Giovanni Dore

Appunti del corso di

Analisi Matematica L-D

Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

Corsi di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni e in Ingegneria Elettronica

Anno Accademico 2008/2009

Equazione di Helmholtz

Equazione di Helmholtz in un rettangolo

Consideriamo il problema di Dirichlet per l'equazione di Helmholtz

$$\begin{cases} \Delta u(x,y)+\lambda u(x,y)=0 & (x,y)\in R \\ u(x,y)=0 & (x,y)\in \partial R \end{cases} \tag{1}$$

con $R=]0,L[\times]0,M[$ e $\lambda\in\mathbb{R}$.

Studiamo per quali valori di λ esistono soluzioni non identicamente nulle di questo problema.

Tali λ sono detti **autovalori** del problema (1).

Procediamo per separazione delle variabili, quindi cerchiamo una soluzione nella forma

$$u(x,y)=X(x)Y(y),$$

con X e Y funzioni di una variabile non identicamente nulle, definite rispettivamente in $[0,L]$ e in $[0,M]$.

Se u è in questa forma, il problema diventa

$$\begin{cases} X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y)+\lambda X(x)Y(y)=0 & (x,y)\in R \\ X(x)Y(0)=0 & x\in[0,L] \\ X(x)Y(M)=0 & x\in[0,L] \\ X(0)Y(y)=0 & y\in[0,M] \\ X(L)Y(y)=0 & y\in[0,M]. \end{cases}$$

Dividendo l'equazione differenziale per $X(x)Y(y)$, si ottiene

$$\frac{X''(x)}{X(x)}+\frac{Y''(y)}{Y(y)}+\lambda=0$$

e quindi

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}-\lambda.$$

Il membro di sinistra di questa uguaglianza è funzione della sola x, mentre quello di destra è funzione della sola y, quindi entrambi sono costanti; perciò esiste $k\in\mathbb{R}$ tale che

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=k, \qquad -\frac{Y''(y)}{Y(y)}-\lambda=k.$$

La prima di queste equazioni equivale a

$$X''(x) = kX(x);$$

inoltre le condizioni sulla frontiera $X(0)Y(y) = 0$ e $X(L)Y(y) = 0$ sono soddisfatte se e solo se

$$X(0) = X(L) = 0,$$

visto che Y non è identicamente nulla.

L'equazione differenziale

$$X''(x) = kX(x)$$

è lineare a coefficienti costanti, con polinomio caratteristico $t^2 - k$, che si annulla per $t = 0$ se $k = 0$, per $t = \pm\sqrt{k}$ se $k > 0$ e per $t = \pm i\sqrt{-k}$ se $k < 0$.

Quindi l'integrale generale (reale) è

$$\begin{aligned}
&X(x) = c_1 + c_2 x && \text{se } k = 0,\\
&X(x) = c_1 \operatorname{senh}\big(\sqrt{k}\,x\big) + c_2 \cosh\big(\sqrt{k}\,x\big) && \text{se } k > 0,\\
&X(x) = c_1 \operatorname{sen}\big(\sqrt{-k}\,x\big) + c_2 \cos\big(\sqrt{-k}\,x\big) && \text{se } k < 0.
\end{aligned}$$

Nel caso $k = 0$ la condizione $X(0) = X(L) = 0$ equivale a

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 + c_2 L = 0; \end{cases}$$

quindi $c_1 = 0$ e, sostituendo nella seconda equazione, anche $c_2 = 0$. Perciò l'unica soluzione è quella identicamente nulla.

Nel caso $k > 0$ la condizione $X(0) = X(L) = 0$ equivale a

$$\begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 \operatorname{senh}\big(\sqrt{k}\,L\big) + c_2 \cosh\big(\sqrt{k}\,L\big) = 0; \end{cases}$$

quindi $c_2 = 0$ e dalla seconda equazione, visto che $\operatorname{senh}\big(\sqrt{k}\,L\big) \neq 0$, segue $c_1 = 0$. Perciò anche in questo caso l'unica soluzione è quella identicamente nulla.

Nel caso $k < 0$ la condizione $X(0) = X(L) = 0$ equivale a

$$\begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 \operatorname{sen}\big(\sqrt{-k}\,L\big) + c_2 \cos\big(\sqrt{-k}\,L\big) = 0; \end{cases}$$

quindi $c_2 = 0$. Se $\operatorname{sen}\big(\sqrt{-k}\,L\big) \neq 0$ allora dalla seconda equazione segue $c_1 = 0$ e l'unica soluzione è quella identicamente nulla.

Se invece $\operatorname{sen}\big(\sqrt{-k}\,L\big) = 0$ allora la seconda equazione è verificata qualunque sia c_1 e quindi la funzione $\operatorname{sen}\big(\sqrt{-k}\,x\big)$ e i suoi multipli scalari sono soluzione dell'equazione differenziale che si annullano in 0 e in L.

Si ha $\operatorname{sen}\big(\sqrt{-k}\,L\big) = 0$ se e solo se $\sqrt{-k}\,L$ è multiplo intero di π, cioè se e solo se esiste n intero tale che $\sqrt{-k}\,L = n\pi$; evidentemente un tale n è positivo.

Perciò esiste una soluzione non nulla per $k=-n^2\pi^2/L^2$ con $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ e in corrispondenza di tale k una soluzione è

$$X(x)=\operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big).$$

Per questo valore di k, la funzione Y è soluzione dell'equazione

$$-\frac{Y''(y)}{Y(y)}-\lambda=-\frac{n^2\pi^2}{L^2},$$

cioè

$$Y''(y)+\Big(\lambda-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\Big)Y(y)=0,$$

con le condizioni

$$Y(0)=Y(M)=0.$$

Il problema è del tutto analogo a quello per la funzione X; gli unici cambiamenti sono dovuti al fatto che abbiamo $n^2\pi^2/L^2-\lambda$ al posto di k e M al posto di L.

Abbiamo quindi soluzioni non identicamente nulle se solo se

$$\frac{n^2\pi^2}{L^2}-\lambda=-\frac{m^2\pi^2}{M^2}$$

con $m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ ed in tal caso una soluzione è

$$Y(y)=\operatorname{sen}\Big(\frac{m\pi}{M}y\Big).$$

Perciò gli autovalori del problema (1) sono i λ che possono essere scritti nella forma

$$\lambda=\frac{n^2\pi^2}{L^2}+\frac{m^2\pi^2}{M^2}$$

con $n,m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. In corrispondenza di tali autovalori abbiamo le autofunzioni

$$u_{n,m}(x,y)=\operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)\operatorname{sen}\Big(\frac{m\pi}{M}y\Big).$$

Lo stesso λ può corrispondere a coppie diverse di interi (n,m) ed in tal caso si hanno più autofunzioni linearmente indipendenti relative allo stesso autovalore, cioè vi sono autovalori di molteplicità geometrica maggiore di 1. Ad esempio se $L=M$ le funzioni

$$u_{1,2}(x,y)=\operatorname{sen}\Big(\frac{\pi}{L}x\Big)\operatorname{sen}\Big(\frac{2\pi}{L}y\Big),\qquad u_{2,1}(x,y)=\operatorname{sen}\Big(\frac{2\pi}{L}x\Big)\operatorname{sen}\Big(\frac{\pi}{L}y\Big)$$

sono entrambe autofunzioni relative all'autovalore $1^2\pi^2/L^2+2^2\pi^2/L^2$, cioè $5\pi^2/L^2$.

Si può dimostrare che gli autovalori hanno tutti molteplicità geometrica 1 se e solo se L^2/M^2 è irrazionale.

Le autofunzioni $u_{n,m}$ sono ortogonali tra loro rispetto al prodotto scalare in $L^2(R)$.

Infatti si ha

$$\begin{aligned}
&\langle u_{n_1,m_1}, u_{n_2,m_2}\rangle = \\
&= \int_R \operatorname{sen}\Big(\frac{n_1\pi}{L}x\Big)\operatorname{sen}\Big(\frac{m_1\pi}{M}y\Big)\operatorname{sen}\Big(\frac{n_2\pi}{L}x\Big)\operatorname{sen}\Big(\frac{m_2\pi}{M}y\Big)\,dx\,dy \\
&= \int_0^L \operatorname{sen}\Big(\frac{n_1\pi}{L}x\Big)\operatorname{sen}\Big(\frac{n_2\pi}{L}x\Big)\,dx \int_0^M \operatorname{sen}\Big(\frac{m_1\pi}{M}y\Big)\operatorname{sen}\Big(\frac{m_2\pi}{M}y\Big)\,dy\,.
\end{aligned}$$

Visto che le funzioni $\operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)$ (con $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$) sono ortogonali tra loro in $L^2([0,L])$ e le funzioni $\operatorname{sen}\Big(\frac{m\pi}{M}y\Big)$ sono ortogonali tra loro in $L^2([0,M])$, se $n_1 \neq n_2$ allora l'integrale rispetto alla variabile x si annulla, mentre se $m_1 \neq m_2$ allora si annulla l'integrale rispetto alla variabile y. Perciò se $(n_1,m_1) \neq (n_2,m_2)$ almeno uno dei due integrali semplici si annulla, quindi il prodotto scalare è nullo.

Si può dimostrare che queste funzioni costituiscono un sistema ortogonale completo per $L^2(R)$, quindi ogni funzione appartenente a $L^2(R)$ può essere sviluppata in serie di funzioni $u_{n,m}$.

Consideriamo ora il problema di Dirichlet

$$\begin{cases}
\Delta u(x,y) + \lambda u(x,y) = 0 & (x,y) \in R \\
u(0,y) = 0 & y \in [0,M] \\
u(L,y) = 0 & y \in [0,M] \\
u(x,0) = f(x) & x \in [0,L] \\
u(x,M) = 0 & x \in [0,L]
\end{cases} \tag{2}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$ che non sia un autovalore del corrispondente problema con dati al bordo omogenei, cioè con $f = 0$.

Procedendo per separazione delle variabili come sopra, si cercano le soluzioni dell'equazione di Helmholtz nella forma $X(x)Y(y)$ e si trova che esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = k\,, \qquad -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \lambda = k\,.$$

Deve essere $X(0) = X(L) = 0$, quindi si ha

$$X(x) = \operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big),$$

con $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

A seconda del valore di λ avremo

$$\begin{aligned}
&Y(y) = c_1 + c_2 y && \text{se } \lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \\
&Y(y) = c_1 \operatorname{senh}\Big(\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{L^2} - \lambda}\, y\Big) + c_2 \cosh\Big(\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{L^2} - \lambda}\, y\Big) && \text{se } \lambda < \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \\
&Y(y) = c_1 \operatorname{sen}\Big(\sqrt{\lambda - \frac{n^2\pi^2}{L^2}}\, y\Big) + c_2 \cos\Big(\sqrt{\lambda - \frac{n^2\pi^2}{L^2}}\, y\Big) && \text{se } \lambda > \frac{n^2\pi^2}{L^2}.
\end{aligned}$$

Scegliamo ora c_1 e c_2 in modo che sia $Y(M) = 0$, condizione che segue da $u(x,M) = 0$.

Se $\lambda = n^2\pi^2/L^2$ deve essere $c_1 + c_2 M = 0$ e quindi $c_1 = -c_2 M$, perciò una soluzione è

$$Y(y) = M - y\,.$$

Se $\lambda < n^2\pi^2/L^2$, ponendo $\alpha = \sqrt{\dfrac{n^2\pi^2}{L^2} - \lambda}$, deve essere

$$c_1 \operatorname{senh}(\alpha M) + c_2 \cosh(\alpha M) = 0\,,$$

da cui segue

$$c_1 = -\frac{\cosh(\alpha M)}{\operatorname{senh}(\alpha M)}\, c_2\,;$$

quindi possiamo scegliere $c_1 = -\cosh(\alpha M)$ e $c_2 = \operatorname{senh}(\alpha M)$ e una soluzione è

$$Y(y) = -\operatorname{senh}(\alpha y)\cosh(\alpha M) + \cosh(\alpha y)\operatorname{senh}(\alpha M) = \operatorname{senh}\big(\alpha(M-y)\big)$$

Se $\lambda > n^2\pi^2/L^2$, ponendo $\beta = \sqrt{\lambda - \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}}$, deve essere

$$c_1 \operatorname{sen}(\beta M) + c_2 \cos(\beta M) = 0\,,$$

abbiamo supposto che λ non sia un autovalore e quindi è $\operatorname{sen}(\beta M) \neq 0$, perciò otteniamo

$$c_1 = -\frac{\cos(\beta M)}{\operatorname{sen}(\beta M)}\, c_2\,;$$

quindi possiamo scegliere $c_1 = -\cos(\beta M)$ e $c_2 = \operatorname{sen}(\beta M)$ e una soluzione è

$$Y(y) = -\operatorname{sen}(\beta y)\cos(\beta M) + \cos(\beta y)\operatorname{sen}(\beta M) = \operatorname{sen}\big(\beta(M-y)\big)\,.$$

Perciò se poniamo

$$Y_n(y) = \begin{cases} M - y & \text{se } \lambda = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}\,, \\ \operatorname{senh}\Big(\sqrt{\dfrac{n^2\pi^2}{L^2} - \lambda}\,(M-y)\Big) & \text{se } \lambda < \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}\,, \\ \operatorname{sen}\Big(\sqrt{\lambda - \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}}\,(M-y)\Big) & \text{se } \lambda > \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}\,. \end{cases}$$

la funzione

$$u_n(x,y) = \operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big) Y_n(y)$$

verifica il problema (2) tranne la condizione $u(x,0) = f(x)$. Cercheremo quindi dei coefficienti b_n in modo che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big) Y_n(y)$$

sia convergente e la somma verifichi la condizione $u(x,0) = f(x)$.

Ciò richiede che si abbia

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{L} x\Big) Y_n(0) = f(x)$$

e quindi i b_n andranno scelti in modo che $b_n Y_n(0)$ siano i coefficienti dello sviluppo in serie di seni della funzione f . Perciò dovrà essere

$$b_n = \frac{2}{Y_n(0)L} \int_0^L \operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{L} x\Big) f(x)\, dx .$$

Equazione di Helmholtz in un cerchio

Cerchiamo gli autovalori del problema di Dirichlet per l'equazione di Helmholtz

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) + \lambda u(x,y) = 0 & (x,y) \in S(0,L) \\ u(x,y) = 0 & (x,y) \in \partial S(0,L) \end{cases} \tag{3}$$

dove $S(0,L)$ è il cerchio di centro l'origine e raggio L .

Dimostriamo anzitutto che ogni autovalore è positivo.

Data una funzione u di classe C^2 nel cerchio, applicando il teorema della divergenza al campo vettoriale $u \operatorname{grad} u$, cioè alla funzione

$$(x,y) \mapsto \big(u_x(x,y)u(x,y), u_y(x,y)u(x,y)\big),$$

si ottiene

$$\int\limits_{S(0,L)} \operatorname{div}(u \operatorname{grad} u)(x,y)\, dx\, dy = \int_{\partial S(0,L)} \langle u \operatorname{grad} u, \nu \rangle\, ds$$

dove ν è il vettore normale esterno a $\partial S(0,L)$. Abbiamo

$$\operatorname{div}(u \operatorname{grad} u) = (u u_x)_x + (u u_y)_y = u u_{xx} + u_x u_x + u u_{yy} + u_y u_y = u \Delta u + u_x^2 + u_y^2 ,$$

inoltre

$$\langle u \operatorname{grad} u, \nu \rangle = u \langle \operatorname{grad} u, \nu \rangle = u \frac{\partial u}{\partial \nu} .$$

Perciò

$$\int\limits_{S(0,L)} \big(u(x,y)\Delta u(x,y) + u_x^2(x,y) + u_y^2(x,y)\big)\, dx\, dy = \int_{\partial S(0,L)} u \frac{\partial u}{\partial \nu}\, ds .$$

Se u è soluzione del problema (3), allora $\lambda u = -\Delta u$ e u è nulla sulla frontiera del cerchio, quindi l'uguaglianza precedente diventa

$$\int\limits_{S(0,L)} \big(-\lambda u^2(x,y) + u_x^2(x,y) + u_y^2(x,y)\big)\, dx\, dy = 0 ,$$

cioè

$$\lambda \int_{S(0,L)} u^2(x,y)\,dx\,dy = \int_{S(0,L)} \left(u_x^2(x,y) + u_y^2(x,y)\right) dx\,dy\,.$$

La funzione u non è identicamente nulla, quindi

$$\int_{S(0,L)} u^2(x,y)\,dx\,dy > 0\,.$$

Perciò dalla uguaglianza scritta sopra possiamo ricavare λ, ottenendo

$$\lambda = \frac{\int_{S(0,L)} \left(u_x^2(x,y) + u_y^2(x,y)\right) dx\,dy}{\int_{S(0,L)} u^2(x,y)\,dx\,dy}$$

Le funzioni u_x e u_y non sono entrambe identicamente nulle; infatti in caso contrario u sarebbe costante e quindi, essendo nulla sulla frontiera, essa sarebbe identicamente nulla; perciò

$$\int_{S(0,L)} \left(u_x^2(x,y) + u_y^2(x,y)\right) dx\,dy > 0\,.$$

Quindi λ è quoziente di due numeri positivi, dunque è positivo.

Passando in coordinate polari l'equazione di Helmholtz diventa

$$v_{\rho\rho}(\rho,\theta) + \frac{1}{\rho} v_\rho(\rho,\theta) + \frac{1}{\rho^2} v_{\theta\theta}(\rho,\theta) + \lambda v(\rho,\theta) = 0 \qquad 0 < \rho < L, \quad 0 \le \theta \le 2\pi\,,$$

mentre la condizione sulla frontiera diventa

$$v(L,\theta) = 0 \qquad 0 \le \theta \le 2\pi\,.$$

Inoltre, il fatto che v si ottenga esprimendo in coordinate polari una funzione che, in coordinate cartesiane, è di classe C^2, implica che debba essere

$$\begin{aligned} v(\rho,0) &= v(\rho,2\pi) \qquad 0 < \rho < L \\ v_\theta(\rho,0) &= v_\theta(\rho,2\pi) \qquad 0 < \rho < L \end{aligned}$$

e che esista $v(0,\theta)$, indipendente da θ.

Queste condizioni sono verificate se v è ottenuto scrivendo in coordinate polari una funzione che è di classe C^2 in coordinate cartesiane. Invece in generale non è sufficiente che queste condizioni siano verificate per poter trasformare v in coordinate cartesiane; però si verifica direttamente che tutte le soluzioni che troveremo possono essere riscritte in coordinate cartesiane ottenendo funzioni di classe C^2.

Perciò studiamo il problema

$$\begin{cases} v_{\rho\rho}(\rho,\theta) + \frac{1}{\rho} v_\rho(\rho,\theta) + \frac{1}{\rho^2} v_{\theta\theta}(\rho,\theta) + \lambda v(\rho,\theta) = 0 & 0 < \rho < L,\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ v(\rho,0) = v(\rho,2\pi) & 0 < \rho < L \\ v_\theta(\rho,0) = v_\theta(\rho,2\pi) & 0 < \rho < L \\ v(L,\theta) = 0 & 0 \le \theta \le 2\pi \\ v(0,\theta) \text{ indipendente da } \theta \end{cases}$$

Procediamo per separazione di variabili, cercando una soluzione nella forma

$$v(\rho,\theta)=R(\rho)\Theta(\theta).$$

L'equazione diventa

$$R''(\rho)\Theta(\theta)+\frac{1}{\rho}R'(\rho)\Theta(\theta)+\frac{1}{\rho^2}R(\rho)\Theta''(\theta)+\lambda R(\rho)\Theta(\theta)=0$$

da cui, dividendo per $R(\rho)\Theta(\theta)$ e moltiplicando per ρ^2, segue

$$\rho^2\frac{R''(\rho)}{R(\rho)}+\rho\frac{R'(\rho)}{R(\rho)}+\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}+\lambda\rho^2=0$$

e quindi

$$\rho^2\frac{R''(\rho)}{R(\rho)}+\rho\frac{R'(\rho)}{R(\rho)}+\lambda\rho^2=-\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}.$$

Il membro di sinistra di questa uguaglianza dipende solo da ρ, mentre quello di destra dipende solo da θ, quindi entrambi debbono essere costanti, perciò esiste $k\in\mathbb{R}$ tale che

$$\rho^2\frac{R''(\rho)}{R(\rho)}+\rho\frac{R'(\rho)}{R(\rho)}+\lambda\rho^2=-\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}=k.$$

Risolviamo anzitutto l'equazione

$$-\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}=k,$$

che equivale a

$$\Theta''(\theta)+k\Theta(\theta)=0.$$

Inoltre deve essere

$$\Theta(0)=\Theta(2\pi) \qquad \Theta'(0)=\Theta'(2\pi),$$

cioè Θ deve verificare le cosiddette condizioni periodiche nell'intervallo $[0,2\pi]$.

L'equazione differenziale $\Theta''(\theta)+k\Theta(\theta)=0$ è lineare a coefficienti costanti omogenea, con polinomio caratteristico t^2+k, che si annulla per $t=0$ se $k=0$, per $t=\pm\sqrt{-k}$ se $k<0$ e per $t=\pm i\sqrt{k}$ se $k>0$.

Quindi l'integrale generale (reale) è

$$\begin{aligned}
&\Theta(\theta)=c_1+c_2\theta && \text{se } k=0,\\
&\Theta(\theta)=c_1\operatorname{senh}\left(\sqrt{-k}\,\theta\right)+c_2\cosh\left(\sqrt{-k}\,\theta\right) && \text{se } k<0,\\
&\Theta(\theta)=c_1\operatorname{sen}\left(\sqrt{k}\,\theta\right)+c_2\cos\left(\sqrt{k}\,\theta\right) && \text{se } k>0.
\end{aligned}$$

Nel caso $k=0$ le condizioni su Θ equivalgono a

$$\begin{cases} c_1=c_1+c_2 2\pi\\ c_2=c_2;\end{cases}$$

perciò $c_2=0$, mentre c_1 può essere qualsiasi. Quindi una soluzione è $\Theta(\theta)=1$.

Nel caso $k<0$ le condizioni su Θ equivalgono a

$$\begin{cases} c_2 = c_1 \operatorname{senh}\big(\sqrt{-k}\,2\pi\big) + c_2 \cosh\big(\sqrt{-k}\,2\pi\big) \\ c_1\sqrt{-k} = c_1\sqrt{-k}\,\cosh\big(\sqrt{-k}\,2\pi\big) + c_2\sqrt{-k}\,\operatorname{senh}\big(\sqrt{-k}\,2\pi\big); \end{cases}$$

cioè, eliminando il fattore $\sqrt{-k}$ nella seconda equazione,

$$\begin{cases} c_1 \operatorname{senh}\big(\sqrt{-k}\,2\pi\big) + c_2\big(\cosh\big(\sqrt{-k}\,2\pi\big) - 1\big) = 0 \\ c_1\big(\cosh\big(\sqrt{-k}\,2\pi\big) - 1\big) + c_2 \operatorname{senh}\big(\sqrt{-k}\,2\pi\big) = 0. \end{cases}$$

Il determinante della matrice dei coefficienti di questo sistema è

$$\begin{aligned} &\operatorname{senh}^2\big(\sqrt{-k}\,2\pi\big) - \big(\cosh\big(\sqrt{-k}\,2\pi\big) - 1\big)^2 = \\ &\qquad = \operatorname{senh}^2\big(\sqrt{-k}\,2\pi\big) - \cosh^2\big(\sqrt{-k}\,2\pi\big) + 2\cosh\big(\sqrt{-k}\,2\pi\big) - 1 = \\ &\qquad\qquad = 2\cosh\big(\sqrt{-k}\,2\pi\big) - 2, \end{aligned}$$

che è diverso da 0; perciò l'unica soluzione è $c_1 = c_2 = 0$ e quindi Θ deve essere identicamente nulla.

Nel caso $k>0$ le condizioni su Θ equivalgono a

$$\begin{cases} c_2 = c_1 \operatorname{sen}\big(\sqrt{k}\,2\pi\big) + c_2 \cos\big(\sqrt{k}\,2\pi\big) \\ c_1\sqrt{k} = c_1\sqrt{k}\,\cos\big(\sqrt{k}\,2\pi\big) - c_2\sqrt{k}\,\operatorname{sen}\big(\sqrt{k}\,2\pi\big); \end{cases}$$

cioè, eliminando il fattore $\sqrt{k}$ nella seconda equazione,

$$\begin{cases} c_1 \operatorname{sen}\big(\sqrt{k}\,2\pi\big) + c_2\big(\cos\big(\sqrt{k}\,2\pi\big) - 1\big) = 0 \\ c_1\big(\cos\big(\sqrt{k}\,2\pi\big) - 1\big) - c_2 \operatorname{sen}\big(\sqrt{k}\,2\pi\big) = 0. \end{cases}$$

Il determinante della matrice dei coefficienti di questo sistema è

$$\begin{aligned} &-\operatorname{sen}^2\big(\sqrt{k}\,2\pi\big) - \big(\cos\big(\sqrt{k}\,2\pi\big) - 1\big)^2 \\ &\qquad = -\operatorname{sen}^2\big(\sqrt{k}\,2\pi\big) - \cos^2\big(\sqrt{k}\,2\pi\big) + 2\cos\big(\sqrt{k}\,2\pi\big) - 1 \\ &\qquad\qquad = 2\cos\big(\sqrt{k}\,2\pi\big) - 2, \end{aligned}$$

che è uguale a 0 se solo se $\cos\big(\sqrt{k}\,2\pi\big) = 1$, cioè se e solo se $\sqrt{k}$ è intero. Perciò se $\sqrt{k}$ non è intero il sistema ha solo la soluzione $c_1 = c_2 = 0$ e quindi Θ deve essere identicamente nulla. Se invece $k = n^2$, con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, allora tutti i coefficienti del sistema si annullano, quindi si hanno le soluzioni

$$\Theta(\theta) = c_1 \operatorname{sen}(n\theta) + c_2 \cos(n\theta).$$

Perciò affinché esista una Θ non identicamente nulla che soddisfa l'equazione e le condizioni di periodicità deve essere $k = n^2$, con $n \in \mathbb{N}$ e si ha

$$\Theta(\theta) = c_1 \operatorname{sen}(n\theta) + c_2 \cos(n\theta),$$

nel caso $n = 0$ il primo addendo è nullo.

Resta da risolvere l'equazione

$$\rho^2 \frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \rho \frac{R'(\rho)}{R(\rho)} + \lambda \rho^2 = n^2,$$

cioè

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) + \left(\lambda \rho^2 - n^2\right) R(\rho) = 0. \tag{4}$$

Se $\lambda = 1$ questa è un'equazione di Bessel, nel caso generale possiamo ricondurci a un'equazione di Bessel con un cambiamento di variabili, ricordando che abbiamo già dimostrato che $\lambda > 0$.

Supponiamo che R verifichi l'equazione (4). Fissato $a \in \mathbb{R}^+$, consideriamo la funzione $\overline{R}$ tale che

$$\overline{R}(\rho) = R(a\rho).$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} \overline{R}'(\rho) &= aR'(a\rho) \\ \overline{R}''(\rho) &= a^2 R''(a\rho) \end{aligned}$$

e quindi, visto che vale (4),

$$\rho^2 \overline{R}''(\rho) = -a\rho R'(a\rho) - (\lambda a^2 \rho^2 - n^2) R(a\rho) = -\rho \overline{R}'(\rho) - (\lambda a^2 \rho^2 - n^2) \overline{R}(\rho);$$

se scegliamo $a = 1/\sqrt{\lambda}$ allora $\overline{R}$ è soluzione dell'equazione di Bessel di ordine n

$$\rho^2 \overline{R}''(\rho) + \rho \overline{R}'(\rho) + (\rho^2 - n^2) \overline{R}(\rho) = 0.$$

Le soluzioni dell'equazione di Bessel di ordine n sono combinazione lineare delle funzioni di Bessel di ordine n, quindi

$$\overline{R}(\rho) = c_1 J_n(\rho) + c_2 Y_n(\rho),$$

da cui segue

$$R(\rho) = c_1 J_n\left(\sqrt{\lambda}\rho\right) + c_2 Y_n\left(\sqrt{\lambda}\rho\right).$$

La funzione R deve essere definita anche in 0, in caso contrario la soluzione v di (3) non sarebbe definita nell'origine. Le funzioni di Bessel di seconda specie Y_n sono singolari in 0, quindi deve essere $c_2 = 0$; perciò le soluzioni sono i multipli scalari di

$$R(\rho) = J_n\left(\sqrt{\lambda}\rho\right).$$

Inoltre dalla condizione $v(L, \theta) = 0$ segue $R(L) = 0$, quindi λ deve essere tale che $J_n\left(\sqrt{\lambda}L\right) = 0$; cioè, indicati con $\xi_{n,1}, \xi_{n,2}, \ldots$ gli zeri positivi della funzione J_n, deve essere

$$\lambda = \frac{\xi_{n,j}^2}{L^2}.$$

Perciò il problema (3) ha gli autovalori $\xi_{n,j}^2/L^2$, le corrispondenti autofunzioni sono

$$
\begin{aligned}
&v_{0,j}(\rho,\theta)=J_0\Big(\frac{\xi_{0,j}}{L}\rho\Big) && j=1,2,\dots\\
&\left.\begin{aligned}
v_{n,j,1}(\rho,\theta)=J_n\Big(\frac{\xi_{n,j}}{L}\rho\Big)\cos(n\theta)\\
v_{n,j,2}(\rho,\theta)=J_n\Big(\frac{\xi_{n,j}}{L}\rho\Big)\operatorname{sen}(n\theta)
\end{aligned}\right\} && n=1,2,\dots \quad j=1,2,\dots
\end{aligned}
$$

Possiamo quindi concludere che gli autovalori $\xi_{0,j}^2/L^2$ hanno molteplicità geometrica 1 , mentre se $n>0$ gli autovalori $\xi_{n,j}^2/L^2$ hanno molteplicità geometrica 2 .

Le autofunzioni elencate sopra sono tutte ortogonali tra loro.

Infatti se $n\neq m$ ed entrambi sono non nulli si ha

$$
\begin{aligned}
\langle v_{n,j,1},v_{m,k,1}\rangle &= \int_{[0,L]\times[0,2\pi]} \rho J_n\Big(\frac{\xi_{n,j}}{L}\rho\Big)\cos(n\theta)J_m\Big(\frac{\xi_{m,k}}{L}\rho\Big)\cos(m\theta)\,d\rho\,d\theta\\
&=\int_0^L \rho J_n\Big(\frac{\xi_{n,j}}{L}\rho\Big)J_m\Big(\frac{\xi_{m,k}}{L}\rho\Big)d\rho\int_0^{2\pi}\cos(n\theta)\cos(m\theta)\,d\theta=0,
\end{aligned}
$$

perché

$$\int_0^{2\pi}\cos(n\theta)\cos(m\theta)\,d\theta=0.$$

In modo analogo si può dimostrare che si ha anche $\langle v_{n,j,1},v_{m,k,2}\rangle=0$, $\langle v_{n,j,2},v_{m,k,2}\rangle=0$, $\langle v_{n,j,1},v_{0,k}\rangle=0$, $\langle v_{n,j,2},v_{0,k}\rangle=0$ e $\langle v_{n,j,1},v_{n,k,2}\rangle=0$.

Se $j\neq k$ allora

$$
\begin{aligned}
\langle v_{n,j,1},v_{n,k,1}\rangle &= \int_{[0,L]\times[0,2\pi]} \rho J_n\Big(\frac{\xi_{n,j}}{L}\rho\Big)\cos(n\theta)J_n\Big(\frac{\xi_{n,k}}{L}\rho\Big)\cos(n\theta)\,d\rho\,d\theta\\
&=\int_0^L \rho J_n\Big(\frac{\xi_{n,j}}{L}\rho\Big)J_n\Big(\frac{\xi_{n,k}}{L}\rho\Big)d\rho\int_0^{2\pi}\cos^2(n\theta)\,d\theta=0
\end{aligned}
$$

perché

$$\int_0^L \rho J_n\Big(\frac{\xi_{n,j}}{L}\rho\Big)J_n\Big(\frac{\xi_{n,k}}{L}\rho\Big)d\rho=0.$$

Analogamente $\langle v_{n,j,2},v_{n,k,2}\rangle=0$ e $\langle v_{0,j},v_{0,k}\rangle=0$.

Si può dimostrare che il sistema delle autofunzioni è completo.

Nel caso che $\lambda>0$ non sia autovalore per il problema (3), consideriamo il problema con dati alla frontiera non omogenei:

$$
\begin{cases}
\Delta u(x,y)+\lambda u(x,y)=0 & (x,y)\in S(0,L)\\
u(x,y)=f(x,y) & (x,y)\in\partial S(0,L).
\end{cases}
\tag{5}
$$

Passando in coordinate polari il problema diventa

$$\begin{cases} v_{\rho\rho}(\rho,\theta)+\dfrac{1}{\rho}v_{\rho}(\rho,\theta)+\dfrac{1}{\rho^2}v_{\theta\theta}(\rho,\theta)+\lambda v(\rho,\theta)=0 & 0<\rho<L, 0\leq\theta\leq 2\pi \\ v(\rho,0)=v(\rho,2\pi) & 0<\rho<L \\ v_{\theta}(\rho,0)=v_{\theta}(\rho,2\pi) & 0<\rho<L \\ v(L,\theta)=g(\theta) & 0\leq\theta\leq 2\pi \\ v(0,\theta) \text{ indipendente da } \theta \end{cases}$$

dove $g(\theta)=f(\rho\cos\theta,\rho\operatorname{sen}\theta)$.

Procedendo come sopra, separando le variabili si ottengono le soluzioni dell'equazione di Helmholtz

$$\begin{aligned} &v_0(\rho,\theta)=J_0\big(\sqrt{\lambda}\rho\big) \\ &\left.\begin{aligned} v_{n,1}(\rho,\theta)&=J_n\big(\sqrt{\lambda}\rho\big)\cos(n\theta) \\ v_{n,2}(\rho,\theta)&=J_n\big(\sqrt{\lambda}\rho\big)\operatorname{sen}(n\theta)\end{aligned}\right\} \qquad n=1,2,\dots \end{aligned}$$

quindi cerchiamo una funzione che verifichi la condizione al bordo nella forma

$$v(\rho,\theta)=a_0J_0\big(\sqrt{\lambda}\rho\big)+\sum_{n=1}^{\infty}J_n\big(\sqrt{\lambda}\rho\big)\big(a_n\cos(n\theta)+b_n\operatorname{sen}(n\theta)\big).$$

La condizione $v(L,\theta)=g(\theta)$ è verificata se

$$g(\theta)=a_0J_0\big(\sqrt{\lambda}L\big)+\sum_{n=1}^{\infty}J_n\big(\sqrt{\lambda}L\big)\big(a_n\cos(n\theta)+b_n\operatorname{sen}(n\theta)\big),$$

quindi le costanti a_n e b_n si ricavano dai coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier di g.

Questo è possibile perché abbiamo supposto che λ non sia autovalore del problema omogeneo, quindi $J_n\big(\sqrt{\lambda}L\big)\neq 0$.

Dovrà essere

$$\begin{aligned} a_0&=\frac{1}{2\pi J_0\big(\sqrt{\lambda}L\big)}\int_0^{2\pi}g(\varphi)\,d\varphi \\ a_n&=\frac{1}{\pi J_n\big(\sqrt{\lambda}L\big)}\int_0^{2\pi}\cos(n\varphi)g(\varphi)\,d\varphi \\ b_n&=\frac{1}{\pi J_n\big(\sqrt{\lambda}L\big)}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}(n\varphi)g(\varphi)\,d\varphi. \end{aligned}$$

Perciò

$$\begin{aligned} &v(\rho,\theta)= \\ &=\frac{J_0\big(\sqrt{\lambda}\rho\big)}{2\pi J_0\big(\sqrt{\lambda}L\big)}\int_0^{2\pi}g(\varphi)\,d\varphi+ \\ &\quad+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_n\big(\sqrt{\lambda}\rho\big)}{\pi J_n\big(\sqrt{\lambda}L\big)}\int_0^{2\pi}\big(\cos(n\theta)\cos(n\varphi)+\operatorname{sen}(n\theta)\operatorname{sen}(n\varphi)\big)g(\varphi)\,d\varphi \end{aligned}$$

$$= \frac{J_0(\sqrt{\lambda}\rho)}{2\pi J_0(\sqrt{\lambda}L)} \int_0^{2\pi} g(\varphi)\,d\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(\sqrt{\lambda}\rho)}{\pi J_n(\sqrt{\lambda}L)} \int_0^{2\pi} \cos(n(\theta-\varphi))g(\varphi)\,d\varphi .$$

Se poniamo

$$P_\lambda(\rho,\theta) = \frac{J_0(\sqrt{\lambda}\rho)}{2\pi J_0(\sqrt{\lambda}L)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(\sqrt{\lambda}\rho)}{\pi J_n(\sqrt{\lambda}L)} \cos(n\theta),$$

allora abbiamo

$$v(\rho,\theta) = \int_0^{2\pi} P_\lambda(\rho,\theta-\varphi)g(\varphi)\,d\varphi .$$

Consideriamo ora il problema di Neumann per l'equazione di Helmholtz

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) + \lambda u(x,y) = 0 & (x,y) \in S(0,L) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x,y) = 0 & (x,y) \in \partial S(0,L) \end{cases} \tag{6}$$

indicando con $\dfrac{\partial}{\partial \nu}$ la derivata normale a $\partial S(0,L)$, cioè nella direzione $(x/L, y/L)$.

Cerchiamo gli autovalori di questo problema, cioè i λ per cui esiste una soluzione non identicamente nulla del problema.

Procedendo come nel caso del problema di Dirichlet si prova anzitutto che gli autovalori sono non negativi.

In questo caso 0 è autovalore e le relative autofunzioni sono le funzioni costanti. Inoltre se $\overline{\xi}_{n,1}, \overline{\xi}_{n,2}, \ldots$ sono gli zeri positivi della funzione J_n', gli autovalori sono

$$\lambda = \frac{\overline{\xi}^2_{n,j}}{L^2}$$

e le corrispondenti autofunzioni sono

$$\begin{aligned} & v_{0,j}(\rho,\theta) = J_0\Big(\frac{\overline{\xi}_{0,j}}{L}\rho\Big) && j = 1,2,\ldots \\ & \left.\begin{aligned} v_{n,j,1}(\rho,\theta) &= J_n\Big(\frac{\overline{\xi}_{n,j}}{L}\rho\Big)\cos(n\theta) \\ v_{n,j,2}(\rho,\theta) &= J_n\Big(\frac{\overline{\xi}_{n,j}}{L}\rho\Big)\mathrm{sen}(n\theta) \end{aligned}\right\} && n = 1,2,\ldots \quad j = 1,2,\ldots \end{aligned}$$

Equazione di Helmholtz nel piano

Cerchiamo gli autovalori del seguente problema per l'equazione di Helmholtz

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) + \lambda u(x,y) = 0 & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ u \text{ limitata} \end{cases} \tag{7}$$

Utilizziamo il metodo di separazione delle variabili, sia in coordinate cartesiane che in coordinate polari.

In coordinate cartesiane, procedendo in modo analogo a quanto fatto per il problema nel rettangolo, dobbiamo trovare due funzioni X e Y limitate e non identicamente nulle, tali che

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=k \qquad\qquad -\frac{Y''(y)}{Y(y)}-\lambda=k\,.$$

per un $k\in\mathbb{R}$.

L'equazione

$$X''(x)-kX(x)=0$$

ha soluzioni limitate se e solo se $k\leq 0$, in particolare se $k=0$ si ha la soluzione $X(x)=1$, mentre se $k<0$ si hanno le due soluzioni linearmente indipendenti $X(x)=\cos\bigl(\sqrt{-k}\,x\bigr)$ e $X(x)=\operatorname{sen}\bigl(\sqrt{-k}\,x\bigr)$.

Quando $k<0$ possiamo scrivere le combinazioni lineari di queste funzioni come

$$\begin{aligned}
&c_1\cos\bigl(\sqrt{-k}\,x\bigr)+c_2\operatorname{sen}\bigl(\sqrt{-k}\,x\bigr)=\\
&\qquad=\sqrt{c_1^2+c_2^2}\Biggl(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\cos\bigl(\sqrt{-k}\,x\bigr)+\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\operatorname{sen}\bigl(\sqrt{-k}\,x\bigr)\Biggr).
\end{aligned}$$

Due numeri tali che la somma dei loro quadrati vale 1 possono sempre essere scritti come coseno e seno di uno stesso numero, perciò esiste $x_0\in\mathbb{R}$ tale che

$$\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}=\cos\bigl(\sqrt{-k}\,x_0\bigr) \qquad \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}=\operatorname{sen}\bigl(\sqrt{-k}\,x_0\bigr),$$

quindi

$$\begin{aligned}
&c_1\cos\bigl(\sqrt{-k}\,x\bigr)+c_2\operatorname{sen}\bigl(\sqrt{-k}\,x\bigr)=\\
&\qquad=\sqrt{c_1^2+c_2^2}\Bigl(\cos\bigl(\sqrt{-k}\,x_0\bigr)\cos\bigl(\sqrt{-k}\,x\bigr)+\operatorname{sen}\bigl(\sqrt{-k}\,x_0\bigr)\operatorname{sen}\bigl(\sqrt{-k}\,x\bigr)\Bigr)=\\
&\qquad\qquad=\sqrt{c_1^2+c_2^2}\cos\bigl(\sqrt{-k}\,(x-x_0)\bigr);
\end{aligned}$$

cioè ogni combinazione lineare può essere scritta nella forma

$$X(x)=c\cos\bigl(\sqrt{-k}\,(x-x_0)\bigr).$$

Ciò vale anche se $k=0$.

L'equazione

$$Y''(y)+(\lambda+k)Y(y)=0$$

è del tutto analoga a quella relativa alla funzione X, con $-\lambda-k$ al posto di k. Perciò questa equazione ha soluzioni limitate se e solo se $\lambda+k\geq 0$, cioè $\lambda\geq -k$. Anche in questo caso le soluzioni possono essere scritte nella forma $c\cos\bigl(\sqrt{\lambda+k}\,(y-y_0)\bigr)$ con $c,y_0\in\mathbb{R}$.

Possiamo concludere che ogni λ non negativo è autovalore; le autofunzioni sono

$$c\cos\bigl(\sqrt{-k}(x-x_0)\bigr)\cos\bigl(\sqrt{\lambda+k}(y-y_0)\bigr)$$

qualunque siano $x_0,y_0\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $k\in[-\lambda,0]$. Queste funzioni possono anche essere scritte nella forma

$$c\cos\bigl(\alpha(x-x_0)\bigr)\cos\bigl(\beta(y-y_0)\bigr)$$

con $\alpha,\beta\geq 0$ tali che $\alpha^2+\beta^2=\lambda$.

Osserviamo che in questo caso abbiamo infiniti autovalori per ciascuno dei quali (con l'esclusione di $\lambda = 0$) vi sono infinite autofunzioni linearmente indipendenti.

Ponendosi in ambito complesso, invece di $\cos\bigl(\sqrt{-k}\,x\bigr)$ e $\operatorname{sen}\bigl(\sqrt{-k}\,x\bigr)$ dovremo considerare le funzioni $e^{i\sqrt{-k}\,x}$ e $e^{-i\sqrt{-k}\,x}$; mentre al posto di $\cos\bigl(\sqrt{\lambda+k}\,y\bigr)$ e $\operatorname{sen}\bigl(\sqrt{\lambda+k}\,y\bigr)$ dovremo considerare le funzioni $e^{i\sqrt{\lambda+k}\,y}$ e $e^{-i\sqrt{\lambda+k}\,y}$.

In questo modo otteniamo le autofunzioni

$$e^{i(\alpha x+\beta y)},$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $\alpha^2 + \beta^2 = \lambda$.

Consideriamo ora l'equazione in coordinate polari, limitandoci al caso $\lambda > 0$.

Procedendo per separazione di variabili dobbiamo trovare due funzioni R e Θ tali che

$$\rho^2 \frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \rho \frac{R'(\rho)}{R(\rho)} + \lambda\rho^2 = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = k,$$

per un $k \in \mathbb{R}$. Come nel caso del cerchio, la funzione Θ deve soddisfare le condizioni periodiche, quindi deve essere $k = n^2$ con $n \in \mathbb{N}$ e

$$\Theta(\theta) = c_1 \cos(n\theta) + c_2 \operatorname{sen}(n\theta).$$

La funzione R deve soddisfare l'equazione

$$R''(\rho) + \frac{1}{\rho} R'(\rho) + \left(\lambda - \frac{n^2}{\rho^2}\right) R(\rho) = 0$$

e deve avere limite reale per ρ che tende a 0, quindi, ripetendo quanto già visto,

$$R(\rho) = c J_n\bigl(\sqrt{\lambda}\,\rho\bigr).$$

Perciò ogni $\lambda \in \mathbb{R}^+$ è autovalore a cui corrispondono le autofunzioni

$$v(\rho,\theta) = J_n\bigl(\sqrt{\lambda}\,\rho\bigr)\bigl(c_1 \cos(n\theta) + c_2 \operatorname{sen}(n\theta)\bigr),$$

con $n \in \mathbb{N}$.

Le funzioni di Bessel hanno limite 0 all'infinito, quindi queste autofunzioni hanno limite 0 per ρ che tende a ∞, cioè sono autofunzioni del seguente problema più restrittivo di (7)

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) + \lambda u(x,y) = 0 & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ \lim\limits_{\|(x,y)\| \to \infty} u(x,y) = 0 \end{cases}$$

In ambito complesso, si hanno le autofunzioni

$$c J_n\bigl(\sqrt{\lambda}\,\rho\bigr) e^{in\theta},$$

con $n \in \mathbb{Z}$ (ricordando che se n è intero positivo allora $J_{-n} = (-1)^n J_n$).

Vediamo un collegamento tra le autofunzioni trovate per separazione di variabili esprimendo la funzione incognita in coordinate cartesiane e quelle trovate esprimendo la funzione incognita in coordinate polari.

In coordinate polari l'autofunzione $e^{i(\alpha x+\beta y)}$ diventa $e^{i\rho(\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta)}$. Abbiamo

$$\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\Big(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\cos\theta+\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\sin\theta\Big),$$

quindi se poniamo $\lambda=\alpha^2+\beta^2$ e scegliamo θ_0 tale che

$$\operatorname{sen}\theta_0=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},\qquad \cos\theta_0=\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$

allora si ha

$$\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta=\sqrt{\lambda}\big(\operatorname{sen}\theta_0\cos\theta+\cos\theta_0\sin\theta\big)=\sqrt{\lambda}\operatorname{sen}(\theta+\theta_0),$$

quindi l'autofunzione è

$$e^{i\sqrt{\lambda}\rho\operatorname{sen}(\theta+\theta_0)}.$$

Ricordando la formula

$$e^{ix\operatorname{sen}\theta}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)e^{in\theta}$$

si ha

$$e^{i\rho\sqrt{\lambda}\operatorname{sen}(\theta+\theta_0)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n\big(\sqrt{\lambda}\rho\big)e^{in(\theta+\theta_0)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{in\theta_0}J_n\big(\sqrt{\lambda}\rho\big)e^{in\theta}$$

e quindi le autofunzioni ottenute per separazione di variabili in coordinate cartesiane si ottengono mediante una serie i cui addendi sono le autofunzioni trovate in coordinate polari.

Equazione di Helmholtz nell'esterno di un cerchio

Cerchiamo gli autovalori del problema di Dirichlet per l'equazione di Helmholtz

$$\begin{cases}\Delta u(x,y)+\lambda u(x,y)=0 & (x,y)\notin\overline{S(0,L)}\\ u(x,y)=0 & (x,y)\in\partial S(0,L)\\ \lim\limits_{\|(x,y)\|\to\infty}u(x,y)=0\end{cases}\tag{8}$$

dove $S(0,L)$ è il cerchio di centro l'origine e raggio L.

Procedendo per separazione di variabili in coordinate polari, dobbiamo trovare due funzioni R e Θ tali che

$$\rho^2\frac{R''(\rho)}{R(\rho)}+\rho\frac{R'(\rho)}{R(\rho)}+\lambda\rho^2=-\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}=k,$$

per un $k\in\mathbb{R}$.

Procedendo come nel caso del cerchio, viste le condizioni a cui deve soddisfare Θ, deve essere deve essere $k=n^2$ con $n\in\mathbb{N}$ e

$$\Theta(\theta)=c_1\cos(n\theta)+c_2\operatorname{sen}(n\theta).$$

La funzione R deve soddisfare l'equazione

$$R''(\rho)+\frac{1}{\rho}R'(\rho)+\Big(\lambda-\frac{n^2}{\rho^2}\Big)R(\rho)=0,$$

con le condizioni

$$\begin{cases} R(L) = 0 \\ \lim\limits_{\rho\to\infty} R(\rho) = 0. \end{cases}$$

Questa è un'equazione di Bessel se $\lambda = 1$ e, come già visto, se $\lambda > 0$ ci si può ricondurre a un'equazione di Bessel con un cambiamento di variabili; perciò l'integrale generale dell'equazione è

$$R(\rho) = d_1 J_n(\sqrt{\lambda}\rho) + d_2 Y_n(\sqrt{\lambda}\rho).$$

Ognuna di queste funzioni verifica la condizione all'infinito, perché le funzioni di Bessel hanno limite 0 all'infinito.

Inoltre deve essere soddisfatta la condizione sulla frontiera del cerchio, quindi deve essere

$$d_1 J_n(\sqrt{\lambda}L) + d_2 Y_n(\sqrt{\lambda}L) = 0.$$

Le funzioni di Bessel di prima e seconda specie non hanno zeri in comune, quindi almeno uno dei coefficienti è non nullo, perciò l'equazione ha infinite soluzioni che formano uno spazio vettoriale di dimensione 1. Possiamo scegliere

$$\begin{aligned} d_1 &= Y_n(\sqrt{\lambda}L) \\ d_2 &= -J_n(\sqrt{\lambda}L). \end{aligned}$$

Perciò qualunque $\lambda > 0$ è autovalore per (8) a cui corrispondono le infinite autofunzioni linearmente indipendenti

$$\Big(Y_n(\sqrt{\lambda}L)J_n(\sqrt{\lambda}\rho) - J_n(\sqrt{\lambda}L)\,Y_n(\sqrt{\lambda}\rho)\Big)\cos(n\theta)$$
$$\Big(Y_n(\sqrt{\lambda}L)J_n(\sqrt{\lambda}\rho) - J_n(\sqrt{\lambda}L)\,Y_n(\sqrt{\lambda}\rho)\Big)\operatorname{sen}(n\theta)$$

con $n \in \mathbb{N}$ (ovviamente per $n = 0$ non va considerata la soluzione con $\operatorname{sen}(n\theta)$).

Il problema dato ammette quindi sempre infinite soluzioni; è possibile individuarne una aggiungendo una condizione sul comportamento della soluzione all'infinito. Per esprimere questa condizione è necessario studiare il problema in ambito complesso.

Introducendo le funzioni di Hankel $H_n^{(1)}$ e $H_n^{(2)}$, definite da

$$H_n^{(1)}(t) = J_n(t) + i Y_n(t) \qquad H_n^{(2)}(t) = J_n(t) - i Y_n(t)$$

le soluzioni del problema

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) + \lambda u(x,y) = 0 & (x,y) \notin \overline{S(0,L)} \\ \lim\limits_{\|(x,y)\|\to\infty} u(x,y) = 0 \end{cases}$$

che abbiamo trovato possono essere espresse come combinazione lineare di

$$H_n^{(1)}(\sqrt{\lambda}\rho)e^{in\theta} \qquad H_n^{(1)}(\sqrt{\lambda}\rho)e^{-in\theta} \qquad H_n^{(2)}(\sqrt{\lambda}\rho)e^{in\theta} \qquad H_n^{(2)}(\sqrt{\lambda}\rho)e^{-in\theta}$$

con $n \in \mathbb{N}$ o anche

$$H_{|n|}^{(1)}(\sqrt{\lambda}\rho)e^{in\theta} \qquad H_{|n|}^{(2)}(\sqrt{\lambda}\rho)e^{in\theta}$$

con $n \in \mathbb{Z}$.

Per t che tende a ∞ il comportamento asintotico di J_n e Y_n è

$$J_n(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\cos\left(t-\frac{2n+1}{4}\pi\right)+o\left(t^{-1/2}\right),$$
$$Y_n(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\operatorname{sen}\left(t-\frac{2n+1}{4}\pi\right)+o\left(t^{-1/2}\right),$$

quindi

$$\begin{aligned}H_n^{(1)}(t)&=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\left(\cos\left(t-\frac{2n+1}{4}\pi\right)+i\operatorname{sen}\left(t-\frac{2n+1}{4}\pi\right)\right)+o\left(t^{-1/2}\right)=\\&=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}e^{i\left(t-\frac{2n+1}{4}\pi\right)}+o\left(t^{-1/2}\right)\\H_n^{(2)}(t)&=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\left(\cos\left(t-\frac{2n+1}{4}\pi\right)-i\operatorname{sen}\left(t-\frac{2n+1}{4}\pi\right)\right)+o\left(t^{-1/2}\right)=\\&=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}e^{-i\left(t-\frac{2n+1}{4}\pi\right)}+o\left(t^{-1/2}\right).\end{aligned}$$

Perciò le soluzioni trovate verificano

$$\begin{aligned}H_{|n|}^{(1)}(\sqrt{\lambda}\rho)e^{in\theta}&=\sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{\lambda}\rho}}e^{i\left(\sqrt{\lambda}\rho-\frac{2|n|+1}{4}\pi\right)}e^{in\theta}+o\left(\rho^{-1/2}\right)=\\&=C_{n,\theta}\rho^{-1/2}e^{i\sqrt{\lambda}\rho}+o\left(\rho^{-1/2}\right)\\H_{|n|}^{(2)}(\sqrt{\lambda}\rho)e^{in\theta}&=\sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{\lambda}\rho}}e^{-i\left(\sqrt{\lambda}\rho-\frac{2|n|+1}{4}\pi\right)}e^{in\theta}+o\left(\rho^{-1/2}\right)=\\&=D_{n,\theta}\rho^{-1/2}e^{-i\sqrt{\lambda}\rho}+o\left(\rho^{-1/2}\right).\end{aligned}$$

Consideriamo le funzioni R_1 e R_2 tali che

$$R_1(\rho)=\rho^{-1/2}e^{i\sqrt{\lambda}\rho}\quad,\quad R_2(\rho)=\rho^{-1/2}e^{-i\sqrt{\lambda}\rho}.$$

Si ha

$$\begin{aligned}R_1'(\rho)&=-\frac{1}{2}\rho^{-3/2}e^{i\sqrt{\lambda}\rho}+i\sqrt{\lambda}\rho^{-1/2}e^{i\sqrt{\lambda}\rho}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\rho}R_1(\rho)+i\sqrt{\lambda}R_1(\rho)\\R_2'(\rho)&=-\frac{1}{2}\rho^{-3/2}e^{-i\sqrt{\lambda}\rho}-i\sqrt{\lambda}\rho^{-1/2}e^{-i\sqrt{\lambda}\rho}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\rho}R_2(\rho)-i\sqrt{\lambda}R_2(\rho).\end{aligned}$$

Quindi abbiamo

$$R_1'(\rho)-i\sqrt{\lambda}R_1(\rho)=-\frac{1}{2}\frac{1}{\rho}R_1(\rho)=o\left(\rho^{-1/2}\right),$$

mentre

$$R_2'(\rho)-i\sqrt{\lambda}R_2(\rho)=-\frac{1}{2}\frac{1}{\rho}R_2(\rho)-2i\sqrt{\lambda}R_2(\rho)\sim c\rho^{-1/2}.$$

Si può dimostrare che ciò che vale per R_1 vale anche per $H_n^{(1)}(\sqrt{\lambda}\rho)$, mentre ciò che vale per R_2 vale anche per $H_n^{(2)}(\sqrt{\lambda}\rho)$. Perciò le soluzioni dell'equazione di Helmholtz che soddisfano la condizione

$$\lim_{\rho\to\infty}\sqrt{\rho}\Big(\frac{\partial u}{\partial\rho}(\rho,\theta)-i\sqrt{\lambda}u(\rho,\theta)\Big)=0$$

sono combinazione lineare delle funzioni del tipo

$$H^{(1)}_{|n|}\big(\sqrt{\lambda}\rho\big)e^{in\theta}.$$

Le funzioni J_n e Y_n non hanno zeri comuni, quindi la funzione $H^{(1)}_n$ è sempre diversa da 0, perciò l'unica soluzione nulla su $\partial S(0,L)$ che soddisfa la condizione scritta sopra è quella identicamente nulla.

La condizione

$$\lim_{\rho\to\infty}\sqrt{\rho}\Big(\frac{\partial u}{\partial\rho}(\rho,\theta)-i\sqrt{\lambda}u(\rho,\theta)\Big)=0$$

è detta condizione di radiazione di Sommerfeld.

Con discorsi analoghi a quelli fatti per trattare l'equazione di Helmholtz in un cerchio con dato non omogeneo sulla frontiera, possiamo concludere che per $\lambda\in\mathbb{R}^+$ il problema non omogeneo

$$\begin{cases}\Delta u(x,y)+\lambda u(x,y)=0 & (x,y)\notin\overline{S(0,L)}\\ u(x,y)=f(x,y) & (x,y)\in\partial S(0,L)\\ \lim\limits_{\|(x,y)\|\to\infty}u(x,y)=0 & \\ \lim\limits_{\|(x,y)\|\to\infty}\|(x,y)\|^{1/2}\Big(\dfrac{\langle\operatorname{grad}u(x,y),(x,y)\rangle}{\|(x,y)\|}-i\sqrt{\lambda}u(x,y)\Big)=0, & \end{cases}\tag{9}$$

ha una soluzione che può essere espressa in forma di serie di potenze

$$v(\rho,\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_nH^{(1)}_{|n|}\big(\sqrt{\lambda}\rho\big)e^{in\theta}$$

con i c_n scelti in modo che

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_nH^{(1)}_{|n|}\big(\sqrt{\lambda}L\big)e^{in\theta}=f(L\cos\theta,L\operatorname{sen}\theta);$$

cioè $c_nH^{(1)}_{|n|}\big(\sqrt{\lambda}L\big)$ deve essere l' n -simo coefficiente dello sviluppo in serie di Fourier della funzione $\theta\mapsto f(L\cos\theta,L\operatorname{sen}\theta)$.

Soluzione fondamentale dell'equazione di Helmholtz

Cerchiamo ora una soluzione fondamentale per l'equazione di Helmholtz, cioè cerchiamo una distribuzione $u\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ tale che

$$\Delta u+\lambda u=\delta,$$

dove $\lambda\in\mathbb{R}^+$.

Visto che il supporto della distribuzione δ è $\{(0,0)\}$, è ragionevole aspettarsi che per $(x,y)\neq(0,0)$ u verifichi l'equazione di Helmholtz nel senso delle funzioni. Cerchiamo quindi una distribuzione che sull'insieme $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ coincida con una funzione tale che

$$\Delta u(x,y)+\lambda u(x,y)=0\qquad (x,y)\neq(0,0).$$

Questa equazione ha simmetria radiale, per questo motivo cerchiamo una u a simmetria radiale, cioè una funzione il cui valore in (x,y) dipende solo da $\|(x,y)\|$. È chiaro che non c'è nessun motivo per cui debbano esistere solo soluzioni radiali, ed in effetti esistono anche numerose soluzioni non radiali; tuttavia non ci interessano tutte le soluzioni, ma vogliamo trovarne almeno una. Perciò cerchiamo una soluzione nella forma $u(x,y)=f\big(\|(x,y)\|\big)$, dove f è una funzione definita in $\mathbb{R}^+$.

Ricordando l'espressione del laplaciano in coordinate polari, il fatto che u radiale soddisfi l'equazione di Helmholtz equivale a

$$f''(\rho)+\frac{1}{\rho}f'(\rho)+\lambda f(\rho)=0.$$

Moltiplicando per ρ^2, questa diventa l'equazione (4) con $n=0$ ed abbiamo già visto che ha come soluzioni le funzioni

$$f(\rho)=c_1 J_0\big(\sqrt{\lambda}\rho\big)+c_2 Y_0\big(\sqrt{\lambda}\rho\big).$$

Una soluzione fondamentale ha come laplaciano la distribuzione δ, quindi non può essere una funzione regolare. Per questo motivo ci interessa una f del tipo $f(\rho)=Y_0\big(\sqrt{\lambda}\rho\big)$.

Posto

$$u(x,y)=Y_0\Big(\sqrt{\lambda(x^2+y^2)}\Big),$$

calcoliamo

$$\Delta u(x,y)+\lambda u(x,y)$$

nel senso delle distribuzioni.

Sia $v\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$.

$$\big\langle \Delta u(x,y)+\lambda u(x,y), v(x,y)\big\rangle=\big\langle u(x,y)), \Delta v(x,y)+\lambda v(x,y)\big\rangle.$$

Perciò, indicando con w la funzione v espressa in coordinate polari, abbiamo

$$\begin{aligned}
&\big\langle \Delta u(x,y)+\lambda u(x,y), v(x,y)\big\rangle=\\
&=\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\rho Y_0\big(\sqrt{\lambda}\rho\big)\times\\
&\qquad\times\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial\rho^2}(\rho,\theta)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial\rho}(\rho,\theta)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}(\rho,\theta)+\lambda w(\rho,\theta)\Big)d\theta\, d\rho\\
&=\int_0^{2\pi}\int_0^\infty Y_0\big(\sqrt{\lambda}\rho\big)\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\rho\frac{\partial w}{\partial\rho}(\rho,\theta)\Big)d\rho\, d\theta+\\
&\qquad+\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\frac{1}{\rho}Y_0\big(\sqrt{\lambda}\rho\big)\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}(\rho,\theta)\,d\theta\, d\rho+\\
&\qquad+\int_0^{2\pi}\int_0^\infty\lambda\rho Y_0\big(\sqrt{\lambda}\rho\big)w(\rho,\theta)\,d\rho\, d\theta.
\end{aligned}$$

Integrando per parti rispetto a ρ, abbiamo:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\int_0^\infty Y_0\big(\sqrt{\lambda}\rho\big)\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\rho\frac{\partial w}{\partial\rho}(\rho,\theta)\Big)d\rho\, d\theta=\\
&=\int_0^{2\pi}\Big[Y_0\big(\sqrt{\lambda}\rho\big)\rho\frac{\partial w}{\partial\rho}(\rho,\theta)\Big]_{\rho=0}^{\rho=\infty}d\theta-\int_0^{2\pi}\int_0^\infty\sqrt{\lambda}\,Y_0'\big(\sqrt{\lambda}\rho\big)\rho\frac{\partial w}{\partial\rho}(\rho,\theta)\,d\rho\, d\theta.
\end{aligned}$$

Il primo addendo è nullo, perché si può dimostrare che $\lim_{t\to 0} tY_0(t) = 0$ ed inoltre $w(\rho)$ è nulla per ρ grande, visto che è ottenuta trasformando in coordinate polari una funzione a supporto compatto. Quindi otteniamo

$$-\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \sqrt{\lambda}\, Y_0'(\sqrt{\lambda}\rho)\rho \frac{\partial w}{\partial \rho}(\rho,\theta)\, d\rho\, d\theta\,.$$

Integrando nuovamente per parti, la quantità scritta sopra è uguale a:

$$-\int_0^{2\pi}\Big[\sqrt{\lambda}\, Y_0'(\sqrt{\lambda}\rho)\rho w(\rho,\theta)\Big]_{\rho=0}^{\rho=\infty} d\theta +$$
$$+\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\Big(\lambda\rho Y_0''(\sqrt{\lambda}\rho) + \sqrt{\lambda}\, Y_0'(\sqrt{\lambda}\rho)\Big) w(\rho,\theta)\, d\rho\, d\theta\,.$$

Si può dimostrare che $\lim_{t\to 0} tY_0'(t) = 2/\pi$, quindi si ottiene

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} w(0,\theta)\, d\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\Big(\lambda\rho Y_0''(\sqrt{\lambda}\rho) + \sqrt{\lambda}\, Y_0'(\sqrt{\lambda}\rho)\Big) w(\rho,\theta)\, d\rho\, d\theta\,.$$

Visto che w è la funzione v in coordinate polari, qualunque sia θ si ha $w(0,\theta) = v(0,0)$, quindi

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} w(0,\theta)\, d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} v(0,0)\, d\theta = 4v(0,0)\,.$$

Inoltre

$$\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho} Y_0(\sqrt{\lambda}\rho) \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}(\rho,\theta)\, d\theta\, d\rho = \int_0^{\infty} \frac{1}{\rho} Y_0(\sqrt{\lambda}\rho) \Big[\frac{\partial w}{\partial \theta}(\rho,\theta)\Big]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\rho = 0\,.$$

Perciò abbiamo

$$\big\langle \Delta u(x^2+y^2) + \lambda u(x^2+y^2), v(x,y)\big\rangle =$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\Big(\lambda\rho Y_0''(\sqrt{\lambda}\rho) + \sqrt{\lambda}\, Y_0'(\sqrt{\lambda}\rho) + \lambda\rho Y_0(\sqrt{\lambda}\rho)\Big) w(\rho,\theta)\, d\rho\, d\theta +$$
$$+ 4v(0,0)\,.$$

La funzione Y_0 è soluzione dell'equazione di Bessel di ordine 0

$$t^2 y''(t) + t y'(t) + t^2 y(t) = 0\,,$$

quindi, ponendo $t = \sqrt{\lambda}\rho$,

$$\lambda\rho^2 Y_0''(\sqrt{\lambda}\rho) + \sqrt{\lambda}\rho Y_0'(\sqrt{\lambda}\rho) + \lambda\rho^2 Y_0(\sqrt{\lambda}\rho) = 0\,;$$

perciò il primo addendo scritto sopra è nullo, e abbiamo

$$\Big\langle \Delta Y_0\big(\sqrt{\lambda(x^2+y^2)}\big) + \lambda Y_0\big(\sqrt{\lambda(x^2+y^2)}\big), v(x,y)\Big\rangle = 4v(0,0) = 4\langle \delta, v\rangle\,;$$

quindi $\frac{1}{4} Y_0\big(\sqrt{\lambda(x^2+y^2)}\big)$ è soluzione fondamentale per l'equazione di Helmholtz.