Curve, integrali curvilinei e campi vettoriali

Davide Guidetti

1 Cammini e loro lunghezza

Definizione 1.1. *Un* **cammino (continuo)** α *è una funzione continua da* J *a* $\mathbb{R}^n$*, con* J *intervallo chiuso e limitato in* $\mathbb{R}$.

Se $J = [a, b]$*,* $\alpha(a)$ *e* $\alpha(b)$ *(*$\in \mathbb{R}^n$*) si chiamano* **estremi** *del cammino.*

Se $\alpha \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$*, si dice che è un cammino di classe* C^1.

Sia $J = [a, b]$*. Diremo che* α *è* C^1 *a tratti se esistono* $t_0, t_1, ..., t_k$*, con* $a = t_0 < t_1 < ... < t_k = b$*, tali che, per* $j = 1, ..., k$*,* $\alpha_{[t_{j-1},t_j]}$ *è di classe* C^1.

L'immagine $\alpha(J)$ *si chiama* **sostegno** *di* α.

Esempio 1.1. Sia

$$\begin{cases} \alpha : [0, 2] \to \mathbb{R}^2, \\ \alpha(t) = \begin{cases} (t, 0) & \text{se } t \in [0, 1], \\ (1, t-1) & \text{se } t \in [1, 2]. \end{cases} \end{cases}$$

E' chiaro che α è un cammino di classe C^1 a tratti.

Osservazione 1.1. E' conveniente pensare a un cammino come a una legge oraria, che descrive, istante per istante, la posizione di un punto che si muove con continuita' in $\mathbb{R}^n$. Significativamente, abbiamo usato la lettera t come variabile, a segnalare il fatto che, spesso, essa rappresenta il tempo. Per esempio, se $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} \alpha : [0, 2k\pi] \to \mathbb{R}^2, \\ \alpha(t) = (\cos(t), \sin(t)) \end{cases}$$

rappresenta la traiettoria di un punto che percorre in senso antiorario k volte la circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 1.

La prossima definizione identifica cammini che, intuitivamente, percorrono la stessa traiettoria lo stesso numero di volte, ma non necessariamente nello stesso verso.

Definizione 1.2. *Siano* $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *e* $\beta : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ *due cammini continui. Essi si dicono* **equivalenti** *se esiste* $u : [c, d] \to [a, b]$*, iniettiva e suriettiva, di classe* C^1 *con* $u'(s) \neq 0$ $\forall s \in [c, d]$*, tale che*

$$\beta(s) = \alpha(u(s)) \quad \forall s \in [c, d].$$

Osservazione 1.2. Se α e β sono equivalenti, si vede subito che hanno lo stesso sostegno (esercizio 1.2). Quindi, α e β si possono pensare, intuitivamente, come parametrizzazioni della stessa curva. Con riferimento alla definizione 1.2, per il teorema di Bolzano, deve essere $u'(s) > 0$ $\forall s \in [c, d]$, oppure $u'(s) > 0$ $\forall s \in [c, d]$. Nel primo caso, u è crescente, nel secondo decrescente. Segue subito che, nel primo caso coincidono primo e secondo estremo, nel secondo gli estremi sono invertiti.

Definizione 1.3. *Nelle ipotesi della definizione 1.2, diremo che* α *e* β *sono* **positivamente equivalenti** *se* u *è crescente.*

Esempio 1.2. Siano

$$\begin{cases} \alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \\ \alpha(t) = (\cos(t), \sin(t)), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2, \\ \beta(t) = (\cos(2t), \sin(2t)), \end{cases}$$

Allora α e β sono positivamente equivalenti, in quanto $\beta(s) = \alpha(2s)$ $\forall s \in [0, \pi]$. Poniamo invece

$$\begin{cases} \gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \\ \gamma(t) = (\cos(2\pi - t), \sin(2\pi - t)) = (\cos(t), -\sin(t)). \end{cases}$$

Allora α e γ sono equivalenti, ma non positivamente equivalenti, in quanto $\beta(s) = \alpha(2\pi - s)$ $\forall s \in [0, 2\pi]$. Si osservi che α e β percorrono entrambi una volta in senso antiorario la circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 1, β a velocita' doppia di α. Invece γ percorre la stessa circonferenza, ma in senso orario.

Veniamo ora alla definizione di lunghezza di un cammino.

Definizione 1.4. *Sia* $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *un cammino continuo. Chiameremo* **lunghezza** *di* α *e indicheremo con la scrittura* $l(\alpha)$

$$\sup\{\sum_{j=1}^{k} \|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1}\| : k \in \mathbb{N}, a = t_0 < t_1 < ... < t_k = b\}. \tag{1.1}$$

Diremo che α *è* **rettificabile** *se* $l(\alpha) < +\infty$.

Osservazione 1.3. Ovviamente, qualunque sia α, si ha $0 \leq l(\alpha) \leq +\infty$. Osserviamo che, fissati $t_0, t_1, ..., t_k$, con $a = t_0 < t_1 < ... < t_k = b$, la somma $\sum_{j=1}^{k} \|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1}\|$ rappresenta la lunghezza di una poligonale inscritta nel cammino.

Il seguente importante risultato permette, talvolta, di calcolare la lunghezza di un cammino ed è la base della definizione di integrale curvilineo di prima specie, che vedremo nel seguito.

Teorema 1.1. *Sia* $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *un cammino di classe* C^1*. Allora* α *è rettificabile e*

$$l(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

Per dimostrare il teorema 1.1, è conveniente introdurre la nozione di integrale di funzione a valori vettoriali. Per semplicita', ci limiteremo a considerare solo funzioni continue.

Definizione 1.5. *Siano* $a, b \in \mathbb{R}$*, con* $a < b$*,* $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *continua,* $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$*. Poniamo*

$$\int_a^b f(t) dt := (\int_a^b f_1(t) dt, \dots, \int_a^b f_n(t) dt).$$

Osservazione 1.4. La definizione 1.5 ha senso, perche', se f è continua, le funzioni $f_1, \dots, f_n$ sono continue a valori reali (teorema 3.6 (I) in [1]). Quindi gli integrali delle componenti di f sono perfettamente definiti. Osserviamo che $\int_a^b f(t) dt \in \mathbb{R}^n$.

Valgono le seguenti proprieta':

Proposizione 1.1. *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \le b$, $f, g \in C([a,b];\mathbb{R}^n)$. Allora:*
(II) $\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b f(t)dt$;
(II) se $m \in \mathbb{N}$ *e* $T \in L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$,

$$T(\int_a^b f(t)dt) = \int_a^b T[f(t)]dt;$$

(III) $\| \int_a^b f(t)dt\| \le \int_a^b \|f(t)\|dt$;
(IV) se $f \in C^1([a,b];\mathbb{R}^n)$,

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

(V) Se $a < c < b$,

$$\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

Proof Le dimostrazioni di (I)-(II) e (IV)-(V) sono elementari e sono lasciate al lettore. Proviamo solo (III). Poniamo

$$I := \int_a^b f(t)dt.$$

Per (II),

$$\|I\|^2 = I \cdot I = I \cdot \int_a^b f(t)dt = \int_a^b I \cdot f(t)dt \le \int_a^b \|I\|\|f(t)\|dt = \|I\| \int_a^b \|f(t)\|dt,$$

da cui la conclusione.

□

Dimostrazione del teorema 1.1 Siano $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$. Allora, per la proposizione 1.1 (IV) e (III), si ha

$$\sum_{j=1}^k \|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1}\| = \sum_{j=1}^k \| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \alpha'(t)dt\| \le \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\alpha'(t)\|dt = \int_a^b \|\alpha'(t)\|dt.$$

Cio' vale per ogni scomposizione $\{a = t_0 < \cdots < t_k = b\}$ di $[a,b]$. Quindi α è rettificabile e

$$l(\alpha) \le \int_a^b \|\alpha'(t)\|dt.$$

Proviamo la disuguaglianza opposta. Siano $a = t_0 < \cdots < t_k = b$. Per ciascun $j \in \{1, \dots, k\}$ si ha, applicando (III) della proposizione 1.1,

$$\begin{aligned} \|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1}\| &= \| \textstyle\int_{t_{j-1}}^{t_j} \alpha'(s)ds\| = \|(t_j - t_{j-1})\alpha'(t_j) + \int_{t_{j-1}}^{t_j} [\alpha'(s) - \alpha'(t_j)]ds\| \\ &\ge (t_j - t_{j-1})\|\alpha'(t_j)\| - \textstyle\int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\alpha'(s) - \alpha'(t_j)\|ds \\ &= \textstyle\int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\alpha'(s)\|ds + \int_{t_{j-1}}^{t_j} (\|\alpha'(t_j)\| - \|\alpha'(s)\|)ds - \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\alpha'(s) - \alpha'(t_j)\|ds \\ &\ge \textstyle\int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\alpha'(s)\|ds - \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\|\alpha'(t_j)\| - \|\alpha'(s)\||ds - \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\alpha'(s) - \alpha'(t_j)\|ds. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Siano ora ϵ, η positivi. Per il teorema di Heine-Cantor (vedi [1], teorema 4.3) esiste $\delta(\eta) > 0$ tale che, se $t, t' \in [a, b]$ e $|t - t'| \leq \delta(\eta)$,

$$|\|\alpha'(t)\| - \|\alpha'(t')\|| \leq \|\alpha'(t) - \alpha'(t')\| \leq \eta.$$

Da (1.2) segue

$$\|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1}\| \geq \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\alpha'(s)\| ds - 2\eta(t_j - t_{j-1}).$$

Quindi, se $t_j - t_{j-1} \leq \delta(\eta)$, per ciascun $j = 1, \ldots, k$, sommando in j, si ottiene

$$\sum_{j=1}^{k} \|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1}\| \geq \int_a^b \|\alpha'(s)\| ds - 2\eta(b - a). \tag{1.3}$$

Se $2\eta(b - a) \leq \epsilon$, da (1.3) segue

$$l(\alpha) \geq \sum_{j=1}^{k} \|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1}\| \geq \int_a^b \|\alpha'(s)\| ds - \epsilon.$$

Dall'arbitrarieta' di $\epsilon > 0$, ricaviano

$$l(\alpha) \geq \int_a^b \|\alpha'(s)\| ds.$$

$\square$

Esempio 1.3. Siano $r \in \mathbb{R}^+$, $\omega \in]0, 2\pi]$,

$$\begin{cases} \alpha : [0, \omega] \to \mathbb{R}^2, \\ \alpha(t) = (r\cos(t), r\sin(t)). \end{cases}$$

Allora $\alpha'(t) = (-r\sin(t), r\cos(t))$ $\forall t \in [0, \omega]$. Segue

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{r^2 \sin^2(t) + r^2 \cos^2(t)} = r \qquad \forall t \in [0, \omega].$$

Dal teorema 1.1 segue allora

$$l(\alpha) = \int_0^\omega r dt = r\omega.$$

Esempio 1.4. Sia

$$\begin{cases} \alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \\ \alpha(t) = \begin{cases} (t, (j+1)(t - \frac{1}{j+1})) & se \quad \frac{1}{j+1} \leq t \leq \frac{1}{j}, j = 1, 3, \ldots, \\ (t, \frac{1}{j+1} - j(t - \frac{1}{j+1})) & se \quad \frac{1}{j+1} \leq t \leq \frac{1}{j}, j = 2, 4, \ldots, \\ 0 & se \quad t = 0. \end{cases} \end{cases}$$

Si vede facilmente che α è continua e che il suo supporto coincide con

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} [(\frac{1}{2k+2}, 0), (\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k+1})] \cup \{(0, 0)\}.$$

Per ogni $k_0 \in \mathbb{N}$,

$$l(\alpha) \geq \sum_{k=0}^{k_0} \|(\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k+1}) - (\frac{1}{2k+2}, 0)\| \geq \sum_{k=0}^{k_0} \frac{1}{2k+1} \to \infty \quad (k_0 \to \infty).$$

Quindi α non è rettificabile.

Esercizio 1.1. Verificare che la relazione della definizione 1.2 tra cammini è effettivamente "di equivalenza", nel senso che, dati tre cammini continui α, β, γ:

(a) α è equivalente ad α;

(b) se α è equivalente a β, β è equivalente a α;

(c) se α è equivalente a β e β è equivalente a γ, α è equivalente a γ.

Verificare proprieta' analoghe per la definizione 1.3.

Esercizio 1.2. Dimostrare che due cammini equivalenti hanno lo stesso sostegno. Dimostrare anche che hanno gli stessi estremi.

Esercizio 1.3. Siano α e β cammini equivalenti. Dimostrare che $l(\alpha) = l(\beta)$.

Esercizio 1.4. Siano $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ un cammino continuo, $c \in]a, b[$, $\beta := \alpha_{|[a,c]}$, $\gamma := \alpha_{|[c,b]}$.

Dimostrare che $l(\alpha) = l(\beta) + l(\gamma)$.

Dedurre che un cammino C^1 a tratti è rettificabile.

2 Integrali curvilinei

Questa sezione è dedicata ai due tipi di integrale curvilineo che considereremo.

Definizione 2.1. *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, $\alpha \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^n)$, $f : \alpha([a, b]) \to \mathbb{R}$. Supponiamo che $t \to f(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|$ sia sommabile in $[a, b]$. Allora poniamo*

$$\int_\alpha f(x)ds := \int_{[a,b]} f(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|dt.$$

Chiamiamo $\int_\alpha f(x)ds$ **integrale curvilineo di prima specie** *di f sul cammino α.*

Esempio 2.1. Poniamo

$$\begin{cases} \alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \\ \alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} f : \alpha([0, 2\pi]) \to \mathbb{R}, \\ f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \end{cases}$$

Allora dalla definizione 2.1 otteniamo

$$\begin{aligned} \textstyle\int_\alpha f(x)ds &= \textstyle\int_{[0,2\pi]}(\cos^2(t) + \sin^2(t) + t^2)(\sin^2(t) + \cos^2(t) + 1)^{1/2}dt = \\ & \sqrt{2}\textstyle\int_0^{2\pi}(1 + t^2)dt = 2\sqrt{2}\pi(1 + \frac{4\pi^2}{3}). \end{aligned}$$

Estendiamo adesso la definizione 2.1 a cammini di classe C^1 a tratti.

Definizione 2.2. *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, $\alpha \in C([a, b]; \mathbb{R}^n)$, di classe C^1 a tratti. Siano $a = t_0 < t_1 < ... < t_k = b$, tali che, per ciascun $j = 1, ..., k$, $\alpha^j := \alpha_{[t_{j-1},t_j]}$ è di classe C^1. Sia poi $f : \alpha([a, b]) \to \mathbb{R}$, tale che, per ciascun j è definito $\int_{\alpha^j} f(x)ds$. Poniamo allora*

$$\int_\alpha f(x)ds := \int_{\alpha^1} f(x)ds + ... + \int_{\alpha^k} f(x)ds = \sum_{j=1}^{k} \int_{\alpha^j} f(x)ds.$$

Osservazione 2.1. Con riferimento alla definizione 2.2, si puo' verificare che essa non dipende dal modo in cui si decompone l'intervallo $[a, b]$; basta osservare che

$$\sum_{j=1}^{k} \int_{\alpha^j} f(x)ds = \int_A f(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|dt,$$

con $A = [a, b] \setminus \{a = t_0, t_1, \ldots, t_k = b\}$; se noi cambiamo la scomposizione di $[a, b]$, passando a $\{a = \tau_0, t_1, \ldots, \tau_l = b\}$, possiamo osservare che

$$\int_A f(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|dt = \int_{A\setminus\{\tau_0,\ldots,\tau_l\}} f(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|dt,$$

perche' abbiamo rimosso un insieme di misura 0 e quest'ultimo integrale coincide con

$$\int_B f(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|dt,$$

con $B = [a, b] \setminus \{a = \tau_0, t_1, \ldots, \tau_l = b\}$, perche' abbiamo aggiunto un insieme di misura 0.

Osservazione 2.2. Vogliamo adesso presentare una possibile interpretazione degli integrali curvilinei di prima specie.

Consideriamo un filo costituito di un materiale con densita' variabile. Assimiliamo il filo al sostegno di un certo cammino $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, di classe C^1, α iniettiva. Dato un punto x del filo, indichiamo con $f(x)$ la densita' lineare del materiale nel punto x.

Questa puo' essere definita nel modo seguente: sia $x = \alpha(t)$, con $t \in [a, b]$. Osserviamo che, poiche' α e' iniettiva, t e' univocamente determinato da x. Dati $a \leq c \leq d \leq b$, indichiamo con $m(c, d)$ la massa del tratto di filo di estremi $\alpha(c)$ e $\alpha(d)$ e con $l(c, d)$ la sua lunghezza, pari a $\int_c^d \|\alpha'(s)\|ds$. Il quoziente $\frac{m(c,d)}{l(c,d)}$ esprime la densita' lineare media del materiale nello stesso tratto. Supponiamo che per ogni $t \in [a, b]$, esista $f(\alpha(t)) \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{d-c\to 0, c\leq t\leq d} \frac{m(c, d)}{l(c, d)} = f(\alpha(t)).$$

Con cio' intendiamo che $\forall\epsilon > 0$ esiste $\delta(\epsilon, t) > 0$ tale che, se $a \leq c \leq t \leq d \leq b$ e $0 < d-c < \delta(\epsilon, t)$,

$$|\frac{m(c, d)}{l(c, d)} - f(\alpha(t))| < \epsilon.$$

Il numero reale $f(\alpha(t))$ potra' allora legittimamente essere chiamato "densita' del filo in $x = \alpha(t)$".

Supponiamo, per semplicita', che f sia continua e che la convergenza della densita' media a quella puntuale sia uniforme in t, vale a dire che la costante $\delta(\epsilon, t)$ possa essere presa uguale a $\delta(\epsilon)$ indipendente da t.

Siano ora $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, $a = t_0 < t_1 \cdots < t_k = b$, con $t_j - t_{j-1} \leq \delta(\epsilon)$, per ciascun $j = 1, \ldots, k$. Sia $m = m(a, b)$ la massa totale del filo. Si ha allora

$$m = \textstyle\sum_{j=1}^k m(t_{j-1}, t_j) = \sum_{j=1}^k \frac{m(t_{j-1},t_j)}{l(t_{j-1},t_j)} l(t_{j-1}, t_j)$$

$$= \textstyle\sum_{j=1}^k f(\alpha(t_j))l(t_{j-1}, t_j) + \sum_{j=1}^k [\frac{m(t_{j-1},t_j)}{l(t_{j-1},t_j)} - f(\alpha(t_j))]l(t_{j-1}, t_j)$$

Di conseguenza,

$$|m - \int_a^b f(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|dt|$$

$$= |\sum_{j=1}^k f(\alpha(t_j))l(t_{j-1}, t_j) - \int_a^b f(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|dt + \sum_{j=1}^k [\frac{m(t_{j-1},t_j)}{l(t_{j-1},t_j)} - f(\alpha(t_j)]l(t_{j-1}, t_j)|$$

$$\leq |\sum_{j=1}^k f(\alpha(t_j))l(t_{j-1}, t_j) - \int_a^b f(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|dt| + \sum_{j=1}^k |\frac{m(t_{j-1},t_j)}{l(t_{j-1},t_j)} - f(\alpha(t_j)|l(t_{j-1}, t_j)$$

Si ha

$$|\sum_{j=1}^k f(\alpha(t_j))l(t_{j-1}, t_j) - \int_a^b f(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|dt|$$

$$= |\sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} [f(\alpha(t_j)) - f(\alpha(t))]\|\alpha'(t)\|dt|$$

$$\leq \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} |f(\alpha(t_j)) - f(\alpha(t))|\|\alpha'(t)\|dt.$$

Poiche' $f \circ \alpha$ e' uniformemente continua (per il teorema di Heine-Cantor), diminuendo, eventualmente, $\delta(\epsilon)$, possiamo supporre

$$|f(\alpha(t_j)) - f(\alpha(t))| \leq \epsilon \quad \forall j \in \{1, \ldots, k\}, \forall t \in [t_{j-1}, t_j].$$

per cui

$$|\sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} [f(\alpha(t_j)) - f(\alpha(t))]\|\alpha'(t)\|dt|$$

$$\leq \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} |f(\alpha(t_j)) - f(\alpha(t))|\|\alpha'(t)\|dt$$

$$\leq \sum_{j=1}^k \epsilon l(t_{j-1}, t_j) = \epsilon l(a, b).$$

Inoltre,

$$\sum_{j=1}^k |\frac{m(t_{j-1}, t_j)}{l(t_{j-1}, t_j)} - f(\alpha(t_j)|l(t_{j-1}, t_j) \leq \epsilon \sum_{j=1}^k l(t_{j-1}, t_j) = \epsilon l(a, b)$$

Dunque, $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+$

$$|m - \int_a^b f(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|dt| \leq 2\epsilon l(a, b).$$

Dall'arbitrarieta' di ϵ, segue

$$\int_\alpha f ds = \int_a^b f(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|dt = m.$$

Cio' significa che l'integrale curvilineo di prima specie della densita' lineare coincide con la massa totale del filo.

Verifichiamo ora che, se sostituiamo un certo cammino C^1 a tratti α con un cammino equivalente β, l'integrale curvilineo di prima specie non cambia.

Teorema 2.1. *Siano $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ e $\beta : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ cammini C^1 a tratti equivalenti. Sia poi $f : \alpha([a, b]) = \beta([c, d]) \to \mathbb{R}$, tale che è definito $\int_\alpha f(x)ds$. Allora è definito anche $\int_\beta f(x)ds$ e*

$$\int_\beta f(x)ds = \int_\alpha f(x)ds.$$

Dimostrazione La dimostrazione è una semplice applicazione del teorema del cambiamento di variabile.

Sia u la funzione considerata nella definizione 1.2. Osserviamo che $u_{|]c,d[}$ è un cambiamento di variabile. Inoltre, $\forall \tau \in B$,

$$\beta'(\tau) = u'(\tau)\alpha'(u(\tau)),$$

con $B = \{\tau \in]c,d[\, : \, \beta \text{ derivabile in } \tau\}$. Osserviamo che B si ottiene da $]c,d[$ togliendo un insieme finito. Allora $u(B)$ si ottiene da $[a,b]$ togliendo un insieme finito. Quindi, per il teorema di cambiamento di variabile, ricordando l'osservazione 2.1, si ha

$$\begin{array}{c} \int_\alpha f(x)ds = \int_{u(B)} f(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|dt \\ = \int_{u^{-1}(u(B))} f(\alpha(u(\tau))\|\alpha'(u(\tau))\||u'(\tau)|d\tau \\ = \int_B f(\alpha(u(\tau))\|u'(\tau)\alpha'(u(\tau))\|d\tau \\ = \int_B f(\beta(\tau))\|\beta'(\tau)\|d\tau = \int_\beta f(x)ds. \end{array}$$

Concludiamo questo studio degli integrali curvilinei di prima specie enunciando le loro proprieta' di linearita'. Per la dimostrazione, si veda l'esercizio 2.2.

Teorema 2.2. *Siano $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) un cammino di classe C^1 a tratti, $f, g : \alpha([a,b]) \to \mathbb{R}$, tali che sono definiti $\int_\alpha f(x)ds$ e $\int_\alpha g(x)ds$. Allora, $\forall l, m \in \mathbb{R}$, è definito $\int_\alpha (lf(x)+mg(x))ds$. Si ha inoltre*

$$\int_\alpha (lf(x) + mg(x))ds = l \int_\alpha f(x)ds + m \int_\alpha g(x)ds.$$

□

Passiamo ora a definire gli integrali curvilinei di seconda specie.

Esercizio 2.1. Dimostrare il teorema 2.2.

Definizione 2.3. *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, $\alpha \in C^1([a,b];\mathbb{R}^n)$, $f : \alpha([a,b]) \to \mathbb{R}^n$. Supponiamo che $t \to f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)$ sia sommabile in $[a,b]$. Allora poniamo*

$$\int f \cdot d\alpha := \int_{[a,b]} f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)dt.$$

Chiamiamo $\int f \cdot d\alpha$ **integrale curvilineo di seconda specie** *di f sul cammino α.*

Osservazione 2.3. Notiamo che, mentre nel caso degli integrali curvilinei di prima specie si consideravano funzioni a valori scalari, nella definizione 2.3 si considerano funzioni a valori vettoriali.

Segnaliamo anche il fatto che, nelle ipotesi della stessa definizione, qualche autore usa le notazioni $\int f_j d\alpha_j$, oppure $\int_\alpha f_j dx_j$, per indicare $\int_{[a,b]} f_j(\alpha(t)) \; \alpha_j'(t)dt$. Con tali notazioni, si ha, ad esempio,

$$\int f \cdot d\alpha = \int f_1 d\alpha_1 + ... \int f_n d\alpha_n.$$

Esempio 2.2. Siano

$$\begin{cases} \alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \\ \alpha(t) = (t,t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} f : \alpha([0,1]) \to \mathbb{R}^2, \\ f(x_1,x_2) = (x_2^{1/2}, x_1^3 + x_2), \qquad (x_1,x_2) \in \alpha([0,1]). \end{cases}$$

Allora

$$\int f \cdot d\alpha = \int_{[0,1]} f(t,t) \cdot (1,1)dt = \int_{[0,1]} (t^{1/2} + t^3 + t)dt = \frac{17}{12}.$$

La definizione 2.3 ammette una naturale estensione a cammini di classe C^1 a tratti:

Definizione 2.4. *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, $\alpha \in C([a,b];\mathbb{R}^n)$, di classe C^1 a tratti. Siano $a = t_0 < t_1 < ... < t_k = b$, tali che, per ciascun $j = 1, ..., k$, $\alpha^j := \alpha_{[t_{j-1},t_j]}$ è di classe C^1. Sia poi $f : \alpha([a,b]) \to \mathbb{R}^n$, tale che per ciascun j è definito $\int f \cdot d\alpha^j$. Poniamo allora*

$$\int f \cdot d\alpha := \int f \cdot d\alpha^1 + ... + \int f \cdot d\alpha^k.$$

Osservazione 2.4. Con argomenti simili a quelli utilizzati nell'osservazione 2.1, si puo' verificare che la definizione e' indipendente dal modo in cui si decompone l'intervallo $[a,b]$.

Osservazione 2.5. Vogliamo ora illustrare un'importante interpretazione fisica degli integrali curvilinei di seconda specie.

Consideriamo un punto pesante che si muove di moto rettilineo e uniforme in $\mathbb{R}^3$ nell'intervallo di tempo $[a,b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$). Se $v \in \mathbb{R}^3$ è il vettore velocita' (costante), la legge oraria del moto del punto è descritta dal cammino

$$\begin{cases} \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^3, \\ \alpha(t) = x^0 + (t-a)v, \end{cases}$$

ove $x^0 \in \mathbb{R}^3$ rappresenta la posizione del tempo nell'istante $t = a$.

Supponiamo che sul punto agisca una certa forza costante F, che possiamo identificare con un certo elemento di $\mathbb{R}^3$. Allora il lavoro svolto dalla forza sul punto nell'intervallo temporale $[a,b]$ è dato da

$$L = F \cdot [\alpha(b) - \alpha(a)] = F \cdot [x^0 + (b-a)v - x^0] = (b-a)F \cdot v. \tag{2.1}$$

Supponiamo ora che la forza non sia piu' necessariamente costante, né che il punto si muova di moto rettilineo e uniforme. Supponiamo che la traiettoria del punto sia descritta da un certo cammino $\alpha \in C^1([a,b];\mathbb{R}^3)$ e che la forza che si esercita punto per punto nello spazio sia schematizzabile con la funzione continua $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Sia $\tau \in [a,b]$. Allora, per la formula di Taylor applicata componente per componente,

$$\alpha(t) = \alpha(\tau) + (t-\tau)\alpha'(\tau) + o(t-\tau) \quad (t \to \tau).$$

Trascurando allora il resto, possiamo osservare che, per piccoli valori di $\Delta\tau > 0$, nell'intervallo temporale $[\tau, \tau + \Delta\tau]$, si ha

$$a(t) \approx \alpha(\tau) + (t-\tau)\alpha'(\tau),$$

vale il dire, il moto è essenzialmente rettilineo e uniforme. Inoltre, se f è continua, ancora per $\Delta\tau$ "piccolo", si avra' $f(\alpha(t)) \approx f(\alpha(\tau))$ se $t \in [\tau, \tau + \Delta\tau]$.

Allora, per definire il lavoro svolto dalla forza, possiamo decomporre l'intervallo $[a,b]$ in k parti uguali, ponendo $t_0 = a$, $t_1 = a + \frac{b-a}{k}$,...,$t_j = a + \frac{j(b-a)}{k}$,..., $t_k = b$. Indichiamo con L_j il lavoro svolto nell'intervallo temporale $[t_{j-1}, t_j]$ ($1 \le j \le k$). Da (2.1) sara' ragionevole supporre

$$L_j \approx (t_j - t_{j-1}) f(\alpha(t_{j-1})) \cdot \alpha'(t_{j-1}),$$

e, sommando in j,

$$L = \sum_{j=1}^{k} L_j \approx \sum_{j=1}^{k} (t_j - t_{j-1}) f(\alpha(t_{j-1})) \cdot \alpha'(t_{j-1}). \tag{2.2}$$

Ci si aspetta che l'approssimazione migliori aumentando il valore di k. Ora, nelle ipotesi fatte su α e f si puo' dimostrare che la somma al secondo membro di (2.2) tende, per $k \to +\infty$,a

$$\int_a^b f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)dt = \int f \cdot d\alpha$$

(si veda, per questo, l'esercizio 2.3). Si pone allora, per definizione,

$$L := \int f \cdot d\alpha. \tag{2.3}$$

Vediamo ora come cambiano gli integrali curvilinei di seconda specie passando da un cammino a un cammino equivalente.

Teorema 2.3. *Siano $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e $\beta : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ cammini C^1 a tratti equivalenti. Sia poi $f : \alpha([a,b]) = \beta([c,d]) \to \mathbb{R}^n$, tale che è definito $\int f \cdot d\alpha$. Allora è definito anche $\int f \cdot d\beta$ e, se u è la funzione che interviene nella definizione 1.2,*

$$\int f \cdot d\beta = \begin{cases} \int f \cdot d\alpha & \text{se } u \text{ è crescente,} \\ -\int f \cdot d\alpha & \text{se } u \text{ è decrescente.} \end{cases}$$

Dimostrazione L'argomento è simile a quello della dimostrazione del teorema 2.1.

Sia u la funzione considerata nella definizione 1.2. Abbiamo gia' osservato che $u_{|]c,d[}$ è un cambiamento di variabile. Inoltre, $\forall \tau \in B$,

$$\beta'(\tau) = u'(\tau)\alpha'(u(\tau)),$$

con $B = \{\tau \in]c,d[\,:\, \beta \text{ derivabile in } \tau\}$. Osserviamo che B si ottiene da $]c,d[$ sottraendo un insieme finito . Allora $u(B)$ si ottiene da $[a,b]$ sottraendo un insieme finito. Quindi, per il teorema di cambiamento di variabile, ricordando l'osservazione 2.1, si ha

$$\begin{gathered} \int f \cdot d\alpha = \int_{u(B)} f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)dt \\ = \int_{u^{-1}(u(B))} f(\alpha(u(\tau)) \cdot \alpha'(u(\tau))|u'(\tau)|ds. \end{gathered}$$

Se u è crescente (e percio' α e β sono positivamente equivalenti), quest'ultimo integrale è uguale a

$$\int_{u^{-1}(u(B))} f(\alpha(u(\tau)) \cdot \alpha'(u(\tau))u'(\tau)ds = \int_B f(\beta(\tau)) \cdot \beta'(\tau)d\tau = \int f \cdot d\beta.$$

Viceversa,

$$\int_{u^{-1}(u(B))} f(\alpha(u(\tau)) \cdot \alpha'(u(\tau))|u'(\tau)|ds = -\int_B f(\beta(\tau)) \cdot \beta'(\tau)d\tau = -\int f \cdot d\beta.$$

□

Osservazione 2.6. Tenuto conto delle osservazioni 1.2 e 2.5, il teorema 2.3 rispecchia il fatto che, se invertiamo il verso di percorrenza, il lavoro si inverte a sua volta.

Concludiamo la sezione con la proprieta' di linearita' degli integrali curvilinei di seconda specie.

Per la dimostrazione, si veda l'esercizio 2.4.

Teorema 2.4. *Siano $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) un cammino di classe C^1 a tratti, $f, g : \alpha([a,b]) \to \mathbb{R}^n$, tali che sono definiti $\int f \cdot d\alpha$ e $\int g \cdot d\alpha$. Allora, $\forall l, m \in \mathbb{R}$, è definito $\int (lf + mg) \cdot d\alpha$. Si ha inoltre*

$$\int (lf + mg) \cdot d\alpha = l \int f \cdot d\alpha + m \int g \cdot d\alpha.$$

Esercizio 2.2. Dimostrare il teorema 2.2.

Esercizio 2.3. Con riferimento all'osservazione 2.5, dimostrare che si ha

$$\lim_{k \to +\infty} \sum_{j=1}^{k} (t_j - t_{j-1}) f(t_{j-1}) \cdot \alpha'(t_{j-1}) = \int f \cdot d\alpha.$$

Sugg.: Usare il fatto che $t \to f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)$ è uniformemente continua in $[a,b]$.

Esercizio 2.4. Dimostrare il teorema 2.4.

Esercizio 2.5. Calcolare gli integrali curvilinei di prima specie sui cammini α indicati:

(I) $\int_\alpha (x_1 + x_2) ds$, con α cammino di classe C^1 a tratti il cui sostegno è il triangolo in $\mathbb{R}^2$ di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$;

(II) $\int_\alpha x_2^2 ds$, con $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (a(t - \sin(t)), a(1 - \cos(t)))$ ($a \in \mathbb{R}$);

(III) $\int_\alpha (x_1^2 + x_2^2) ds$, con $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (a(\cos(t) - t\sin(t)), a(\sin\ (t) - t\cos(t)))$ ($a \in \mathbb{R}$).

Esercizio 2.6. Se α è un cammino di classe C^1 a tratti con lunghezza $l(\alpha) > 0$, per centroide di α intendiamo il vettore

$$l(\alpha)^{-1}(\int_\alpha x_1 ds, \int_\alpha x_2 ds, \int_\alpha x_3 ds).$$

Determinare i centroidi dei seguenti cammini α:

(I) $\alpha : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$;

(II) $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), at)$ ($a \in \mathbb{R}$).

Esercizio 2.7. Calcolare i seguenti integrali curvilinei di seconda specie $\int f \cdot d\alpha$:
(I) $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (a(t - \sin(t)), a(1 - \cos(t)))$ ($a \in \mathbb{R}$), $f(x_1, x_2) = (2a - x_2, x_1)$;
(II) $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2^2 - x_3^2, 2x_2x_3, -x_1^2)$.

Esercizio 2.8. In ciascun caso, determinare un cammino di classe C^1 a tratti che abbia come sostegno l'insieme A indicato e lo percorra (se richiesto) nel verso indicato. Calcolare poi $\int f \cdot d\alpha$.

(I) $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x_1 \le 1, x_2 = x_1^2\}$, $f(x_1, x_2) = (x_1^2 - 2x_1x_2, x_2^2 - 2x_1x_2)$.

(II) $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in [0,1], x_2 = 1 - |1 - x_1|\}$, $f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2, x_1^2 - x_2^2)$.

(III) $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} - 1\}$ percorso in senso antiorario, $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$.

(IV) A è il segmento in $\mathbb{R}^3$ di estremi $(1,0,2)$ e $(3,4,1)$, $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1x_2, x_1^2 + x_3, x_2)$.

(V) $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ percorso in senso antiorario, $f(x_1, x_2) = (\frac{x_1 + x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_1 - x_2}{x_1^2 + x_2^2})$.

(VI) A è la frontiera del quadrato di vertici $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$, percorsa in senso orario, $f(x_1, x_2) = (\frac{1}{|x_1| + |x_2|}, \frac{|x_1|}{|x_1| + |x_2|})$.

3 Campi vettoriali e loro potenziali

Facciamo qualche premessa al principale argomento di questa sezione. Cominciamo col seguente utile lemma.

Lemma 3.1. *Sia A un aperto in $\mathbb{R}^n$ connesso per archi. Allora, comunque si prendano x e y in A, esiste un cammino di classe C^1 a tratti, con sostegno in A, che ha x come primo estremo e y come secondo.*

Dimostrazione Siano $x, y \in A$. Poiche' A è connesso per archi, esiste $\alpha : [a, b] \to A$ continua tale che $\alpha(a) = x$, $\alpha(b) = y$. Poniamo

$$B = \{t \in [a, b] : \exists \beta : [c, d] \to A\ C^1 \text{a tratti }, \beta(c) = x, \beta(d) = \alpha(t)\}.$$

B non è vuoto perche' contiene, ovviamente, a. Poniamo

$$e := \sup(B).$$

e è ben definito per l'assioma dell'estremo superiore.

Verifichiamo che $e = max(B)$. Questo è certamente vero se $e = a$ (perche' $a \in B$). Supponiamo $a < e$. Poiche' A è aperto, esiste $r \in \mathbb{R}^+$ tale che $B(\alpha(e), r) \subseteq A$. Per continuita', esiste $\epsilon > 0$ tale che

$$\alpha(]e - \epsilon, e]) \subseteq B(\alpha(e), r).$$

Poiche' $e = sup(B)$, esiste $e' \in]e - \epsilon, e] \cap B$. Quindi esiste $\beta : [c, d] \to A$, C^1 a tratti, tale che $\beta(c) = x$, $\beta(d) = \alpha(e')$. Poniamo allora

$$\begin{cases} \gamma : [c, d + 1] \to A, \\ \gamma(t) = \begin{cases} \beta(t) & \text{se} \quad t \in [c, d], \\ \beta(d) + (t - d)(\alpha(e) - \beta(d)) & \text{se} \quad t \in [d, d + 1]. \end{cases} \end{cases}$$

Allora $\gamma : [c, d+1] \to A$ è C^1 a tratti, $\gamma(c) = x$, $\gamma(d+1) = \alpha(e)$. Inoltre, $\gamma(t) \in A\ \forall t \in [d, d+1]$ perche' $B(\alpha(e), r)$ e' convesso. Dunque, $e \in B$.

Proviamo che $e = b$. Sia, per assurdo, $e < b$. Se r è come sopra, per continuita' esiste $e'' \in]e, b]$ tale che $\alpha(e') \in B(\alpha(e), r)$. Poiche' $e \in B$, esiste

$$\begin{cases} \delta : [c, d] \to A, \\ \delta(c) = x, \delta(d) = \alpha(e), \end{cases}$$

δ C^1 a tratti. Allora

$$\begin{cases} \delta' : [c, d + 1] \to A, \\ \delta'(t) = \begin{cases} \delta(t) & \text{se} \quad t \in [c, d], \\ \alpha(e) + (t - d)[\alpha(e') - \alpha(e)] & \text{se} \quad t \in [d, d + 1]. \end{cases} \end{cases}$$

Percio', $e' \in B$, $e < e'$, in contraddizione con la definizione di e.

In conclusione, $b = max(B)$, da cui segue l'enunciato.

□

Vediamo ora un teorema che appartiene, in realta', al calcolo differenziale.

Teorema 3.1. *Siano A un aperto connesso per archi in $\mathbb{R}^n$, $f \in C^1(A)$, tale che $\nabla f(x) = O$ $\forall x \in A$. Allora f è costante in A.*

Dimostrazione Siano x e y punti arbitrari di A. Si tratta di provare che $f(x) = f(y)$. Per il lemma 3.1, esistono a e b in $\mathbb{R}$, con $a < b$ e $\alpha \in C([a,b];\mathbb{R}^n)$, C^1 a tratti, tali che $\alpha([a,b]) \subseteq A$, $\alpha(a) = x$, $\alpha(b) = y$. Poniamo

$$\begin{cases} g : [a,b] \to \mathbb{R}, \\ g(t) = f(\alpha(t)). \end{cases}$$

Siano $a = t_0 < \cdots < t_k = b$ tali che $\forall j \in \{1,\ldots,k\}$, $\alpha_{[t_{j-1},t_j]} \in C^1([t_{j-1},t_j];\mathbb{R}^n)$. Allora $g \in C([a,b])$. Inoltre, se $t \in]t_{j-1},t_j[$ $(1 \leq j \leq k)$, per la "chain rule",

$$g'(t) = \nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = 0 \quad .$$

Per un noto risultato di Analisi 1, si ha che g è costante in ciascun intervallo $[t_{j-1},t_j]$. Ne segue

$$f(x) = f(\alpha(t_0)) = f(\alpha(t_1)) = \cdots = f(\alpha(t_k)) = f(\alpha(b)) = f(y).$$

□

Osservazione 3.1. Naturalmente, l'ipotesi che A sia connesso per archi è essenziale. Sia, per esempio,

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \\ f(x) = sgn(x). \end{cases}$$

Allora $f'(x) = 0$ $\forall x \in A$, ma f non è costante.

Possiamo ora introdurre le principali definizioni di questa sezione.

Definizione 3.1. *Sia A un aperto connesso per archi in $\mathbb{R}^n$.*

Un **campo vettoriale** *in A è una funzione $F : A \to \mathbb{R}^n$ continua.*

Un **potenziale** *del campo vettoriale F è una funzione $U \in C^1(A)$, tale che $\nabla U(x) = F(x)$ $\forall x \in A$.*

Il campo vettoriale F si dice **esatto** *se possiede dei potenziali.*

Osservazione 3.2. Se U è un potenziale di F, qualunque sia $c \in \mathbb{R}$, la funzione di dominio A che associa a x $U(x)+c$ è ancora un potenziale di F. Inversamente, se V è un secondo potenziale di F,

$$\nabla(U - V)(x) = \nabla U(x) - \nabla V(x) = F(x) - F(x) = 0 \quad \forall x \in A.$$

Dal teorema 3.1, segue che $U - V$ è una funzione costante. Questa è , in effetti, la ragione principale per cui consideriamo esclusivamente campi vettoriali definiti su aperti connessi per archi: vogliamo che due potenziali qualunque dello stesso campo vettoriale differiscano per una costante.

Esempio 3.1. Siano

$$\begin{cases} F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \\ F(x_1,x_2) = (x_2\cos(x_1x_2), x_1\cos(x_1x_2)), \end{cases}$$

$$\begin{cases} U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \\ U(x_1,x_2) = \sin(x_1x_2). \end{cases}$$

Allora è facile verificare che U è un potenziale di F. Dunque, F è esatto.

Osservazione 3.3. Nel caso $n = 1$, per il teorema 5.2 in [1], se A è connesso per archi, A è un intervallo. Sia $F : A \to \mathbb{R}$ continua. E' evidente che in questo caso i potenziali di F sono le sue primitive. Sappiamo dall'analisi 1 che ogni funzione continua possiede delle primitive. Quindi, nel caso $n = 1$, tutti i campi vettoriali sono esatti. Come vedremo, cio' non vale in dimensione superiore.

Introduciamo ora la seguente

Definizione 3.2. *Siano A un aperto connesso per archi in $\mathbb{R}^n$, $F \in C^1(A; \mathbb{R}^n)$. Diremo che il campo vettoriale F è chiuso se $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$,*

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}. \tag{3.1}$$

Esempio 3.2. Sia

$$\begin{cases} F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \\ F(x_1, x_2) = (x_1, x_2). \end{cases}$$

F è chiuso, essendo

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x) = 0 = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

Sia invece

$$\begin{cases} G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \\ G(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2). \end{cases}$$

G non è chiuso, in quanto

$$\frac{\partial G_1}{\partial x_2}(x) = 1, \frac{\partial G_2}{\partial x_1}(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

Teorema 3.2. *Siano A un aperto connesso per archi in $\mathbb{R}^n$, $F \in C^1(A; \mathbb{R}^n)$. Allora, se F è esatto, F è chiuso.*

Dimostrazione Sia U un potenziale di F. Poiché $F \in C^1(A; \mathbb{R}^n)$, $U \in C^2(A)$. Segue allora dal teorema di Schwarz che, $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$,

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial U}{\partial x_i}) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial U}{\partial x_j}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}.$$

□

Osservazione 3.4. Vedremo tra poco che il teorema 3.2 non si puo', in generale, invertire. In altre parole, non ogni campo vettoriale chiuso è esatto.

Introduciamo ora una nozione che ha un forte contenuto fisico.

Definizione 3.3. *Siano A un aperto connesso per archi in $\mathbb{R}^n$, $F \in C(A; \mathbb{R}^n)$. Diremo che il campo vettoriale F è* **conservativo** *se, comunque si prendano due cammini α e β di classe C^1 a tratti, con sostegno in A e aventi lo stesso primo estremo e lo stesso secondo estremo, si ha*

$$\int F \cdot d\alpha = \int F \cdot d\beta.$$

Osservazione 3.5. Dire che F è conservativo significa dire che $\int F \cdot d\alpha$ dipende solo dagli estremi di α. Dunque, tenuto conto dell'interpretazione fisica di questi integrali (osservazione 2.5) cio' vuol dire che il lavoro svolto da F su un certo punto pesante non dipende dalla traiettoria completa del punto, ma solo dai suoi estremi.

Osservazione 3.6. Se $F : A \to \mathbb{R}^n$ è conservativo e α è un cammino di classe C^1 a tratti con sostegno in A avente estremi coincidenti (cio' che si chiama un cammino chiuso), allora

$$\int F \cdot d\alpha = 0.$$

Per verificarlo, introduciamo il cammino

$$\begin{cases} \beta : [0,1] \to \mathbb{R}^n, \\ \beta(t) = \alpha(a) = \alpha(b) \qquad \forall t \in [0,1]. \end{cases}$$

Allora, poiché F è conservativo,

$$\int F \cdot d\alpha = \int F \cdot d\beta = 0.$$

Vale anche il viceversa: sia $F : A \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale in A (aperto, connesso per archi) tale che $\int F \cdot d\gamma = 0$ per ogni γ cammino chiuso con sostegno in A C^1 a tratti. Siano $\alpha : [a,b] \to A$ e $\beta : [c,d] \to$ cammini C^1 a tratti con sostegno in A, con $\alpha(a) = \beta(c)$ e $\alpha(b) = \beta(d)$. Poniamo

$$\begin{cases} \beta' : [b, b+d-c] \to \mathbb{R}^n, \\ \beta'(t) = \beta(d+b-t) \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \gamma : [a, b+d-c] \to \mathbb{R}^n, \\ \gamma(t) = \begin{cases} \alpha(t) & \text{se} \quad t \in [a,b], \\ \beta'(t) & \text{se} \quad t \in [b, b+d-c], \end{cases} \end{cases}$$

Allora γ è un cammino C^1 a tratti, con sostegno in A, chiuso perche'

$$\gamma(b+d-c) = \beta'(b+d-c) = \beta(c) = \alpha(a).$$

Ne segue che

$$\int F \cdot d\gamma = 0.$$

Dal teorema 2.3 segue allora

$$0 = \int F \cdot d\gamma = \int F \cdot d\alpha + \int F \cdot d\beta' = \int F \cdot d\alpha - \int F \cdot d\beta,$$

da cui

$$\int F \cdot d\alpha = \int F \cdot d\beta.$$

Quindi F è conservativo.

Teorema 3.3. *Siano A un aperto connesso per archi in $\mathbb{R}^n$, $F \in C(A; \mathbb{R}^n)$. Allora le condizioni seguenti sono equivalenti:*

(I) F è esatto;

(II) F è conservativo.

Dimostrazione Sia F esatto. Dimostriamo che F è conservativo.
Piu' precisamente, proviamo che, se $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è un cammino di classe C^1 a tratti con sostegno in A e U è un potenziale di F, vale la formula

$$\int F \cdot d\alpha = U(\alpha(b)) - U(\alpha(a)). \tag{3.2}$$

Cominciamo dal caso $\alpha \in C^1([a,b];\mathbb{R}^n)$. Allora, per la "chain rule", si ha

$$(U \circ \alpha)'(t) = \nabla U(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) \quad \forall t \in [a,b].$$

Dunque,

$$\int F \cdot d\alpha \ = \int_a^b F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)dt = \int_a^b (U \circ \alpha)'(t)dt = U(\alpha(b)) - U(\alpha(a)). \tag{3.3}$$

(3.2) puo' essere facilmente estesa al caso di α di classe C^1 a tratti: se $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $a = t_0 < t_1 < ... < t_k = b$ e per ciascun $j = 1,...,k$ $\alpha^j := \alpha_{|[t_{j-1},t_j]}$ è di classe C^1,

$$\begin{aligned}\int F \cdot d\alpha \quad &= \int F \cdot d\alpha^1 + \int F \cdot d\alpha^2 + ... + \int F \cdot d\alpha^k \\ &= [U(\alpha(t_1) - U(\alpha(t_0))] + [U(\alpha(t_2) - U(\alpha(t_1))] + ... \\ &+[U(\alpha(t_{k-1}) - U(\alpha(t_{k-2}))] + [U(\alpha(t_k) - U(\alpha(t_{k-1}))] \\ &= U(\alpha(t_k)) - U(\alpha(t_0)) = U(\alpha(b)) - U(\alpha(a)).\end{aligned}$$

Da (3.2) segue subito che F è conservativo.

Supponiamo ora che F sia conservativo. Proviamo che è esatto. A tale scopo, dobbiamo esibirne un potenziale. Fissiamo $x^0 \in A$. Per ogni $x \in A$ prendiamo un cammino α^x di classe C^1 a tratti con sostegno in A, che abbia come primo estremo x^0 e come secondo estremo x. Un cammino cosi' fatto esiste per il lemma 3.1. Definiamo poi

$$\begin{cases} U : A \to \mathbb{R}, \\ U(x) := \int F \cdot d\alpha^x. \end{cases} \tag{3.4}$$

Osserviamo che, poiché F è conservativo, l'integrale in (3.4) non dipende dalla scelta di α^x, purché abbia gli estremi indicati. Verifichiamo che U è un potenziale di F. A tale scopo, dobbiamo far vedere che, $\forall i \in \{1,...,n\}$, $\forall x \in A$, è definita $\frac{\partial U}{\partial x_i}(x)$ e

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(x) = F_i(x). \tag{3.5}$$

Fissiamo allora $i \in \{1,...,n\}$ e $x \in A$. Sia $\delta \in \mathbb{R}^+$, tale che $B(x,\delta) \subseteq A$. Se $t \in \mathbb{R}$ e $|t| < \delta$, allora il segmento $[x, x+te^i]$ è tutto contenuto in A. Sia $\alpha^x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ un cammino di classe C^1 a tratti, con sostegno in A, avente come primo estremo x^0 e come secondo estremo x. Sia, infine, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, con $|t| < \delta$. Poniamo allora

$$\begin{cases} \alpha^{x+te^i} : [a, b+1] \to \mathbb{R}^n, \\ \alpha^{x+te^i}(s) = \begin{cases} \alpha^x(s) & \text{se } s \in [a,b], \\ x + (s-b)te^i & \text{se } s \in [b, b+1]. \end{cases} \end{cases} \tag{3.6}$$

α^{x+te^i} è un cammino di classe C^1 a tratti di estremi x^0 e $x + te^i$. Il suo sostegno è contenuto in A, in quanto lo è il sostegno di α^x e α^{x+te^i} descrive nell'intervallo $[b, b+1]$ il segmento $[x, x+te^i]$. Si ha allora

$$\begin{aligned}U(x+te^i) - U(x) \quad &= \int F \cdot d\alpha^{x+te^i} - \int F \cdot d\alpha^x \\ &= \int_{[b,b+1]} F(x + (s-b)te^i) \cdot (te^i)ds \\ &= t \int_b^{b+1} F_i(x + (s-b)te^i)ds.\end{aligned}$$

Segue
$$\frac{U(x+te^i)-U(x)}{t}=\int_b^{b+1}F_i(x+(s-b)te^i)ds=\frac{1}{t}\int_0^t F_i(x+\sigma e^i)d\sigma.$$
Poichè $\sigma\to F_i(x+\sigma e^i)$ è continua in $]-\delta,\delta[$, per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha
$$\lim_{t\to 0}\frac{U(x+te^i)-U(x)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t F_i(x+\sigma e^i)d\sigma=F_i(x).$$
Vale dunque (3.5) e la dimostrazione è conclusa.
□

Siamo ora in grado di far vedere che non ogni campo vettoriale chiuso è esatto.

Esempio 3.3. Sia
$$\begin{cases} F:\mathbb{R}^2\setminus\{0,0)\}\to\mathbb{R}^2,\\ F(x_1,x_2)=(-\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2},\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}).\end{cases}$$
F è chiuso. Infatti, $\forall(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$,
$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x_1,x_2)=\frac{x_2^2-x_1^2}{x_1^2+x_2^2}=\frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x_1,x_2).$$
Sia
$$\begin{cases}\alpha:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2,\\ \alpha(t)=(\cos(t),\sin(t)).\end{cases}$$
Se F fosse esatto, poiché $\alpha(0)=\alpha(2\pi)$, in base all'osservazione 3.6 e al teorema 3.3, dovrebbe essere
$$\int F\cdot d\alpha=0.$$
Invece,
$$\begin{aligned}\textstyle\int F\cdot d\alpha &=\textstyle\int_0^{2\pi}(-\frac{\sin(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)},\frac{\cos(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)})\cdot(-\sin(t),\cos(t))dt\\ &=\textstyle\int_0^{2\pi}1dt=2\pi.\end{aligned}$$

Tuttavia, sotto opportune ipotesi sul dominio A, il teorema 3.2 è invertibile. Introduciamo, a tale scopo la seguente

Definizione 3.4. *Siano $A\subseteq\mathbb{R}^n$, $x^0\in A$. Diremo che A è* **stellato** *rispetto a x^0 se, $\forall x\in A$, $[x^0,x]\subseteq A$.*

Osservazione 3.7. Se A è stellato rispetto a qualche suo punto x^0, è connesso per archi (esercizio 3.1). Si osservi poi che, se A è convesso, allora è stellato rispetto a qualunque suo punto x^0. Un esempio di insieme stellato rispetto a qualche suo punto, ma non convesso, è costituito da $\mathbb{R}^2\setminus\{(x_1,0)\in\mathbb{R}^2:x_1\le 0\}$, che è stellato rispetto a ogni punto x^0 del tipo $(a,0)$, con $a>0$.

Teorema 3.4. *Siano A un aperto in $\mathbb{R}^n$, stellato rispetto a qualche suo punto x^0, $F\in C^1(A;\mathbb{R}^n)$ un campo vettoriale chiuso. Allora F è esatto.*

Premettiamo alla dimostrazione il seguente

Lemma 3.2. *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, A un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $f : [a,b] \times A \to \mathbb{R}$, continua e dotata delle derivate parziali (prime) continue $D_{x_j} f(t,x)$, $\forall j = 1, \dots, n$. Poniamo*

$$\begin{cases} F : A \to \mathbb{R}, \\ F(x) = \int_a^b f(t,x)dt. \end{cases}$$

Allora $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, $\forall x \in A$ $\exists D_j F(x) = \int_a^b D_j f(t,x)dt$.

Dimostrazione Siani $j \in \{1, \dots, n\}$, $x \in A$. Sia $r > 0$ tale che $B(x,r) \subseteq A$. Allora, se $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $|s| < r$, si ha

$$\frac{F(x + se^j) - F(x)}{s} - \int_a^b D_j f(t,x)dt = \int_a^b [\frac{f(t, x + se^j) - f(t,x)}{s} - D_j f(t,x)]dt$$

Per il teorema del valor medio (vedi [2], teorema 1.2) $\forall (t,s) \in [a,b] \times [-r,r]$ $\exists \theta \in [0,1]$ tale che

$$\frac{f(t, x + se^j) - f(t,x)}{s} = D_j f(t, x + \theta s e^j).$$

Per il teorema di Heine-Cantor la restrizione di $D_j f$ a $[a,b] \times \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq r\}$ è uniformemente continua. Poiche'

$$\|(x + \theta s e^j) - x\| \leq s,$$

$$|\frac{f(t, x + se^j) - f(t,x)}{s} - D_j f(t,x)| = |D_j f(t, x + \theta s e^j) - D_j f(t,x)| \leq \epsilon$$

$\forall t \in [a,b]$ se $|s| \leq s(\epsilon)$. Con questa scelta di s, si ha allora

$$|\frac{f(t, x + se^j) - f(t,x)}{s} - D_j f(t,x)]| \leq \epsilon,$$

da cui

$$|\frac{F(x + se^j) - F(x)}{s} - \int_a^b D_j f(t,x)dt| \leq \epsilon(b - a).$$

□

Dimostrazione del teorema 3.4 Per $x \in A$, poniamo

$$\begin{cases} \alpha^x : [0,1] \to \mathbb{R}^n, \\ \alpha^x(t) = x^0 + t(x - x^0). \end{cases}$$

α^x descrive il segmento di estremi x^0 e x e quindi ha sostegno in A. Poniamo

$$\begin{cases} U : A \to \mathbb{R}, \\ U(x) = \int F \cdot d\alpha^x. \end{cases}$$

Verifichiamo direttamente che U è un potenziale di F. Naturalmente, dovremo far vedere che, $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $\forall x \in A$, è definita $\frac{\partial U}{\partial x_i}(x)$ e vale $F_i(x)$. Scrivendo per esteso U, si ha

$$U(x) = \sum_{j=1}^n (x_j - x_j^0) \int_0^1 F_j(x^0 + t(x - x^0))dt. \quad (3.7)$$

Poniamo $V_j(x) := \int_0^1 F_j(x^0 + t(x - x^0))dt$ $(1 \le j \le n)$. Applicando il lemma 3.2, con

$$f(t,x) = F_j(x^0 + t(x - x^0)),$$

otteniamo

$$\frac{\partial V_j}{\partial x_i}(x) = \int_0^1 t\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x^0 + t(x - x^0)dt. \tag{3.8}$$

Da (3.7)-(3.8), si ottiene, $\forall x \in A$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_i}(x) &= \sum_{j=1}^n (x_j - x_j^0) \int_0^1 t\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x^0 + t(x - x^0))dt \\ &+ \int_0^1 F_i(x^0 + t(x - x^0))dt \\ &= \int_0^1 t \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x^0 + t(x - x^0))(x_j - x_j^0)dt \\ &+ \int_0^1 F_i(x^0 + t(x - x^0))dt, \end{aligned}$$

usando l'ipotesi che F è chiuso. Poniamo ora

$$\begin{cases} r : [0,1] \to \mathbb{R}, \\ r(t) = F_i(x^0 + t(x - x^0)). \end{cases}$$

Allora $r'(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x^0 + t(x - x^0))(x_j - x_j^0)$ $\forall t \in [0,1]$, per cui, dalla formula di integrazione per parti,

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_i}(x) &= \int_0^1 tr'(t)dt + \int_0^1 r(t)dt \\ &= [tr(t)]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 r(t)dt + \int_0^1 r(t)dt \\ &= r(1) = F_i(x). \end{aligned}$$

Con cio', la dimostrazione è completa

□

Esempio 3.4. Sia

$$\begin{cases} F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \\ F(x_1, x_2) = (x_1, x_2). \end{cases}$$

Poiché F è chiuso e $\mathbb{R}^2$ è convesso, F è esatto. Determiniamone un potenziale. Poniamo $x^0 := (0,0)$. Dato $x \in \mathbb{R}^2$, poniamo

$$U(x) := \int F \cdot d\alpha^x,$$

ove α^x è un cammino di classe C^1 a tratti con estremi x^0 e x. U è un potenziale di F per quanto visto nella seconda parte della dimostrazione del teorema 3.3. L'integrale è indipendente dalla scelta di α^x, ma le difficolta' di calcolo possono essere ben diverse! In molti casi, conviene scegliere cammini che si muovono, "a tratti", parallelamente agli assi. Nel caso in questione, possiamo considerare un cammino α^x che percorra prima il segmento di estremi $(0,0)$ e $(x_1, 0)$, poi il segmento di estremi $(x_1, 0)$ e (x_1, x_2). Per esempio,

$$\begin{cases} \alpha^x : [0,2] \to \mathbb{R}^2, \\ \alpha^x(t) = \begin{cases} (tx_1, 0) & \text{se } t \in [0,1], \\ (x_1, (t-1)x_2) & \text{se } t \in [1,2]. \end{cases} \end{cases}$$

Si ha allora

$$\begin{aligned} U(x_1, x_2) &= \int F \cdot d\alpha^x = \int_0^1 (tx_1, 0) \cdot (x_1, 0)dt + \int_1^2 (x_1, (t-1)x_2) \cdot (0, x_2)dt \\ &= x_1^2 \int_0^1 tdt + x_2^2 \int_1^2 (t-1)dt = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}. \end{aligned}$$

Esempio 3.5. Sia

$$\begin{cases} F : \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0)\} \to \mathbb{R}^2, \\ F(x_1, x_2) = (-\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}, \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}). \end{cases}$$

Nell'esempio 3.3, abbiamo gia' visto che F è chiuso, ma non esatto. Tuttavia, in base al teorema 3.4, se noi consideriamo le restrizioni di F ad aperti stellati rispetto a qualche loro punto, otteniamo dei campi vettoriali esatti. Cosi', se

$$A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, 0) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq 0\},$$

$F_{|A}$ è esatto. Calcoliamone un potenziale. Poniamo $x^0 := (1,0)$. Dato $x = (x_1, x_2) \in A$, scegliamo α^x in modo da sfruttare la struttura di F. Sia $\phi \in]-\pi, \pi[$, tale che

$$\begin{cases} x_1 = \|x\| \cos(\phi), \\ x_2 = \|x\| \sin(\phi). \end{cases} \tag{3.9}$$

Si osservi che ϕ non coincide con la coordinata polare θ dell'integrazione, perchè varia in $]-\pi, \pi[$ e non in $]0, 2\pi[$. Possiamo allora porre

$$U(x) := \int F \cdot d\alpha^x,$$

con α^x che percorre, in successione, prima il segmento di estremi $(1,0)$ e $(\|x\|, 0)$, poi l'arco della circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio $\|x\|$ di estremi $(\|x\|, 0)$ e x contenuto in A.

Possiamo prendere, ad esempio:

$$\begin{cases} \alpha^x : [0,2] \to \mathbb{R}^2, \\ \alpha^x(t) = \begin{cases} (1,0) + t[(\|x\|, 0) - (1,0)] = (1 + t(\|x\| - 1), 0) \\ \text{se } t \in [0,1], \\ (\|x\| \cos((t-1)\phi), \|x\| \sin((t-1)\phi)) \\ \text{se } t \in [1,2]. \end{cases} \end{cases}$$

Si ha allora

$$\begin{aligned} U(x) = \textstyle\int_0^1 (0, \frac{1+t(\|x\|-1)}{(1+t(\|x\|-1))^2} \cdot (\|x\| - 1, 0) dt + \int_1^2 (-\frac{\|x\| \sin((t-1)\phi)}{\|x\|^2}, \\ \frac{\|x\| \cos((t-1)\phi)}{\|x\|^2}) \cdot (-\|x\| \phi \sin((t-1)\phi), \|x\| \phi \cos((t-1)\phi)) dt \\ = \phi. \end{aligned}$$

ϕ dipende, naturalmente, da x. Ad esempio, se $x_1 > 0$, $\phi \in]-\pi/2, \pi/2[$ e quindi, da (3.9),

$$U(x) = \phi = \arcsin(\frac{x_2}{\|x\|}).$$

Per determinare il potenziale di un campo vettoriale esatto, si puo' spesso procedere applicando la seguente

Proposizione 3.1. *Sia A un aperto in $\mathbb{R}^n$ tale che $\forall x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$,*

$$\{x_n \in \mathbb{R} : (x', x_n) \in A\}$$

e' un intervallo in $\mathbb{R}$. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ tale che $\forall x \in A$ esiste $D_n f(x) = 0$. Sia

$$B = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : \{x_n \in \mathbb{R} : (x', x_n) \in A\} \neq \emptyset\}.$$

Allora esiste $g : B \to \mathbb{R}$ tale che

$$g(x') = f(x', x_n) \quad \forall (x', x_n) \in A.$$

Dimostrazione Siano $x' \in B$ e $I_{x'} = \{x_n \in \mathbb{R} : (x', x_n) \in A\}$. Poiche' $I_{x'}$ è un intervallo, da $D_n f(x', x_n) = 0 \; \forall x_n \in I(x')$ segue che $f(x', \cdot)$ è una funzione costante in $I(x')$. Si puo' allora porre, per $x' \in B$,

$$g(x') = f(x', x_n),$$

con x_n elemento arbitrario di $I_{x'}$.

□

Esempio 3.6. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$F(x_1, x_2) = (\sin(x_2) - x_2 \sin(x_1) + x_1, \cos(x_1) + x_1 \cos(x_2) + x_2).$$

E' facile verificare che F è chiuso, essendo

$$D_2 F_1(x_1, x_2) = \cos(x_2) - \sin(x_1) = D_1 F_2(x_1, x_2).$$

Quindi, per il teorema 3.4, F è esatto. Determiniamone un potenziale U. Poniamo

$$\begin{cases} h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \\ h(x_1, x_2) = x_2 \cos(x_1) + x_1 \sin(x_2) + \frac{x_2^2}{2}. \end{cases}$$

Si vede subito che $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$D_2 h(x_1, x_2) = F_2(x_1, x_2) = D_2 U(x_1, x_2).$$

Quindi, per la proposizione 3.1,

$$U(x_1, x_2) - h(x_1, x_2) = k(x_1),$$

con $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si ha

$$k'(x_1) = D_1 U(x_1, x_2) - D_1 h(x_1, x_2) = F_1(x_1, x_2) + x_2 \sin(x_1) - \sin(x_2) = x_1.$$

Allora

$$k(x_1) = \frac{x_1^2}{2} + C,$$

con C costante reale arbitraria. Otteniamo

$$U(x_1, x_2) = h(x_1, x_2) + k(x_1) = x_2 \cos(x_1) + x_1 \sin(x_2) + \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_1^2}{2} + C.$$

Osservazione 3.8. Sia $A = \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$. A non è stellato rispetto ad alcuno dei suoi punti: infatti, qualunque sia $x \in A$, $-x \in A$ e $O \in [x, -x]$. Dunque, il teorema 3.4 non è applicabile. In effetti (esempio 3.5), esistono campi chiusi di dominio $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ che non sono esatti. Sia allora $F : A \to \mathbb{R}^n$. Diremo che F è un **campo centrale** se esiste $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continua, tale che

$$F(x) = g(\|x\|^2) x \quad \forall x \in A. \tag{3.10}$$

E' immediato verificare che, se F è come in (3.10), F è esatto e un suo potenziale è

$$\begin{cases} U : A \to \mathbb{R}, \\ U(x) = \frac{G(\|x\|^2)}{2}, \end{cases} \tag{3.11}$$

con G primitiva di g (esercizio 3.2). I campi centrali hanno una certa importanza nella fisica. Consideriamo, ad esempio,

$$\begin{cases} F : \mathbb{R}^3 \setminus \{O\} \to \mathbb{R}^3, \\ F(x) = \|x\|^{-3} x. \end{cases} \tag{3.12}$$

F è della forma (3.10), con $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $g(r) = r^{-3/2}$. Poiché una primitiva di g è $G(r) = -2r^{-1/2}$, un potenziale di F è

$$\begin{cases} U : \mathbb{R}^3 \setminus \{O\} \to \mathbb{R}, \\ U(x) = \frac{G(\|x\|^2)}{2} = -\|x\|^{-1}. \end{cases}$$

Osservazione 3.9. Si potrebbe dimostrare che le conclusioni del teorema 3.4 sono ancora valide nell'ipotesi (meno restrittiva) che A sia **semplicemente connesso**. Cio' significa quanto segue: sia $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ un arbitrario cammino continuo e chiuso (cioè $\alpha(a) = \alpha(b)$) con sostegno in A. Allora esistono $F : [0, 1] \times [a, b] \to A$ e $x^0 \in A$ tali che:

(I) F è continua;
(II) $F(0, t) = \alpha(t)$, $F(1, t) = x^0$ $\forall t \in [a, b]$;
(III) $F(s, a) = F(s, b)$ $\forall s \in [0, 1]$.

Un'applicazione con tali caratteristiche si chiama **omotopia** tra α e il cammino costante $\beta(t) = x^0$ di dominio $[a, b]$. Il significato di questa definizione è il seguente: è possibile "deformare con continuita"' un qualunque cammino chiuso con sostegno in A, fino a trasformarlo in un cammino costante, senza mai uscire da A e tenendolo sempre chiuso in ogni fase della trasformazione (condizione (III)). E' conveniente pensare a $s \in [0, 1]$ come a un parametro temporale: all'istante $s = 0$ abbiamo α, che si deforma con continuita' in x^0, con la deformazione completata al tempo $s = 1$.

E' facile verificare che, se A è un aperto stellato rispetto a qualche suo punto, A è semplicemente connesso (esercizio 3.3). Si potrebbe poi far vedere che, se $n \geq 3$, $\mathbb{R}^n \setminus \{O\}$ è semplicemente connesso.

Esercizio 3.1. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, stellato rispetto a qualche suo punto x^0. Dimostrare che A è connesso per archi.

Sugg.: siano x e y arbitrari elementi di A. Costruire un cammino con sostegno in A di estremi x e y, percorrendo in successione i segmenti $[x, x^0]$ e $[x^0, y]$.

Esercizio 3.2. Verificare quanto asserito nell'osservazione 3.8.

Esercizio 3.3. Dimostrare che, se A è un aperto di $\mathbb{R}^n$ stellato rispetto a qualche suo punto x^0, A è semplicemente connesso.

Sugg. : sia A stellato rispetto a x^0. Sia poi $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ un cammino chiuso con sostegno in A. Considerare $F : [a, b] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$, $F(t, s) = \alpha(t) + s(x^0 - \alpha(t))$.

Esercizio 3.4. Verificare se i seguenti campi vettoriali sono esatti e determinarne,eventualmente, un potenziale.

(I) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x_1, x_2) = (3x_1^2 x_2, x_1^3)$;
(II) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x_1, x_2) = (2x_1 e^{x_2} + x_2, x_1^2 e^{x_2} + x_1 - 2x_2)$;
(III) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x_1, x_2) = (\sin(x_2) - x_2 \sin(x_1) + x_1, \cos(x_1) + x_1 \cos(x_2) + x_2)$;
(IV) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$;
(V) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x_1, x_2, x_3) = (x_2^2 \cos(x_1) + x_3^2, 2x_2 \sin(x_1) - 4, -4x_2^2\, x_3^2 - 2x_1^3 x_3)$;
(VI) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 x_2 - 3x_1^2 x_3^2 + 1, 2(x_1^2 + 1), -2x_1^3 x_3 - 3x_3^2)$;
(VII) $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$, $F(x_1, x_2) = (-\frac{\sin(x_1/x_2)}{x_2}, \frac{\sin(x_1/x_2)x_1}{x_2^2})$;

(VIII) $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$, $F(x_1, x_2) = (\frac{2x_1 e^{x_1^2 - 2x_2}}{x_2}, -\frac{e^{x_1^2-2x_2}(1+2x_2)}{x_2^2})$;
(IX) $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F(x) = \cos(\|x\|^2)x$;
(X) $F : \mathbb{R}^n \setminus \{O\} \to \mathbb{R}^n$, $F(x) = \|x\|^\alpha x$ $(\alpha \in \mathbb{R})$;
(XI) $F : \mathbb{R}^n \setminus \{O\} \to \mathbb{R}^n$, $F(x) = \ln(\|x\|)x$.

Esercizio 3.5. Siano $0 < a < b \leq \infty$, $A = \{x \in \mathbb{R}^n : a < \|x\| < b\}$, $F : A \to \mathbb{R}^n$, $F(x) = g(\|x\|^2)x$, con $g :]a, b[\to \mathbb{R}$ continua. Provare che F è esatto.

References

[1] D. Guidetti, "$\mathbb{R}^n$ e spazi metrici".

[2] D. Guidetti, "Calcolo differenziale per funzioni di piu' variabili reali".

[3] S. Lang, "Algebra lineare".