Il minimo pratico di Analisi Matematica A

Nicola Arcozzi
Mattia Galeotti

2024

Prefazione

In queste note trovate esercizi utili a: meglio assimilare la teoria, applicarla a oggetti più particolari e concreti di quelli generali che si trovano nelle ipotesi e tesi dei teoremi, prepararsi per la prova scritta. L'ultima sezione ha le soluzioni di tutti gli esercizi. Essendo questi molti e scrivendo il file di fretta, se trovate errori segnalateceli e li correggeremo prontamente. Non abbiamo messo lo svolgimento di nessun esercizio: per questo avete gli appunti che avete preso a lezione.

Tra gli esercizi ne trovate molti che sono nella forma vero/falso. L'affermazione è da ritenersi falsa se e solo se esiste un esempio concreto che non la soddisfa. Li si può svolgere in ordine decrescente di indolenza: rispondendo alla domanda senza motivazione; provvedendo controesempi alle affermazioni false; provvedendo controesempi a quelle false e dimostrazioni per quelle vere. Secondo la nostra esperienza, è utile rispondere ad almeno alcune delle domande articolando nei dettagli le motivazioni della risposta.

Indice

1 Numeri, operazioni, insiemi, funzioni

1.1 Numeri naturali, interi, razionali

1.1.1 Numeri naturali

Esercizio 1.1 *(i) Scrivere l'insieme dei divisori di* 8, 18, 30*. Avendo fatto ciò, possiamo calcolare velocemente il numero di divisori di* 27, 12, 42*?*

(ii) Siano $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq 1$, $m : n = q$ *con resto di* r*. Mostrare che se* $p \geq 1$ *divide* m *e* n*, allora divide anche* r*.*

(iii) Mostrare che la differenza dei quadrati di due numeri interi successivi è un numero dispari.

(iv) Usare (iii) per calcolare velocemente $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19$.

(v) Sia n *un numero naturale positivo. Mostrare che* $n^2 - 1$ *è dispari o è divisibile per* 8*.*

(vi) Mostrare che per ogni numero naturale n*,*

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

1.1.2 I numeri interi

Esercizio 1.2 *(i) Al variare di* n *in* $\mathbb{Z}$*, calcolare il valore di* $(-1)^n$*, di* $(-1)^{n^2}$ *e di* $\frac{1-(-1)^n}{2}$.

(2) Siano m, n *interi e* x *un razionale. Calcolare le potenze:*

$$(xy)^m,\ x^{m+n},\ x^{-m},\ x^{m-n},\ (x^m)^n\,.$$

(iii) Vero o falso? Un sottoinsieme A *di* $\mathbb{N}$ *ha sempre minimo: esiste* $m \in A$ *tale che* $m \leq n$ *per ogni* $n \in A$*?*

(iv) Vero o falso? Un sottoinsieme A *di* $\mathbb{Z}$ *ha sempre minimo?*

(v) Vero o falso: per ogni coppia m, n *di numeri interi con* $m < n$*, esiste un intero* p *tale che* $m < p < n$*?*

(vi) Un sottoinsieme A *di* $\mathbb{Z}$ *è* **inferiormente limitato** *se esiste* l *intero tale che* $l \leq n$ *per ogni* n *in* A*. Vero o falso: se* A *è inferiormente limitato, allora ha minimo.*

1.1.3 I numeri razionali

Esercizio 1.3 *Risolvere in $\mathbb{Q}$ le seguenti equazioni e disequazioni (lo si può fare senza fare conti).*

(i) *Equazioni.*

$$(x-1)(x+2)=0;\ \frac{x-1}{x+2}=0;\ \frac{1}{(x-1)(x+2)}=0;$$
$$\frac{(x-1)^2}{x+2}=0;\ (x^2-1)(x^2+2)=0;\ x^2=2.$$

(ii) *Disequazioni.*

$$(x-1)(x+2)>0;\ (x-1)(x+2)<0;\ (x-1)(x+2)\leq 0;$$
$$\frac{x-1}{x+2}>0;\ \frac{x-1}{x+2}\geq 0;$$
$$\frac{1}{(x-1)(x+2)}\geq 0;\ \frac{1}{(x-1)(x+2)}<0;$$
$$\frac{(x-1)^2}{x+2}\geq 0;\ \frac{(x-1)^2}{x+2}>0;\ (x^2-1)(x^2+2)\geq 0;\ x^2\geq 2.$$

1.2 Insiemi e funzioni

1.2.1 Linguaggio e logica

1.2.2 Insiemi

Esercizio 1.4 *Dire quali delle seguenti proprietà valgono per ogni terna A, B, C di insiemi.*

(i) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup C$

(ii) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

(iii) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap C$

(iv) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

(v) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

(vi) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$

(vii) $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$

(viii) $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

(ix) $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\setminus C$

(x) $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\cap B\cap C)$

(xi) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

(xii) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

(xiii) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times C) \cup (B \times D)$

(xiv) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \times (B \times C)$

1.2.3 Funzioni

Esercizio 1.5 *Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false per ogni funzione $f : A \to B$.*

(i) *Per ogni scelta di $E, F \subseteq A$, si ha che $f(E) \cup f(F) = f(E \cup F)$.*

(ii) *Per ogni scelta di $E, F \subseteq A$, si ha che $f(E) \cap f(F) = f(E \cap F)$.*

(iii) *Per ogni scelta di $E, F \subseteq A$, se $E \cap F = \emptyset$, allora si ha che $f(E) \cap f(F) = \emptyset$.*

(iv) *Per ogni scelta di $E, F \subseteq A$, si ha che $f(E) \setminus f(F) = f(E \setminus F)$.*

(v) *Se f è suriettiva, allora per ogni scelta di $E, F \subseteq A$, si ha che $f(E) \cap f(F) = f(E \cap F)$.*

(vi) *Se f è iniettiva, allora per ogni scelta di $E, F \subseteq A$, si ha che $f(E) \cap f(F) = f(E \cap F)$.*

(vii) *Sia f suriettiva. Per ogni scelta di $E, F \subseteq A$, se $E \cap F = \emptyset$, allora si ha che $f(E) \cap f(F) = \emptyset$.*

(viii) *Sia f iniettiva. Per ogni scelta di $E, F \subseteq A$, se $E \cap F = \emptyset$, allora si ha che $f(E) \cap f(F) = \emptyset$.*

(xi) *Se f è suriettiva, allora per ogni scelta di $E, F \subseteq A$, si ha che $f(E) \setminus f(F) = f(E \setminus F)$.*

(x) *Se f è iniettiva, allora per ogni scelta di $E, F \subseteq A$, si ha che $f(E) \setminus f(F) = f(E \setminus F)$.*

(xi) *Per ogni scelta di $P, Q \subseteq B$, si ha che $f^{-1}(P) \cup f^{-1}(Q) = f^{-1}(P \cup Q)$.*

(xii) *Per ogni scelta di $P, Q \subseteq B$, si ha che $f^{-1}(P) \cap f^{-1}(Q) = f^{-1}(P \cap Q)$.*

(xiii) *Per ogni scelta di $P, Q \subseteq B$, si ha che $f^{-1}(P) \setminus f^{-1}(Q) = f^{-1}(P \setminus Q)$.*

(xiv) *Per ogni scelta di $E, F \subseteq A$, si ha che $f(E) \cap f(F) \subseteq f(E \cap F)$.*

(xv) *Per ogni scelta di $E, F \subseteq A$, si ha che $f(E) \cap f(F) \supseteq f(E \cap F)$.*

Esercizio 1.6 *Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false per ogni coppia di funzioni $f : A \to B$, $g : C \to D$ tali che $f(A) \subseteq C$.*

(i) *Se g è suriettiva, allora $g \circ f$ è suriettiva.*

(ii) *Se f è suriettiva, allora $g \circ f$ è suriettiva.*

(iii) *Se g e f sono suriettive, allora $g \circ f$ è suriettiva.*

(iv) *Se g è iniettiva, allora $g \circ f$ è iniettiva.*

(v) *Se f è iniettiva, allora $g \circ f$ è iniettiva.*

(vi) *Se g e f sono iniettive, allora $g \circ f$ è iniettiva.*

(vii) *Se g e f sono biunivoche, allora $(g \circ f)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.*

(viii) *Se g e f sono biunivoche, allora $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

(ix) *Se $A = B$ e $f = I_A$, allora $g \circ f = g$.*

(x) *Se $C = D$ e $g = I_C$, allora $g \circ f = f$.*

(xi) *Se f è costante, allora $g \circ f$ è costante.*

(xii) *Se g è costante, allora $g \circ f$ è costante.*

(xiii) *Se $g \circ f$ è costante, allora f è costante o g è costante.*

2 Numeri reali

2.1 Numeri reali

Esercizio 2.1 *Dire quali delle seguenti proprietà valgono per ogni coppia A, B di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Negli enunciati (ix)-(xii), $-A = \{x : -x \in A\}$.*

(i) $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$

(ii) $\sup(A \cap B) = \max(\sup A, \sup B)$

(iii) $\sup(A \cup B) = \min(\sup A, \sup B)$

(iv) $\sup(A \cap B) = \min(\sup A, \sup B)$

(v) $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$

(vi) $\inf(A \cap B) = \min(\inf A, \inf B)$

(vii) $\inf(A \cup B) = \max(\inf A, \inf B)$

(viii) $\inf(A \cap B) = \max(\inf A, \inf B)$

(ix) $\inf(-A) = -\inf A$

(x) $\inf(-A) = -\sup A$

(xi) $\sup(-A) = -\sup A$

(xii) $\sup(-A) = -\inf A$

(xiii) $A \subseteq B \implies \sup A \leq \sup B$

(xiv) $A \subseteq B \implies \inf A \leq \inf B$

(xv) $A \subseteq B \implies \sup A \geq \sup B$

(xvi) $A \subseteq B \implies \inf A \geq \inf B$

(xvii) *se* $A \subset B$ *e* $A \neq B$, *allora* $\sup A < \sup B$

Esercizio 2.2 *Determinare* sup *e* inf *dei seguenti insiemi. Dire in quali casi si tratta di massimo e di minimo. Dire quali degli insiemi sono limitati inferiormente o superiormente.*

(i) $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\right\}$

(ii) $A = \left\{-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\right\}$

(iii) $A = \left\{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\right\}$

(iv) $A = \left\{\frac{(-1)^{n+1]}}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\right\}$

(v) $A = \{1 + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$

(vi) $A = \left\{x^2 : x \in \mathbb{R}, -1 \leq x \leq 2\right\}$

(vii) $A = \left\{x^2 : x \in \mathbb{R}, -1 < x \leq 2\right\}$

(viii) $A = \left\{x^2 : x \in \mathbb{R}, -1 \leq x < 2\right\}$

(ix) $A = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 1 = 0\right\}$

(x) $A = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 1 < 0\right\}$

(xi) $A = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 1 \leq 0\right\}$

(xii) $A = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 1 \geq 0\right\}$

(xiv) $A = \{(-1)^n n : n \in \mathbb{N}\}$

2.2 Funzioni monotone

Esercizio 2.3 *Siano* $E, F \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$, $g : F \to \mathbb{R}$, $f(E) \subseteq F$. *Stabilire la monotonia di* $g \circ f$ *in base a quella di* g *e* f. *Cioè,*

(i) *se* f *è crescente e* g *è crescente, allora* $g \circ f$ *è...?*

(ii) *se* f *è crescente e* g *è decrescente, allora* $g \circ f$ *è...?*

(iii) *se* f *è decrescente e* g *è crescente, allora* $g \circ f$ *è...?*

(iv) *se* f *è decrescente e* g *è decrescente, allora* $g \circ f$ *è...?*

(v) *se f è strettamente crescente e g è crescente, allora $g \circ f$ è...?*

(vi) *se f è strettamente crescente e g è strettamente decrescente, allora $g \circ f$ è...?*

(vii) *se f è crescente e g è costante, allora $g \circ f$ è...?*

(viii) *se f è costante e g è crescente, allora $g \circ f$ è...?*

(ix) *se f è strettamente crescente, allora $f^{-1} : f(E) \to \mathbb{R}$ è...?*

(x) *se f è strettamente decrescente, allora $f^{-1} : f(E) \to \mathbb{R}$ è...?*

Esercizio 2.4 *Siano $E \subset A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ e sia $f|_E : E \to \mathbb{R}$, $f|_E(x) = f(x)$, la* **restrizione** *di f a E. Quali delle seguenti sono vere?*

(i) *Se f è crescente, allora $f|_E$ è crescente.*

(ii) *Se f è strettamente crescente, allora $f|_E$ è strettamente crescente.*

(iii) *Se $f|_E$ è crescente, allora f è crescente.*

Esercizio 2.5 *Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false?*

(i) *Se f è crescente e g è crescente, allora $f + g$ è crescente.*

(ii) *Se f è crescente e g è decrescente, allora $f + g$ non è crescente, né decrescente.*

(iii) *Se f è crescente e g è crescente, allora fg è crescente.*

(iv) *Se f è crescente, g è crescente e $g > 0$ su A, allora fg è crescente.*

(v) *Se f è crescente, g è crescente e f, g sono positive su A, allora fg è crescente.*

(vi) *Se f è crescente, allora $-f$ è decrescente.*

(vii) *Se f è crescente, allora f^2 è crescente.*

(viii) *Se f è crescente, allora f^3 è crescente.*

(ix) *Se f è crescente e $f > 0$ su A, allora f^2 è crescente.*

A volte, ragionando come negli esercizi 2.3 e 2.5, si riesce a stabilire la monotonia di una funzione su un intervallo senza fare conti, o quasi. Non succede spesso, ma quando succede possiamo risparmiare molto lavoro.

Esercizio 2.6 *Dire quali delle seguenti funzioni sono crescenti o decrescenti sul loro dominio.*

(i) *$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$;*

(ii) $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$;

(iii) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x2^x$;

(iv) $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_2(x^2 - 1)$;

(v) $f : (-\infty, -1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_2(x^2 - 1)$;

(vi) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$;

(vii) $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4$;

(viii) $f : (-\infty, -\sqrt{2}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\log_2(x^2 - 1)}$;

(ix) $f : [\sqrt{2}, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^{\sqrt{\log_2(x^2-1)}}$.

3 Successioni e limiti di successioni

3.1 Alcune proprietà dei limiti

Esercizio 3.1 *Quali delle seguenti affermazioni sono vere?*

(i) *Se* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ *sono successioni in* $\mathbb{R}$ *e se* $a_n \sim c_n$, $b_n \sim d_n$, *allora* $a_n + b_n \sim c_n + d_n$.

(ii) *Se* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ *sono successioni in* $\mathbb{R}$ *e se* $a_n \sim c_n$, $b_n \sim d_n$, *allora* $a_n b_n \sim c_n d_n$.

(iii) *Se* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *sono successioni in* $\mathbb{R}$ *e se* $a_n \sim b_n$, *allora* ${a_n}^2 \sim {b_n}^2$.

(iv) *Se* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *sono successioni in* $\mathbb{R}$ *e se* $a_n \sim b_n$, *allora* $2^{a_n} \sim 2^{b_n}$.

Esercizio 3.2 *Sia* $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ *una successione* **limitata** *in* $\mathbb{R}$ *e sia* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *una successione in* $\mathbb{R}$. *Quali delle seguenti proprietà sono vere?*

(i) *Se esiste* $\lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, *allora esiste* $L = \lim_{n\to\infty}(a_n c_n) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

(ii) *Se esiste* $\lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$, *allora esiste* $L = \lim_{n\to\infty}(a_n c_n) \in \mathbb{R}$.

(iii) *Se esiste* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, *allora esiste* $L = \lim_{n\to\infty}(a_n c_n) = 0$.

(iv) *Se esiste* $\lim_{n\to\infty} a_n \in \{\pm\infty\}$, *allora esiste* $L = \lim_{n\to\infty}(a_n c_n) \in \{\pm\infty\}$.

(v) *Se esiste* $\lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, *allora esiste* $L = \lim_{n\to\infty}(a_n + c_n) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

(vi) *Se esiste* $\lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$, *allora esiste* $L = \lim_{n\to\infty}(a_n + c_n) \in \mathbb{R}$.

(vii) *Se esiste* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, *allora esiste* $L = \lim_{n\to\infty}(a_n + c_n) = 0$.

(viii) *Se esiste* $\lim_{n\to\infty} a_n \in \{\pm\infty\}$*, allora esiste* $L = \lim_{n\to\infty}(a_n + c_n) \in \{\pm\infty\}$.

Esercizio 3.3 (Successioni e sottosuccessioni) *Sia* $\{a_n\}$ *una successione in* A*,* $A \subseteq \mathbb{R}$*. Quali delle seguenti affermazioni sono necessariamente vere e quali false?*

(i) *Se* $A = [0,1]$*, allora* $\{a_n\}$ *converge a un limite in* A.

(ii) *Se* $A = [0,1]$*, allora* $\{a_n\}$ *ha una sottosuccessione convergente a un limite in* A.

(iii) *Se* $A = (0,1]$*, allora* $\{a_n\}$ *ha una sottosuccessione convergente a un limite in* A.

(iv) *Se* $A = (0,1]$*, allora* $\{a_n\}$ *ha una sottosuccessione convergente a un limite in* $[0,1]$.

(v) *Se* $A = [0,+\infty)$*, allora* $\{a_n\}$ *ha una sottosuccessione convergente a un limite in* A.

(vi) *Se* $A = [0,+\infty)$*, allora* $\{a_n\}$ *ha una sottosuccessione convergente a* $+\infty$.

(vii) *Se* $A = [0,+\infty)$*, allora* $\{a_n\}$ *ha una sottosuccessione avente limite in* $[0,+\infty] = [0,+\infty) \cup \{\emptyset\}$.

(viii) *Sia* $A = \mathbb{R}$*. Se* $\{a_n\}$ *ha limite, allora* $\{a_n\}$ *è definitivamente crescente o definitivamente decrescente.*

(ix) *Sia* $A = \mathbb{R}$*. Se* $\{a_n\}$ *ha limite in* A*, allora* $\{a_n\}$ *ha una sottosuccessione crescente o una sottosuccessione decrescente.*

(x) *Sia* $A = \mathbb{R}$*. Se* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$*, allora* $\{a_n\}$ *è definitivamente crescente.*

(xi) *Sia* $A = \mathbb{R}$*. Se* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$*, allora* $\{a_n\}$ *ha una sottosuccessione crescente.*

(xii) *Sia* $A = \mathbb{R}$*. Se* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$*, allora* $\{a_n\}$ *ha una sottosuccessione strettamente crescente.*

(xiii) *Sia* $A = \mathbb{R}$*. Se* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$*, allora non ha una sottosuccessione decrescente.*

(xiv) *Sia* $A = \mathbb{R}$*. Se* $\{a_n\}$ *ha limite in* A *e ha una sottosuccessione strettamente crescente, allora non ha una sottosuccessione strettamente decrescente.*

(xv) *Sia* $A = \{0,1\}$*. Allora* $\{a_n\}$ *ha limite.*

(xvi) *Sia* $A = \{0,1\}$*. Allora* $\{a_n\}$ *ha una sottosuccessione costante.*

3.2 Calcolo dei limiti di succesioni

Esercizio 3.4 *Calcolare, se esiste in* $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $\lim_{n\to\infty} a_n$ *per le seguenti successioni* $\{a_n\}$*:*

(*i*) $\dfrac{2n-n^2}{(n+1)^2}$, (*ii*) $\dfrac{(1+n+n^2)(n-3)^2}{(2n^2-1)^2}$, (*iii*) $\dfrac{(n^3+1)^2-(n+1)^6}{n^5}$,

(*iv*) $1+\dfrac{1}{n}+n$, (*v*) $2^{\frac{(2n-3)^2}{2n^2}}$, (*vi*) $\dfrac{2+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}}{5+\frac{1}{n^2}}$, (*vii*) $\dfrac{(n+1)^6-(n-1)^6}{(n^2+1)^3-(n^2-1)^3}$,

(*viii*) $\left(\dfrac{(2-n^2)(2n-5)^2}{(2n^2-1)^2}\right)^3$, (*ix*) $\dfrac{3\cdot 2^{2n}+5\cdot 4^n}{(2^n+1)^2}$, (*x*) $\dfrac{(2^n+1)^2+5\cdot 3^n}{2^{2n}+2^n+3^n+1}$,

(*xi*) $\dfrac{(-1)^n}{n}$, (*xii*) $(-1)^n$, (*xiii*) $(-1)^n\cdot n$, (*xiv*) $\dfrac{n-(-1)^n n^2}{(2n+1)^3}$, (*xv*) $(-1)^{(-1)^n}$,

(*xvi*) $n2^{-n}$, (*xvii*) $\dfrac{1}{n^3}2^n$, (*xviii*) $\dfrac{\log_2(n)}{n}$, (*xix*) $\dfrac{\log_2(n)}{\log_3(n)}$, (*xx*) $n^{1/n}$,

(*xxi*) $n^{1/\sqrt{n}}$, (*xxii*) $n^{1/\log_2(n)}$, (*xxiii*) $n^{\frac{1}{\log_2(\log_2(n))}}$, (*xxiv*) $\sqrt{n}^{\log_2(n)}$,

(*xxv*) $\dfrac{(n^3+1)^3-(n+1)^6}{n^5}$, (*xxvi*) $\dfrac{(n^3+1)^2-(n+1)^5}{n^5}$, (*xxvii*) $\dfrac{(n^3+1)^2-(n+1)^6}{n^6}$,

(*xxviii*) $\dfrac{(n+1)^4-(n-1)^6}{(n^2+1)^3-(n^2-1)^3}$, (*xxix*) $\dfrac{(n+1)^4-(n-1)^6}{(n^2+1)^2-(n^2-1)^2}$, (*xxx*) $n^{(-1)^n}$,

(*xxxi*) $n^{(-1)^n}2^n$, (*xxxii*) $n^{(-1)^n}2^{-n}$; (*xxxiii*) *sign*$(4-n)$, (*xxxiv*) $|4-n|$,

(*xxxv*) $\dfrac{3n^2+5\cdot 2^n}{2^n+n^4}$, (*xxxvi*) $\dfrac{3n^{-2}+5\cdot 2^{-n}}{2^{-n}+n^{-4}}$, (*xxxvii*) $\dfrac{3n^2+5\cdot 2^{-n}}{2^{-n}+n^4}$,

(*xxxviii*) $\dfrac{3n^2+5\cdot 2^{-n}}{2^{-n}+n^{-4}}$, (*xxxix*) $\dfrac{3n^2+5\cdot 2^{-n}}{2^n+n^4}$, (*xl*) $\dfrac{3n^{-4}+5\cdot 2^{-n}}{2^{-n}+n^{-4}}$,

(*xli*) $\dfrac{2^n}{n!}$, (*xlii*) $\dfrac{n^n}{n!}$, (*xliii*) $\dfrac{2n+3\log_2(n)}{5n+7\log_2(n)}$, (*xliv*) $\dfrac{\log_2(n^n)+2n}{3n+n\log_2(n)}$,

(*xlv*) $\dfrac{3^n+6^{\sqrt{n}}}{3^{n/2}+6^{\sqrt{n}}}$, (*xlvi*) $\dfrac{\sqrt{n!}}{2^n}$, (*xlvii*) $\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$, (*xlviii*) $\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)^n$,

(*xlix*) $\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{n^2}$, (*l*) $\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{\sqrt{n}}$.

4 Funzioni trigonometriche e funzioni trigonometriche inverse

Esercizio 4.1 *Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni trigonometriche nei domini specificati.*

(1) $\cos t = 1/2$ *in* $\mathbb{R}$; (2) $\cos t = 1/2$ *in* $[0, 2\pi)$; (3) $\cos t = 1/2$ *in* $[2\pi, 4\pi)$;
(4) $\cos t + \sin t = 0$ *in* $\mathbb{R}$; (5) $\cos t + \sin t = 0$ *in* $[0, 2\pi)$; (6) $\cos t + \sin t > 0$ *in* $\mathbb{R}$;
(7) $\cos t + \sin t > 0$ *in* $[0, 2\pi)$; (8) $\cos t + \sin t > 0$ *in* $[-\pi, \pi)$; (9) $\cos t + \sin t > \sqrt{2}$ *in* $\mathbb{R}$;
(10) $\tan t = 1$ *in* $\mathbb{R}$; (11) $\tan t = 1$ *in* $(-\pi/2, \pi/2)$; (12) $\sin t = 1/5$ *in* $\mathbb{R}$;
(13) $\sin t = 1/5$ *in* $[-\pi/2, 3/2\pi)$; (14) $\arcsin t = \pi/3$ *in* $\mathbb{R}$; (15) $\arctan t = 10$ *in* $\mathbb{R}$.

Esercizio 4.2 *(i) Al variare di s in $[-1, 1]$, scrivere le soluzioni $t \in [\pi, 2\pi]$ di $\cos(t) = s$.*

(ii) Al variare di s in $[-1, 1]$, scrivere le soluzioni $t \in [-\pi, 0]$ di $\cos(t) = s$.

(iii) Al variare di s in $\mathbb{R}$, scrivere le soluzioni $t \in (-\pi/2, 3/2\pi)$ di $\tan(t) = s$.

(iv) Al variare di s in $[-1, 1]$, scrivere le soluzioni $t \in [-\pi/2, 3/2\pi]$ di $\sin(t) = s$.

5 Numeri complessi

5.1 Definizione e proprietà algebriche

Esercizio 5.1 *Calcola le seguenti espressioni:*

$$(i)\ (2+3i)(2-3i);\ (ii)\frac{2+3i}{2-3i},\ (iii)\ |(2+3i)(1-i)|,\ (iv)\ \left|\frac{1+3i}{2-i}\right|,$$
$$(v)\ i,\ i^2,\ i^3,\ i^4,\ i^5,\ (vi)\ (1+i)^2,\ (vii)\ Re\left(\frac{2+3i}{2-3i}\right),\ (viii)\ Im\left(\frac{2+3i}{2-3i}\right),$$
$$(ix)\ Re\big((x+iy)^2\big),\ (x)\ Im\big((x+iy)^2\big),\ (xi)\ \big|(x+iy)^2\big|.$$

Esercizio 5.2 *Trova le soluzioni in $\mathbb{C}$ delle equazioni:*

(i) $z^2 = -4$, (ii) $z^2 - z + 1 = 0$, (iii) $z^4 - z^2 - 2 = 0$, (iv) $z^2 - 2iz - 1 = 0$,
(v) $z^2 - 2iz + 1 = 0$.

5.2 Rappresentazione trigonometrica e esponenziale dei numeri complessi

Esercizio 5.3 *Trova le soluzioni in $\mathbb{C}$ delle equazioni:*

(i) $z^2 = i,$ (ii) $z^2 = 1 + i,$ (iii) $z^2 = 1 - \sqrt{3}i,$ (iv) $z^4 + z^2 + 1 = 0,$
(v) $z^4 = 1,$ (vi) $z^6 = 1,$ (vii) $z^3 = 2i,$ $(viii)$ $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0,$
(ix) $z^5 = 2 + i;$ (x) $z^5 = -2 + i.$

6 Soluzioni

6.1 Numeri, operazioni, insiemi, funzioni

6.1.1 Numeri naturali, interi, razionali

Numeri naturali Esercizio 1.1.

(i) Divisori di 8: $\{1, 2, 4, 8\}$; di 18: $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$; di 30: $\{1, 2, 3, 5, 6.10, 15, 30\}$. I tre numeri hanno tre fattori e il numero dei divisori dipende solo da quanti di essi sono distinti e con quale potenza appaiono nella scomposizione in fattori.

(ii) L'intero p divide m e n se e solo se $m = pm_1$ e $n = pn_1$, cone m_1, n_1 numeri naturali. Allora,

$$r = m - qn = pm_1 - qpn_1 = p(m_1 - qn_1),$$

quindi p è un divisore di r.

(iii) Se i numeri sono n, $n + 1$, allora

$$(n + 1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1,$$

che è dispari.

(iv)

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \cdots + 19 &= (1^2 - 0^2) + (2^2 - 1^2) + (3^2 - 2^2) + \cdots + (10^2 - 9^2) \\ &= 10^2 \\ &= 100, \end{aligned}$$

perché tutti i quadrati tra 1^2 e 9^2 appaiono con il segno $+$ e il segno $-$. Con lo stesso ragionamento, possiamo mostrare che

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

per ogni naturale n.

(v) Poiché $n^2 - 1 = (n + 1)(n - 1)$, o $n - 1$ e $n + 1$ sono entrambi dispari, o sono entrambi divisibili per 2 e uno di essi, ancora meglio, è divisibile per 4.

(vi) Disegnate un quadrato $n \times n$ su un foglio a quadretti (con un valore di n di vostra scelta) e colorate il quadretto più in basso nella prima colonna, i due quadretti in basso nella seconda colonna, eccetera. Calcolate poi l'area della regione colorata. Il ragionamento non dipende dal numero n che avete scelto.

I numeri interi Esercizio 1.2.

(i) $(-1)^n = (-1)^{n^2} = \begin{cases} 1 \text{ se } n \text{ è pari,} \\ -1 \text{ se } n \text{ è dispari,} \end{cases}$ e $\frac{1-(-1)^n}{2} = \begin{cases} 0 \text{ se } n \text{ è pari,} \\ 1 \text{ se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$

(ii)

$$(xy)^m = x^m y^m,\ x^{m+n} = x^m x^n,\ x^{-m} = \frac{1}{x^m},\ x^{m-n} = \frac{x^m}{x^n},\ (x^m)^n = x^{mn}.$$

(iii) Vero.

(iv) Falso.

(v) Falso.

(vi) Vero.

I numeri razionali Esercizio 1.3.

(i) Equazioni.

$$(x-1)(x+2) = 0 :\ \{\mathbf{1}, -\mathbf{2}\};\ \frac{x-1}{x+2} = 0 :\ \{\mathbf{1}\};\ \frac{1}{(x-1)(x+2)} = 0 :\ \emptyset;$$
$$\frac{(x-1)^2}{x+2} = 0 :\ \{\mathbf{1}\};\ (x^2-1)(x^2+2) = 0 :\ \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\};\ x^2 = 2 :\ \emptyset.$$

(ii) Disequazioni. Ricordare che $x \in \mathbb{Q}$.

$$(x-1)(x+2) > 0 :\ \mathbf{x} < -\mathbf{2} \vee \mathbf{x} > \mathbf{1};\ (x-1)(x+2) < 0 :\ -\mathbf{2} < \mathbf{x} < \mathbf{1};$$
$$(x-1)(x+2) \leq 0 :\ -\mathbf{2} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{1};$$
$$\frac{x-1}{x+2} > 0 :\ \mathbf{x} < -\mathbf{2} \vee \mathbf{x} > \mathbf{1};\ \frac{x-1}{x+2} \geq 0 :\ \mathbf{x} < -\mathbf{2} \vee \mathbf{x} \geq \mathbf{1};$$
$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} \geq 0 :\ \mathbf{x} < -\mathbf{2} \vee \mathbf{x} > \mathbf{1};\ \frac{1}{(x-1)(x+2)} < 0 :\ -\mathbf{2} < \mathbf{x} < \mathbf{1};$$
$$\frac{(x-1)^2}{x+2} \geq 0 :\ \mathbf{x} > -\mathbf{2};\ \frac{(x-1)^2}{x+2} > 0 :\ -\mathbf{2} < \mathbf{x} < \mathbf{1} \vee \mathbf{x} > \mathbf{1};$$
$$(x^2-1)(x^2+2) \geq 0 :\ \mathbf{x} \leq -\mathbf{1} \vee \mathbf{x} \geq \mathbf{1};\ x^2 \geq 2 :\ -\mathbf{x} < -\sqrt{\mathbf{2}} \vee \mathbf{x} > \sqrt{\mathbf{2}}.$$

6.1.2 Insiemi e funzioni

Linguaggio e logica

Insiemi

1. Esercizio 1.4: FVFVFVFVFFVVVV

Vediamo quali (utili) proprietà abbiamo verificato essere vere per ogni terna A, B, C di insiemi. In questo e altri esercizi dello stesso tipo, non è importante mandare a memoria le risposte vere, ma può essere utile rileggerle. In pratica, quando una proprietà di questo tipo serve, la si ricostruisce facilmente, se la si è vista in precedenza.

(i) $A \cap (B \cup B) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(ii) $A \cup (B \cap B) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(iii) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

(iv) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

(v) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

(vi) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

(vii) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times C) \cup (B \times D)$

(viii) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \times (B \times C)$

Funzioni

1. Esercizio 1.5: VFFFFVFVFVVVVFV.
2. Esercizio 1.6: FFVFFVFVVVVVF.

Vediamo quali (utili) proprietà abbiamo verificato essere vere.

Dall'esercizio 1.5, per ogni funzione $f : A \to B$ risultano essere vere:

(1) Per ogni scelta di $E, F \subseteq A$, si ha che $f(E) \cup f(F) = f(E \cup F)$.

(2) Se f è iniettiva, allora per ogni scelta di $E, F \subseteq A$, si ha che $f(E) \cap f(F) = f(E \cap F)$.

(3) Sia f iniettiva. Per ogni scelta di $E, F \subseteq A$, se $E \cap F = \emptyset$, allora si ha che $f(E) \cap f(F) = \emptyset$.

(4) Se f è iniettiva, allora per ogni scelta di $E, F \subseteq A$, si ha che $f(E) \setminus f(F) = f(E \setminus F)$.

(5) Per ogni scelta di $P, Q \subseteq B$, si ha che $f^{-1}(P) \cup f^{-1}(Q) = f^{-1}(P \cup Q)$.

(6) Per ogni scelta di $P, Q \subseteq B$, si ha che $f^{-1}(P) \cap f^{-1}(Q) = f^{-1}(P \cap Q)$.

(7) Per ogni scelta di $P, Q \subseteq B$, si ha che $f^{-1}(P) \setminus f^{-1}(Q) = f^{-1}(P \setminus Q)$.

(8) Per ogni scelta di $E, F \subseteq A$, si ha che $f(E) \cap f(F) \supseteq f(E \cap F)$.

Dall'esercizio 1.6 abbiamo che per ogni coppia di funzioni $f : A \to B$, $g : C \to D$ tali che $f(A) \subseteq C$, sono vere:

(1) Se g e f sono suriettive, allora $g \circ f$ è suriettiva.

(2) Se g e f sono iniettive, allora $g \circ f$ è iniettiva.

(3) Se g e f sono biunivoche, allora $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

(4) Se $A = B$ e $f = I_A$, allora $g \circ f = g$.

(5) Se $C = D$ e $g = I_C$, allora $g \circ f = f$.

(6) Se f è costante, allora $g \circ f$ è costante.

(7) Se g è costante, allora $g \circ f$ è costante.

6.2 Numeri reali

6.2.1 Numeri reali

1. Esercizio 2.1: VFFVVFFVFVFVVFFVF

2. Esercizio 2.2. Quando scrivo sup (inf) significa che non c'è massimo (minimo). (i) $\inf = 0, \max = 1$; (ii) $\min = -1, \sup = 0$; (iii) $\min = -1, \max = 1/2$; (iv) $\min = -1/2, \max = 1$; (v) $\min = 0, \max = 2$; (vi) $\min = 0, \max = 4$; (vii) $\min = 0, \max = 4$; (viii) $\min = 0, \sup = 4$; (ix) $\min = (-1-\sqrt{5})/2, \max = (-1+\sqrt{5})/2$; (x) $\inf = (-1-\sqrt{5})/2, \sup = (-1+\sqrt{5})/2$; (xi) $\min = (-1-\sqrt{5})/2, \max = (-1+\sqrt{5})/2$; (xii) $\inf = -\infty, \sup = +\infty$; (xiii) $\inf = -\infty, \sup = +\infty$.

Le (utili) proprietà vere nell'esercizio 2.1, che valgono per ogni coppia A, B di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, sono:

(1) $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$

(2) $\sup(A \cap B) = \min(\sup A, \sup B)$

(3) $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$

(4) $\inf(A \cap B) = \max(\inf A, \inf B)$

(5) $\inf(-A) = -\sup A$

(6) $\sup(-A) = -\inf A$

(7) $A \subseteq B \implies \sup A \leq \sup B$

(8) $A \subseteq B \implies \inf A \geq \inf B$

6.2.2 Funzioni monotone

Esercizio 2.3: (i) crescente; (ii) decrescente; (iii) decrescente; (iv) crescente; (v) crescente; (vi) strettamente decrescente; (vii) costante; (viii) costante; (ix) strettamente crescente; (x) strettamente decrescente.

Da questo esercizio apprendiamo che il comportamento di crescente/decrescente rispetto alla composizione ha delle analogie con quello di affermazione/negazione.

Esercizio 2.4: VVF

Esercizio 2.5: (i) V; (ii) F; (iii) F (p.es. $f(x) = g(x) = x$ su $\mathbb{R}$ è un controesempio); (iv) F[1]; (v) V; (vi) V; (vii) F; (viii) V; (ix) V.

Esercizio 2.6: (i) decresce; (ii) cresce; (iii) cresce; (iv) cresce; (v) decresce; (vi) cresce; (vii) cresce; (viii) decresce; (ix) cresce.

6.3 Successioni e limiti di successioni

6.3.1 Alcune proprietà dei limiti

Esercizio 3.1: FVVF. In (i) $a_n = 1+\frac{1}{n}$, $c_n = 1+\frac{1}{n^2}$, $b_n = d_n = -1$ costituiscono un controesempio. In (iv) $a_n = n^2$ e $b_n = n^2 + n$ sono un controesempio.

Esercizio 3.2: FFVFFFFV

Esercizio 3.3: FVFVFFVFVFVVVFFV

6.3.2 Calcolo dei limiti di succesioni

Esercizio 3.4: (i) -1 ; (ii) $1/4$; (iii) -6 ; (vi) $+\infty$; (v) 4 ; (vi) $2/5$; (vii) $+\infty$; (viii) -1 ; (ix) 8 ; (x) 1; (xi) 0; (xii) non esiste ; (xiii) non esiste ; (xiv) 0 ; (xv) -1 ; (xvi) 0 ; (xvii) $+\infty$; (xviii) 0; (xix) $\log_2(3)$; (xx) 1; (xxi) 1; (xxii) 2; (xxiii) $+\infty$; (xxiv) $+\infty$; (xxv) $+\infty$; (xxvi) $+\infty$; (xxvii) 0; (xxviii) $-\infty$; (xxix) $-\infty$; (xxx) non esiste; (xxxi) $+\infty$; (xxxii) 0; (xxxiii) -1: (xxxiv) $+\infty$; (xxxv) 5; (xxxvi) $+\infty$; (xxxvii) 0; (xxxviii) $+\infty$; (xxxix) 0; (xl) 3; (xli) 0; (xlii) $+\infty$; (xliii) $2/5$; (xliv) 1; (xlv) $+\infty$; (xlvi) $+\infty$; (xlvii) e^2; (xlviii) 1; (xlix) $+\infty$; (l) 1.

6.4 Funzioni trigonometriche e funzioni trigonometriche inverse

Esercizio 4.1 Nelle soluzioni a seguire, k indica un qualunque numero intero. (1) $\pi\pi/2 + 2k\pi$; (2) $\pi/3$, $5/3\pi$; (3) $\pi/3 + 2\pi$, $5/3\pi + 2\pi$; (4) $3/4\pi + k\pi$; (5) $3/4\pi$, $3/4\pi + \pi$; (6) $\bigcup_{k=-\infty}^{+}\infty(-\pi/4 + 2k\pi, 3/4\pi + 2k\pi)$; (7) $[0, 3/4\pi) \cup (7/4\pi, 2\pi)$; (8)$(-\pi/4, 3/4\pi)$; (9) impossibile; (10) $\pi/4 + k\pi$; (11) $\pi/4$; (12) $\arcsin(1/5) + 2k\pi$, $\pi - \arcsin(1/5) + 2k\pi$; (13) $\arcsin(1/5)$, $\pi - \arcsin(1/5)$; (14) $\sqrt{3}/2$; (15) impossibile.

Esercizio 4.2: (i) $t = \arccos(s)$; (2) $t = -\arccos(s)$; (3) $t = \arctan(s)$, $t = \arctan(s) + \pi$; (4) $t = \arcsin(s)$, $t = \pi - \arcsin(s)$.

[1] $-2 < -1$ e $1 < 4$, ma $-2 \cdot 1 > -1 \cdot 4$

6.5 Numeri complessi

6.5.1 Definizione e proprietà algebriche

Esercizio 5.1: (i) 13; (ii) $-5/13 + 12/13i$; (iii) $\sqrt{26}$; (iv) $\sqrt{2}$; (v) $i, -1, -i.1, i$; (vi) $2i$; (vii) $-5/13$; (viii) $12/13$; (ix) $x^2 - y^2$; (x) $2xy$; (xi) $x^2 + y^2$.

Esercizio 5.2: (i) $\pm 2i$; (ii) $\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; (iii) $\pm\sqrt{2}, \pm i$; (iv) i (con molteplicità doppia); (v) $(1 \pm \sqrt{2})i$.

6.5.2 Rappresentazione trigonometrica e esponenziale dei numeri complessi

Esercizio 5.3. (i) $z = \pm e^{i\pi/4} = \pi\frac{1+i}{\sqrt{2}}$; (ii) $z = \pm\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}$; (iii) $z = \pm\sqrt{2}e^{-\pi i/6} = \pm\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$; (iv) $z = \pm e^{\pi i/6}, \pm e^{-\pi i/6}$, cioè, $z = \pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right), \pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$; (v) $z = 1, i, -1, -i$; (vi) $z = e^{\pi i k/3}$ con $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, cioè: $z = \pm 1, \pm e^{\pi i/6}, \pm e^{-\pi i/6}$, cioè: $z = \pm 1, \pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right), \pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$; (vii) $z = \sqrt[3]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3}\right)}$, con $k = 0, 1, 2$. (viii) poiché $(1-z)(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5) = 1 - z^6$, le soluzioni sono $z = -1, \pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right), \pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$; (ix) $z = \sqrt[10]{5}e^{i\frac{\arctan 1/2 + 2k\pi}{5}}$, con $k = 0, 1, 2, 3, 4$; (x) $z = \sqrt[10]{5}e^{i\frac{-\arctan 1/2 + \pi + 2k\pi}{5}}$, con $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

7 Limiti e continuità

Per questa prima serie di esercizi sono sufficienti i primi strumenti di algebra dei limiti e i risultati sui limiti di successioni.

Esercizio 7.1 *Calcolare i limiti per $x \to \pm\infty$ e per $x \to 0$ delle seguenti funzioni*

- $x^4 + x^2 + 1$
- $x^5 - 2$
- x^n *per* $n \in \mathbb{N}$ *(distinguere tra* n *pari e dispari)*
- $\frac{1}{x^3}$
- $\frac{x+1}{x}$
- $\frac{x^2+1}{x^2}$

Esercizio 7.2 *Dimostrare che il limite per $x \to \pm\infty$ di* $\sin(x)$ *e* $\cos(x)$ *non esiste*

Esercizio 7.3 *Considera la successione n^r con $n \in \mathbb{N}$. Dimostra che*

$$\lim_{n\to+\infty} n^r = \begin{cases} +\infty & se\ r > 0 \\ 1 & se\ r = 0 \\ 0 & se\ r < 0 \end{cases}$$

Esercizio 7.4 *Considera la successione b^n con $n \in \mathbb{N}$. Dimostra che*

$$\lim_{n\to+\infty} b^n = \begin{cases} +\infty & se\ b > 1 \\ 1 & se\ b = 1 \\ 0 & se\ -1 < b < 1 \\ \nexists & se\ b \le -1 \end{cases}$$

Esercizio 7.5 *Determinare i limiti delle seguenti successioni*

1. $n^3 + 3^n$
2. $n^3 + 3^{-n}$
3. $n^{-3} + 3^n$
4. $n^{-3} + 3^{-n}$

Esercizio 7.6 *Calcolare i seguenti limiti*

$$\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{x} \tag{1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x+3} \tag{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin(x)} \tag{3}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(2x)^3+1}{2x^3-4} \tag{4}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^5+3x-2}{x^4} \tag{5}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} 1+\frac{\sin(x)}{x} \tag{6}$$

$$\lim_{x\to 1} \left|\frac{1}{x-1}\right| \tag{7}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{|x|} \tag{8}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|} \tag{9}$$

$$\lim_{x\to\infty} 2^x \tag{10}$$

$$\lim_{x\to-\infty} 2^x \tag{11}$$

$$\lim_{x\to-\infty} x+2^x \tag{12}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \cos(x)+x \tag{13}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x^2-4} \tag{14}$$

$$\lim_{x\to-1} \frac{x+1}{x^2-1} \tag{15}$$

$$\lim_{x\to\ln(2)} e^x-1 \tag{16}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{x^2+1} \tag{17}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{x^2-1} \tag{18}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3+1} \tag{19}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x} \tag{20}$$

Esercizio 7.7 *Calcolare i seguenti limiti*

1.

$$\lim_{x\to 0} \log_2(x+1)$$

2.

$$\lim_{x\to -1} \log_2(x+1)$$

3.

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+1}{x^3-1}$$

4.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^3-1}$$

5.

$$\lim_{x\to +\infty} x^2 + 2^{-x}$$

Esercizio 7.8 *Dimostrare che non esiste il limite della funzione*

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

per $x \to 0$*, ma che tale limite esiste per* $x \to \pm\infty$ *e calcolarlo.*

Dimostrare che esiste il limite della funzione

$$x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

per $x \to 0$ *e anche per* $x \to \pm\infty$*, e calcolarli.*

Esercizio 7.9 *Studiare la funzione* $\frac{1}{x} \cdot \sin(x)$*, indicando*

- *il dominio massimale*
- *il limite, se esiste, per* $x \to \pm\infty$
- *il limite, se esiste, per* $x \to 0$
- *se la funzione è pari o dispari o nessuna delle due cose*

Esercizio 7.10 ***Esercizio difficile*** *Dimostrare che*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Suggerimento: usa il cambio di variabile $y = \frac{1}{2}x$ *e l'identità* $\cos(2y) = \cos(y)^2 - \sin(y)^2$.

Esercizio 7.11 ***Esercizio difficile***

Dimostrare che la successione

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

è crescente. Invece la successione

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

è decrescente. Dimostrare che $a_n < b_n$ *per ogni* n *e di conseguenza che* a_n *è una successione limitata dall'alto e che quindi esiste*

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = e$$

si tratta del "numero di Nepero".

Dimostrare infine che anche la successione b_n *ha lo stesso limite per* $n \to \infty$.

Esercizio 7.12 *Calcolare i seguenti limiti*

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} \tag{1}$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} \tag{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 \cdot \sin(x)}{x^3 + 1} \tag{3}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt[5]{x} + 2^{-x}) \tag{4}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^\pm} \frac{1}{\cos(x)} \tag{5}$$

$$\lim_{x \to 0^\pm} \frac{x^3 - x}{x^4} \tag{6}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\frac{5}{2}} - 1}{2x^{\frac{5}{2}} + 1} \tag{7}$$

Gli ultimi due sono più difficili

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \tag{8}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \tag{9}$$

La difficoltà media degli esercizi che seguono è maggiore dei precedenti. Inoltre, per gli esercizi che seguono è necessario utilizzare anche (ma non solo) i limiti notevoli visti a lezione.

Esercizio 7.13 *Mostrare che sono vere le seguenti uguaglianze*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a, \quad \forall a \in \mathbb{R} \tag{1}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{c}{x}\right)^x = e^c \quad \forall c \in \mathbb{R} \tag{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+bx)}{x} = b, \quad \forall b \in \mathbb{R} \tag{3}$$

$$\lim_{x\to +\infty} x \cdot \left(\left(1+\frac{p}{x}\right)^n - 1\right) = np, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{R} \tag{4}$$

Esercizio 7.14 *Calcolare i seguenti limiti*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-4x+3}{2x^2-10x+12} \tag{1}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-4x+3}{2x^2-10x+12} \tag{2}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{2x^2-10x+12} \tag{3}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x^3-5x}}{8x^2+x} \tag{4}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2}{2x+1} - \frac{x^3+5x+1}{x^2-1}\right) \tag{5}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-\cos(x)}{x} \tag{6}$$

Esercizio 7.15 *Si costruisca una funzione* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *per ognuno di questi casi*

1. *con una discontinuità a salto finito in* 0 *e una discontinuità eliminabile in* 1
2. *con una discontinuità a salto infinito in* 3
3. *con una discontinuità a salto finito in* -1 *e una discontinuità a salto infinito in* 1
4. *con tre discontinuità eliminabili*
5. *con infinite discontinuità a salto finito*
6. *con infinite discontinuità a salto infinito*
7. *con una discontinuità del quarto tipo in* 1

8 Derivate

Esercizio 8.1 *Calcolare la derivata delle seguenti funzioni nel punto* $x = -1$

$$x^2 + 5x \tag{1}$$

$$5x \cdot e^x \tag{2}$$

$$\sin(\pi \cdot x) \tag{3}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) + x^3 \tag{4}$$

Esercizio 8.2 *Siano* f, g *due funzioni derivabili in* 1 *tali che* $f(1) = 2$ *e* $g(1) = 3$, $f'(1)$ *e* $g'(1) = 1$, *si calcoli*

1. $(f + 2g)'(1)$
2. $(f \cdot g)'(1)$
3. $(f \cdot g^2)'(1)$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(1)$

Esercizio 8.3 *Siano* f, g *due funzioni derivabili in* 1 *tali che* $f(1) = 1$ *e* $g(1) = -1$, $f'(1) = 4$ *e* $g'(1) = -2$, *si calcoli*

1. $(f^2 \cdot g^3)'(1)$
2. $\left(\frac{\sqrt{g}}{f}\right)'(1)$
3. $(e^g + \ln(f))'(1)$
4. $\left(\frac{f+g}{2f-g}\right)'(1)$

Esercizio 8.4 *Mostrare che per ogni* $\alpha \in \mathbb{R}$ *vale*

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha.$$

Nel prossimo esercizio consideriamo dei limiti per la cui risoluzione può tornare utile l'esercizio precedente e la seguente formula, valida per una certa funzione $f(x)$ derivabile nel punto x_0,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0).$$

Esercizio 8.5 *Calcolare i seguenti limiti*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{e^x - 1} \tag{1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{x} \tag{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x)}{\sqrt{1 + x} - 1} \tag{3}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sin(x))}{\ln(x)} \tag{4}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(\sqrt{x}) - 1}{\sin(x)} \tag{5}$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{e^{x^3} - 1}{\sin(x) + x} \tag{6}$$

$$\lim_{x\to +\infty} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \tag{7}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\ln(3 - x)}{\sqrt{4 - x} - \sqrt{2}} \tag{8}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x - 1} \tag{9}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^x} \tag{10}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2} \tag{11}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \ln(1 + e^x) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \tag{12}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin^3(2x)}{4 \sin(x^5)} \tag{13}$$

Esercizio 8.6 *Esprimere le seguenti derivate in utilizzando le funzioni* $f(x)$ *e* $f'(x)$

$$f(2x + 1) \tag{1}$$

$$e^{f(x)} \tag{2}$$

$$f(2x) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) \tag{3}$$

$$e^{\sqrt{f(x)}+5x} \tag{4}$$

$$\cos(f(x)) + \ln(f(x)) \tag{5}$$

$$f(x^3 + e^{3x}) \tag{6}$$

$$f(3x \cdot \sin(x)) \tag{7}$$

Esercizio 8.7 *Calcolare le derivate delle seguenti funzioni*

$$x^9 + 12x - 1 \tag{1}$$

$$x \cdot \ln(x) \tag{2}$$

$$x^3 \cdot e^{\sin(x)} \tag{3}$$

$$\cos(\cos(x))) \tag{4}$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \tag{5}$$

$$2^{\cos(x)} \tag{6}$$

$$e^{x^2+x+1} \tag{7}$$

$$\ln(x^2 + x + 1) \tag{8}$$

Esercizio 8.8 *Determinare i punti stazionari delle seguenti funzioni indicando quando possibile se si tratta di massimi o minimi locali/globali.*

$$\frac{x+1}{x^2+1} \tag{1}$$

$$\frac{x+3}{x+5} \tag{2}$$

$$\sin(3x) \tag{3}$$

$$\frac{e^x}{x} \tag{4}$$

$$x \ln(x) \tag{5}$$

$$x \ln(x) - 2x \tag{6}$$

Esercizio 8.9 (esercizio difficile) *Dimostrare che, se $f\colon X \to \mathbb{R}$ è una funzione tale che*

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x, x_0 \in X,$$

allora il rapporto incrementale rispetto a x_0, cioè la funzione $r_{f,x_0}(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, è una funzione crescente per ogni $x_0 \in X$.

Esercizio 8.10 (Esercizio difficile) *Dimostrare il teorema di Cauchy: per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $[a, b]$ fa parte del dominio di f e g, esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che*

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Esercizio 8.11 *Per ognuna delle seguenti funzioni indicare*

- *il dominio massimale*

- *se la funzione è pari, dispari o periodica*
- *intervalli di crescenza e decrescenza*
- *massimi e minimi relativi*
- *se la funzione è convessa o concava*
- *i limite per $x \to \pm\infty$ se esistono*
- *eventuali asintoti verticali, orizzontali o obliqui*
- *eventuali punti di non-derivabilità*

$$\frac{e^x - x + 2}{e^x - 1} \tag{1}$$

$$\frac{x-1}{\sqrt{x-2}} \tag{2}$$

$$e^{\frac{2}{x}} \tag{3}$$

$$xe^x \tag{4}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & se\ x < 1 \\ \ln(x) & se\ x \geq 1 \end{cases} \tag{5}$$

$$\frac{x^2}{x^2 - 1} \tag{6}$$

$$x \cdot \sqrt{1 - x^2} \tag{7}$$

$$\frac{xe^x}{x+1} \tag{8}$$

$$x \ln(x) \tag{9}$$

$$\frac{2^x}{2^{x^2+1}} \tag{10}$$

$$\sin(x^2) \tag{11}$$

$$\frac{x^3 + 5}{x^2 - 2} \tag{12}$$

Esercizio 8.12 *Calcolare il polinomio di Taylor di grado 3 per le seguenti funzioni per $x \to 0$*

$$\cos(x) \tag{1}$$

$$\tan(x) \tag{2}$$

$$x^2 + x + 3 \tag{3}$$

$$\ln(x + 1) \tag{4}$$

$$\ln(x^2 + 1) \tag{5}$$

$$\frac{1}{1+x} \tag{6}$$
$$e^{\sin(x)} \tag{7}$$
$$e^{\frac{1}{1+x}} \tag{8}$$
$$\ln(1+3x^2) \tag{9}$$
$$e^{-2x}+\sin(x) \tag{10}$$
$$\cos(\ln(1+x)) \tag{11}$$
$$\frac{e^x+1}{e^{-x}+1} \tag{12}$$
$$(1+x)^a \textit{ per } a \textit{ numero naturale } 0<a<1 \tag{13}$$
$$\sin(x)-x\cos(x/3) \tag{14}$$
$$\ln(1-x) \tag{15}$$
$$5^x \tag{16}$$
$$\frac{1}{1+x+x^2} \tag{17}$$

Esercizio 8.13 *Calcolare i seguenti limiti*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+\ln(1-x)}{\tan(x)-x} \tag{1}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos(x)-\frac{3}{2}x^2}{x^4} \tag{2}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{5^{1+\tan(x)^2}-5}{1-\cos(x)} \tag{3}$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\cdot\ln(1+x)+\tan(x)}{\sin(x)+\sqrt{x}} \tag{4}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-xe^x+x^2\cos(x)}{(e^x-1)^3} \tag{5}$$

Esercizio 8.14 *Calcolare le derivate delle funzioni* $\arctan(x), \arcsin(x), \arccos(x)$ *cioè le funzioni inverse di* $\tan(x), \sin(x), \cos(x)$ *rispettivamente.*

Esercizio 8.15 *Caloclare i seguenti limiti*

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin(x)+\ln(1-x^2)}{x^2(2x+x^2)^2} \tag{1}$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{1+\ln(x)-e^{x-1}}{x^2-2x+1} \tag{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \sin(2x)}{x \cdot \sin(x)} \tag{3}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}\ln\left(\frac{1+x}{e}\right)}{(e^x + e^{-x} - 2)(e^x - e^{-x})} \tag{4}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\tan(x)} + \cos(x) - \sin(x) - 2}{\ln(1+x^3)} \tag{5}$$

Esercizio più difficile

$$\lim_{x\to 1} \frac{\arctan(x) - \frac{\pi}{4}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)\tan(\pi x)} \tag{6}$$

9 Integrali

Esercizio 9.1 *Per ognuna delle seguenti funzioni $f(x)$ determinare gli integrali indefiniti e il valore dell'integrale definito $\int_0^1 f(x)dx$*

- $f(x) = x^{\frac{1}{4}} + \frac{x}{2}$
- $f(x) = \frac{1+x}{x}$
- $f(x) = 3^x + \cos(x) + 4x^5$
- $f(x) = e^{\sin(x)} \cdot \cos(x)$
- $f(x) = 2x + \frac{1}{\cos(x)^2}$
- $f(x) = 2^{5x} + \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

Esercizio 9.2 *Calcolare il valore dei seguenti integrali*

$$\int_0^3 (2x+1)^3 dx \tag{1}$$

$$\int_0^1 (7x + 2^{x+1} + 3e^{-7x})dx \tag{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2\sin(3x) + \cos(2x))dx \tag{3}$$

$$\int_{-1}^1 (1-3x)^{\frac{1}{3}} dx \tag{4}$$

$$\int_1^9 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2} dx \tag{5}$$

Esercizio 9.3 *Determina il valore di questi integrali*

$$\int_2^7 \frac{1}{(3x-5)^{\frac{3}{4}}}dx \tag{1}$$

$$\int_0^8 \frac{1}{(2x+9)^{\frac{1}{2}}}dx \tag{2}$$

$$\int_0^2 \frac{2x+1}{(x^2+x+5)^{\frac{2}{3}}}dx \tag{3}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)^2}dx \tag{4}$$

$$\int_1^e \frac{\ln(x)^2+1}{x\cdot\ln(x)}dx \tag{5}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\cos(x)dx \tag{6}$$

$$\int_1^{e^2} \frac{\ln(x)}{x^3}dx \tag{7}$$

Le prossime due sono un po' più difficili

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \tag{8}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x)e^{-x}dx \tag{9}$$

Esercizio 9.4 *Considera una funzione* $h\colon [0,1]\to\mathbb{R}^+$ *derivabile. Dimostra che per ogni esponente reale* $r>-1$, *la funzione*

$$h(x)^r\cdot h'(x)$$

è integrabile e calcola il valore dell'integrale

$$\int_0^1 h(x)^r\cdot h'(x)dx.$$

Esercizio 9.5 *Considera una funzione* $h\colon [0,1]\to\mathbb{R}^+$ *derivabile. Dimostra che la funzione*

$$\frac{h'(x)}{h(x)}$$

è integrabile, e calcola il valore dell'integrale

$$\int_0^1 \frac{h'(x)}{h(x)}dx.$$

Esercizio 9.6 *Determina il valore di questi integrali*

$$\int_1^{e^3} x \cdot \ln(x^2)dx \tag{1}$$

$$\int_1^{\sqrt{3}} \arctan(x)dx \tag{2}$$

Più difficili

$$\int_1^{\sqrt{3}} x^2 \cdot \arctan(x)dx \tag{3}$$

$$\int_1^{2} \ln(x)dx \tag{4}$$

$$\int_0^{1} \ln(x^2+1)dx \tag{5}$$

Esercizio 9.7 (Esercizio difficile) *Calcolare l'area dell'ellisse di equazione*

$$\frac{y^2}{b} + \frac{x^2}{a} = 1$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ *numeri positivi.*

Esercizio 9.8 *Calcolare i seguenti integrali*

$$\int_a^b \frac{x}{x^2+1}dx, \ \ a, b \in \mathbb{R} \tag{1}$$

$$\int_1^e \frac{e^x}{4e^x - 1}dx \tag{2}$$

$$\int_1^e \frac{e^x}{e^{2x} + 1}dx \tag{3}$$

$$\int_0^1 x\sin(x^2)dx \tag{4}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sin^3(x)}dx \tag{5}$$

$$\int_0^1 \frac{e^x}{(e^x - 3)^2}dx \tag{6}$$

$$\int_1^{e^3} \frac{1}{x\ln(2x^3)}dx \tag{7}$$

$$\int_2^6 \frac{x+4}{\sqrt{x+3}} \ln(\sqrt{x+3})dx \tag{8}$$

$$\int_1^4 \frac{\sqrt{x}+1}{x+1}dx \tag{9}$$

Esercizi più difficili

$$\int_1^{e^\pi} \sin(\ln(x))dx \tag{10}$$

$$\int_2^3 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx \tag{11}$$

Esercizio 9.9 *Calcolare i seguenti integrali*

$$\int_1^4 \frac{1}{x^2+6x+9}dx \tag{1}$$

$$\int_3^4 \frac{1}{x^2+3x+2}dx \tag{2}$$

$$\int_{-4}^{-1} \frac{1}{x^2+x}dx \tag{3}$$

$$\int_{-4}^{-1} \frac{x+2}{x^2+x}dx \tag{4}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+2x+6}dx \tag{5}$$

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{x^2+2x+3}dx \tag{6}$$

$$\int_1^4 \frac{2x+1}{x^2+6x+9}dx \tag{7}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{x+3}{x^2+2x+6}dx \tag{8}$$

$$\int_1^2 \frac{x^3+2}{x^2+2x}dx \tag{9}$$

$$\int_4^5 \frac{1}{x^2-5x+6}dx \tag{10}$$

$$\int_{\ln(4)}^{\ln(5)} \frac{e^{3x}}{e^{2x}-5e^x+6}dx \tag{11}$$

Esercizio 9.10 *Indicare quali delle seguenti funzioni sono integrabili sull'intervallo* $[1,+\infty)$

1. $\frac{1}{\sqrt{x}}$

2. $\frac{1}{x^2}$

3. $\frac{\cos(x)}{x^3}$

4. $\frac{\sin(x)}{1+x^2}$

5. xe^{-x}

6. x^2e^{-x}

7. x^ne^{-x} *con n numero naturale qualsiasi*

8. e^x/x^2

9. $\ln(x)/x^2$

Esercizio 9.11 *Calcolare il valore dei seguenti integrali impropri*

$$\int_0^{+\infty} e^{-3x}dx \tag{1}$$

attenzione al segno!

$$\int_0^{-\infty} \frac{1}{x^r}dx, \quad r > 1 \tag{2}$$

$$\int_1^{+\infty} xe^{-x^2}dx \tag{3}$$

$$\int_2^{+\infty} xe^{-2x}dx \tag{4}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \tag{5}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}dx \tag{6}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3|x|}dx \tag{7}$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1+e^x}dx \tag{8}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx \tag{9}$$

$$\int_{\ln(2)}^{+\infty} \frac{e^x}{-1+e^{2x}}dx \tag{10}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+6x+8}dx \tag{11}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+6x^2+8} dx \tag{12}$$

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{x^2-4x+4} dx \tag{13}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x^2+1)} dx \tag{14}$$

Suggerimento: osservare che $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2} dx \tag{15}$$

Suggerimento: integrazione per parti e uno degli esercizi precedenti

Il prossimo è ***più difficile***

$$\int_0^1 (x+1)e^x \ln(x) dx. \tag{16}$$

Esercizio 9.12 *Indicare se i seguenti integrali sono convergenti. Se appare un termine r, indicare per quali valori di $r \in \mathbb{R}$ l'integrale considerato è convergente*

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+\sqrt{x}} dx \tag{1}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^r} \cdot \sqrt{\frac{x^2+2x}{x^4+3x}} dx \tag{2}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^r+\sqrt{x}} dx \tag{3}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)(1+\sqrt{x})^r} dx \tag{4}$$

Il prossimo è un po' più difficile

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x^2 \ln(x)^r} dx \tag{5}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \tag{6}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{1+x^r} dx \tag{7}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)^3 \cdot \arctan(x)}{x^r} dx \tag{8}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+e^x}{x^2+e^{2x}} dx \tag{9}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x+1)-\ln(x)}{x} \cdot e^{-\frac{1}{x}} \cdot \sin(x^{-2}) dx \tag{10}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^r}{x+1} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) dx \tag{11}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^r}{x+1} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) dx \tag{12}$$

10 Equazioni differenziali ordinarie

Esercizio 10.1 *Per ciascuno dei problemi di Cauchy seguenti, si determini l'unica soluzione dopo aver calcolato l'integrale generale dell'equazione differenziale ordinaria associata. Se necessario, specificare anche l'intervallo massimale su cui il problema è risolto.*

$$\begin{cases} u' - 3u & = 0 \\ u(1) & = e \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} u' & = 2xu \\ u(0) & = \pi \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} u' - u & = \ln(x) \cdot u \\ u(1) & = 1 \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} u' & = -u + e^{-x} \\ u(0) & = 1 \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} u' & = -2xu + xe^{-x^2} \\ u(1) & = e^{-1} \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} u' & = 3u + 1 \\ u(0) & = 0 \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} u' & = xu \sin(x) \\ u(\pi) & = 1 \end{cases} \tag{7}$$

Esercizio 10.2 *Risolvere i seguenti problemi e anche in questo caso indicare l'intervallo massimale su cui il problema è risolto*

$$\begin{cases} u' & = -\frac{2}{x}u + 1 + \frac{1}{x} \\ u\left(-\frac{1}{2}\right) & = 1 \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} u' & = (1+u)\cos(x) \\ u(-\pi) & = 0 \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} u' &= \frac{xu}{x^2-1} \\ u(\sqrt{10}) &= 1 \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} u'' - 6u' + 9u &= 0 \\ u(1) &= -1 \\ u'(1) &= 0 \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} u'' - 6u' + 9u &= 0 \\ u(1) &= -1 \\ u'(1) &= 0 \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} u'' - 2u' + 5u &= 0 \\ u(0) &= 1 \\ u'(0) &= \frac{1}{5} \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} u'' + u &= 0 \\ u(2\pi) &= 1 \\ u'(2\pi) &= -\frac{1}{2} \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} u'' + u' + u &= 0 \\ u(1) &= 0 \\ u'(1) &= -\pi \end{cases} \tag{8}$$

Esercizio 10.3 (non banale) *Usando come suggerimento la risoluzione delle ODE di ordine 2 lineari omogenee a coefficienti costanti, determinare l'integrale generale delle seguenti ODE*

1. $u^{(4)} - u = 0$
2. $u^{(3)} + u = 0$
3. $u''' - u'' - 4u' + 4u = 0$

Soluzioni

7 Limiti e continuità

Esercizio 7.1.

- Per $x \to \pm\infty$ abbiamo che $\lim x^4 = \lim x^2 = +\infty$ mentre 1 è costante. Quindi il limite complessivo è $+\infty$ per $x \to \pm\infty$.

  Per $x \to 0$ i termini sono tutti continui quindi è sufficiente valutare la funzione in 0. Risultato, $= 1$.

- $$\lim_{x\to\pm\infty} x^5 - 2 = \pm\infty$$
  $$\lim_{x\to 0} x^5 - 2 = -2$$

- Se $x \to +\infty$ allora $x^n \to +\infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

  Se $x \to 0$ allora $x^n \to 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

  Se $x \to -\infty$ allora $x^n \to +\infty$ quando n è pari, mentre $x^n \to -\infty$ quando n è dispari.

- per $x \to \pm\infty$, $\frac{1}{x^3} \to 0$

  Per $x \to 0$ la funzione $\frac{1}{x^3}$ non ha limite, mentre esistono i limiti unilateri per $x \to 0^\pm$ e valgono $\pm\infty$.

- $\frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$, quindi per $x \to \pm\infty$ il limite di questa funzione è 1.

  Per $x \to 0$ questa espressione non ha limite perché $\frac{1}{x}$ non ha limite.

- $\frac{x^2+1}{x^2} = 1 + \frac{1}{x^2}$ quindi per $x \to \pm\infty$ questa espressione ha come limite 1.

  Invece per $x \to 0$ questa espressione ha limite $+\infty$.

Esercizio 7.2. Consideriamo il caso di $\lim_{x\to+\infty} \sin(x)$, gli altri casi sono analoghi. Supponiamo per assurdo che tale limite esista. Poiché $\sin(x)$ è una funzione limitata, tale limite deve essere un numero finito ℓ.

Dato un certo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, per definizione di limite, esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $x \geq M$, vale la disuguaglianza

$$|\sin(x) - \ell| < \varepsilon. \tag{9}$$

Osserviamo che per ogni M, esistono (infiniti) valori $x_1, x_2 > M$ tali che $\sin(x_1) = 1$ e $\sin(x_2) = -1$. Applichiamo adesso la disuguaglianza triangolare,

$$\begin{aligned} 2 = |\sin(x_1) - \sin(x_2)| &= |\sin(x_1) - \ell + \ell - \sin(x_2)| \\ &\leq |\sin(x_1) - \ell| + |\sin(x_2) - \ell| \\ &< 2\varepsilon \end{aligned}$$

perché $|\sin(x_i) - \ell| < \varepsilon$ per $i = 1, 2$, come conseguenza dell'Equazione (9). Quindi, se si sceglie ε sufficientemente piccolo, per esempio $\varepsilon < 1$, si ottiene un assurdo perché si ottiene $2 < 2\varepsilon < 2$. Quindi tale limite ℓ non può esistere.

Esercizio 7.3.

- Se $r > 0$ allora per ogni $N \in \mathbb{R}$ è possibile trovare M tale che per ogni $n > M$ allora $n^r > N$. In particolare, se scegliamo $M = N^{\frac{1}{r}}$, allora vale che $n^r > N$ per ogni $n > M$. Questa è la definizione di limite uguale a $+\infty$
- Se $r = 0$, la funzione n^0 è la funzione costante $= 1$
- Se $r < 0$, allora $n^r = \frac{1}{n^{-r}}$ con $-r > 0$ e quindi $\lim n^{-r} = +\infty$. Dunque per le operazioni sui limiti si ha che $\lim n^r = 0$.

Esercizio 7.4.

- se $b > 1$ osserviamo che per ogni $N \in \mathbb{R}^+$ e $N > 1$, $\log_b(N) > 0$ e per ogni numero naturale $n > M = \log_b(N)$ si ha $b^n > N$. Questo corrisponde alla definizione di $\lim b^n = +\infty$
- se $b = 1$ la successione è costante $b^n \equiv 1$
- se $|b| < 1$ eliminiamo per primo il caso $b = 0$, in cui la successione è costante $b^n \equiv 0$; invece se $0 < |b| < 1$, consideriamo per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tale che $0 < \varepsilon < 1$ si ha $\log_{|b|}(\varepsilon) > 0$ quindi per ogni numero naturale $n > M = \log_{|b|}(\varepsilon)$ si ha che

  $$0 < |b^n| = |b|^n < \varepsilon$$

  perché la funzione esponenziale è decrescente quando la base è compresa tra 0 e 1
- se $b \leq -1$ allora la successione $b^n > 0$ se n è pari mentre $b^n < 0$ se n è dispari, in più $|b^n| \geq 1$ è limitata dal basso, quindi la successione b^n oscilla ma il valore assoluto è limitato dal basso, quindi la differenza $|b^{n+1} - b^n| \geq 2$ per ogni n e quindi la successione non può avere un limite finito. In più la successione non può avere un limite infinito perché la funzione cambia di segno in base alla parità di n. Quindi in questo caso la successione non ha limite.

Esercizio 7.5.

1. $+\infty$
2. $+\infty$
3. $+\infty$

4. 0

Esercizio 7.6

1. $1 - 0 = 1$
2. $\frac{x+1}{x+3} = 1 - \frac{2}{x+3}$ quindi $\lim = 1$
3. non esiste, ma se prendiamo $x \to 0^{\pm}$ allora otteniamo

$$\lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{1}{\sin(x)} = \pm\infty$$

4. $\frac{(2x)^3+1}{2x^3-4} = \frac{8x^3}{2x^3} \cdot \frac{1+\frac{1}{(2x)^3}}{1-\frac{4}{2x^3}}$. Quindi al limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(2x)^3 + 1}{2x^3 - 4} = 4 \cdot \frac{1+0}{1-0} = 4.$$

5. l'espressione si semplifica come $x + \frac{3}{x^3} - \frac{2}{x^4}$ e quindi tramite le proprietà di algebra dei limiti il limite per $x \to -\infty$ vale $-\infty + 0 - 0 = -\infty$ (notare che si è utilizzata la proprietà di algebra dei limiti e l'ultimo $=$ non è un "vero" $=$).
6. $\sin(x)$ è limitata dunque $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$ e quindi il limite della funzione proposta è sempre 1
7. $\left|\frac{1}{x-1}\right| = \frac{1}{|x-1|}$ e il limite è $+\infty$
8. $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{|x|} = \pm 1$
9. in questo caso il limite non esiste ma esistono i due limiti unilateri per $x \to 0^{\pm}$ e valgono ± 1
10. $+\infty$
11. 0
12. $-\infty$
13. $\pm\infty$
14. non esiste ma esistono i due limiti unilateri per $x \to 2^{\pm}$ e valgono $\pm\infty$
15. $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ quindi l'espressione considerata è $= \frac{1}{x-1}$ per ogni $x \neq -1$ quindi

$$\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim_{x \to -1} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}$$

16. in questo esercizio c'era un errore. Ricordiamo che ln è l'espressione del logaritmo naturale, cioè il logaritmo in base e. Per continuità dell'elevameneto a potenza vale che

$$\lim_{x \to \ln(2)} e^x - 1 = e^{\ln(2)} - 1 = 2 - 1 = 1$$

17. per continuità $= \frac{1}{2}$
18. non esiste ma esistono i due limiti unilateri per $x \to 1^{\pm}$ e valgono $\pm\infty$
19. $= 1 - \frac{1}{x^3+1}$ e quindi il limite è sempre 1
20. $= x + \frac{1}{x}$ e quindi il limite è $-\infty$

Esercizio 7.7

1. 0
2. $-\infty$
3. 0
4. $\frac{2}{3}$
5. $+\infty$

Esercizio 7.8
Sia $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ e consideriamo le successioni

$$a_n := \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$$
$$b_n := \frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}}$$

definite per i numeri naturali $n \geq 1$. Allora, $\lim a_n = \lim b_n = 0$ e in più

$$f(a_n) = 1, \;\; f(b_n) = -1, \quad \forall n \geq 1.$$

Quindi esistono due successioni entrambe tendenti a 0 ma con limiti diversi rispetto alla funzione f. Questo dimostra che non esiste il limite $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Al contrario se $x \to \pm\infty$ allora $\frac{1}{x} \to 0$ e quindi

$$\lim_{x \to \pm\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0} \sin(x) = \sin(0) = 0.$$

Per quanto riguarda la funzione $g(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ osserviamo che per $x \to 0$, $g(x)$ è ottenuta come prodotto con $x \to 0$ e $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ limitata. Quindi

$$\lim_{x \to 0} g(x) = 0.$$

Invece per $x \to \pm\infty$ usiamo il cambio di variabile $y = \frac{1}{x}$. Avremo $y \to 0^{\pm}$ e

$$\lim_{x\to\pm\infty} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to 0^{\pm}} \frac{\sin(y)}{y} = 1.$$

Esercizio 7.9

- $DM = \mathbb{R}\backslash\{0\}$
- dall'esercizio precedente, il valore è 0
- dall'esercizio precedente, il valore è 1
- la funzione è pari

Esercizio 7.10

Se utilizziamo la sostituzione $y = \frac{1}{2}x$ allora $x = 2y$ e $y \to 0$ quando $x \to 0$. Inoltre, grazie alle proprietà delle funzioni trigonometriche, la funzione diventa

$$\frac{1-\cos^2(y)+\sin^2(y)}{4y^2} = \frac{2\sin^2(y)}{4y^2} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin(y)}{y}\right)^2.$$

Quindi sfruttando ciò che sappiamo sui limiti notevoli, possiamo concludere

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin(y)}{y}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 7.11

La soluzione di questo esercizio si trova sul "minimo teorico".

Esercizio 7.12

1. -1
2. $-\infty$
3. 1
4. $+\infty$
5. $\pm\infty$
6. $\pm\infty$
7. $\frac{1}{2}$
8. 0
9. 1

Esercizio 7.13

1. moltiplico e divido per a, e poi applico il cambio di variabile $y = ax$
2. moltiplico e divido la x all'esponente per c, poi applico il cambio di variabile $y = \frac{x}{c}$
3. moltiplico e divido per b, poi applico il cambio di variabile $y = bx$
4. svolgo la potenza del binomio e poi semplifico

Esercizio 7.14

1. $\frac{1}{4}$
2. $\frac{1}{2}$
3. 1
4. $-\infty$
5. $-\infty$
6. il limite non esiste, ma esistono i due limiti unilateri e sono $\pm\infty$

Esercizo 7.15

1. D'ora in avanti, $sgn(x)$ è la funzione "segno" tale che $sgn(x) = 1$ se $x > 0$, $sgn(x) = -1$ se $x < 0$, mentre $sgn(0) = 0$. Allora un esempio della funzione cercata è
$$sgn(x) \cdot \left(\frac{\sin(x-1)}{x-1} \right)$$
2. $\frac{1}{x-3}$
3. la seguente funzione definita "a tratti"
$$f(x) := \begin{cases} x & \text{se } x \leq -1 \\ \frac{1}{x-1} & \text{se } x > -1 \end{cases}$$
4. $\left(\frac{\sin(x^3 - x)}{x^3 - x} \right)$
5. $\lfloor x \rfloor$
6. $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ oppure $\frac{1}{\sin(x)}$
7. $\sin \left(\frac{1}{x-1} \right)$

8 Derivate

Esercizio 8.1

1. $2x + 5$
2. $5e^x + 5xe^x$
3. $\pi \cdot \cos(\pi x)$
4. $-\frac{\pi}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 3x^2$

Esercizio 8.2

1. $f'(1) + 2g'(1) = 3$
2. $f'(1)g(1) + f(1)g'(1) = 5$
3. $f'(1)g^2(1) + f(1)2g(1)g'(1) = 21$
4. $\frac{f'(1)g(1) - f(1)g'(1)}{g^2(1)} = \frac{1}{9}$

Esercizio 8.3

1. -14
2. la funzione non è definita in 1
3. $4 - \frac{2}{3}$
4. $\frac{2}{3}$

Esercizio 8.4

Osserviamo che il limite indicato è la derivata della funzione $f(x) = (1+x)^\alpha$ calcolata nel punto $x = 0$. La funzione f è derivabile in $x = 0$ per ogni valore di α, e la sua derivata vale

$$\alpha \cdot (1 + x)^{\alpha - 1}\big|_{x=0} = \alpha.$$

Esercizio 8.5

1. De l'Hôpital, 0
2. 0
3. 2
4. $\ln(\sin(x)) = \ln(x + o(x)) = \ln(x) + \ln\left(1 + \frac{o(x)}{x}\right)$, quindi il limite cercato è 1
5. $-\frac{1}{2}$

6. 0
7. 1
8. $2\sqrt{2}$
9. 2
10. 0
11. $\frac{3}{2}$
12. $\ln(1+e^x) = \ln(e^x) + \ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)$, il secondo termine tende a 0 mentre il primo è uguale a x. Quindi dobbiamo calcolare il limite di $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$. Con il cambio di variabile $y = \frac{1}{x}$ si può concludere che il limite è 1
13. 2

Esercizio 8.6

1. $2f'(2x+1)$
2. $f'(x) \cdot e^{f(x)}$
3. $2f'(2x)f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}f(2x)f'\left(\frac{x}{2}\right)$
4. $\left(\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} + 5\right) \cdot e^{\sqrt{f(x)}+5x}$
5. $-f'(x)\sin(x) + \frac{f'(x)}{f(x)}$
6. $(3x^2+3e^{3x})f'(x^3+e^{3x})$
7. $(3\sin(x)+3x\cos(x))f'(3x\sin(x))$

Esercizio 8.7

1. $9x^8 + 12$
2. $\ln(x) + 1$
3. $3x^2e^{\sin(x)} + x^3\cos(x)e^{\sin(x)}$
4. $\sin(\cos(x))\sin(x)$
5. $\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$
6. $-\ln(2)\sin(x)2^{\cos(x)}$
7. $(2x+1)e^{x^2+x+1}$

8. $\frac{2x+1}{x^2+x+1}$

Esercizio 8.8

1.
$$f'(x) = \frac{x^2+1-2x(x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$$

La derivata si annulla nei due punti $\pm\sqrt{2}-1$. La funzione è

- crescente per $x \leq -\sqrt{2}-1$
- decrescente per $x \in [-\sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1]$
- crescente per $x \geq \sqrt{2}-1$.

Inoltre il limite per $x \to \pm\infty$ è 0. Quindi $x = -\sqrt{2}-1$ è un massimo globale mentre $x = \sqrt{2}-1$ è un minimo globale

2.
$$f'(x) = \frac{x+5-x-3}{(x+5)^2} = \frac{2}{(x+5)^2}$$

Quindi la derivata non si annulla mai e la funzione non ha punti stazionari

3. $\sin(3x)' = 3\cos(3x)$ che si annulla precisamente nei punti

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Inoltre si verifica (calcolare la derivata seconda) che se k è pari allora x è un punto di massimo globale, mentre se k è dispari allora x è un minimo globale.

4.
$$f'(x) = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = \frac{e^x}{x^2}(x-1).$$

L'unico punto stazionario è $x = 1$ e si tratta di un minimo globale

5.
$$f'(x) = \ln(x) + 1$$

Quindi l'unico punto stazionario è e^{-1}, e si tratta di un minimo globale.

6.
$$f'(x) = \ln(x) - 1$$

L'unico punto stazionario è $x = e$ e si tratta di un minimo globale.

Esercizio 8.9 Abbiamo visto (vedi note) che se vale la disuguaglianza nel testo, allora $f'(x)$ è una funzione crescente.

Adesso supponiamo per assurdo che esistano $x_0 < x_1 < x_2$ (gli altri casi si fanno in modo analogo) tale che

$$r_{f,x_0}(x_1) > r_{f,x_0}(x_2). \tag{10}$$

Per il Teorema di Lagrange esiste $\widetilde{x}_1 \in [x_0, x_1]$ tale che

$$f'(\widetilde{x}_1) = r_{f,x_0}(x_1) = \frac{(f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Inoltre esiste $\widetilde{x}_2 \in [x_1, x_2]$ tale che

$$f'(\widetilde{x}_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

A questo punto scriviamo la differenza

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_0) &= f(x_2) - f(x_1) + f(x_1) - f(x_0) \\ &= f'(\widetilde{x}_2)(x_2 - x_1) + f'(\widetilde{x}_1)(x_1 - x_0) \\ &\geq f'(\widetilde{x}_1)(x_2 - x_0) \\ &> f(x_2) - f(x_0) \end{aligned}$$

che è una disuguaglianza assurda. Qui nella prima disuguaglianza abbiamo usato il fatto che $f'(\widetilde{x}_2) \geq f'(\widetilde{x}_1)$ mentre nella seconda abbiamo utilizzato la (10).

9 Integrali

Esercizio 9.1

- $$\int f(x) = \left\{\frac{4}{5}x^5 4 + \frac{x^2}{4} + c,\ c \in \mathbb{R}\right\}$$

  Quindi $\int_0^1 f(x)dx = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

- $$\int f(x) = \{\ln(x) + x + c,\ c \in \mathbb{R}\}$$

  L'integrale non è definito sull'intervallo $[0, 1]$

- $$\int f = \left\{\frac{3^x}{\ln(3)} + \sin(x) + \frac{2}{3}x^6 + c,\ c \in \mathbb{R}\right\}$$

  Quindi

  $$\int_0^1 f = \frac{2}{\ln(3)} + \sin(1) + \frac{2}{3}$$

- $$\int f = \left\{e^{\sin(x)} + c,\ c \in \mathbb{R}\right\}$$
  e quindi $\int_0^1 f = e^{\sin(1)} - 1$
- $$\int f = \left\{x^2 + \tan(x) + c,\ c \in \mathbb{R}\right\}.$$
  Quindi
  $$\int_0^1 f = 1 + \tan(1)$$
- $$\int f = \left\{\frac{2^{5x}}{5\ln(2)} - 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) + c,\ c \in \mathbb{R}\right\}.$$

Esercizio 9.2

1. $$= \left[\frac{(2x+1)^4}{8}\right]_0^3 = \frac{7^4 - 1}{8}.$$
2. $$= \left[\frac{7}{2}x^2 + \frac{2^{x+1}}{\ln(2)} - \frac{3e^{-7x}}{7}\right]_0^1 = \frac{7}{2} + \frac{2}{\ln(2)} + \frac{3}{7}(1 - e^{-7}).$$
3. $$= \left[-\frac{2}{3}\cos(3x) + \frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{2}{3} + \sqrt{3}$$
4. $$= \left[-\frac{1}{4}(1-3x)^{\frac{4}{3}}\right]_{-1}^1 = \frac{2^{\frac{4}{3}} - 1}{2^{\frac{2}{3}}}$$
5. $$= \left[-x^{-1} - 2x^{-\frac{1}{2}}\right]_1^9 = \frac{8}{9} + \frac{4}{3} = \frac{20}{9}$$

Esercizio 9.12

1. Bisogna verificare l'integrabilità per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$.
   Per $x \to 0^+$ abbiamo $\frac{1}{x^3+\sqrt{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ che è integrabile su $[0,1]$. Per $x \to +\infty$ abbiamo $\frac{1}{x^3+\sqrt{x}} \sim \frac{1}{x^3}$ che è integrabile su $[1,+\infty]$.
   Questo integrale è convergente.

2. Bisogna verificare l'integrabilità per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$.

   Per $x \to 0^+$ abbiamo
$$\sqrt{\frac{x^2+x}{x^4+3x}} \sim \sqrt{\frac{2}{3}}.$$
   Per $x \to +\infty$ abbiamo
$$\sqrt{\frac{x^2+2x}{x^4+3x}} \sim \frac{1}{x}.$$
   Quindi dobbiamo verificare l'integrabile di $\frac{1}{x^r}$ su $[0,1]$ e l'integrabilità di $\frac{1}{x^{r+1}}$ su $[1,+\infty)$. Sappiamo che il primo caso è integrabile quando $r < 1$ mentre il secondo caso è integrabile quando $r+1 > 1$ cioè $r > 0$. L'integrale dell'esercizio quindi è convergente quando
$$0 < r < 1, \text{ cioè } r \in (0,1).$$

3. Per $x \to 0^+$, $\frac{1}{x^r+\sqrt{x}} \sim \frac{1}{sqrtx}$ e quest'ultima funzione è integrabile su $[0,1]$.

   Per $x \to +\infty$, $\frac{1}{x^r+\sqrt{x}} \sim \frac{1}{x^r}$ e quest'ultima funzione è integrabile su $[1,+\infty)$ quando $r > 1$. Quindi $r > 1$ è la condizione generale di integrabilità in questo caso.

4. Per $x \to 0^+$, $(1+x^2)$ e $(1+x^{1/2})$ sono entrambi asintoticamente equivalenti a 1, quindi la funzione considerata è asintoticamente equivalente a x, che è integrabile su $[0,1]$.

   Per $x \to +\infty$,
$$(1+x^2) \sim x^2 \quad \text{e} \quad (1+\sqrt{x})^r \sim x^{\frac{r}{2}}.$$
   Quindi la funzione considerata è asintoticamente equivalente a $x^{-\frac{r}{2}-1}$, e la condizione di integrabilità su $[1,+\infty)$ diventa
$$-\frac{r}{2} - 1 < -1, \quad \text{cioè } r > 0.$$

5. In questo caso abbiamo problemi di integrabilità per $x \to 0^+$ e per $x \to 1^-$.

   Per $x \to 0^+$ abbiamo che $\sin(x) \sim x$ quindi la funzione considerata è asintoticamente equivalente a $\frac{1}{x \cdot \ln(x)^r}$, studiamo la convergenza di questa su $[0, \frac{1}{2}]$. Applicimo la sostituzione $y = \ln(x)$ ottenendo
$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\ln(x)^r} dx = \int_{-\infty}^{-\ln(2)} \frac{1}{y^r} dy,$$
   che sappiamo essere convergente per $r > 1$.

   Per $x \to 1^-$ abbiamo che $\sin(x) \sim \sin(1)$ una costante. Quindi è sufficiente studiare la convergenza su $[\frac{1}{2}, 1]$ della funzione $\frac{1}{x^2\ln(x)^r}$. Applichiamo di nuovo la sostituzione $y = \ln(x)$ ottenendo
$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x^2\ln(x)^r} = \int_{-\ln(2)}^{0} \frac{1}{e^y y^r} dy.$$

Osserviamo che $e^y \sim 1$ per $y \to 0^-$ quindi è sufficiente studiare l'integrabilità di $\frac{1}{y^r}$ vicino a 0. Quindi la condizione è $r < 1$.

Il risultato è che per nessun valore di r si ha integrabilità su $[0, 1]$.

6. Per $x \to 0^+$ si ha $\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ che è integrabile vicino a 0.

   Per $x \to +\infty$ si ha che $\frac{e^{-\sqrt{x}}}{x^r} \to 0$ per ogni $r \in \mathbb{R}$, quindi in particolare $\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ è definitivamente inferiore a $\frac{1}{x^2}$ e quindi è integrabile su $[1, +\infty)$.

   Quindi la funzione è integrabile su $[0, +\infty)$.

7. Per $x \to +\infty$ si ha $\arctan(x) \sim \frac{\pi}{2}$ e quindi

   $$\frac{\arctan(x)}{1 + x^r} \sim \frac{\pi}{2 \cdot x^r}.$$

   La funzione è quindi integrabile quando $r > 1$.

8. Per $x \to 0^+$ abbiamo che $\ln(1 + x) \sim x$ e $\arctan(x) \sim x$ (verificare con Taylor), e quindi l'integrabilità della funzione su $[0, \frac{1}{2}]$ equivale all'integrabilità di $\frac{x^4}{x^r} = \frac{1}{x^{r-4}}$, cioè la funzione è integrabile su $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ se e solo se $r - 4 < 1$, quindi $r < 5$.

   Per $x \to +\infty$ si ha $\ln(1 + x) \sim \ln(x)$ poiché

   $$\ln(1 + x) = \ln\left(x \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) = \ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right),$$

   e il secondo termine tende a 0. In più, $\arctan(x) \sim \frac{\pi}{2}$. Quindi l'integrabilità della funzione su $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ equivale all'integrabilità della funzione

   $$\frac{\ln(x)^3}{x^r}.$$

   Osserviamo che $\ln(x)^k = o(x)$ per $x \to +\infty$ per ogni $k \in \mathbb{R}^+$. Quindi è sufficiente verificare l'integrabilità di $\frac{1}{x^r}$, e questa si ha se e solo se $r > 1$.

   Quindi la funzione è integrabile su $[0, +\infty)$ se e solo se $r \in (1, 5)$.

10 Equazioni differenziali ordinarie