando k intero icognito per il momento e sia r il resto della divisione m/N quindi $0 \leq r \leq N - 1$. Sia $y_0 = a, y_1, y_2, \ldots, y_m = b$ la suddivisione di $[a, b]$ in equi-intervalli di lunghezza $\frac{b-a}{m}$. Allora, per costruzione, in ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ si trovano al più $k + 1$ dei punti $y_0, y_1, y_2, \ldots$

A questo punto possiamo stimare la somma $S_m^{(1)}$, infatti per ogni punto y_j che si trova nell'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ si può scrivere $f(y_j) \leq f(x_i)$ perché f è crescente, quindi

$$S_m^{(1)} = \frac{b-a}{m} \cdot \sum_{j=1}^{m} f(y_j) \leq \frac{b-a}{m} \cdot \sum_{i=1}^{n} (k+1) f(x_i) = \frac{N(k+1)}{m} \cdot S_N^{(1)}.$$

Quindi in conseguenza della (60)

$$S_m^{(1)} < \frac{N(k+1)(S+\varepsilon)}{m} = S + \frac{(N-r)S}{m} + \frac{N(k+1)}{m}\varepsilon.$$

I due termini a destra tendono entrambi a 0 per $m \to \infty$, quindi per ogni ε è possibile scegliere m sufficientemente grande in modo che $S_m^{(1)} < S + 2\varepsilon$ e questo completa la dimostrazione che $S_n^{(1)}$ è convergente a $S^{(1)}$.

Costruiamo la successione $S_n^{(2)}$ scegliendo per ogni intervallo come prima, l'estremo sinistro $z_i = x_{i-1}$, quindi il punto dell'intervallo considerato in cui f ha valore minimo.

Allora per costruzione

$$S_n^{(2)} = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i).$$

Sia $S^{(2)} := \sup_n S_n^{(2)}$, mostriamo che $S_n^{(2)}$ converge a $S^{(2)}$. In modo analogo a prima si dimostra che $S_n^{(2)}$ è convergente a $S^{(2)}$. In questo caso si utilizza che *almeno* k dei punti $y_0, y_1, y_2, \ldots$ appartengono all'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$.

I due limiti $S^{(1)}$ e $S^{(2)}$ coincidono. Infatti,

$$S_n^{(1)} - S_n^{(2)} = \frac{b-a}{n} \cdot (f(x_n) - f(x_0)).$$

Per ogni suddivisione dell'intervallo, $x_n = b$ e $x_0 = a$, quindi la differenza qui sopra è $\frac{f(b)-f(a)}{n} \to 0$ per $n \to \infty$. Quindi $S^{(1)} - S^{(2)} = 0$.

Infine, prendiamo una scelta qualsiasi di $z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ per ogni $i = 1, \dots, n$, e chiamiamo $\widetilde{S}_n$ la serie associata,

$$\widetilde{S}_n := \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(z_i).$$

Per costruzione $f(x_i) \geq f(z_i) \geq f(x_{i-1})$ per ogni i, quindi

$$S_n^{(1)} \geq \widetilde{S}_n \geq S_n^{(2)} \quad \forall n,$$

quindi per il Teorema dei Carabinieri 7.11 anche $\widetilde{S}_n$ converge allo stesso limite. $\square$

Teorema 9.3. *Siano $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ e $h\colon [b,c] \to \mathbb{R}$ integrabili, con $a < b < c$ numeri reali. Consideriamo $f\colon [a,c] \to \mathbb{R}$ la funzione definita a tratti*

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \textit{se } x \in [a,b) \\ h(x) & \textit{se } x \in (b,c]. \end{cases}$$

Allora $f(x)$ è integrabile su $[a,c]$ indipendentemente dal valore di $f(b)$.

9.3 Proprietà degli integrali

Teorema 9.4 (Linearità dell'integrale)**.** *Se $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sono funzioni integrabili, e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ numeri reali, allora la funzione $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ è integrabile su $[a,b]$ e*

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \cdot \left(\int_a^b f(x) dx \right) + \mu \cdot \left(\int_a^b g(x) dx \right).$$

Dimostrazione. Consideriamo la divisione di $[a,b]$ in n con estremi $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$. Allora se scegliamo $z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ per ogni $i = 1, 2, \dots, n$, otteniamo

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(z_i)$$
$$S_n(g) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} g(z_i).$$

L'esistenza degli integrali in ipotesi, significa che esistono $\lim S_n(f)$ e $\lim S_n(g)$. Consideriamo adesso la stessa operazione di "approssimazione tramite colonne" nel caso della funzione $\lambda f(x) + \mu g(x)$. In questo caso,

$$S_n(\lambda f + \mu g) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (\lambda f(z_i) + \mu g(z_i)).$$

Quindi $S_n(\lambda f + \mu g) = \lambda S_n(f) + \mu S_n(g)$ per linearità di queste somme finite, e allora otteniamo

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} S_n(\lambda f + \mu g) &= \lim_{n\to+\infty} (\lambda S_n(f) + \mu S_n(g)) \\ &= \lambda \cdot \lim_{n\to+\infty} S_n(f) + \mu \cdot \lim_{n\to+\infty} S_n(g) \\ &= \lambda \cdot \int_a^b f(x)dx + \mu \cdot \int_a^b g(x)dx,\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato le proprietà di linearità dei limiti. Questa costruzione è indipendente dalla scelta degli z_i. □

Il prossimo teorema riguarda un risultato di positività. Osserviamo che per la definizione che abbiamo dato della superficie sottesa dal grafico di una funzione integrabile, quando il valore assunto da una funzione è negativo, si calcola l'area compresa tra la curva e l'asse orizzontale, e quest'area viene considerata di segno negativo.

Teorema 9.5 (di positività dell'integrale)**.** *Sia* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione integrabile e* $f(x) \geq 0$ *per ogni* $x \in [a,b]$*, allora*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Dimostrazione. Costruiamo come sempre la somma

$$S_n = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(z_i).$$

Poiché $f(z_i) \geq 0$ sempre, allora $S_n \geq 0$ per ogni n e quindi per il Teorema 7.10, $\lim S_n \geq 0$. □

NOTA BENE. *Come conseguenza diretta, se* $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *sono integrabili e* $f(x) \geq g(x)$ *per ogni* $x \in [a.b]$*, allora*

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

Infatti, per ipotesi $(f(x) - g(x)) \geq 0$ *per ogni* $x \in [a,b]$*, quindi*

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx \geq 0,$$

e per lineraità dell'integrale quest'ultimo integrale è uguale a $\int f(x)dx - \int g(x)dx$.

NOTA BENE. *Per convenzione e per mantenere una notazione coerente, se si invertono gli estremi di un integrale allora il valore ottenuto cambia di segno*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Teorema 9.6 (di additività del dominio)**.** *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile e sia $c \in (a,b)$ un punto qualsiasi compreso tra gli estremi di integrazione. Allora $f(x)$ è integrabile su $[a,c]$ e su $[b,c]$ e in più*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Teorema 9.7 (Disuguaglianza triangolare per gli integrali)**.** *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ con $|f(x)|$ funzione integrabile, allora*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Dimostrazione. Per definizione di valore assoluto, si ha

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|.$$

Quindi per monotonia dell'integrale, segue che

$$\int_a^b -|f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Per linearità dell'integrale, il termine più a sinistra è uguale a $-\int_a^b |f|$, quindi per definizione del valore assoluto,

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

□

Infine per concludere questa sezione, data una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ consideriamo la sua **media integrale**, cioè il valore

$$\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx.$$

Osserviamo che la media integrale è precisamente quel valore ℓ tale che l'integrale di f su $[a,b]$ è uguale all'integrale della funzione costante ℓ su $[a,b]$.

Teorema 9.8 (della media integrale)**.** *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Per il Teorema di Weierstrass esistono*

$$m := \min_{[a,b]} f(x)$$
$$M := \max_{[a,b]} f(x).$$

Allora,

1. *vale la disuguaglianza*

$$m \leq \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx \leq M$$

2. *esiste $x_0 \in [a,b]$ tale che*

$$f(x_0) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

Dimostrazione. 1. Per definizione $m \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in [a,b]$, quindi

$$\int_a^b m \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M$$
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a),$$

e questo conclude il primo punto

2. sia $x_1 \in [a,b]$ tale che $f(x_1) = m$ e $x_2 \in [a,b]$ tale che $f(x_2) = M$, che esistono per il Teorema di Weierstrass. Allora per il Teorema dei Valori Intermedi per ogni $\ell \in [m,M]$ esiste $x_0 \in [x_1,x_2]$ tale che $f(x_0) = \ell$. Nel punto 1 abbiamo mostrato che la media integrale è compresa tra m e M, quindi poniamo $\ell =$ alla media integrale e abbiamo concluso.

□

9.4 Primitive e Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

Data una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, in questa sezione e nel prosieguo, assume centralità il concetto di una funzione F tale che se derivata si ottiene la funzione f di partenza.

Definizione 9.2. *Si dice che $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua è* ***una primitiva*** *di f se F è derivabile su (a,b) e $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in (a,b)$.*

NOTA BENE. *Si parla di una primitiva e non de "la" primitiva perché per ogni funzione f che ha almeno una primitiva F, esistono infinite primitive. L'insieme delle primitive di una certa funzione funzione f è detto* ***integrale indefinito*** *di f e indicato con la notazione*

$$\int f(x)dx$$

senza estremi.

Esempio 9.3. Quando si parla di primitiva si sta quindi facendo una sorta di operazione inversa della derivazione. Ad esempio se $f(x) = x$, una sua primitiva è $F(x) = \frac{x^2}{2}$ e in generale per l'elevamento a potenza x^n con $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, una primitiva è $\frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Esempio 9.4. Sia $f(x) = 0$ la funzione costantemente nulla sull'intervallo $[a, b]$, allora tutte le primitive $F(x)$ di f sono del tipo $F \equiv c$ dove c è una costante reale. Questa è una conseguenza del Corollario 8.12.

Quindi data una qualsiasi funzione f, se F è una sua primitiva, sia $G(x)$ un'altra primitiva di f, allora $(G - F)' = G' - F' = 0$, quindi $G - F$ è una costante, quindi tutte le primitive di f sono del tipo $F(x) + c$. In altri termini se F è una primitiva di f, allora

$$\int f(x)dx = \{F(x) + c : \ c \in \mathbb{R}\}.$$

Esempio 9.5. Rispetto alle funzioni trigonometriche, $\sin(x)$ è una primitiva di $\cos(x)$ mentre $-\cos(x)$ è una primitiva di $\sin(x)$. Per quello che abbiamo appena visto, tutte le primitive di $\cos(x)$ sono del tipo $\sin(x) + c$.

Esempio 9.6. La funzione esponenziale e^x è una primitiva di e^x.

Teorema 9.9 (Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, allora la* ***funzione integrale*** *$F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita da*

$$F(y) = \int_a^y f(x)dx$$

è una primitiva di f. In più, se $\bar{F} : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una qualsiasi primitiva di $f(x)$, allora f è integrabile e

$$\int_a^b f(x)dx = \bar{F}(b) - \bar{F}(a).$$

NOTA BENE. *La differenza tra i valori di una funzione F nei due estremi a volte si indica anche con le seguenti notazioni*

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = F(x)\big|_a^b.$$

Dimostrazione. Vogliamo mostrare che $F'(y) = f(y)$ per ogni $y \in (a, b)$.

Consideriamo la solita suddivisione di $[a, b]$ in n intervalli della stessa lunghezza, con estremi $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$, allora per il Teorema di Lagrange 8.11 è possibile individuare per ogni $i = 1, \dots, n$ un elemento $z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tale che

$$F'(z_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{n}{b-a} \cdot (F(x_i) - F(x_{i-1})).$$

Poiché F è una primitiva di f, allora $F'(z_i) = f(z_i)$, quindi quando andiamo a valutare il valore di S_n otteniamo

$$\begin{aligned} S_n = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(z_i) &= \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{x_i - x_{i-1}} \cdot (F(x_i) - F(x_{i-1})) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (F(x_{i-1}) - F(x_i)) \\ &= (F(x_1) - F(x_0)) + (F(x_2) - F(x_1)) + \dots + (F(x_n) - F(x_{n-1})) \\ &= -F(x_0) + F(x_n) = F(b) - F(a). \end{aligned}$$

Quindi

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} S_n = [F(y)]_a^b \,,$$

dove in fondo abbiamo sfruttato il fatto che f è continua quindi integrabile.

Resta da mostrare che F è continua negli estremi a e b, lo lasciamo per esercizio. □

NOTA BENE. *Precisiamo che, come visto nell'Esempio 9.4, tutte le primitive* $\bar{F}$ *di* f *sono della forma* $F(x) + c$*, dove* F *è una qualsiasi primitiva di* f*. Nel calcolo dell'integrale il termine costante è ininfluente, infatti*

$$\bar{F}(b) - \bar{F}(a) = F(b) - F(a).$$

Esempio 9.7. Come diretta conseguenza del teorema appena enunciato, abbiamo che per ogni n numero naturale $\neq 0$,

$$\int_a^b x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

Esempio 9.8. Un altro esempio, questa volta con le funzioni trigonometriche,

$$\int_0^\pi \cos(x)dx = [\sin(x)]_0^\pi = 0 - 0 = 0.$$

9.5 Integrazione per parti

Teorema 9.10. *Siano $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili, allora*

$$\boxed{\int_a^b f'(x) \cdot g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx}$$

NOTA BENE. *Il teorema resta vero anche se f e g sono derivabili solo su (a,b) ed esistono i limiti unilateri di f' e g' negli estremi a e b.*

Dimostrazione. Consideriamo la formula di derivazione di un prodotto,

$$(f \cdot g)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Se integriamo entrambi i termini di questa uguaglianza tra a e b, per il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale e per la linearità dell'integrale otteniamo

$$\int_a^b (f \cdot g)' = [f \cdot g]_a^b = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Possiamo concludere riordinando i termini. □

Quindi la formula dell'integrazione per parti si ottiene tramite l'integrazione della formula per la derivazione di un prodotto. Negli esempi che seguono mostreremo alcuni possibili casi di utilizzo della integrazione per parti.

Esempio 9.9. Consideriamo l'integrale

$$\int_a^b xe^x dx.$$

Supponiamo in questo caso che $f(x) = e^x$ (quindi $f'(x) = e^x$) e $g(x) = x$). Allora applicando l'integrazione per parti si ottiene

$$\begin{aligned}\int_a^b xe^x dx &= [xe^x]_a^b - \int_a^b 1 \cdot e^x dx \\ &= [xe^x] - [e^x] = [(x-1)e^x]_a^b \\ &= (b-1)e^b - (a-1)e^a.\end{aligned}$$

Esempio 9.10. Consideriamo l'integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4x-1)\sin(x)dx.$$

In questo caso poniamo $f(x) = -\cos(x)$ (e quindi $f'(x) = \sin(x)$ e $g(x) = 4x - 1$). Allora, applicando l'integrazione per parti

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4x-1)\sin(x)dx &= [-(4x-1)\cos(x)]_0^{\pi/2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos(x)dx \\ &= [-(4x-1)\cos(x)] + [4\sin(x)] \\ &= [-(4\frac{\pi}{2} - 1) \cdot 0 + (-1) \cdot 1] + [4 \cdot 1 - 4 \cdot 0] = 3.\end{aligned}$$

Esempio 9.11. Consideriamo l'integrale

$$\int_1^2 x\ln(x)dx.$$

In questo caso $f(x) = \frac{x^2}{2}$ (e quindi $f'(x) = \frac{x^2}{2}$ e $g(x) = \ln(x)$). Applicando l'integrazione per parti,

$$\begin{aligned}\int_1^2 x\ln(x)dx &= \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^2 - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2 \\ &= 2\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(1) - \left(2 - \frac{1}{4}\right) = 2\ln(2) - \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Esempio 9.12. Infine consideriamo l'integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x)e^{-x}dx.$$

Poniamo $f(x) = -e^{-x}$ (quindi $f'(x) = e^{-x}$) e $g(x) = \sin(2x)$. Allora, applicando l'integrazione per parti due volte,

$$\begin{aligned}I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x)e^{-x}dx &= [-\sin(2x)e^{-x}] + \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos(2x)e^{-x}dx \\ &= [-\sin(2x)e^{-x}] + [-2\cos(2x)e^{-x}] - \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\sin(2x)e^{-x}dx \\ &= \left[-\sin(2x)e^{-x} - 2\cos(2x)e^{-x}\right]_0^{\pi/4} - 4I.\end{aligned}$$

Osserviamo che la parte tra parentesi vale

$$-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)e^{-\frac{\pi}{4}} + 2\cos(0)e^0 = 2 - e^{-\frac{\pi}{4}}.$$

Quindi, spostando il termine $4I$ si ottiene

$$\begin{aligned}5I &= 2 - e^{-\frac{\pi}{4}} \\ \Rightarrow\ I &= \frac{2 - e^{-\frac{\pi}{4}}}{5}.\end{aligned}$$

9.6 Integrazione per sostituzione

Teorema 9.11 (Integrazione per sostituzione). *Sia $f\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, dunque f è integrabile e denominiamo F una sua primitiva. In più, sia*

$\varphi\colon [a,b] \to [c,d]$ una funzione derivabile la cui derivata è una funzione continua. Allora $F \circ \varphi$ è la primitiva di $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ e vale la seguente

$$\boxed{\int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = [F(\varphi(x))]_a^b = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)dy.}$$

NOTA BENE. *Il teorema resta vero anche se φ è derivabili solo su (a,b) ed esistono i limiti unilateri di φ' negli estremi a e b.*

Dimostrazione. Per la regola di derivazione di funzioni composte (Teorema 8.7) si ha

$$(F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi) \cdot \varphi' = (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato il fatto che F è una primitiva di f. Quindi per il Teorema Fondamentale del Calcolo,

$$\int_a^b F(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

Allo stesso tempo, quest'ultima differenza può essere riscritta come

$$[F(y)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)dy.$$

□

Esempio 9.13. Per ricordare al meglio il teorema precedente, e utilizzarlo in modo efficace negli esercizi, si utilizza la seguente manipolazione simbolica, anche se questa **non è rigorosamente coerente, quindi non può essere utilizzata all'interno di dimostrazioni rigorose**.

Consideriamo un cambio di variabili $y = \varphi(x)$ con $\varphi\colon [a,b] \to [c,d]$ come sopra. Allora

$$dy = d(\varphi(x)) = \frac{d\varphi(x)}{dx} \cdot dx = \varphi'(x)dx.$$

Quindi quando svolgiamo un integrale con la regola della sostituzione, immaginiamo di rimpiazzare

- $\varphi'(x)dx$ nel termine di sinistra, con dy nel termine di destra
- $f(\varphi(x))$ con $f(y)$
- gli estremi di integrazione, da quelli valutati in x (cioè a e b) a quelli valutati in $y = \varphi(x)$ per $x = a$ e $x = b$.

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)dy.$$

Esempio 9.14. Consideriamo l'integrale

$$\int_3^5 (2x-3)^{\frac{1}{4}} dx.$$

Utilizziamo il cambio di variabile $y = 2x - 3$, allora $dy = 2dx$ e

$$\int_3^5 (2x-3)^{\frac{1}{4}} dx = \int_3^7 y^{\frac{1}{4}} \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2}\left[\frac{4}{5} y^{\frac{5}{4}}\right]_3^7 = \frac{2}{5}(7^{\frac{5}{4}} - 3^{\frac{5}{4}}).$$

Esempio 9.15. Consideriamo l'integrale

$$\int_{\pi^2}^{4\pi^2} \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} dx.$$

Utilizziamo il cambio di variabile $y = \sqrt{x}$, allora $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ dunque

$$\int_{\pi^2}^{4\pi^2} \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} dx = \int_{\pi}^{2\pi} \cos(y) dy = [\sin(y)]_{\pi}^{2\pi} = 0 - 0 = 0.$$

Esempio 9.16. Consideriamo l'integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx.$$

Osserviamo che $\cos'(x) = -\sin(x)$ e effettuiamo il cambio di variabile $y = \cos(x)$. Allora $dy = -\sin(x)dx$ e quindi possiamo concludere

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x) dx = \int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{y}(-dy) = [-\ln(y)]_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln(2).$$

9.7 Integrazione di funzioni razionali

Le funzioni razionali sono funzioni del tipo $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ dove p e q sono polinomi, e il dominio massimale di f è $\mathbb{R}$ meno l'insieme delle soluzioni di q.

In questa sezione analizzeremo dei metodi per determinare gli integrali definiti di queste funzioni (quando esistono) suddividendole in base al grado del polinomio al denominatore, e poi considerando tre sottocasi se il denominatore $q(x)$ ha grado 2.

Caso con denominatore di grado 0, integrazione di polinomi

Il caso $\deg(q) = 0$ è il più facile perché la funzione integranda $f(x)$ è un polinomio e quindi una sua primitiva si ottiene semplicemente come composizione lineare di primitive dei suoi monomi.

Un polinomio ha come dominio massimale tutto $\mathbb{R}$, quindi $f(x)$ è integrabile su ogni intervallo chiuso $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Consideriamo

$$f(x) = p(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

allora

$$\begin{aligned}\int_a^b p(x)dx &= \left[\frac{c_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{c_{n-1}}{n} x^n + \cdots + \frac{c_1}{2} x^2 + c_0 x\right]_a^b \\ &= \frac{c_n}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}) + \cdots + \frac{c_1}{2}(b^2 - a^2) + c_0(b - a).\end{aligned}$$

Esempio 9.17. Una semplice applicazione di quanto appena detto è la seguente,

$$\begin{aligned}\int_1^2 (x^3 + 2x + 5)dx &= \left[\frac{x^4}{4} + x^2 + 5x\right]_1^2 \\ &= \frac{16}{4} + 4 + 10 - \frac{1}{4} - 1 - 5 = \frac{47}{4}.\end{aligned}$$

Caso con denominatore di grado 1

Partiamo da un esempio, che sarà il nostro "caso di riferimento" in tutta la trattazione di questa sezione.

Esempio 9.18. La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è integrabile su ogni intervallo $[a, b]$ tale che $0 \notin [a, b]$ cioè a, b sono entrambi positivi o entrambi negativi. In tal caso,

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = [\ln(|x|)]_a^b = \ln(|b|) - \ln(|a|) = \ln\left(\left|\frac{b}{a}\right|\right).$$

NOTA BENE. *Se b ed a sono entrambi positivi, è comune non inserire la notazione del valore assoluto $|x|$ nell'argomento del logaritmo. Questo perché $x = |x|$ se x si muove su un intervallo $\subset \mathbb{R}^+$.*

Osserviamo adesso che un qualsiasi polinomio di grado 1 è nella forma $q(x) = cx + d$ con $c, d \in \mathbb{R}$ e $c \neq 0$. Osserviamo inoltre che la funzione $\frac{1}{cx+d}$ ha come primitiva la funzione $\frac{1}{c}\ln(|cx + d|)$. Possiamo passare a integrare una funzione $f(x) = p(x)/q(x)$, con $\deg(q) = 1$. Cominciamo considerando un numeratore $p(x)$ di grado $\deg(p) = 0$. Allora $p(x) \equiv r \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ una constante, e si ha

$$\int_a^b \frac{r}{cx + d} dx = r \cdot \left[\frac{1}{c}\ln(|cx + d|)\right]_a^b = \frac{r}{c} \cdot \ln\left(\left|\frac{cb + d}{ca + d}\right|\right)$$

Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $0 \notin [ca + d, cb + d]$.

Se invece il grado del numeratore è maggiore di 0, dobbiamo passare per una divisione tra polinomi.

NOTA BENE. *Consideriamo due polinomi $p(x)$ e $q(x)$ tali che* $\deg(p) \geq \deg(q) > 0$, *allora esistono e sono unici due polinomi $h(x)$ e $r(x)$ tali che* $\deg(r) < \deg(q)$ *e*

$$p(x) = h(x) \cdot q(x) + r(x).$$

Quindi $h(x)$ è il quoziente tra i due polinomi e $r(x)$ è il resto della divisione.

Se utilizziamo il fatto qui sopra con una funzione razionale $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, $\deg(q) = 1$, allora il resto della divisione è una costante $r(x) \equiv r$, ed è sempre possibile ricondurre l'integrale a uno dei casi precedenti. Infatti,

$$\int_a^b \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int_a^b \frac{h(x)q(x) + r}{q(x)} dx = \int_a^b h(x) dx + \int_a^b \frac{r}{cx + d} dx.$$

Esempio 9.19. Consideriamo la funzione razionale $\frac{x}{x+1}$, allora $h(x) = 1$ e $r(x) = -1$, cioè

$$x = 1 \cdot (x + 1) - 1 \;\Rightarrow\; \frac{x}{x + 1} = 1 - \frac{1}{x + 1}.$$

Lo stesso risultato si poteva ottenere sommando e sottraendo 1 al numeratore

$$\frac{x}{x + 1} = \frac{x + 1 - 1}{x + 1} = 1 - \frac{1}{x + 1}.$$

Quindi

$$\int_0^1 \frac{x}{x + 1} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x + 1}\right) dx = [x - \ln(x + 1)]_0^1 = 1 - \ln(2).$$

Esempio 9.20. Consideriamo invece un caso in cui $\deg(p) > \deg(q)$, come

$$f(x) = \frac{x^3}{x + 1}.$$

In questo caso $x^3 = (x^2 - x + 1)(x + 1) - 1$, quindi

$$\int_0^1 \frac{x^3}{x + 1} dx = \int_0^1 \left(x^2 - x + 1 - \frac{1}{x + 1}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln(x + 1)\right]_0^1 = \frac{5}{6} - \ln(2).$$

Caso con denominatore di grado 2 e $\Delta > 0$

In questa sezione supponiamo che $q(x) = c_2 x^2 + c_1 x + c_0$ sia un polinomio di grado 2 con discriminante $\Delta = c_1^2 - 4c_2 c_0 > 0$. Quindi $q(x)$ ha due soluzioni reali distinte denominate x_1 e x_2,

$$x_{1,2} = \frac{-c_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2c_2}.$$

Quindi possiamo scrivere

$$q(x) = c_2(x - x_1)(x - x_2).$$

Partiamo dal caso $p(x) = 1$, cioè il numeratore ha grado 0 ed è uguale alla costante 1. Abbiamo visto che la tecnica più efficace per risolvere questo genere di integrali è quella di ricondursi a dei casi trattati precedentemente. Quindi la strategia che utilizzeremo sarà quella di individuare se esistono due coefficienti reali $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}.$$

Sviluppando i calcoli sopra si osserva che

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} &= \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} \\ &= \frac{A(x - x_2) + B(x - x_1)}{(x - x_1)(x - x_2)} \\ &= \frac{x(A + B) - Ax_2 - Bx_1}{(x - x_1)(x - x_2)}.\end{aligned}$$

Perché questa uguaglianza sia verificata, è necessario che il seguente sistema di uguaglianze sia rispettato,

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ Ax_2 + Bx_1 = -1. \end{cases}$$

Si conclude facilmente che $B = -A$, dunque $Ax_2 - Ax_1 = -1$ e quindi

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{x_1 - x_2} \\ B &= -\frac{1}{x_1 - x_2}. \end{aligned}$$

Questo permette di sviluppare l'integrale cercato,

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{1}{c_2(x - x_1)(x - x_2)} dx &= \int_a^b \frac{1}{c_2} \cdot \frac{1}{x_1 - x_2} \cdot \left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2} \right) dx \\ &= \frac{1}{c_2(x_1 - x_2)} \cdot \left[\ln(|x - x_1|) - \ln(|x - x_2|)\right]_a^b \\ &= \frac{1}{c_2(x_1 - x_2)} \cdot \left[\ln\left(\frac{x - x_1}{x - x_2} \right) \right]_a^b \\ &= \frac{1}{c_2(x_1 - x_2)} \cdot \ln\left(\frac{(b - x_1)(a - x_2)}{(a - x_1)(b - x_2)} \right). \quad \forall x_1, x_2 \notin [a, b]\end{aligned}$$

NOTA BENE. *Poiché $x_1, x_2 \notin [a,b]$, allora per ogni $x \in [a,b]$ il rapporto $\frac{x-x_1}{x-x_2}$ è sempre positivo, e per questo possiamo omettere il valore assoluto dall'argomento del logaritmo quando appare questo rapporto.*

Esempio 9.21. Consideriamo $f(x) = 12x^2 - 8$, allora $2x^2 - 8 = 2(x-2)(x+2)$, ed abbiamo

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{2x^2-8}dx &= \int_0^1 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right) dx \\ &= \frac{1}{8} \cdot [\ln(|x-2|) - \ln(|x+2|)]_0^1 \\ &= \frac{\ln(1) - \ln(3) - \ln(2) + \ln(2)}{8} = \frac{-\ln(3)}{8}.\end{aligned}$$

Se invece al numeratore abbiamo un polinomio $p(x)$ di grado ≥ 1, allora possiamo applicare come nei casi precedenti la divisione tra polinomi. Infatti esistono unici $h(x)$ e r tali che

$$p(x) = h(x)(x - x_1) + r.$$

Dunque,

$$\int_a^b \frac{p(x)}{c(x-x_1)(x-x_2)}dx = \int_a^b \frac{h(x)}{c(x-x_2)}dx + \int_a^b \frac{r}{c(x-x_1)(x-x_2)}dx.$$

Esempio 9.22. Ricollegandoci all'esempio precedente, consideriamo $f(x) = \frac{x}{2x^2-8}$. Allora, $2x^2 - 8 = 2(x-2)(x+2)$ mentre $p(x) = x = 1 \cdot (x-2) + 2$. Quindi

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{2x^2-8}dx &= \int_0^1 \frac{1}{2(x+2)} + \int_0^1 \frac{2}{2x^2-8}dx \\ &= \left[\frac{1}{2}\ln(|x+2|)\right]_0^1 + \frac{1}{4}\left[\ln(|x-2|) - \ln(|x+2|)\right]_0^1 \\ &= \frac{\ln(3) - \ln(2)}{2} + \frac{-\ln(3)}{4} = \frac{-\ln(4/3)}{4}.\end{aligned}$$

Caso con denominatore di grado 2 **e** $\Delta = 0$

Se il discriminante Δ del polinomio $q(x)$ (di grado 2) è uguale a 0, allora $q(x)$ ha una soluzione doppia x_0, cioè $q(x) = c(x-x_0)^2$.

Osserviamo che $(x-x_0)^{-2}$ ha come primitiva $-(x-x_0)^{-1}$, quindi

$$\int_a^b \frac{1}{c(x-x_0)^2}dx = \left[-\frac{1}{c}(x-x_0)^{-1}\right]_a^b = \frac{1}{c} \cdot \left(\frac{1}{a-x_0} - \frac{1}{b-x_0}\right)$$

per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $x_0 \notin [a, b]$.

Se $\deg(p) > 0$, allora possiamo come prima scrivere

$$p(x) = h(x)(x - x_0) + r, \quad r \in \mathbb{R},$$

e ricondurre il nostro integrale a un caso precedente. Infatti,

$$\int_a^b \frac{p(x)}{c(x - x_0)^2} dx = \int_a^b \frac{h(x)}{c(x - x_0)} dx + \int_a^b \frac{r}{c(x - x_0)^2} dx,$$

che sappiamo risolvere grazie alle conclusioni precedenti.

Esempio 9.23. Consideriamo la funzione $f(x) = \frac{x}{(x-2)^2}$. Allora,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x}{(x-2)^2} dx &= \int_0^1 \frac{x-2}{(x-2)^2} dx + \int_0^1 \frac{2}{(x-2)^2} dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{x-2} dx + \left[-2(x-2)^{-1}\right]_0^1 \\
&= \left[\ln(|x-2|) - 2(x-2)^{-1}\right]_0^1 \\
&= 0 - \ln(2) + 2 - 1 = 1 - \ln(2).
\end{aligned}$$

Caso con denominatore di grado 2 e $\Delta > 0$

L'ultimo caso considerato è quello di un polinomio $q(x)$ di grado 2 con discriminante $\Delta > 0$, quindi $q(x)$ non ha soluzioni reali. L'esempio che utilizziamo come riferimento è il seguente

Esempio 9.24. La funzione $\frac{1}{1+x^2}$ ha come primitiva $\arctan(x)$, infatti $\arctan(x)$ è la funzione inversa di $\tan(x)$, quindi

$$\arctan'(\tan(x)) = \frac{1}{\tan'(x)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos(x)^2}\right)}.$$

Osserviamo che se $y = \tan(x)$, allora $\frac{1}{\cos(x)^2} = \frac{\sin(x)^2 + \cos(x)^2}{\cos(x)^2} = 1 + \tan(x)^2$. Quindi

$$\arctan'(y) = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Possiamo pertanto risolvere il seguente integrale,

$$\int_a^b \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan(x)]_a^b = \arctan(b) - \arctan(a) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

In generale, se $q(x)$ è un polinomio di grado 2 senza soluzioni reali, allora è possibile riscrivere il polinomio come

$$q(x) = c(x + x_0)^2 - \frac{\Delta}{4c}, \tag{61}$$

dove $c, x_0 \in \mathbb{R}$ con $c \neq 0$ e Δ è appunto il discriminante (negativo) di $q(x)$. Vediamo come si ottiene la (61). Sia $q(x) = c_2x^2 + c_1x + c_0$ allora

$$\begin{aligned} q(x) &= c_2x^2 + c_2 \cdot \frac{c_1}{c_2}x + \frac{c_1^2}{4c_2} - \frac{c_1^2}{4c_2} + c_0 \\ &= c_2\left(x + \frac{c_1}{2c_2}\right)^2 - \frac{\Delta}{4c_2}. \end{aligned}$$

Quindi nella (61) poniamo $c = c_2$ e $x_0 = \frac{c_1}{2c_2}$.

In più, possiamo ulteriormente cambiare la forma in cui esprimiamo il polinomio $q(x)$ in modo da renderlo più adatto all'integrazione. Infatti se poniamo

$$\begin{aligned} \gamma &:= \frac{-\Delta}{4c} \\ \alpha &:= \sqrt{\frac{4c^2}{-\Delta}} = \frac{2c}{\sqrt{-\Delta}} \end{aligned}$$

allora

$$q(x) = \gamma \cdot \left((\alpha(x + x_0))^2 + 1\right). \tag{62}$$

Per semplicità nel prossimo calcolo imponiamo $\gamma = 1$, poi faremo degli esempi con $\gamma \neq 1$. Calcoliamo l'integrale di $\frac{1}{q(x)}$,

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{1}{(\alpha(x + x_0))^2 + 1} dx &= \left[\frac{1}{\alpha} \arctan\left(\alpha(x + x_0)\right)\right]_a^b \\ &= \frac{1}{\alpha}\left(\arctan\left(\alpha(b + x_0)\right) - \arctan\left(\alpha(a + x_0)\right)\right). \end{aligned}$$

Esempio 9.25. Consideriamo $q(x) = x^2 + 2x + 3$, e notiamo che questo polinomio non ha soluzioni reali. Allora, soffermandoci sui primi due termini $x^2 + 2x$ "completiamo" il quadrato aggiungendo il termine $+1$. Si nota che

$$x^2 + 2x + 3 = (x^2 + 2x + 1) + 2 = (x + 1)^2 + 2,$$

cioè un polinomio quadrato più un termine reale positivo, come ci aspettavamo. Sostituendolo nell'integrale otteniamo

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{\sqrt{2}-1} \frac{1}{x^2+2x+3} dx &= \int_{-1}^{\sqrt{2}-1} \frac{1}{(x+1)^2+2} dx \\
&= \int_{-1}^{\sqrt{2}-1} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} dx \\
&= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) \right]_{-1}^{\sqrt{2}-1} \\
&= \frac{\pi}{4\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Esempio 9.26. Consideriamo un caso analogo al precedente ma con coefficiente massimale diverso da 1. Sia $q(x) = 2x^2 + 2x + 3$. Allora, $q(x) = 2(x^2 + x) + 3$. In questo caso il quadrato si completa aggiungendo $2 \cdot \frac{1}{4}$, infatti

$$2x^2 + 2x + 3 = 2\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + \frac{5}{2} = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}.$$

Quindi,

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \frac{1}{2x^2+2x+3} dx &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}} dx \\
&= \int \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)^2+1} dx \\
&= \left[\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right) \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \\
&= \frac{\pi}{4\sqrt{5}}.
\end{aligned}$$

Nel caso in cui il denominatore abbia grado > 0, il problema si tratta analogamente ai casi precedenti. Osserviamo soltanto che $\frac{2x}{x^2+1}$ è una primitiva di $\ln(x^2+1)$. Pertanto, i termini in cui al numeratore abbiamo un monomio di grado 1, possono essere trattati facilmente.

Esempio 9.27. Consideriamo $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+1}$. Applicando la divisione tra polinomi, si osserva che

$$x^3 + 1 = x \cdot (x^2 + 1) - x + 1.$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}dx &= \int_0^1 \left(x - \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan(x)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{2+\pi-2\ln(2)}{4}.\end{aligned}$$

9.8 Integrali generalizzati

Supponiamo di voler calcolare l'area sotto al grafico di una funzione $f(x)$ e limitata (solo) a sinistra dal segmento verticale $x = a$, cioè l'area compresa tra la funzione e la semiretta $[a, +\infty)$.

Dobbiamo prima di tutto definire una buona nozione di area per il caso di una superficie illimitata (in questo caso, a destra) e per fare questo ci vengono in soccorso ancora una volta i limiti.

Definizione 9.3. *Consideriamo una funzione $f\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ integrabile su ogni intervallo del tipo $[a, b]$ con $b > a$. Si dice che f* ***è integrabile in senso generalizzato sull'intervallo illimitato*** *$[a, +\infty)$ se esiste ed è finito il seguente limite,*

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

*In più, se tale limite esiste, definiamo l'**integrale improprio di prima specie di** $f(x)$ **sull'intervallo** $[a, +\infty)$ come*

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx.}$$

Definizione 9.4. *In modo analogo se $f\colon (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile su tutti gli intervalli del tipo $[b, a]$ con $b < a$, si dice che f* ***è integrabile in senso generalizzato su*** *$(-\infty, a]$ se*

$$\exists \lim_{b\to-\infty} \int_b^a f(x)dx \quad \textit{ed è finito.}$$

*In tal caso definiamo l'**integrale improprio di prima specie di** $f(x)$ **su** $(-\infty, b]$ come*

$$\boxed{\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx.}$$

Esempio 9.28. Consideriamo la funzione $\frac{1}{x^r}$ sull'intervallo $[1,+\infty)$ con $r > 0$ numero reale positivo. Poiché la funzione è integrabile su ogni intervallo del tipo $[1,b]$, dobbiamo verificare se esiste

$$\lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x^r}dx = \left[\frac{x^{1-r}}{1-r}\right]_1^b \quad \text{se } r \neq 1.$$

Possiamo subito distinguere due casi

1. se $r > 1$ allora $1-r < 0$ e quindi

$$\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{x^{1-r}}{1-r}\right]_1^b = \lim_{b\to+\infty}\frac{b^{1-r}-1}{1-r} = \frac{1}{r-1},$$

perché $b^{1-r} \to 0$. Dunque in questo caso x^{-r} è integrabile su $[1,+\infty)$ e

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^r}dx = \frac{1}{r-1}.$$

2. se $0 < r < 1$ allora $1-r > 0$ e quindi b^{1-r} diverge per $b \to +\infty$, quindi il limite sopra vale $+\infty$, x^{-r} non è integrabile su $[1,+\infty)$ ma si può scrivere ugualmente

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^r}dx = +\infty.$$

Resta da affrontare il caso $r = 1$, in tal caso

$$\int_1^b \frac{1}{x}dx = \ln(b),$$

e com'è note $\ln(b)$ diverge a $+\infty$ per $b \to +\infty$. Quindi x^{-1} non è integrabile su $[1,+\infty)$ e il suo integrale diverge a $+\infty$.

Esempio 9.29. Consideriamo la funzione $\sin(x)$ sull'intervallo $\left[\frac{\pi}{2},+\infty\right)$. Essa è integrabile su tutti gli intervalli del tipo $\left[\frac{\pi}{2},b\right)$ ed ha come primitiva $-\cos(x)$, quindi

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^b = [-\cos(x)]_{\pi/2}^b = -\cos(b)+1.$$

Si osserva che questa funzione (in b) non ha limite, quindi $\sin(x)$ non è integrabile su $\left[\frac{\pi}{2},+\infty\right)$.

Sia $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione integrabile su $(-\infty,a]$ e anche su $[a,+\infty)$ per un certo $a\in\mathbb{R}$, definiamo

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx.} \tag{63}$$

Teorema 9.12. *La definizione precedente non dipende dal punto $a \in \mathbb{R}$ scelto, quindi è una buona definizione per l'integrale da $-\infty$ a $+\infty$ di $f(x)$. In tal caso si dice che $f(x)$* ***è integrabile in senso generalizzato su*** *$\mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Consideriamo $a' \neq a$, in particolare supponiamo senza perdita di generalità che $a' > a$. Allora, per ogni $b > a'$ e per ogni $c < a$ si ha

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a'} f(x)dx + \int_{a'}^b f(x)dx$$
$$\int_c^{a'} f(x)dx = \int_c^a f(x)dx + \int_a^{a'} f(x)dx$$

come conseguenza del Teorema di additività del dominio 9.6. Quindi

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx &= \lim_{c\to-\infty} \int_c^a f(x)dx + \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx \\
&= \lim_{c\to-\infty} \int_c^a f(x)dx + \lim_{b\to+\infty} \left(\int_a^{a'} f(x)dx + \int_{a'}^b f(x)dx \right) \\
&= \lim_{c\to-\infty} \left(\int_c^a f(x)dx + \int_a^{a'} f(x)dx \right) + \lim_{b\to+\infty} \int_{a'}^b f(x)dx \\
&= \lim_{c\to-\infty} \int_c^{a'} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty} \int_{a'}^b f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{a'} f(x)dx + \int_{a'}^{+\infty} f(x)dx
\end{aligned}$$

come volevamo dimostrare. □

Esempio 9.30. La funzione $f(x) = e^{-x^2}$ è detta distribuzione Gaussiana. Osserviamo che se $|x| \geq 1$ allora $e^{-x^2} \leq e^{-|x|}$ e poiché $e^{-|x|}$ è integrabile su $[1, +\infty)$ e $(-\infty, -1]$ allora anche e^{-x^2} lo è. Quindi poiché chiaramente e^{-x^2} è integrabile su $[-1, 1]$, allora e^{-x^2} è integrabile su $(-\infty, +\infty)$.

Consideriamo adesso una funzione $f(x)$ definita su un intervallo del tipo $(a, b]$ tale che $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ per cui non si può estendere f per continuità all'estremo a.

Definizione 9.5. *Se $f(x)$ è integrabile su tutti gli intervalli $[c, b]$ con $a < c < b$, allora si dice che $f(x)$* ***è integrabile in senso generalizzato su*** *$[a, b]$ (oppure su $(a, b]$, la notazione in questo caso non è importante) se esiste finito il seguente limite*

$$\lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)dx.$$

*In tal caso si definisce come segue l'***integrale improprio di seconda specie di** $f(x)$ **su** $[a,b]$,

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)dx.}$$

NOTA BENE. *Se* $f\colon [a,b)\to\mathbb{R}$ *ed è integrabile sugli intervalli del tipo* $[a,c]$ *con* $a<c<b$ *si definisce in maniera del tutto analoga l'integrabilità di* $f(x)$ *su* $[a,b]$ *tramite il limite*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)dx.}$$

Esempio 9.31. Consideriamo $\frac{1}{x^r}$ sull'intervallo $(0,1]$ con $r>0$ reale positivo. Dato $0<\varepsilon<1$ possiamo calcolare una primitiva della funzione qui sopra,

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^r}dx = \left[\frac{x^{1-r}}{1-r}\right]_\varepsilon^1 \quad \text{se } r\neq 1.$$

Come prima abbiamo due casi,

1. se $r>1$ allora $1-r<0$ e abbiamo che $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon^{1-r}=+\infty$, quindi

   $$\int_0^1 \frac{1}{x^r}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{x^{1-r}}{1-r}\right]_\varepsilon^1 = +\infty.$$

   Quindi x^{-r} non è integrabile su $[0,1]$

2. se $r<1$ allora $1-r>0$ e quindi la differenza di cui sopra converge

   $$\int_0^1 \frac{1}{x^r}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{x^{1-r}}{1-r}\right]_\varepsilon^1 = \frac{1}{1-r},$$

   quindi x^{-r} è integrabile su $[0,1]$.

Resta il caso $r=1$, in cui la primitiva è $\ln(x)$, e anche in questo caso x^{-1} non è integrabile poiché $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\ln(\varepsilon)=-\infty$.

Vogliamo poter lavorare con il Teorema di integrazione per sostizuone 9.11 anche nel caso di integrali impropri, ma questo ci crea problemi perché gli estremi potrebbero non essere ben definiti, per questo abbiamo bisogno del seguente nuovo teorema

Teorema 9.13. *Sia* $f\colon [c,+\infty)\to\mathbb{R}$ *una funzione integrabile su* $[c,+\infty)$ *e* F *una sua primitiva e sia* $\varphi\colon I\to[c,+\infty)$ *(*I *è un intervallo) una funzione derivabile con derivata continua. Allora* $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ *è una funzione integrabile su* I *e abbiamo*

1. se $I = [a, +\infty)$ allora

$$\int_a^{+\infty} f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(+\infty)} f(y) dy,$$

dove come estremo superiore si intende (se esiste)

$$\varphi(+\infty) := \lim_{d \to +\infty} \varphi(d),$$

2. se $I = [a, b)$ allora

$$\int_a^{b} f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y) dy,$$

dove come estremo superiore si intende (se esiste)

$$\varphi(b) := \lim_{d \to b^-} \varphi(d).$$

Dimostrazione. Dimostriamo solo il caso 1, l'altro è del tutto analogo. Utilizzando il classico teorema di integrazione per sostituzione, abbiamo

$$\begin{aligned}
\int_b^{+\infty} f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx &= \lim_{d \to +\infty} \int_b^{d} f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx \\
&= \lim_{d \to +\infty} \int_{\varphi(b)}^{\varphi(d)} f(y) dy \\
&= \lim_{d \to +\infty} (F(\varphi(d)) - F(\varphi(b))).
\end{aligned}$$

Osserviamo che F è continua, quindi per il Teorema di sostituzione 7.13 si ha che

$$\lim_{d \to +\infty} F(\varphi(d)) = F(\lim_{d \to +\infty} \varphi(d))$$

se il limite interno è finito, mentre

$$\lim_{d \to +\infty} F(\varphi(d)) = \lim_{d \to +\infty} F(d)$$

se $\lim_{d \to +\infty} \varphi(d) = +\infty$. □

Esempio 9.32. Consideriamo la funzione $\frac{1}{x \cdot \ln(x)^r}$ sull'intervallo $[e, +\infty)$. Tale funzione è integrabile su ogni intervallo del tipo $[e, b]$, e con il cambio di variabile $y = \ln(x)$, si ha $dy = \frac{dx}{x}$ e si può applicare la regola della sostituzione,

$$\begin{aligned}
\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \cdot \ln(x)^r} dx &= \lim_{b \to +\infty} \int_e^{b} \frac{1}{x \cdot \ln(x)^r} dx \\
&= \lim_{b \to +\infty} \int_1^{\ln(b)} \frac{1}{y^r} dy \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{1}{y^r} dy
\end{aligned}$$

e tale integrale converge se e solo se $r > 1$, e in tal caso vale $\frac{1}{r-1}$, mentre diverge in ogni altro caso.

Esempio 9.33. Consideriamo la funzione $\frac{1}{x \cdot |\ln(x)|^r}$ sull'intervallo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Applichiamo ancora il cambio di variabile $y = \ln(x)$, allora

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x \cdot |\ln(x)|^r} &= \int_{-\infty}^{\ln(1/2)} \frac{1}{|y|^r} dy \\ &= \int_{-\ln(1/2)}^{+\infty} \frac{1}{z^r} dz,\end{aligned}$$

dove nel primo passaggio abbiamo usato il fatto che

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \ln(\varepsilon) = -\infty$$

e nell'ultimo passaggio abbiamo usato il cambio di variabile $z = -y$. Sappiamo che l'ultimo integrale converge se e solo se $r > 1$, e in tal caso

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x \cdot |\ln(x)|^r} = -\frac{\ln(1/2)}{r-1} = \frac{\ln(2)}{r-1}.$$

Esempio 9.34. Calcoliamo infine l'integrale su $[1, +\infty)$ di $\frac{1}{1+x^2}$ osservando che $\arctan(x)$ è una primitiva di $\frac{1}{1+x^2}$ e che $\lim_{x \to +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$, quindi

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \to +\infty} [\arctan(x)]_1^b = \frac{\pi}{4}.$$

9.9 Studio della convergenza integrale

In questa sezione approfondiremo in che modo è possibile studiare la convergenza di alcuni integrali generalizzati, senza necessariamente avere una formula esplicita per calcolare il loro valore.

Teorema 9.14 (del confronto integrale)**.** *Siano $f, g \colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ funzioni integrabili su ogni intervallo finito $[a, b]$ e tali che*

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

per ogni $x \in [a, +\infty)$. Allora,

1. *se $g(x)$ è integrabile su $[a, +\infty)$ anche $f(x)$ lo è, e in più*

$$0 \leq \int_a^{+\infty} f(x) dx \leq \int_a^{+\infty} g(x) dx$$

2. se $f(x)$ non è integrabile, allora $g(x)$ non è integrabile.

Dimostrazione. osserviamo che per monotonia dell'integrale vale

$$0 \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

per ogni $x \in [a, +\infty)$, in più se denominiamo $F_f(b)$ e $F_g(b)$ le funzioni integrali di f e g rispettivamente allora si tratta di due funzioni crescenti ed esiste

$$\lim_{b \to +\infty} F_g(b) = \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

Quindi $F_f(b)$ esiste ed è limitata dal basso (da 0) e dall'alto da $\int_a^{+\infty} g$, da cui segue la tesi del punto 1.

Per il punto 2 è sufficiente osservare che se f non è integrabile, significa che $F_f(b)$ diverge a $+\infty$, e lo stesso deve fare necessariamente anche $F_g(b)$. □

Esempio 9.35. Consideriamo la funzione razionale $f(x) = \frac{x^3-1}{x^7+7}$. Osserviamo che $x^3 - 1 \leq x^3$ mentre $x^7 + 7 \geq x^7$ quindi

$$f(x) \leq \frac{x^3}{x^7} = \frac{1}{x^4} \ \forall x \geq 1.$$

Usando il teorema precedente otteniamo che $f(x)$ è integrabile su $[1, +\infty)$ e vale

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{x^3-1}{x^7+7} \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx = \frac{1}{3}.$$

Esempio 9.36. Studiamo l'integrabilità di $f(x)\frac{\ln(x)^r}{x^4}$ su $[1, +\infty)$ dove $r > 0$ è un numero reale positivo.

Possiamo scrivere $f(x) = \frac{1}{x^3} \cdot \frac{\ln(x)^r}{x}$ e sappiamo che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)^r}{x} = 0$$

per ogni r reale positivo. Dunque, $\frac{\ln(x)^r}{x}$ è limitata su $[1, +\infty)$, cioè esiste $N \in \mathbb{R}$ tale che $\frac{\ln(x)^r}{x} \leq M, \ \forall x \in [1, +\infty)$.

Questo ci permette di scrivere

$$f(x) \leq \frac{N}{x^3}$$

e di concludere grazie all'integrabilità di $\frac{1}{x^3}$ che $f(x)$ è integrabile per ogni $r > 0$.

Esempio 9.37. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x^3+x}{x^5-7x}\right).$$

L'argomento di tale funzione, $y = \frac{x^3+x}{x^5-7x}$ tende a 0 per $x \to +\infty$. Quindi per continuità
$$\lim_{x\to+\infty} \arctan(y) = 0.$$
Inoltre, $\arctan(y) = \arctan(0) + \arctan'(0)y + o(y)$ cioè $\arctan(y) \sim y$ per $x \to +\infty$.

Inoltre, $x^3 + x \sim x^3$ e $x^5 - 7x \sim x^5$ per $x \to +\infty$. Abbiamo ottenuto,
$$\arctan\left(\frac{x^3+x}{x^5-7x}\right) \sim \frac{x^3}{x^5} = \frac{1}{x^2} \quad x \to +\infty.$$
Quest'ultima funzione è integrabile su $[1, +\infty)$ e quindi anche $f(x)$ è integrabile.

Il prossimo teorema ci permette di ricavare una conclusione analoga al precedente grazie solo a un'equivalenza asintotica, senza necessità di disuguaglianze.

Teorema 9.15 (del confronto asintotico)**.** *Siano $f, g\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ continue, non-negative e asintoticamente equivalenti per $x \to +\infty$. Allora, $f(x)$ è integrabile su $[a, +\infty)$ se e solo se anche $g(x)$ lo è.*

Dimostrazione. Per ipotesi sappiamo che $f(x) \sim g(x)$ per $x \to +\infty$, cioè
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$
Quindi esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $x \geq M$ vale la disuguaglianza
$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right| \leq \frac{1}{2},$$
cioè in modo equivalente $\frac{1}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{3}{2}$, $\forall x \geq M$.

Quindi $0 \leq f(x) \leq \frac{3}{2}g(x)$, che implica l'integrabilità di $f(x)$ su $[M, +\infty)$ se $g(x)$ è integrabile sullo stesso intervallo. Analogamente, $0 \leq g(x) \leq 2f(x)$, che implica l'integrabilità di $g(x)$ su $[M, +\infty)$ se $f(x)$ è integrabile sullo stesso intervallo. Possiamo concludere perché sia f che g sono sempre integrabili su $[a, M]$. $\square$

NOTA BENE. *Lo stesso teorema è valido anche con l'ipotesi più debole che f e g siano integrabili su ogni intervallo del tipo $[a, b]$ con $a < b$ numeri reali.*

Esempio 9.38. Consideriamo la funzione
$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{3x^3}{(x-2)^7 \ln(x+8)}$$
e studiamo l'integrabilità di $f(x)$ su $[3, +\infty)$. Osserviamo che per $x \to +\infty$

- $e^{\frac{1}{x}} \sim 1$

- $\sin\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}$
- $(x-2)^7 \sim x^7$
- $\ln(x+8) \sim \ln(x)$

Quindi
$$f(x) \sim \frac{3x^3}{x^8 \cdot \ln(x)} = \frac{3}{x^5 \cdot \ln(x)}.$$
In più la funzione a destra è integrabile su $[3, +\infty)$ perché per ogni $x \geq 3$ vale $\ln(x) \geq \ln(3)$ e quindi
$$\frac{3}{x^5 \ln(x)} \leq \frac{3}{\ln(3)x^5} \quad \forall x \geq 3,$$
e quindi tale funzione è integrabile su $[3, +\infty)$.

Tutti i criteri di convergenza analizzati finora utilizzavano l'ipotesi che le funzioni considerate fossero positive. Nel prossimo caso approfondiamo un caso più generale.

Teorema 9.16. *Sia $f\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua. Se $|f(x)|$ è integrabile su $[a, +\infty)$ allora anche f lo è, e in più*
$$\left| \int_a^{+\infty} f(x)dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|dx.$$

Definizione 9.6. *Si dice che è una funzione $f(x)$ è **assolutamente integrabile** su $[a, +\infty)$ se $|f(x)|$ è integrabile su $[a, +\infty)$. Il teorema precedente ci dice che (come si poteva intuire dalla scelta del nome) se una funzione è assolutamente integrabile su $[a, +\infty)$, allora è integrabile su $[a, +\infty)$. (In realtà nel teorema abbiamo aggiunto l'ipotesi che f sia continua, ma è possibile generalizzarlo al caso senza continuità).*

Dimostrazione. Osserviamo che per definizione di valore assoluto,
$$0 \leq |f(x)| - f(x) \leq 2|f(x)|,$$
e la funzione di destra è integrabile su $[a, +\infty)$ per ipotesi. Quindi anche $|f| - f$ è una funzione integrabile su $[a, +\infty)$ per il criterio del confronto integrale. Infine,
$$f(x) = |f(x)| - (|f(x)| - f(x))$$
e quindi è integrabile perché è composizione lineare di due funzioni integrabili.

Inoltre, per la disuguaglianza triangolare integrale 9.7, vale che $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$, quindi portano b al limite $b \to +\infty$, la disuguaglianza continua a essere valida. $\square$

Esempio 9.39. Consideriamo la funzione $f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2}$, vogliamo dimostrarne l'integrabilità su $[1, +\infty)$. Osserviamo che

$$0 \leq \left| \frac{\sin(x)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$$

su tale intervallo. Come abbiamo già visto (Esempio 9.28), $\frac{1}{x^2}$ è integrabile su tale intervallo, quindi per il Teorema 9.14 anche $\left| \frac{\sin(x)}{x^2} \right|$ è integrabile su $[1, +\infty)$, cioè $f(x)$ è assolutamente integrabile, e quindi per il Teorema 9.16 è integrabile. Osserviamo che non è necessario avere una formula esplicita dell'integrale per poter affermare l'integrabilità di $f(x)$.

Esempio 9.40. L'assoluta integrabilità implica l'integrabilità, ma il viceversa è falso. Consideriamo ad esempio la funzione

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

essa è integrabile sull'intervallo $[\pi, +\infty)$ ma non assolutamente integrabile. Mostriamolo.

1. Svogliamo l'integrale $\int \frac{\sin(x)}{x}$ tramite integrazione per parti,

$$\int_\pi^b \frac{\sin(x)}{x} dx = \left[\frac{-\cos(x)}{x} \right]_\pi^b + \int_\pi^b \frac{\cos(x)}{x^2} dx$$

   il primo termine converge a

$$\frac{\cos(\pi)}{\pi} = -\frac{1}{\pi}$$

   per $b \to +\infty$, mentre l'ultimo termine è un integrale convergente su $[\pi, +\infty)$ perché

$$\left| \frac{\cos(x)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2} \quad \forall x \geq \pi$$

   e quindi possiamo utilizzare l'assoluta convergenza.

2. Mostriamo che $f(x)$ **non è** assolutamente integrabile.

$$\int_\pi^b \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx \geq \sum_{k \geq 1}^{(k+1)\pi \leq b} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx.$$

Su ogni intervallo $[k\pi, (k+1)\pi]$ vale la disuguaglianza $x \leq (k+1)\pi$. Inoltre, sempre su questi intervalli $\sin(x)$ ha sempre lo stesso segno, quindi

$$\begin{aligned}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| dx &\geq \left|\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin(x)}{(k+1)\pi} dx\right| \\ &= \left|\frac{-\cos((k+1)\pi) + \cos(k\pi)}{(k+1)\pi}\right| \\ &= \frac{2}{(k+1)\pi}.\end{aligned}$$

Quindi abbiamo ottenuto che

$$\int_{\pi}^{b} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| dx \geq \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\right)$$

e possiamo concludere perché la serie $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k}$ è divergente.

Tutti i confronti asintotici che abbiamo appena visto riguardano gli integrali impropri di prima specie (vedi la Definizione 9.4), ma si generalizzano in modo ovvio anche al caso di integrali impropri di seconda specie (vedi la Definizione 9.5). Facciamo adesso un veloce elenco e poi qualche esempio, senza sviluppare le dimostrazioni (le lasciamo per esercizio).

- Se $f, g\colon (a, b] \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue e g è integrabile su $[a, b]$ allora anche f è integrabile sullo stesso intervallo; se f **non** è integrabile su $[a, b]$, allora nemmeno g lo è.
- Se con le stesse ipotesi, $f \sim g$ per $x \to a^+$, allora f è integrabile su $[a, b]$ se e solo se g è integrabile su $[a, b]$.
- Con le stesse ipotesi, se $|f|$ è integrabile su $[a, b]$ allora f è integrabile sullo stesso intervallo. Si parla ancora di assoluta integrabilità.

Esempio 9.41. Consideriamo la funzione $\ln(x)^r$ con $r \in \mathbb{R}$ definita sull'intervallo $(1, e]$. Se $r \geq 0$ la funzione è definita anche in $x = 1$ ed è integrabile perché continua. Se $r < 0$, osserviamo che

$$\ln(x) = \ln(1 + (x - 1)),$$

quindi se $x \to 1^+$ allora $(x - 1) \to 0^+$ e abbiamo

$$\ln(1 + (x - 1)) \sim (x - 1), \quad x \to 1^+.$$

Quindi $\ln(x)^r \sim (1-x)^r$ e per confronto asintotico abbiamo che $\ln(x)$ è integrabile su $[1, e]$ se e solo se $(1-x)^r$ è integrabile su $[1, e]$, e quest'ultima affermazione è verificata se e solo se $r > -1$.

In alcuni casi è possibile che si debba studiare la convergenza di una funzione $f\colon (a,+\infty) \to \mathbb{R}$ sull'intervallo aperto $(a,+\infty)$. In questo caso f è integrabile in senso generalizzato su $(a,+\infty)$ se esiste $b \in \mathbb{R}$ tale che $f(x)$ è integrabile in senso generalizzato su $(a,b]$ e su $[b,+\infty)$, in tal caso

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx.$$

NOTA BENE. *Osserviamo che se l'affermazione precedente è vera per un certo $b \in (a,+\infty)$ allora è vera* ***per ogni*** *valore b in tale intervallo.*

Esempio 9.42. Consideriamo la funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\cdot(1+x)}$ e verifichiamo la sua integrabilità su $(0,+\infty)$.

Osserviamo che

$$\frac{1}{\sqrt{x}\cdot(1+x)} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x \to 0^+,$$

e la seconda è una funzione integrabile.

Se invece consideriamo $x \to +\infty$, osserviamo che

$$\frac{1}{\sqrt{x}\cdot(1+x)} \sim \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}, \quad x \to +\infty,$$

e la seconda è una funzione integrabile. Quindi per il confronto asintotico se scegliamo $b = 1$ otteniamo che $f(x)$ è integrabile su $[0,1]$ e su $[1,+\infty)$. Quindi è integrabile su $[0,+\infty)$ e in più

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\cdot(1+x)}dx &\leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx \\ &= \left[\frac{1}{2}\sqrt{x}\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\right]_1^{+\infty}.\end{aligned}$$

10 Equazioni differenziali ordinarie

In un'equazione differenziale, la variabile incognita è una funzione differenziabile (che di solito indicheremo con $u(x)$) e l'equazione contiene sia il valore della funzione che di una o più derivate.

Chiamiamo **ordine** dell'equazione differenziale, il massimo grado di derivazione della funzione incognita che appare nell'equazione. In questo corso ci concentreremo su alcune equazioni differenziali del primo e secondo ordine. Un'equazione differenziale del primo ordine avrà la forma generale

$$F(x, u, u') = 0$$

dove $u = u(x)$ è la funzione incognita e $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è una funzione che assegna un valore reale a ogni tripletta di valori. Un'equazione differenziale del secondo ordine avrà la forma generale

$$F(x, u, u', u'') = 0$$

dove stavolta $F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ sarà una funzione in 4 variabili.

Le equazioni differenziali ordinarie (*ODE, Ordinary Differential Equations* in inglese) emergono naturalmente in fisica, sono equazioni differenziali in cui la variabile incognita è una funzione in una variabile. Queste equazioni ci permettono di ricavare le proprietà di alcune funzioni (le soluzioni delle equazioni) a partire da informazioni "locali". Infatti il valore di una funzione e delle sue derivate è un'informazione locale, cioè che si può determinare concentrandoci su un piccolo intorno di un punto. Invece la soluzione di un'equazione differenziale è sempre una funzione "estesa", cioè che è determinata su un intero dominio e non soltanto in un piccolo insieme aperto.

Esempio 10.1. Alcuni esempi dalla fisica. Prendiamo il moto uniformemente accelerato che è determianto dall'equazione

$$u''(t) = a,$$

dove $a \in \mathbb{R}$ è una costante. In questo caso $F(t, u, u', u'') = u'' - a$ e $u = u(t)$ è una funzione della variabile t (il tempo). Le soluzioni sono del tipo

$$u(t) = u_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2,$$

dove $u_0 = u(0)$ è la posizione di partenza mentre $v_0 = u'(0)$ è la velocità di partenza.

La forza esercitata da una molla su una massa m è determinata dalla sua "compressione". Si ottiene la seguente equazione

$$m \cdot u''(t) = -k \cdot u(t),$$

dove m è la massa, k il coefficiente di elasticità della molla e u la posizione al tempo t. In questo caso $F(t, u, u', u'') = mu'' + ku$.

Le soluzioni di questa equazione sono moti oscillatori

$$u(t) = A \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + x_0\right)$$

come vedremo più avanti.

10.1 ODE lineari del primo ordine

Una equazione lineare del primo ordine si dice **lineare** se è nella forma

$$u'(x) + a(x) \cdot u(x) = f(x).$$

Cioè se $F(x, u, u') = G(u, u') - f(x)$ e G è una funzione lineare.

Definizione 10.1. *Sia I un intervallo, una funzione $u\colon I \to \mathbb{R}$ è soluzione della ODE lineare*

$$u' + a \cdot u = f$$

se u è derivabile per ogni $x \in I$ e vale l'uguaglianza $u'(x) + a(x) \cdot u(x) = f(x)$ per ogni $x \in I$.

*Chiamiamo **integrale generale** l'insieme di tutte le soluzioni di una ODE.*

NOTA BENE. *Nel caso $a(x) \equiv 0$, l'ODE qui sopra si riduce al calcolo di una primitiva di $f(x)$.*

Teorema 10.1 (Caso omogeneo)**.** *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $a\colon I \to \mathbb{R}$ continua. L'EDO omogenea*

$$u' + au = 0$$

ha infinite soluzioni e il suo integrale generale è uno spazio vettoriale di dimensione 1. In particolare, se $x_0 \in I$ e $u_0 \in R$, il cosiddetto problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) + a(x)u(x) & = 0 \\ u(x_0) & = u_0 \end{cases}$$

ammette una e una sola soluzione.

Dimostrazione. Poiché $a(x)$ è continua allora esiste la sua primitiva $A\colon I \to \mathbb{R}$. moltiplichiamo la nostra uguaglianza per $e^{A(x)}$ ottenendo

$$e^{A(x)}u'(x) + a(x)e^{A(x)}u(x) = 0.$$

Il termine di sinistra è la derivata di $e^{A(x)} \cdot u(x)$, quindi

$$\left(e^{A(x)}u(x)\right)' = 0$$

e quindi $u(x) = c \cdot e^{-A(x)}$ con $c \in \mathbb{R}$ costante.

In modo equivalente potevamo scrivere $u(x) = c(x) \cdot e^{-A(x)}$ con $c\colon I \to \mathbb{R}$ una certa funzione ben definita perché $e^{A(x)}$ è sempre non-nullo. Derivando si ottiene $c'(x) = 0$ e quindi $c(x) = c$ costante.

Abbiamo dimostrato che tutte le soluzioni dell'equazione del teorema sono della forma

$$u(x) = c \cdot e^{-A(x)}, \quad c \in \mathbb{R}$$

dove $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$. Il numero c è un "parametro libero" nella scrittura della formula generale per $u(x)$. Quindi l'integrale generale è uno spazio vettoriale (di funzioni) di dimensione 1 rispetto alla moltiplicazione per numeri scalari reali. L'uguaglianza $u(x_0) = u_0$ permette di determinare univocamente il valore di c se $x_0 \in I$. □

Il caso omogeneo appena trattato fornisce la "base" per trattare il caso non-omogeneo. Prima di vedere il teorema, trattiamo un caso analogo. Se $a(x) = 0$ allora l'ODE omoegenea si riduce a $u' = 0$ cioè $u(x)$ è una funzione costante reale. L'integrale generale quindi coincide con $\mathbb{R}$.

Se consideriamo l'ODE non-omogenea $u'(x) = f(x)$, allora l'integrale generale di $u(x)$ è l'insieme di tutte le primitive di $f(x)$. Come abbiamo già visto, data una qualsiasi primitiva F di f, allora l'integrale generale è dato da tutte le funzioni $F(x) + c$ con c costante reale.

Teorema 10.2 (Caso non-omogeneo)**.** *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $a\colon I \to \mathbb{R}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ due funzioni continue. L'EDO non-omogenea*

$$u' + au = f$$

ha infinite soluzioni. In particolare, se $x_0 \in I$ e $u_0 \in R$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) + a(x)u(x) & = f(x) \\ u(x_0) & = u_0 \end{cases}$$

ammette una e una sola soluzione

Dimostrazione. Come prima, se $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$ allora moltiplicando a destra e sinistra per $e^{A(x)}$ si trova che

$$\begin{aligned} e^A \cdot u' + a \cdot e^A \cdot u &= f \cdot e^A \\ \left(e^A \cdot u\right)' &= f \cdot e^A. \end{aligned}$$

Quindi $e^{A(x)} \cdot u(x)$ è una primitiva di $f(x) \cdot e^{A(x)}$. Se fissiamo $x_0 \in I$, possiamo scrivere la formula generale di una primitiva di $e^{A(x)} \cdot f(x)$ grazie al Teorema Fondamentale del Calcolo,

$$e^{A(x)u(x)} = \left(\int_{x_0}^{x} f(y)e^{A(y)}dy\right) + c$$

dove c è un numero reale. Quindi la funzione u vale

$$u(x) = e^{-A(x)} \cdot \left(\int_{x_0}^{x} f(y) e^{A(y)} dy + c \right)$$

e fissando il valore $u(x_0)$ è possibile determinare in modo univoco il valore di c. $\square$

Esempio 10.2. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) + u(x) & = e^{-x} \\ u(0) & = 5 \end{cases}$$

Abbiamo che $a(x) = 1$ costante e $f(x) = e^{-x}$, quindi possiamo scegliere come primitiva $A(x) = x$. La soluzione generale del problema quindi è

$$u(x) = e^{-x} \cdot \left(\int_0^x e^{-y} e^y dy + c \right) = e^{-x}(x + c).$$

Imponendo la condizione $u(0) = 5$ si ha $c = 5$ e quindi $u(x) = (5 + x)e^{-x}$, dove u è definita su tutto l'insieme $\mathbb{R}$.

Esempio 10.3. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) & = \frac{u(x)}{x} + x \\ u(2) & = 8 \end{cases}$$

Abbiamo $a(x) = -\frac{1}{x}$ e $f(x) = x$. Poiché possiamo lavorare con $a\colon I \to \mathbb{R}$ dove I è un intervallo, dobbiamo scegliere uno tra i due intervalli massimali $(0, +\infty)$ o $(-\infty, 0)$. Scegliamo il primo perché la condizione del problema è data su questo intervallo.

Una primitiva di $-\frac{1}{x}$ su $(0, +\infty)$ è $-\ln(x)$. Quindi

$$u(x) = e^{\ln(x)} \cdot \left(\int_1^x y \cdot e^{-\ln(y)} dy + c \right) = x \cdot (x - 1) + x \cdot c$$

con $c \in \mathbb{R}$. Imponendo la condizione $u(2) = 8$ si trova $c = 3$ e quindi $u(x) = x(x + 2)$ definita su R^+.

10.2 ODE di Bernoulli

Si dicono ODE di Bernoulli delle Equazioni Differenziali di primo ordine e non-lineari che si scrivono nella forma

$$u' + a \cdot u = f \cdot u^\gamma$$

dove γ è un numero reale diverso da 0 e 1.

NOTA BENE. *Se $y = 0, 1$ allora la ODE di Bernoulli si riduce a uno dei casi di primo ordine lineari, infatti*

- *se $\gamma = 0$ abbiamo $u' + au = f$, ODE1 lineare non-omogenea*
- *se $\gamma = 1$ abbiamo $u' + (a - f)u = 0$, ODE1 lineare omogenea.*

Con un semplice accorgimento una ODE di Bernoulli si trasforma in una ODE lineare del primo ordine. Infatti se moltiplichiamo entrambi i lati dell'equazione per la funzione $u(x)^{-\gamma}$. Allora l'equazione diventa

$$u' \cdot u^{-\gamma} + a \cdot u^{1-\gamma} = f.$$

Consideriamo la funzione ausiliaria $v(x) := u(x)^{1-\gamma}$. Se è ben definita allora $v'(x) = (1-\gamma))u'u^{-\gamma}$. La ODE qui sopra quindi diventa,

$$\frac{v'(x)}{1-\gamma} + a(x)v(x) = f(x).$$

Abbiamo quindi ritrovato una ODE1 non-omogenea, e possiamo scrivere il suo integrale generale,

$$v(x) = e^{-A(x)(1-\gamma)} \cdot \left(\int_{x_0}^{x} f(y) e^{A(y)(1-\gamma)} (1-\gamma) dy + c \right)$$

e quindi abbiamo anche l'integrale generale per $u(x)$,

$$u(x) = e^{-A(x)} \cdot \left(\int_{x_0}^{x} f(y) e^{A(y)(1-\gamma)} (1-\gamma) dy + c \right)^{\frac{1}{1-\gamma}}.$$

NOTA BENE. *Anche se non approfondiamo in termini generali l'aspetto del dominio di $u(x)$, c'è da riporre attenzione al fatto che per certi valori di γ, $u(x)$ non può essere definita. Ad esempio se $\gamma = -1$, quindi una soluzione $v(x)$ assume valori negativi, $u(x)$ non è ben definita come funzione reale e quindi tale punto non può appartenere al dominio di u.*

Esempio 10.4. Consideriamo la ODE di Bernoulli

$$u' = x^3 u^2 + 2xu.$$

In questo caso $\gamma = 2$ e possiamo riscrivere l'equazione come

$$\frac{u'}{u} - \frac{2x}{u} = x^3.$$

Come abbiamo visto se $v(x) = u^{1-\gamma} = \frac{1}{u(x)}$, allora si ottiene che v verifica la ODE

$$v' + 2xv = x^3,$$

Quindi il suo integrale generale è

$$v(x) = e^{-x^2} \cdot \left(\int_0^x -y^3 e^{y^2} dy + c \right)$$

con $c \in \mathbb{R}$. Facendo una integrazione per parti si dimostra che

$$\int_0^x y^3 e^{y^2} dy = \frac{1}{2} e^{x^2}(x^2 - 1) + \frac{1}{2}.$$

Quindi

$$v(x) = e^{-x^2} \cdot \left(-\frac{1}{2} e^{x^2}(x^2 - 1) + c \right)$$

E pertanto

$$u(x) = \frac{1}{-\frac{1}{2}(x^2 - 1) + c \cdot e^{-x^2}}.$$

Osserviamo che v è definibile su tutto l'insieme $\mathbb{R}$ ma nei punti in cui assume valore 0 non è possibile definire $u(x)$. È quindi necessario individuare un intervallo I su cui $v(x)$ è bene definita e non assume mai il valore 0 per poter ben definire $u \colon I \to \mathbb{R}$. Lasciamo quest'ultima parte come esercizio (non banale).

10.3 ODE del secondo ordine lineari

In questa sezione tratteremo la risoluzione di ODE del secondo ordine lineari omogenee e con coefficienti costanti. Cioè, presi $c_1, c_0 \in \mathbb{R}$, considereremo delle ODE nella forma

$$u'' + c_1 u' + c_0 u = 0.$$

In generale l'integrale generale di queste ODE è uno spazio vettoriale di dimensione 2.

La tecnica con cui ci approcciamo a questo problema è quella di "tentare" delle soluzioni analoghe a quelle che hanno risolto il caso di primo ordine. Cioè funzioni del tipo $u(x) = e^{\alpha \cdot x}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ un coefficiente reale. Imponendo questa condizione si ha

$$\alpha^2 e^{\alpha x} + c_1 \alpha e^{\alpha x} + c_0 e^{\alpha x} = e^{\alpha x} \cdot (\alpha^2 + c_1 \alpha + c_0) = 0.$$

Quindi $u(x)$ verifica la ODE se

$$\alpha^2 + c_1 \alpha + c_0 = 0. \tag{64}$$

Si tratta di un polinomio di secondo grado che è detto **polinomio caratteristico** della ODE. Vedremo che ci permette di individuare **tutte** le soluzioni del problema.

Teorema 10.3. *La ODE di secondo ordine*

$$u''(x) + c_1 u'(x) + c_0 u(x) = 0$$

ha infinite soluzione e il suo integrale generale è uno spazio vettoriale di dimensione 2*. In particolare una soluzione della ODE è univocamente determinata una volta dati* $x_0, u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ *tali che*

$$u(x_0) = u_0, \quad u'(x_0) = u_1.$$

Per dimostrare il teorema dobbiamo distinguere tre casi in base ai valori del discriminante $\Delta = c_1^2 - 4c_0$ del polinomio caratteristico.

Determinante $\Delta > 0$

In questo caso il polinomio caratteristico $\alpha^2 + c_1\alpha + c_0$ ha due radici distinte che denominiamo α_1 e α_2. Allora $e^{\alpha_1 x}$ e $e^{\alpha_2 x}$ risolvono la ODE. Di conseguenza anche qualsiasi combinazione lineare

$$u(x) = \lambda \cdot e^{\alpha_1 x} + \mu \cdot e^{\alpha_2 x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

è una soluzione della ODE. Se sappiamo che la soluzione è proprio in questa forma, per determinare i valori di λ e μ è sufficiente considerare le condizioni iniziali

$$\begin{cases} u(x_0) & = \lambda e^{\alpha_1 x_0} + \mu e^{\alpha_2 x_0} \\ u'(x_0) & = \alpha_1 \lambda e^{\alpha_1 x_0} + \alpha_2 \mu e^{\alpha_2 x_0} \end{cases}$$

questo sistema ammette sempre una coppia di valori univoca λ, μ.

Resta da dimostrare che **tutte** le soluzioni sono proprio nella forma indicata sopra. Data una funzione $u(x)$ che verifica la ODE consideriamo una funzione accessoria

$$w(x) := u'(x) - \alpha_1 u(x). \tag{65}$$

Vogliamo mostrare che necessariamente vale

$$w'(x) - \alpha_2 w(x) = 0.$$

Svolgendo i calcoli a partire dalla definizione (65) si trova infatti che

$$w'(x) - \alpha_2 w(x) = u''(x) - (\alpha_1 + \alpha_2)u'(x) + \alpha_1\alpha_2 u(x)$$

ma poiché α_1, α_2 risolvono il polinomio caratteristico (64) allora $\alpha_1 + \alpha_2 = -c_1$ e $\alpha_1\alpha_2 = c_0$ e quindi abbiamo ritrovato proprio la ODE di partenza.

Abbiamo mostrato che $w'(x) - \alpha_2 w(x) = 0$ quindi

$$w(x) = \bar{\mu} e^{\alpha_2 x}$$

con $\bar{\mu} \in \mathbb{R}$ parametro libero. A questo punto $u(x)$ risolve la ODE1 lineare non-omogenea

$$u'(x) - \alpha_1 u(x) = w(x) = \bar{\mu} e^{\alpha_2 x}.$$

Conosciamo già la soluzione lineare di questa equazione e cioè

$$\begin{aligned}
u(x) &= e^{\alpha_1 x}\left(\bar{\lambda} + \int_0^x \bar{\mu} e^{\alpha_2 y} e^{-\alpha_1 y} dy\right) \\
&= \bar{\lambda} e^{\alpha_1 x} + \bar{\mu}\left[\frac{e^{(\alpha_2-\alpha_1)y}}{\alpha_2-\alpha_1}\right]_0^x e^{\alpha_1 x} \\
&= \lambda \cdot e^{\alpha_1 x} + \mu \cdot e^{\alpha_2 x}
\end{aligned}$$

dove λ e μ sono due numeri reali indipendenti che dipendono solo dai valori di $\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \alpha_1, \alpha_2$.

NOTA BENE. *Osserviamo che è fondamentale l'ipotesi $\alpha_2 \neq \alpha_1$ perché appare la differenza $\alpha_2 - \alpha_1$ al denominatore.*

Questo termina la prova del Teorema 10.3 nel caso $\Delta > 0$.

Esempio 10.5. Consideriamo la ODE

$$u'' - 3u' + 2u = 0$$

con le condizioni iniziale $u(0) = 1$ e $u'(0) = 2$. Il polinomio caratteristico della ODE è $\alpha^2 - 3\alpha + 2$, quindi le sue radici sono 2 e 1. Abbiamo pertanto un integrale generale del tipo

$$u(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^x, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Quindi grazie alle condizioni iniziali troviamo che

$$\begin{aligned}
u(0) &= \lambda + \mu = 1 \\
u'(0) &= 2\lambda + \mu = 2.
\end{aligned}$$

Quindi facendo la differenza si trova $\lambda = 1$ e di conseguenza $\mu = 0$. La soluzione del problema è

$$u(x) = e^{2x}$$

definita su tutto $\mathbb{R}$.

Discriminante $\Delta = 0$

Il caso nullo e negativo si svolgono in modo analogo, ma è più difficile individuare due funzioni che generano l'integrale generale.

Sia $\alpha^2 + c_1\alpha + c_0$ il polinomio caratteristico. Abbiamo

$$\Delta = c_1^2 - 4c_0 = 0$$

e quindi la soluzione $\alpha_0 = -\frac{c_1}{2}$. Oltre a $e^{\alpha_0 x}$ vogliamo dimostrare che $u(x) = xe^{\alpha_0 x}$ è anch'essa una soluzione della ODE. Infatti,

$$\begin{aligned}
u'' + c_1 u' + c_0 u &= \alpha_0 e^{\alpha_0 x} + \alpha_0^2 x e^{\alpha_0 x} + \alpha e^{\alpha_0 x} + c_1 \alpha_0 x e^{\alpha_0 x} + c_1 e^{\alpha_0 x} + c_0 x e^{\alpha_0 x} \\
&= x e^{\alpha_0 x}(\alpha_0^2 + c_1\alpha + c_0) + e^{\alpha_0 x}(2\alpha_0 + c_1).
\end{aligned}$$

Entrambi i termini dell'ultima formula sono nulli per quanto detto prima, quindi anche $xe^{\alpha_0 x}$ è una soluzione della ODE. In questo caso la base dell'integrale generale è data da $e^{\alpha_0 x}$ e $xe^{\alpha_0 x}$ quindi ogni soluzione è del tipo

$$u(x) = \lambda e^{\alpha_0 x} + \mu x e^{\alpha_0 x}$$

con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ "parametri liberi".

Si dimostra in modo analogo al caso precedente che **tutte** le soluzioni devono avere questa forma.

Discriminante $\Delta < 0$

Se il discriminante è negativo si hanno due numeri complessi coniugati

$$\alpha_1 = a + bi$$
$$\alpha_2 = a - bi$$

come soluzioni del poliniomio caratteristico $\alpha^2 + c_1\alpha + c_0$. Il "significato" della soluzione

$$u(x) = e^{\alpha_1 x} = e^{ax} \cdot e^{ibx} = e^{ax}(\cos(bx) + i\sin(x))$$

è che (come si può verifidare) sia la parte reale che la parte immaginaria di $u(x) = e^{\alpha_1 x}$ rispettano la ODE. Abbiamo quindi individuato due soluzioni che sono in questo caso la base dell'integrale generale

$$e^{ax}\cos(bx) \quad \text{e} \quad e^{ax}\sin(bx).$$

Quindi nel caso $\Delta < 0$ l'integrale generale è nella forma

$$u(x) = e^{ax}\left(\lambda\cos(bx) + \mu\sin(bx)\right), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

dove a è la parte reale e b quella immaginaria di α_1

$$a = \mathrm{Re}(\alpha_1)$$
$$b = \mathrm{Im}(\alpha_1).$$

Se prendiamo la soluzione coniugata $\alpha_2 = \bar{\alpha}_1$ c'è solo una differenza di segno.

Come nei casi precedenti si dimsotra che Quelle indicate sono **tutte** le soluzioni della ODE.

10.4 ODE a variabili separabili

Una ODE del primo ordine si dice "a variabili separabili" se è nella forma

$$u'(x) = a(x)g(u).$$

Si tratta di un'equazione non-lineare.

Consideriamo in generale il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) & = a(x)g(u) \\ u(x_0) & = u_0 \end{cases}$$

Se $g(u_0) = 0$ allora la funzione costante $u(x) = u_0$ è una soluzione del problema.

Supponiamo $g(u_0) \neq 0$. Allora possiamo (almeno in un intorno di x_0) considerare l'equazione

$$\frac{u'}{g(u)} = a(x).$$

Integrando si ottiene

$$\int_{x_0}^{x} \frac{u'(y)}{g(u(y))} dy = \int_{x_0}^{x} a(y)dy.$$

Se $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$ e se effettuiamo il cambio di variabile $v = u(y)$, otteniamo

$$\int_{u_0}^{u(x)} \frac{1}{g(v)} dv = A(x) - A(x_0)$$

Quindi se esiste una primitiva $H(v)$ di $\frac{1}{g(v)}$ allora abbiamo

$$H(u(x)) = H(u_0) + A(x) - A(x_0)$$

e questo (sotto opportune condizioni) permette di ricavare il valore di $u(x)$.

Esempio 10.6. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) & 1 + u^2(x) \\ u(0) & = 0 \end{cases}$$

Dividendo abbiamo $\frac{u'}{1+u^2} = 1$, quindi

$$\int_0^x \frac{u'(y)}{1 + u^2(y)} dy = x$$

e il termine a sinistra è $[\arctan(v)]_{u(0)}^{u(x)}$.

Quindi

$$\arctan(u(x)) = x$$

cioè

$$u(x) = \tan(x).$$