

$\mathbb{R}^n$ e spazi metrici

Davide Guidetti

1 $\mathbb{R}^n$, prodotti scalari, norme, metriche

Dato $n \in \mathbb{N}$ e gli n oggetti $x_1, \dots, x_n$, introduciamo la nozione primitiva di n -pla ordinata $(x_1, \dots, x_n)$, estensione della nozione di coppia ordinata. Richiediamo solo quanto segue: che due n -ple $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ coincidano se e solo se $x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$. Dati gli insiemi $A_1, \dots, A_n$, non necessariamente a due a due distinti, definiamo con $A_1 \times \dots \times A_n$ il loro **prodotto cartesiano**:

Definizione 1.1. *Dati gli insiemi $A_1, \dots, A_n$, poniamo*

$$A_1 \times \dots \times A_n := \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n\}.$$

Se $A_1, \dots, A_n$ coincidono tutti con un certo insieme A , scriveremo A^n in alternativa a $A \times \dots \times A$.

Ci interessera' in particolare il caso $A = \mathbb{R}$, ove $\mathbb{R}$ indica l'insieme dei numeri reali. Al lettore sara' probabilmente gia' noto il fatto che i numeri reali costituiscono un modello della retta, mentre l'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie ordinate di numeri reali viene utilizzato come modello di piano. Nello stesso modo si puo' procedere con $\mathbb{R}^3$ nei confronti dello spazio tridimensionale: basta fissare un piano π e su questo adottare un sistema di coordinate cartesiane ortogonali (x_1, x_2) . Si puo' poi introdurre un asse r perpendicolare al piano e su questo introdurre un sistema di ascisse (x_3) . Assegnato un arbitrario punto P , questo è univocamente determinato da una tripla di numeri reali (x_1, x_2, x_3) ottenuta come segue: (x_1, x_2) sono le coordinate della proiezione ortogonale del punto su π , x_3 costituisce l'ascissa della proiezione di P sull'asse r .

Noi considereremo qui $\mathbb{R}^n$ per un fissato $n \in \mathbb{N}$. Dati $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ elementi di $\mathbb{R}^n$, definiamo la loro somma $x + y$ come segue

$$x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n). \quad (1.1)$$

In dimensione 2 e 3, la somma definita in tal modo costituisce una generalizzazione della somma di vettori, che probabilmente sara' gia' familiare al lettore, almeno nel caso bidimensionale: è utile identificare x e y con i vettori applicati che hanno il primo estremo nell'origine $O = (0, \dots, 0)$ e il secondo rispettivamente in $(x_1, \dots, x_n)$ e $(y_1, \dots, y_n)$. Trasliamo ora il secondo vettore in modo da trasferirne il primo estremo in $(x_1, \dots, x_n)$. Il secondo estremo si trovera' proprio in corrispondenza del punto di coordinate $(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$.

Sia poi $\lambda \in \mathbb{R}$. Per $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, definiamo

$$\lambda x := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n). \quad (1.2)$$

Anche questo "prodotto per uno scalare" ammette una semplice interpretazione geometrica: identifichiamo ancora x con il vettore applicato che ha il primo estremo in O e il secondo in

$(x_1, \dots, x_n)$. Consideriamo la retta r che contiene il vettore (supposto di lunghezza positiva) e O . λx sarà allora identificabile con il vettore applicato che ha il primo estremo in O , lunghezza pari alla distanza di $(x_1, \dots, x_n)$ da O moltiplicata per $|\lambda|$ e verso coincidente con quello del vettore identificato con x se $\lambda > 0$, opposto a quello del vettore identificato con x se $\lambda < 0$.

Con le operazioni di somma e prodotto per uno scalare definite in (1.1) e (1.2), $\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

Ricordiamo che uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ è una coppia ordinata $(X, \mathbb{K})$ tale che X è un insieme e sono definite una somma $(x, y) \rightarrow x + y$ da $X \times X$ a X e una moltiplicazione per uno scalare $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$ da $\mathbb{K} \times X$ a X in modo che siano soddisfatte le seguenti proprietà:

$$(ASV1) \forall x, y \in X$$

$$y + x = x + y$$

(proprietà commutativa della somma);

$$(ASV2) \forall x, y, z \in X$$

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

(proprietà associativa della somma);

$$(ASV3) \text{ esiste } O \in X \text{ tale che } \forall x \in X$$

$$x + O = O + x = x$$

(esistenza di un elemento neutro per la somma);

$$(ASV4) \forall x \in X \text{ esiste } -x \in X \text{ tale che}$$

$$x + (-x) = (-x) + x = O,$$

ove O è l'elemento specificato in (ASV3); (esistenza di un inverso additivo per ogni $x \in X$);

$$(ASV5) \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in X$$

$$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x;$$

$$(ASV6) \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in X$$

$$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y;$$

$$(ASV7) \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in X$$

$$\lambda(\mu x) = (\lambda \mu)x;$$

$$(ASV8) \forall x \in X$$

$$1x = x.$$

Nel caso di $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $X = \mathbb{R}^n$, si ha

$$O = (0, \dots, 0)$$

e, se $x = (x_1, \dots, x_n)$,

$$-x = (-x_1, \dots, -x_n).$$

Osservazione 1.1. In (ASV6) e (ASV7) abbiamo usato la solita convenzione che, qualora non compaiano parentesi, "i prodotti hanno la precedenza sulle somme". Così $\lambda x + \lambda y$ sta per $(\lambda x) + (\lambda y)$.

Osservazione 1.2. Nel seguito, il campo $\mathbb{K}$ sarà sempre $\mathbb{R}$ (il campo dei numeri reali) o $\mathbb{C}$ (il campo dei numeri complessi).

Definizione 1.2. Siano X uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ (al solito coincidente con $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un'applicazione da $X \times X$ a $\mathbb{K}$ (che associa dunque a ogni coppia ordinata (x, y) di $X \times X$ un elemento $\langle x, y \rangle$ appartenente a $\mathbb{K}$). Diremo che $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un **prodotto interno** (o scalare) in X se valgono le seguenti condizioni:

(PI1) $\forall y \in X \ x \rightarrow \langle x, y \rangle$ è lineare da X a $\mathbb{K}$;

(PI2) $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle} \ \forall x, y \in X$;

(PI3) $\langle x, x \rangle$ è un numero reale non negativo $\forall x \in X$;

(PI4) se $x \in X$ e $\langle x, x \rangle = 0$, allora $x = 0$.

Osservazione 1.3. (PI1) equivale a richiedere che $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}, \forall x^1, x^2, y \in X$ si abbia

$$\langle \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2, y \rangle = \lambda_1 \langle x^1, y \rangle + \lambda_2 \langle x^2, y \rangle.$$

Da (PI1) e (PI2) segue poi, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}, \forall x, y^1, y^2 \in X$,

$$\begin{aligned} \langle x, \lambda_1 y^1 + \lambda_2 y^2 \rangle &= \\ \overline{\langle \lambda_1 y^1 + \lambda_2 y^2, x \rangle} &= \overline{\lambda_1 \langle y^1, x \rangle + \lambda_2 \langle y^2, x \rangle} = \\ &= \overline{\lambda_1} \langle x, y^1 \rangle + \overline{\lambda_2} \langle x, y^2 \rangle. \end{aligned}$$

Si usa dire che $\forall x \in X \ y \rightarrow \langle x, y \rangle$ è antilineare da X a $\mathbb{K}$. Nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, cio' significa che un prodotto interno è lineare anche nel secondo argomento.

Esempio 1.1. Siano $X = \mathbb{R}^n$ e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Se $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$, poniamo

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n. \quad (1.3)$$

E' facile verificare che l'applicazione definita in (3.10) è un prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$.

Esempio 1.2. Siano $X = \mathbb{C}^n$ e $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Se $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$, poniamo

$$\langle x, y \rangle := x_1 \overline{y_1} + \dots + x_n \overline{y_n}. \quad (1.4)$$

L'applicazione definita in (3.11) è un prodotto scalare in $\mathbb{C}^n$. Lasciamo la facile verifica al lettore (vedi l'esercizio 1.1).

Esempio 1.3. Sia X lo spazio vettoriale $C([0, 1])$ delle funzioni continue a valori reali di dominio $[0, 1]$. Con le solite operazioni di somma di funzioni e di moltiplicazione di una funzione a valori reali per uno scalare reale X è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Se $f, g \in X$, poniamo

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

La proprieta' (PI4) puo' essere verificata nel modo seguente: sia $f \in C([0, 1])$ tale che $\langle f, f \rangle = 0$, cioe' $\int_0^1 f(x)^2 dx = 0$. Poniamo

$$\begin{cases} I : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \\ I(x) = \int_0^x f(t)^2 dt. \end{cases}$$

Per ogni $x \in [0, 1]$ si ha

$$0 \leq I(x) \leq I(1) = 0.$$

Quindi $I(x) = 0 \forall x \in [0, 1]$. Poichè f è continua, f^2 è continua. Perciò, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, $\forall x \in [0, 1]$,

$$0 = I'(x) = f(x)^2,$$

da cui $f(x) = 0 \forall x \in [0, 1]$.

Definizione 1.3. Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare sullo spazio vettoriale X . Per $x \in X$, poniamo

$$\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}.$$

Osservazione 1.4. La definizione 1.3 ha senso a causa della proprietà (PI3) del prodotto scalare.

Vale la seguente fondamentale disuguaglianza:

Teorema 1.1. Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) col prodotto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sia poi $\|\cdot\|$ come nella definizione 1.3. Allora $\forall x, y \in X$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

(Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)

Dimostrazione Siano $\alpha \in \mathbb{K}$, che specificheremo nel seguito. Allora, $\forall t \in \mathbb{R}$, utilizzando (PI1) – (PI3),

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x + t\alpha y, x + t\alpha y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + t(\alpha \langle y, x \rangle + \bar{\alpha} \langle x, y \rangle) + t^2 |\alpha|^2 \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2t \operatorname{Re}(\alpha \langle y, x \rangle) + t^2 |\alpha|^2 \|y\|^2, \end{aligned}$$

essendo

$$\begin{aligned} \alpha \langle y, x \rangle + \bar{\alpha} \langle x, y \rangle &= \alpha \langle y, x \rangle + \overline{\alpha \langle y, x \rangle} \\ &= 2 \operatorname{Re}(\alpha \langle y, x \rangle). \end{aligned}$$

Scegliamo

$$\alpha = \begin{cases} \frac{\langle x, y \rangle}{|\langle x, y \rangle|} & \text{se } \langle x, y \rangle \neq 0, \\ 1 & \text{se } \langle x, y \rangle = 0. \end{cases}$$

Osserviamo che in ogni caso $|\alpha| = 1$ e si ha

$$P(t) := \langle x + t\alpha y, x + t\alpha y \rangle = \|x\|^2 + 2t |\langle x, y \rangle| + t^2 \|y\|^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

P è un polinomio di grado non superiore a due a coefficienti reali e $P(t) \geq 0 \forall t \in \mathbb{R}$. Ciò implica che il suo discriminante è non positivo, vale a dire

$$|\langle x, y \rangle|^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0,$$

da cui segue subito la conclusione. $\square$

Definizione 1.4. Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Una **norma** in X è una funzione $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, +\infty[$, $x \mapsto \|x\| \forall x \in X$, tale che

(I) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in X$

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|;$$

(II) $\forall x, y \in X$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|;$$

(III) se $x \in X$ e $\|x\| = 0$, allora $x = 0$.

Teorema 1.2. Siano X uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto interno in X . Allora l'applicazione $\| \cdot \|$ della definizione 1.3 è una norma nel senso della definizione 1.4.

Dimostrazione Siano $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x \in X$. Allora

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \|x\|.$$

Se x e y sono elementi di X , si ha poi

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2|\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle)| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \end{aligned}$$

(per Cauchy-Schwarz)

$$= (\|x\| + \|y\|)^2,$$

da cui, prendendo le radici quadrate,

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Infine, se $\|x\| = 0$, allora $\langle x, x \rangle = 0$, da cui $x = 0$. $\square$

Osservazione 1.5. Dato lo spazio vettoriale X munito del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, salvo diversa precisazione indicheremo con $\| \cdot \|$ la norma associata al prodotto scalare della definizione 1.3.

Esempio 1.4. Consideriamo l'esempio 1.1. Dato $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, otteniamo dal prodotto scalare la norma

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2},$$

che è la ben nota norma euclidea. Salvo diversa precisazione, questa sarà la norma che considereremo su $\mathbb{R}^n$.

Altre norme su $\mathbb{R}^n$ sono, dato $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_1 := \sum_{j=1}^n |x_j| \tag{1.5}$$

e

$$\|x\|_\infty := \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|. \tag{1.6}$$

Esempio 1.5. Consideriamo l'esempio 1.2. Dato $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, otteniamo dal prodotto scalare la norma

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}. \tag{1.7}$$

Salvo diversa precisazione, questa sarà la norma che considereremo su $\mathbb{C}^n$.

Esempio 1.6. Consideriamo l'esempio 1.3. Se $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, si ha

$$\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2} = \left(\int_0^1 f(x)^2 dx \right)^{1/2}.$$

Esempio 1.7. Sia A un insieme non vuoto. Indichiamo con $B(A)$ l'insieme delle funzioni $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ limitate, tali, cioè, che $f(A)$ è un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$ o (equivalentemente) che esiste $M \in [0, \infty)$ tale che $|f(a)| \leq M \forall a \in A$. È facile vedere che $B(A)$ è uno spazio vettoriale con le operazioni (date $f, g \in B(A)$)

$$(f + g)(a) := f(a) + g(a), (cf)(a) := c \cdot f(a) \quad (a \in A, c \in \mathbb{R}).$$

Data $f \in B(A)$, poniamo

$$\|f\|_{B(A)} := \sup\{|f(a)| : a \in A\}. \quad (1.8)$$

Verifichiamo che $\|\cdot\|_{B(A)}$ è una norma in $B(A)$.

Innanzitutto è chiaro che $\|\cdot\|_{\infty}$ è ben definita su X e a valori in $[0, +\infty[$. Siano $c \in \mathbb{R}$ e $f \in B(A)$. Allora $\forall a \in A$

$$|(cf)(a)| = |c \cdot f(a)| = |c| |f(a)| \leq |c| \sup\{|f(b)| : b \in A\} = |c| \|f\|_{B(A)}. \quad (1.9)$$

Segue che $\|cf\|_{B(A)} \leq |c| \|f\|_{B(A)}$. Se $c = 0$, ovviamente $\|cf\|_{B(A)} = 0 = |c| \|f\|_{B(A)}$. Se $c \neq 0$, si ha

$$\|f\|_{B(A)} = |c^{-1}| \|cf\|_{B(A)}$$

e quindi, per (1.9),

$$\|f\|_{B(A)} \leq |c^{-1}| \|cf\|_{B(A)} = |c|^{-1} \|cf\|_{B(A)},$$

da cui

$$|c| \|f\|_{B(A)} \leq \|cf\|_{B(A)}.$$

Concludiamo che $\forall c \in \mathbb{C} \quad \|cf\|_{B(A)} = |c| \|f\|_{B(A)}$.

Se $f, g \in B(A)$, si ha, $\forall a \in A$,

$$|(f + g)(a)| = |f(a) + g(a)| \leq |f(a)| + |g(a)| \leq \|f\|_{B(A)} + \|g\|_{B(A)},$$

da cui

$$\|f + g\|_{B(A)} \leq \|f\|_{B(A)} + \|g\|_{B(A)}.$$

Infine, ovviamente se $f(a) = 0 \forall a \in A \quad \|f\|_{B(A)} = 0$. Viceversa, se $\|f\|_{B(A)} = 0, \forall a \in A$

$$|f(a)| \leq \|f\|_{B(A)} = 0,$$

da cui $f(a) = 0 \forall a \in A$. Quindi $(B(A), \|\cdot\|_{B(A)})$ è uno spazio normato.

Possiamo considerare anche l'insieme $B(A; \mathbb{C})$ delle funzioni limitate da A a $\mathbb{C}$, che è uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ (vedi l'esercizio 1.4).

Se $A \subseteq \mathbb{R}$, l'insieme $BC(A)$ delle funzioni continue e limitate da A a $\mathbb{R}$ è un sottospazio vettoriale di $B(A)$ e è perciò normato da (1.8).

Esempio 1.8. Indichiamo con $C([0, 1])$ lo spazio vettoriale delle funzioni continue a valori reali di dominio $[0, 1]$. Data $f \in C([0, 1])$, poniamo

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)| dx.$$

$\|\cdot\|_1$ è una norma in $C([0, 1])$. Verifichiamo solo che, se $f \in C([0, 1])$ e $\|f\|_1 = 0$, $f = 0$ (cioè $f(x) = 0$ per ogni $x \in [0, 1]$). Poniamo, infatti, per $x \in [0, 1]$,

$$F(x) = \int_0^x |f(t)| dt.$$

Si ha, per ogni $x \in [0, 1]$,

$$0 \leq F(x) \leq \int_0^1 |f(x)| dx = 0.$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, $F \in C^1([0, 1])$ e, $\forall x \in [0, 1]$,

$$|f(x)| = F'(x) = 0.$$

Da cio' $f(x) = 0 \forall x \in [0, 1]$.

Definizione 1.5. Sia X un insieme. Una **metrica** (o distanza) su X e' una funzione $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ tale che:

- (I) $\forall x_0, x_1 \in X \ d(x_0, x_1) = d(x_1, x_0)$;
 - (II) $\forall x_0, x_1, x_2 \in X \ d(x_0, x_2) \leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2)$ (disuguaglianza triangolare);
 - (III) $\forall x_0, x_1 \in X \ d(x_0, x_1) = 0$ se e solo se $x_0 = x_1$.
- Uno spazio metrico e' una coppia ordinata (X, d) , con X insieme e d metrica su X .

Esempio 1.9. Se (X, d) e' uno spazio metrico e $A \subseteq X$, la restrizione di d a $A \times A$ e' una metrica su A .

Esempio 1.10. Sia X un insieme arbitrario. Poniamo $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$,

$$d(x_0, x_1) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \neq x_1, \\ 0 & \text{se } x_0 = x_1. \end{cases}$$

Lasciamo al lettore verificare che d e' una metrica su X .

Esempio 1.11. Se $(X, \|\cdot\|)$ e' uno spazio normato (su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), poniamo, dati $x_0, x_1 \in X$,

$$d(x_0, x_1) = \|x_0 - x_1\|. \quad (1.10)$$

Allora d e' una metrica su X . Infatti:

(I) se $x_0, x_1 \in X$,

$$d(x_1, x_0) = \|x_1 - x_0\| = \|(-1)(x_0 - x_1)\| = |-1| \|x_0 - x_1\| = \|x_0 - x_1\| = d(x_0, x_1);$$

(II) se $x_0, x_1, x_2 \in X$,

$$\begin{aligned} d(x_0, x_2) &= \|x_0 - x_2\| = \|(x_0 - x_1) + (x_1 - x_2)\| \leq \|x_0 - x_1\| + \|x_1 - x_2\| \\ &= d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2). \end{aligned}$$

(III) $d(x_0, x_1) = 0$ se e solo se $\|x_0 - x_1\| = 0$. Cio' equivale a $x_0 - x_1 = 0$, cioe' a $x_0 = x_1$.

Nel seguito, salvo diversa precisazione, dato uno spazio normato $(X, \|\cdot\|)$, la metrica d sara' quella definita in (1.10) (metrica associata alla norma).

Dalle norme (1.5)-(1.6) si ricavano le metriche

$$d_1(x, y) := \sum_{j=1}^n |x_j - y_j|$$

e

$$d_\infty(x, y) := \max_{1 \leq j \leq n} |x_j - y_j|,$$

con $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Dall'esempio 1.5 si ricava in $\mathbb{C}^n$ la metrica

$$d(x, y) = \left(\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^2 \right)^{1/2}, \quad (1.11)$$

con $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, $x, y \in \mathbb{C}^n$.

Dall'esempio 1.7 si ottiene su $B(A)$ la metrica

$$d_{B(A)}(f, g) = \sup_{a \in A} |f(a) - g(a)|.$$

Esercizio 1.1. Verificare che l'espressione in (1.4) definisce un prodotto scalare in $\mathbb{C}^n$.

Esercizio 1.2. Provare che $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$ sono norme su $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 1.3. Provare che $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ sono norme su $\mathbb{C}^n$.

Esercizio 1.4. Sia A un insieme non vuoto. Indichiamo con $B(A; \mathbb{C})$ l'insieme delle funzioni $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ limitate, tali, cioè, che esiste $M \in [0, \infty)$ tale che $|f(a)| \leq M \forall a \in A$.

Verificare che $B(A; \mathbb{C})$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ con le operazioni (date $f, g \in B(A; \mathbb{C})$)

$$(f + g)(a) := f(a) + g(a), (cf)(a) := c \cdot f(a) \quad (a \in A, c \in \mathbb{C}).$$

Data $f \in B(A; \mathbb{C})$, poniamo

$$\|f\|_{B(A; \mathbb{C})} := \sup\{|f(a)| : a \in A\}. \quad (1.12)$$

Verificare che $\|\cdot\|_{B(A; \mathbb{C})}$ è una norma in $B(A; \mathbb{C})$.

Esercizio 1.5. Completare la dimostrazione del risultato dell'esempio 1.8.

Esercizio 1.6. Sia $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sin(x) - 4\pi$. Calcolare $\|f\|_{B([0, 2\pi])}$ e $\|f\|_1$.

Sia $f : [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Calcolare $\|f\|_{B([-2, 1])}$ e $\|f\|_1$.

Esercizio 1.7. Per $a \in \mathbb{R}^+$, poniamo $f_a : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_a(x) = x^a$. Dati $a, b \in \mathbb{R}^+$, calcolare $\|f_a - f_b\|_{B([0, 1])}$, $\|f_a - f_b\|_1$, $\|f_a - f_b\|_2$, ove $\|\cdot\|_2$ è la norma indotta dal prodotto scalare descritto nell'esempio 1.3.

2 Nozioni di carattere topologico in uno spazio metrico

Definizione 2.1. Siano (X, d) uno spazio metrico, $x \in X$ e $r > 0$. Poniamo

$$B(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

Chiameremo $B(x, r)$ la **palla aperta** di centro x e raggio r .

Osservazione 2.1. Se $X = \mathbb{R}$, con la metrica euclidea, che è quella indotta dalla norma $|\cdot|$ (valore assoluto), $B(x, r)$ coincide con l'intorno circolare

$$I(x, r) = (x - r, x + r).$$

Definizione 2.2. Sia (X, d) uno spazio metrico e siano $A \subseteq X$, $x_0 \in X$.

Diremo che x_0 appartiene all'**interno** di A (e scriveremo $x_0 \in \mathring{A}$) se esiste una palla aperta $B(x_0, r)$, con $r > 0$, tale che $B(x_0, r) \subseteq A$. Diremo che A e' **aperto** se $A = \mathring{A}$.

Esempio 2.1. Sia (X, d) un arbitrario spazio metrico e siano $x_0 \in X$ e $r > 0$. Proviamo che $B(x_0, r)$ e' aperto. A tale scopo, si deve far vedere che, posto $A = B(x_0, r)$, si ha $\mathring{A} = A$ oppure che, per ogni $x \in B(x_0, r)$ esiste $\rho > 0$ tale che $B(x, \rho) \subseteq B(x_0, r)$.

Sia $\rho > 0$. Se $y \in B(x, \rho)$, si ha

$$d(y, x_0) \leq d(y, x) + d(x, x_0) < \rho + d(x, x_0) \leq r$$

se $\rho \leq r - d(x, x_0)$. Percio' si puo' prendere $\rho = r - d(x, x_0)$.

Esempio 2.2. Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato non costituito dal solo 0 e siano $x^0 \in X$ e $r > 0$. Poniamo

$$A := \{x \in X : d(x, x^0) \leq r\}.$$

A e' la palla "chiusa" di centro x^0 e raggio r . Proviamo che A non e' aperto.

Infatti, sia $x \in X$ tale che $d(x, x^0) = r$ (per esempio, $x = x^0 + \frac{r}{\|e\|}e$, con $e \in X \setminus \{0\}$). Allora $x \in A$ ma $x \notin \mathring{A}$. Sia infatti $\rho > 0$. Dobbiamo trovare $y \in B(x, \rho)$ tale che $y \notin B(x_0, r)$. Cerchiamo y nella forma

$$y = x_0 + t(x - x_0),$$

con $t > 0$. Si ha $d(x_0, y) = t\|x - x_0\| = tr > r$ se prendiamo $t > 1$. In tal caso $d(x, y) = \|(t-1)(x - x_0)\| = (t-1)r < \rho$ se scegliamo

$$t < 1 + \frac{\rho}{r}.$$

Percio', se $y = x_0 + (1 + \frac{\rho}{2r})(x - x_0)$, avremo che $y \in B(x, \rho)$, ma non appartiene a $B(x_0, r)$.

Proposizione 2.1. Siano (X, d) uno spazio metrico. Allora:

- (I) $\emptyset$ e X sono aperti;
- (II) se $(A_i)_{i \in I}$ e' un'arbitraria (finita o infinita) famiglia di aperti, $\cup_{i \in I} A_i$ e' un aperto;
- (III) se $n \in \mathbb{N}$ e $A_1, \dots, A_n$ sono aperti, $\cap_{i=1}^n A_i$ e' un aperto.

Dimostrazione (I) Se $\emptyset$ non fosse aperto, esisterebbe $x_0 \in \emptyset$ che non sta nell'interno di $\emptyset$. Il fatto che X sia aperto e' ovvio.

(II) Se $x_0 \in \cup_{i \in I} A_i$ esiste $i_0 \in I$ tale che $x_0 \in A_{i_0}$. Poiche' A_{i_0} e' aperto, esiste $r > 0$ tale che

$$B(x_0, r) \subseteq A_{i_0} \subseteq \cup_{i \in I} A_i.$$

(III) Sia $x_0 \in \cap_{i=1}^n A_i$. Dato $i \in \{1, \dots, n\}$, poiche' A_i e' aperto, esiste $r_i \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$x_0 \in B(x_0, r_i) \subseteq A_i.$$

Se $r = \min_{1 \leq i \leq n} r_i$, si ha allora

$$B(x_0, r) \subseteq \cap_{i=1}^n B(x_0, r_i) \subseteq \cap_{i=1}^n A_i.$$

□

Definizione 2.3. Siano (X, d) uno spazio metrico, $A \subseteq X$, $x_0 \in X$. Diremo che x_0 **appartiene alla frontiera** di A , e scriveremo $x_0 \in Fr(A)$, se ogni palla aperta $B(x_0, r)$, con $r > 0$, contiene sia elementi appartenenti ad A , sia elementi non appartenenti ad A .

Esempio 2.3. Siano $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato, $A = B(x^0, r)$, con $x^0 \in X$ e $r > 0$. Verifichiamo che $Fr(A) = \{x \in X : d(x, x_0) = \|x - x_0\| = r\}$.

Sia infatti $x \in X$. Proviamo che, se $x \in Fr(A)$, necessariamente $d(x, x_0) = r$. In effetti, se $d(x, x_0) < r$, per l'esempio 2.2 esiste $\rho > 0$ tale che $B(x, \rho) \subseteq A$. Segue che $x \notin Fr(A)$. Sia invece $d(x, x_0) > r$. Sia poi $\rho > 0$ e $y \in B(x, \rho)$. Allora

$$d(x, x_0) \leq d(x, y) + d(y, x_0) < \rho + d(y, x_0),$$

da cui

$$d(y, x_0) > d(x, x_0) - \rho \geq r$$

se

$$\rho \leq d(x, x_0) - r.$$

Con tale scelta di ρ si ha che $B(x, \rho) \cap A = \emptyset$, per cui $x \notin Fr(A)$. Dunque, se $x \in Fr(A)$, deve essere necessariamente $d(x, x_0) = r$.

Sia, viceversa, $d(x, x_0) = r$. Verifichiamo che $x \in Fr(A)$. Sia $\rho > 0$. Dobbiamo far vedere che $B(x, \rho)$ contiene sia elementi appartenenti ad A , sia elementi non appartenenti ad A . Sia $y = x_0 + t(x - x_0)$. Si ha

$$d(x, y) = \|(1 - t)(x - x_0)\| = |1 - t|r < \rho$$

se $|1 - t| < \frac{\rho}{r}$, che equivale a

$$1 - \frac{\rho}{r} < t < 1 + \frac{\rho}{r}.$$

Vale inoltre

$$d(x_0, y) = \|t(x - x_0)\| = |t|r.$$

Dunque $y \in A$ se $|t| < 1$, mentre $y \notin A$ se $|t| \geq 1$. Dunque, se $t = 1$, $y \in B(x, \rho)$ e $y \notin A$, se $t = \max\{1 - \frac{\rho}{2r}, \frac{1}{2}\}$ $y \in B(x, \rho) \cap A$.

Osservazione 2.2. Se (X, d) e' uno spazio metrico, in generale vale l'inclusione $Fr(B(x_0, r)) \subseteq \{x \in X : d(x, x_0) = r\}$, ma tale inclusione puo' essere propria. Consideriamo, in proposito, l'esempio 1.10 nel caso di X con almeno due elementi. Se $x_0 \in X$, si ha $A = B(x_0, 1) = \{x_0\}$, mentre

$$\{x \in X : d(x, x_0) = 1\} = X \setminus \{x_0\}.$$

Tuttavia, se $x \neq x_0$, $B(x, 1) \cap A = \emptyset$. Quindi $x \notin Fr(A)$.

Osservazione 2.3. Dalla definizione 2.3 segue immediatamente che

$$Fr(A) = Fr(X \setminus A).$$

Il seguente risultato costituisce una semplice caratterizzazione degli insiemi aperti:

Proposizione 2.2. Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

- (I) A e' aperto;
- (II) $A \cap Fr(A) = \emptyset$.

Dimostrazione Sia A aperto e sia $x \in A$. Allora $x \in \mathring{A}$. Dunque esiste $r > 0$ tale che $B(x, r) \subseteq A$. Ne segue che $x \notin Fr(A)$ e perciò $A \cap Fr(A) = \emptyset$.

Sia, viceversa, $A \cap Fr(A) = \emptyset$. Proviamo che A è aperto. Sia $x \in A$. Allora $x \notin Fr(A)$. Ne segue che esiste $r > 0$ tale che $B(x, r) \subseteq A$, oppure $B(x, r) \subseteq X \setminus A$. La seconda condizione non si può verificare, perché $x \in A$. Concludiamo che ogni elemento di A appartiene anche a $\mathring{A}$, e quindi che A è aperto.

□

Definizione 2.4. Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$. Diremo che A è **chiuso** se $Fr(A) \subseteq A$.

Proposizione 2.3. Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$. Allora A è chiuso se e solo se $X \setminus A$ è aperto.

Dimostrazione Segue subito dal teorema 2.2 e dall'osservazione 2.3.

□

Osservazione 2.4. Un sottoinsieme di uno spazio metrico (X, d) può essere sia aperto che chiuso.

Per esempio, dalla proposizione 2.3 segue che X e $\emptyset$ sono aperti e chiusi.

Nell'esempio 1.10 ogni singoletto $\{x\}$ è sia aperto che chiuso. Può anche capitare che un sottoinsieme A di X non sia né aperto, né chiuso. Per esempio, consideriamo $X = \mathbb{R}$ con la metrica euclidea e poniamo $A = [0, 1)$, A non è aperto perché $0 \in A \setminus \mathring{A}$, non è chiuso perché $1 \in Fr(A) \setminus A$.

Esempio 2.4. Dalla proposizione 2.3 e dall'esempio 2.1 segue che in ogni spazio metrico (X, d) $\{x \in X : d(x_0, x) \geq r\}$ è un insieme chiuso $\forall x_0 \in X, \forall r \in \mathbb{R}^+$.

Definizione 2.5. Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$: Chiameremo **chiusura** di A l'insieme $A \cup Fr(A)$. Lo indicheremo col simbolo $\overline{A}$.

Proposizione 2.4. Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$. Allora:

(I) $\overline{A}$ è un chiuso;

(II) A è chiuso se e solo se $\overline{A} = A$.

Dimostrazione (I) Proviamo che $Fr(\overline{A}) \subseteq \overline{A}$. Sia $x_0 \in Fr(\overline{A})$. Se $x_0 \in A$, evidentemente $x_0 \in \overline{A}$. Supponiamo che $x_0 \notin A$. Verifichiamo che $x_0 \in Fr(A)$. Sia $r \in \mathbb{R}^+$. Proviamo che $B(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$ e $B(x_0, r) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$. Poiché $x_0 \notin A$, $B(x_0, r) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$.

Poiché $x_0 \in Fr(\overline{A})$, $B(x_0, r)$ contiene qualche elemento $x_1 \in \overline{A}$. Se $x_1 \in A$, sarà anche $B(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$. Supponiamo $x_1 \notin A$. Allora $x_1 \in Fr(A)$. Prendiamo $r_1 > 0$ tale che $B(x_1, r_1) \subseteq B(x_0, r)$ (r_1 esiste perché $B(x_0, r)$ è aperto). Esiste $x_2 \in A \cap B(x_1, r_1)$. Si ha quindi anche $x_2 \in B(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$.

(II) segue immediatamente dalla definizione 2.5.

□

Consideriamo ora successioni a valori in uno spazio metrico.

Definizione 2.6. Siano $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione nello spazio metrico (X, d) ed $l \in X$. Diremo che $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge** a l o ha per **limite** l se $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+$ esiste $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n > n(\epsilon)$ si ha

$$d(x_n, l) < \epsilon.$$

Osservazione 2.5. La definizione 3.1 equivale a richiedere che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, l) = 0.$$

Osservazione 2.6. Si vede facilmente con lo stesso argomento delle successioni a valori in $\mathbb{R}$ che, se una successione in uno spazio metrico ammette un limite, tale limite è unico (vedi esercizio 2.2).

Esempio 2.5. Consideriamo la successione $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ a valori in $\mathbb{R}^n$, munito della metrica euclidea. Sia

$$x^k = (x_1^k, \dots, x_n^k). \quad (2.1)$$

Sia $l \in \mathbb{R}^n$, $l = (l_1, \dots, l_n)$. Verifichiamo che $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = l$ se e solo se, per ciascun $i = 1, \dots, n$, si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^k = l_i \quad (2.2)$$

in $\mathbb{R}$. Infatti, supponiamo che valga (2.1). Allora, dato ϵ in $\mathbb{R}^+$, esiste $k(\epsilon) \in \mathbb{N}$, tale che, se $k > k(\epsilon)$,

$$d(x^k, l) = \|x^k - l\| < \epsilon.$$

Segue allora, per ciascun $i = 1, \dots, n$,

$$|x_i^k - l_i| \leq \|x^k - l\| < \epsilon.$$

Vale, quindi, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^k = l_i$. Viceversa, valga (2.2) per ciascun i . Allora

$$d(x^k, l) = \|x^k - l\| = \left[\sum_{j=1}^n (x_j^k - l_j)^2 \right]^{1/2} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Dunque da (2.2) segue (2.1).

Anteponiamo a un ulteriore esempio la seguente importante definizione:

Definizione 2.7. Siano A un insieme, per ogni $k \in \mathbb{N}$ $f_k : A \rightarrow \mathbb{C}$, $f : A \rightarrow \mathbb{C}$. Diremo che la successione di funzioni $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f se per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ esiste $k(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $k \in \mathbb{N}$ con $k > k(\epsilon)$ e per ogni $a \in A$

$$|f_k(a) - f(a)| < \epsilon.$$

Proposizione 2.5. Sia $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione nello spazio normato $B(A)$ (esempio 1.7). Sia $f \in B(A)$. Allora sono equivalenti:

- (I) $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f ;
- (II) $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$ in $B(A)$.

Proof. Valga (I). Allora, dato $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, esiste $k(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tale che, se $k > k(\epsilon)$,

$$|f_k(a) - f(a)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall a \in A.$$

Di qui, per $k > k(\epsilon)$,

$$d_{B(A)}(f_k, f) = \sup_{a \in A} |f_k(a) - f(a)| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Supponiamo, viceversa, che valga (II). Allora $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+$ esiste $k(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tale che, se $k > k(\epsilon)$,

$$d_{B(A)}(f_k, f) < \epsilon.$$

Per tali k , si ha, qualunque sia $a \in A$,

$$|f_k(a) - f(a)| \leq d_{B(A)}(f_k, f) < \epsilon.$$

□

Esempio 2.6. Siano per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} x_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \\ x_k(t) = t^k, \end{cases}$$

$$\begin{cases} l : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \\ l(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \in [0, 1[, \\ 1 & \text{se } t = 1. \end{cases} \end{cases}$$

Per ogni $t \in [0, 1]$ si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t) = l(t),$$

cioè la successione $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente (punto per punto) a l . La convergenza non è uniforme. Infatti,

$$\sup_{t \in [0, 1]} |x_k(t) - l(t)| \geq \sup_{t \in [0, 1]} t^k = 1.$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$. Dunque, se $0 < \epsilon < 1$, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $t_k \in [0, 1]$ tale che

$$|x_k(t_k) - l(t_k)| \geq \epsilon.$$

Sia invece $\delta \in]0, 1[$. Indichiamo con y_k e λ le restrizioni di x_k e l a $[0, \delta]$. In questo caso si ha

$$\sup_{t \in [0, \delta]} |y_k(t) - \lambda(t)| = \sup_{t \in [0, \delta]} x_k(t) = \delta^k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Perciò la successione $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge a λ in $B([0, \delta])$.

Proposizione 2.6. Siano X, d uno spazio metrico, $A \subseteq X$ e $x_0 \in X$. Allora sono equivalenti:

(I) $x_0 \in \overline{A}$;

(II) esiste una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a valori in A convergente a x_0 .

Dimostrazione Verifichiamo che da (I) segue (II). Sia $x_0 \in \overline{A}$. Costruiamo una successione a valori in A convergente a x_0 . Se $x_0 \in \overline{A}$, allora $x_0 \in A$ oppure $x_0 \in Fr(A)$. Nel primo caso, possiamo prendere $a_n = x_0 \forall n \in \mathbb{N}$. Sia invece $x_0 \in Fr(A)$. Per definizione, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $a_n \in A \cap B(x_0, \frac{1}{n})$. Si ha

$$d(a_n, x_0) < \frac{1}{n} \rightarrow 0 (n \rightarrow +\infty).$$

Dunque, da (I) segue (II).

Supponiamo invece che valga (II). Dobbiamo far vedere che $x_0 \in \overline{A}$. Consideriamo separatamente i due casi $x_0 \in A$ e $x_0 \notin A$. Nel primo caso, $x_0 \in \overline{A}$. Nel secondo caso, sia $r > 0$. Poiché $x_0 \notin A$, $B(x_0, r)$ contiene almeno un elemento non appartenente ad A : x_0 stesso. Scegliendo poi $n \in \mathbb{N}$ in modo che $d(a_n, x_0) < r$, si ottiene $a_n \in A \cap B(x_0, r)$. Dunque $x_0 \in Fr(A)$. □

Esercizio 2.1. Sia, dato $n \in \mathbb{N}$, $A_n =] - \frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$. Provare che $\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{0\}$. Dedurre che l'intersezione di una famiglia infinita di insiemi aperti non è necessariamente un insieme aperto.

Esercizio 2.2. Verificare che in ogni spazio metrico l'eventuale limite di una successione è unico.

Esercizio 2.3. Dati i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$, dire se sono aperti o chiusi e determinarne frontiera e chiusura:

- (I) $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x^0\| = r\}$ ($x^0 \in \mathbb{R}^n$, $r \geq 0$);
- (II) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 < 1, x_3 \geq 0\}$;
- (III) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq \min\{1, \ln(1/x_1)\}\}$;
- (IV) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$;
- (V) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 1, x_2 \geq x_1^2\}$;
- (VI) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq x_2 \geq x_1^2/2\} \setminus \{(0, 0)\}$;
- (VII) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < 1, |x_2| < 1\}$;
- (VIII) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 \leq 1/x_1\}$;
- (IX) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3^2 > x_1^2 + x_2^2, x_3 \geq 1\}$;
- (X) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < 1, x_2 = 0\}$.

Esercizio 2.4. Siano A un insieme e $f : A \rightarrow \mathbb{C}$. Provare che $f \in B(A; \mathbb{C})$ se e solo se $Re(f)$ e $Im(f)$ appartengono a $B(A)$.

Sia $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione in $B(A; \mathbb{C})$ e sia $f \in B(A; \mathbb{C})$. Provare che $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$ in $B(A; \mathbb{C})$ se e solo se $\lim_{k \rightarrow \infty} Re(f_k) = Re(f)$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} Im(f_k) = Im(f)$ in $B(A)$.

Esercizio 2.5. Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$. Sia $x^0 \in X$. Provare che sono equivalenti:

- (I) $x^0 \in \overline{A}$;
- (II) $\forall r \in \mathbb{R}^+ B(x^0, r) \cap A \neq \emptyset$;
- (III) esiste una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a valori in A tali che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x^0$.

Esercizio 2.6. Siano (X, d) uno spazio metrico e $\forall i \in I$ (insieme di indici) A_i un sottoinsieme chiuso di X . Provare che $\cap_{i \in I} A_i$ è chiuso (sugg: sia $x_0 \in \overline{\cap_{i \in I} A_i}$. Allora esiste una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a valori in $\cap_{i \in I} A_i$ tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$).

Provare che, se I è finito, $\cup_{i \in I} A_i$ è chiuso (sugg.: sia $x_0 \in \overline{\cup_{i \in I} A_i}$. Verificare che, se $x_0 \notin \cup_{i \in I} A_i$, esiste $r > 0$ tale che $B(x_0, r) \cap A_i = \emptyset \forall i \in I$).

Siano $X = \mathbb{R}$, $A_n = [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$. Verificare che $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n =]0, 1[$. Dedurre che l'unione di una famiglia infinita di chiusi non è necessariamente un insieme chiuso.

3 Limiti. Funzioni continue.

Definizione 3.1. Siano (X, d) uno spazio metrico, $A \subseteq X$ e $x^0 \in X$. Diremo che x^0 è un **punto di accumulazione** per A se $\forall r > 0 A \cap B(x^0, r)$ contiene qualche elemento distinto da x^0 . Indicheremo con $D(A)$ l'insieme dei punti di accumulazione di A .

Esempio 3.1. Siano, per $n \in \mathbb{N}$, $X = \mathbb{R}^n$ con la metrica euclidea e $A := \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$. Allora $O (= (0, \dots, 0)) \in D(A)$. Infatti, per ogni $r \in \mathbb{R}^+$, $B(0, r)$ contiene l'elemento $(r/2, 0, \dots, 0)$ di A , che è ovviamente distinto da O .

Definizione 3.2. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici, $A \subseteq X$, $f : A \rightarrow Y$, $x^0 \in D(A)$, $l \in Y$. Scriveremo

$$\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = l$$

se $\forall \epsilon > 0$ esiste $\delta(\epsilon) > 0$ tale che $\forall x \in A \cap B_X(x^0, \delta(\epsilon))$ con $x \neq x^0$ si ha

$$d_Y(f(x), l) < \epsilon.$$

Qui $B_X(x^0, \delta(\epsilon)) = \{x \in X : d_X(x, x^0) < \delta(\epsilon)\}$.

Esempio 3.2. Siano $A := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \neq 0\}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) := \sin(x_1, x_2)/x_2$. Verifichiamo che si ha

$$\lim_{x \rightarrow O} f(x) = 0 \quad (3.1)$$

A tale scopo, osserviamo, innanzi tutto, che $O = (0, 0) \in D(A)$. Useremo poi il fatto che

$$|\sin(z)| \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

(3.2) può essere facilmente verificata applicando il teorema del valor medio. In base a esso, se $z \in \mathbb{R}$, $z \neq 0$, esiste $c \in]0, z[$ se $z > 0$, oppure $c \in]z, 0[$ se $z < 0$, tale che

$$\sin(z) = \cos(c)z. \quad (3.3)$$

Ne segue che

$$|\sin(z)| = |\cos(c)||z| \leq |z|.$$

Da (3.2) segue subito, per $x = (x_1, x_2) \in A$,

$$|f(x_1, x_2)| \leq |x_1|. \quad (3.4)$$

Sia $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Se $x \in A \cap B(O, \epsilon)$, si ha

$$|f(x)| \leq |x_1| \leq \|x\| < \epsilon.$$

Dunque, la definizione 3.2 è verificata con $\delta(\epsilon) = \epsilon$.

Esempio 3.3. Sia $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Indichiamo con X l'insieme delle funzioni $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, munito della metrica d di sottoinsieme di $B([0, 1])$ (vedi l'esempio 1.9). Quindi, se $x, y \in X$,

$$d(x, y) = \sup_{t \in [0, 1]} |x(t) - y(t)| = \max_{t \in [0, 1]} |x(t) - y(t)|.$$

Poniamo

$$\begin{cases} f : X \rightarrow X, \\ f(x) = F \circ x. \end{cases}$$

Poiché la composizione di funzioni continue da una funzione continua, f porta X in sé.

Sia $x_0 \in X$. Proviamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (3.5)$$

Per il teorema di Heine-Cantor, le restrizioni di F ai limitati di $\mathbb{R}$ sono uniformemente continue. Sia $x \in B(x_0, 1)$. Allora, $\forall t \in [0, 1]$,

$$|x(t)| \leq |x(t) - x_0(t)| + |x_0(t)| \leq 1 + \max_{t \in [0, 1]} |x_0(t)| = M$$

Sia $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Allora esiste $\delta_0(\epsilon) > 0$ tale che, se $u, v \in [-M, M]$,

$$|F(u) - F(v)| < \epsilon.$$

Sia quindi

$$\delta(\epsilon) = \min\{1, \delta_0(\epsilon)\}.$$

Allora per ogni $t \in [0, 1]$, se $x \in B(x_0, \delta(\epsilon))$,

$$|F(x(t)) - F(x_0(t))| < \epsilon,$$

cioè $d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$. Segue perciò (3.5).

Come nel caso $X = Y = \mathbb{R}$ vale un teorema di unicità del limite: come nel caso elementare, si può provare il seguente

Teorema 3.1. *Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici, $A \subseteq X$, $f : A \rightarrow Y$, $x^0 \in D(A)$, $l, l' \in Y$. Supponiamo che valgano contemporaneamente $\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = l$ e $\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = l'$. Allora $l = l'$.*

Sia ancora $f : A \rightarrow \mathbb{C}^m$, con $A \subseteq X$, (X, d) spazio metrico. Se indichiamo con $f_1(x), \dots, f_m(x)$ le componenti di $f(x) \in \mathbb{C}^m$ otteniamo che f identifica univocamente m funzioni $f_1, \dots, f_m$ di dominio A a valori complessi. Ci chiediamo che legame ci sia tra gli eventuali limiti di f e quelli delle componenti $f_1, \dots, f_m$. Qui e nel seguito, supporremo, salvo diversa precisazione, che $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{C}^m$ siano muniti delle metriche (1.11), generate dalle norme euclidee.

Ebbene, vale il seguente

Teorema 3.2. *Siano $A \subseteq X$, con (X, d) spazio metrico, $f : A \rightarrow \mathbb{C}^m$, $x^0 \in D(A)$, $f : A \rightarrow \mathbb{C}^m$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_i(x), \dots, f_m(x))$. Sia poi $l \in \mathbb{C}^m$, $l = (l_1, \dots, l_i, \dots, l_m)$. Allora le condizioni seguenti sono equivalenti:*

- (I) si ha $\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = l$;
- (II) per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$, vale $\lim_{x \rightarrow x^0} f_i(x) = l_i$ in $\mathbb{C}$.

Dimostrazione Proviamo che da (I) segue (II). Sia $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Allora esiste $\delta(\epsilon)$ in $\mathbb{R}^+$, tale che, se $x \in B_X(x^0, \delta(\epsilon)) \cap A$ e $x \neq x^0$, si ha

$$\|f(x) - l\|_m < \epsilon,$$

con

$$B_X(x^0, \delta(\epsilon)) = \{x \in X : d_X(x, x_0) < \delta(\epsilon)\}.$$

Per $i = 1, \dots, m$ si ha

$$|f_i(x) - l_i| \leq \|f(x) - l\|_m < \epsilon.$$

Dunque, vale (II).

Supponiamo invece che valga (II). Siano ϵ e η elementi di $\mathbb{R}^+$. Allora, per ciascun $i \in \{1, \dots, m\}$, esiste $\delta_i(\eta) > 0$, tale che, se $x \in B_X(x^0, \delta_i(\eta)) \cap A$ e $x \neq x^0$, si ha

$$|f_i(x) - l_i| < \eta.$$

Poniamo $\delta(\eta) := \min\{\delta_i(\eta) : 1 \leq i \leq m\}$. Allora se $x \in B_X(x^0, \delta(\eta)) \cap A$ e $x \neq x^0$, vale

$$\|f(x) - l\|_m = (\sum_{i=1}^m |f_i(x) - l_i|^2)^{1/2} < (m\eta^2)^{1/2} = \sqrt{m}\eta.$$

Scegliendo $\eta := \epsilon/\sqrt{m}$, otteniamo

$$\|f(x) - l\|_m < \epsilon.$$

Quindi da (II) segue (I).

□

I risultati seguenti sono analoghi pluridimensionali dei classici teoremi sui limiti di somme, prodotti, quozienti per funzioni di una variabile reale, con simili dimostrazioni:

Teorema 3.3. Siano (X, d) uno spazio metrico, $(Y, \|\cdot\|)$ uno spazio normato, $A \subseteq X$, $f, g : A \rightarrow Y$, $x^0 \in D(A)$, $l, m \in Y$ e valgono $\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = l$ e $\lim_{x \rightarrow x^0} g(x) = l$. Allora:

(I) esiste $\lim_{x \rightarrow x^0} (f(x) + g(x))$ e vale $l + m$;

(II) se $Y = \mathbb{R}$, esiste $\lim_{x \rightarrow x^0} f(x)g(x)$ e vale lm ;

(III) se $Y = \mathbb{R}$ e, in piu', $g(x) \neq 0 \forall x \in A$ e $m \neq 0$, allora esiste $\lim_{x \rightarrow x^0} \frac{f(x)}{g(x)}$ e vale $\frac{l}{m}$.

Vediamo ora un semplice risultato sui limiti di restrizioni.

Teorema 3.4. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici, A e B sottoinsiemi di X , con $A \subseteq B$, $f : B \rightarrow Y$ e $l \in Y$. Allora:

(I) se $x^0 \in D(A)$, si ha anche $x^0 \in D(B)$;

(II) sotto le ipotesi di (I), se vale $\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = l$, si ha anche $\lim_{x \rightarrow x^0} f|_A(x) = l$;

(III) se esiste $r > 0$ per cui si ha $(B_X(x^0, r) \cap B) \setminus \{x^0\} \subseteq A$ e vale $\lim_{x \rightarrow x^0} f|_A(x) = l$, si ha anche $\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = l$.

Dimostrazione Ci limitiamo a provare (III). Sia $\epsilon > 0$. Allora esiste $\delta(\epsilon) > 0$ tale che, se $x \in A \cap B_X(x^0, \delta(\epsilon))$ e $x \neq x^0$, $d_Y(f(x), l) < \epsilon$. Sia $x \in B \cap B_X(x^0, \min\{\delta(\epsilon), r\})$ e $x \neq x^0$. Allora $x \in A \cap B_X(x^0, \delta(\epsilon))$ e percio' $d_Y(f(x), l) < \epsilon$.

□

Il punto (II) del teorema 6.1, unito al risultato di unicita' teorema 3.1, puo' essere utile per verificare la non esistenza di un limite, come prova il seguente esempio:

Esempio 3.4. In virtu' del teorema 6.1, data $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, l'esistenza del limite per x che tende a $(0, 0)$ per f implica l'esistenza del limite per ogni restrizione di f a una qualsiasi retta per l'origine, con lo stesso valore. Supponiamo, viceversa, che esista il limite della restrizione a ogni retta per l'origine e che il limite non dipenda dalla retta scelta. Si puo' dire che esiste il limite di f per x che tende a $(0, 0)$? La risposta è negativa. Si consideri il seguente controesempio: sia

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \\ f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_2 \geq x_1^2 \text{ oppure } x_2 \leq 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \end{cases} \quad (3.6)$$

Poniamo

$$A_1 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq x_1^2\}.$$

Allora $(0, 0) \in D(A_1)$ e si ha, ovviamente, $\lim_{x \rightarrow (0,0)} f|_{A_1}(x) = 1$. Sia invece

$$A_2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_2 < x_1^2\}$$

Ancora, $(0, 0) \in D(A_2)$. Infatti, per ogni $r \in \mathbb{R}^+$, $B((0, 0), r)$ contiene i punti della forma $(x_1, x_1^2/2)$ con $x_1 > 0$ e $x_1^2 + x_1^4/4 < r^2$, che appartengono ad A_2 e sono distinti da $(0, 0)$. Si ha, ovviamente, $\lim_{x \rightarrow (0,0)} f|_{A_2}(x) = 0$. Quindi la f non ammette limite per $x \rightarrow (0, 0)$. Tuttavia, consideriamo la restrizione di f a una retta per l'origine. Per esempio, sia $m \in \mathbb{R}^+$. Poniamo

$$A_m := \{(x_1, mx_1) : x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}.$$

Allora $f(x_1, mx_1) = 1$ se $x_1 \in]-\infty, m[$. Osserviamo che, se $x = (x_1, x_2) \in A_m$ e $\|x\| < m$, necessariamente,

$$x_1 \leq |x_1| \leq \|x\| < m.$$

Quindi $f(x) = 1$. Concludiamo che

$$\lim_{x \rightarrow (0,0)} f|_{A_m}(x) = 1. \quad (3.7)$$

Gli insiemi della forma A_m non esauriscono le rette per l'origine. Invitiamo il lettore a verificare che, effettivamente, se A è una retta qualunque passante per l'origine, vale $\lim_{x \rightarrow (0,0)} f|_A(x) = 1$ (esercizio 3.2).

Estendiamo ora la nozione di funzione continua a funzioni definite su sottoinsiemi di uno spazio metrico.

Definizione 3.3. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici, $A \subseteq X$, $x_0 \in A$, $f : A \rightarrow Y$. Diremo che f è **continua in** x_0 se $\forall \epsilon > 0$ esiste $\delta(\epsilon) > 0$ tale che $\forall x \in B_X(x_0, \delta(\epsilon)) \cap A$ si ha

$$d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

Diremo che f è **continua in** A se è continua in corrispondenza di ogni $x_0 \in A$.

Vale il seguente semplice risultato che collega la nozione di limite a quella di funzione continua:

Teorema 3.5. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici, $A \subseteq X$, $x_0 \in A$, $f : A \rightarrow Y$. Allora:

- (I) se $x^0 \in A \setminus D(A)$, f è continua in x^0 ;
- (II) se $x^0 \in A \cap D(A)$, f è continua in x^0 se e solo se esiste $\lim_{x \rightarrow x^0} f(x)$ e coincide con $f(x^0)$.

Utilizzando il teorema 3.5 e i teoremi 3.2 e 3.3, è ora abbastanza facile dimostrare il seguente risultato, che lasciamo ancora al lettore (esercizio 3.5):

Teorema 3.6. Siano (X, d_X) uno spazio metrico, $(Y, \|\cdot\|)$ uno spazio normato, $A \subseteq X$, $x^0 \in A$, $f, g : A \rightarrow Y$

(I) se $Y = \mathbb{R}^m$ ($m \in \mathbb{N}$) con la norma euclidea, f è continua in x^0 se e solo se lo è ciascuna delle funzioni $f_1, \dots, f_m$, con $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$.

Supponiamo ora che f e g siano continue in x^0 . Allora:

- (II) $f + g$ è continua in x^0 ;
- (III) se $Y = \mathbb{R}$, fg è continua in x^0 ;
- (IV) se $Y = \mathbb{R}$ e $g(x) \neq 0 \forall x \in A$, $\frac{f}{g}$ è continua in x^0 .

E' importante il fatto che la continuità è invariante per composizione, nel senso seguente:

Teorema 3.7. Siano (X, d_X) , (Y, d_Y) , (Z, d_Z) spazi metrici, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, $f : A \rightarrow Y$ tale che $f(A) \subseteq B$, $g : B \rightarrow Z$. Allora:

- (I) sia $x^0 \in A$ tale che f è continua in x^0 e g è continua in $f(x^0)$. Allora $g \circ f$ è continua in x^0 ;
- (II) se f e g sono continue, lo è anche $g \circ f$.

Dimostrazione (II) segue subito da (I).

Dimostriamo allora (I). Sia $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Poiché g è continua in $f(x^0)$, esiste $\delta_1(\epsilon)$ in $\mathbb{R}^+$ tale che, se $y \in B \cap B_Y(f(x^0), \delta_1(\epsilon))$, si ha $d_Z(g(y), g(f(x^0))) < \epsilon$. Poiché f è continua in x^0 , esiste $\delta(\epsilon)$ in $\mathbb{R}^+$ tale che, se $x \in A \cap B_X(x^0, \delta(\epsilon))$, vale $f(x) \in B_Y(f(x^0), \delta_1(\epsilon))$. Cio' implica che $f(x) \in B \cap B(f(x^0), \delta_1(\epsilon))$. Ne concludiamo che, se $x \in A \cap B_X(x^0, \delta(\epsilon))$, si ha $d_Z(g(f(x)), g(f(x^0))) < \epsilon$.

□

Esempio 3.5. Sia f la funzione definita nell'esempio 3.3, dallo spazio $C([0, 1])$ delle funzioni continue a valori reali di dominio $[0, 1]$. Per quanto dimostrato nell'esempio, f è continua da $C([0, 1])$ in se'.

Presentiamo ora alcuni importanti esempi di funzioni continue di piu' variabili reali.

Esempio 3.6. Siano $m, n \in \mathbb{N}$, $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineare. Proviamo che T è continua. Si ha, per opportuni coefficienti a_{ij} con $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$,

$$T(x_1, \dots, x_m) = (a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m, \dots, a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m).$$

Cominciamo col verificare che, $\forall x \in \mathbb{R}^m$,

$$\|Tx\|_n \leq L\|x\|_m, \quad (3.8)$$

con

$$L = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}^2 \right)^{1/2}. \quad (3.9)$$

Infatti, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, per ciascun $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\left| \sum_{j=1}^m a_{ij}x_j \right| \leq \left(\sum_{j=1}^m a_{ij}^2 \right)^{1/2} \|x\|_m,$$

da cui

$$\|Tx\|_n = \left[\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{ij}x_j \right)^2 \right]^{1/2} \leq \left[\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{ij}^2 \right) \|x\|_m^2 \right]^{1/2} = L\|x\|_m.$$

Ne segue che, se $x^0, x \in \mathbb{R}^m$ e $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, si ha

$$\|Tx - Tx^0\|_n = \|T(x - x^0)\|_n \leq L\|x - x^0\|_m < \epsilon$$

se $\|x - x^0\|_m < \delta(\epsilon)$, con $L\delta(\epsilon) < \epsilon$.

Sia $n \in \mathbb{N}$. Per $j \in \{1, \dots, n\}$, poniamo

$$\begin{cases} \pi_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \\ \pi_j(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) = x_j. \end{cases} \quad (3.10)$$

π_j associa a ogni elemento di $\mathbb{R}^n$ la sua j -esima componente. π_j è continua perche' e' lineare.

Definiamo ora le funzioni polinomiali di n variabili reali. Una funzione polinomiale in $\mathbb{R}^n$ di grado non superiore a m ($m \in \mathbb{N}_0$) è una funzione $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ rappresentabile nella forma

$$P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq m} c_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}, \quad (3.11)$$

con $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ interi non negativi. Qui adottiamo la convenzione che $O^0 := 1$.

Poiché somme e prodotti di funzioni continue danno sempre funzioni continue (teorema 3.6) dalla continuità delle funzioni π_j ($1 \leq j \leq n$) e da quella delle funzioni costanti (esercizio 3.1) segue subito che tutte le funzioni polinomiali sono continue da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$.

Se poi P e Q sono funzioni polinomiali di n variabili, risulta continua, in virtù del teorema 3.6(IV), la funzione razionale

$$\begin{cases} f : \{x \in \mathbb{R}^n : Q(x) \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}, \\ f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}. \end{cases} \quad (3.12)$$

Ad esempio, la funzione

$$\begin{cases} f : \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \neq |x_2|\} \rightarrow \mathbb{R}, \\ f(x) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 - x_2^2} \end{cases} \quad (3.13)$$

è continua. Altre funzioni continue si possono costruire utilizzando il teorema 3.7. Per esempio, sia $A := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \neq |x_2|\}$. Poiché la funzione f definita in (3.13) è continua, la funzione

$$\begin{cases} g : A \rightarrow \mathbb{R}, \\ g(x_1, x_2) = \sin(f(x_1, x_2)) = \sin\left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 - x_2^2}\right) \end{cases} \quad (3.14)$$

è continua.

Esercizio 3.1. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e $y_0 \in Y$. Siano $A \subseteq X$ e $f : A \rightarrow Y$, $f(a) = y_0 \forall a \in A$. Provare che f è continua.

Esercizio 3.2. Completare nei dettagli le argomentazioni dell'osservazione 3.4. Verificare, ad esempio, che se r è una retta per l'origine e $A := r \setminus \{(0, 0)\}$, si ha $\lim_{x \rightarrow (0,0)} f|_A(x) = 1$.

Esercizio 3.3. Studiare l'esistenza dei limiti seguenti (le funzioni vanno intese definite nei loro "domini naturali"):

(I) $\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0,0)} (x_1^2 + x_2^2)^4 \ln(x_1^2 + x_2^2);$

(II) $\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0,0)} x_1 x_2 \sin\left(\frac{1}{x_1 + x_2}\right);$

(III) $\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0,0)} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}.$

(IV) $\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0,0)} \frac{x_1^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2}.$

Esercizio 3.4. Dimostrare il teorema 3.5.

Esercizio 3.5. Dimostrare il teorema 3.6.

Esercizio 3.6. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici, $A \subseteq X$, $f : A \rightarrow Y$, $a_0 \in A$. Provare che le condizioni (I) e (II) seguenti sono equivalenti:

(I) f è continua in a_0 ;

(II) comunque si prenda una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A con $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0$, si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a_0)$.

Esercizio 3.7. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici, $A \subseteq X$, $f : A \rightarrow Y$ continua. Provare che

(I) se A è aperto in X e $B \subseteq Y$ è aperto, $\{x \in A : f(x) \in B\}$ è aperto in X ;

(II) se A è chiuso in X e $B \subseteq Y$ è chiuso, $C := \{x \in A : f(x) \in B\}$ è chiuso in X (sugg. : si prenda $x_0 \in \overline{C}$. Quindi esiste una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a valori in A , con $f(a_n) \in B \forall n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$);

(III) siano $Y = \mathbb{R}$ e $l \in \mathbb{R}$; provare che, se A è aperto, $\{x \in A : f(x) < l\}$ e $\{x \in A : f(x) > l\}$ sono aperti in X ;

(IV) siano $Y = \mathbb{R}$ e $l \in \mathbb{R}$; provare che, se A è chiuso, $\{x \in A : f(x) \leq l\}$, $\{x \in A : f(x) = l\}$ e $\{x \in A : f(x) \geq l\}$ sono chiusi in X .

4 Insiemi compatti. Una generalizzazione del teorema di Weierstrass. Una generalizzazione del teorema di Heine-Cantor

Cominciamo questa sezione con alcune importanti definizioni.

Definizione 4.1. Siano (X, d_X) uno spazio metrico e $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$. Chiamiamo **diametro** di A $\delta_X(A)$ (o semplicemente $\delta(A)$ quando X è chiaro dal contesto) l'elemento di $[0, \infty]$

$$\delta_X(A) = \sup\{d_X(a_0, a_1) : a_0, a_1 \in A\}.$$

Per evitare eccezioni, poniamo anche $\delta_X(\emptyset) = 0$. Diremo che A è **limitato** se $\delta_X(A) < \infty$.

Osservazione 4.1. La definizione usualmente data di sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$ (A è limitato se e solo se è sia inferiormente, che superiormente limitato) non si può estendere direttamente agli spazi metrici, in quanto dipende dalla relazione di ordine in $\mathbb{R}$. Tuttavia, nel caso $n = 1$, se A è limitato nel senso della definizione 4.1, A è sia inferiormente, che superiormente limitato, e viceversa. Infatti, se $A \neq \emptyset$ è tale che $\delta_{\mathbb{R}}(A) < \infty$, esiste $r \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$|a_0 - a_1| \leq r \quad \forall a_0, a_1 \in A.$$

Fissato $a_0 \in A$, si ha allora

$$a_0 - r \leq a \leq a_0 + r \quad \forall a \in A,$$

per cui $a_0 - r$ e $a_0 + r$ sono, rispettivamente, un minorante e un maggiorante di A .

Viceversa, se A è sia inferiormente che superiormente limitato e vale

$$m \leq a \leq M \quad \forall a \in A,$$

si ha

$$|a_0 - a_1| \leq M - m \quad \forall a \in A.$$

Proposizione 4.1. Siano $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato e $A \subseteq X$. Allora sono equivalenti:

(I) A è limitato;

(II) esiste $M \geq 0$ tale che $\|a\| \leq M \quad \forall a \in A$.

Dimostrazione Sia A limitato. Allora esiste $r \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$\|a_0 - a_1\| = d(a_0, a_1) \leq r \quad \forall a_0, a_1 \in A.$$

Fissato allora $a_0 \in A$, si ha $\forall a \in A$

$$\|a\| = \|(a - a_0) + a_0\| \leq \|a - a_0\| + \|a_0\| \leq r + \|a_0\|.$$

Valga, viceversa, (II). Allora, se $a_0, a_1 \in A$,

$$\|a_0 - a_1\| \leq \|a_0\| + \|a_1\| \leq 2M.$$

□

Ricordiamo ora alcune nozioni che riguardano le successioni.

Definizione 4.2. Siano $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ successioni a valori in un insieme X . Diremo che $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e' una sottosuccessione di $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ se esiste $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, crescente (strettamente) tale che

$$b_k = a_{\phi(k)} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Il seguente risultato puo' essere dimostrato con gli stessi argomenti del caso $X = \mathbb{R}$:

Proposizione 4.2. Siano (X, d) uno spazio metrico, $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione a valori in X , $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sua sottosuccessione. Sia $l \in X$ tale che $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = l$. Allora si ha anche

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = l.$$

Definizione 4.3. Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$. Diremo che A e' **compatto** se ogni successione a valori in A possiede una sottosuccessione convergente a qualche elemento di A .

Definizione 4.4. Siano (X, d) uno spazio metrico e $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione a valori in X . Diremo che $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e' **di Cauchy** se $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+$ esiste $k(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tale che, se $i, j \in \mathbb{N}$ e $\min\{i, j\} > k(\epsilon)$, $d(x_i, x_j) < \epsilon$.

Proposizione 4.3. Siano (X, d) uno spazio metrico e $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione a valori in X convergente. Allora $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e' di Cauchy.

Dimostrazione Sia $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = l \in X$. Sia $\epsilon > 0$. Allora esiste $k(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tale che, se $k \in \mathbb{N}$ e $k > k(\epsilon)$,

$$d(a_k, l) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Se dunque $i, j \in \mathbb{N}$ e $\min\{i, j\} > k(\epsilon)$, si ha

$$d(a_i, a_j) \leq d(a_i, l) + d(l, a_j) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

Osservazione 4.2. In generale, in uno spazio metrico possono esistere successioni di Cauchy che non sono convergenti. Si consideri, ad esempio, $X =]0, 1]$, con la metrica $d(x, y) = |x - y|$. Sia, per $k \in \mathbb{N}$, $a_k = \frac{1}{k}$. Allora $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e' una successione di Cauchy a valori in X . Infatti, $\forall \epsilon > 0$, se $i, j \in \mathbb{N}$ e $\min\{i, j\} > \epsilon^{-1}$, si ha

$$d(a_i, a_j) = \left| \frac{1}{i} - \frac{1}{j} \right| \leq \min\{i, j\}^{-1} < \epsilon.$$

Tuttavia, non esiste l in X tale che $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = l$. Infatti, se $l \in X$ e $\epsilon = \frac{l}{2}$, si ha, per $k \in \mathbb{N}$, $k > \frac{2}{l}$,

$$|a_k - l| = l - a_k > l - \frac{l}{2} = \frac{l}{2} = \epsilon.$$

Gli spazi metrici in cui ogni successione di Cauchy e' convergente (detti completi) godono di una proprieta' importante che sara' esaminata in seguito.

Proposizione 4.4. Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$ compatto. Allora A e' chiuso e limitato in X .

Dimostrazione Proviamo che, se A è compatto, A è chiuso. Viceversa, per la proposizione 2.4 (II), esiste $l \in \overline{A} \setminus A$. Per la proposizione 2.6, esiste una successione $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ a valori in A e convergente a l . Ogni sua sottosuccessione converge a l e, per l'unicità del limite, non può convergere a un elemento di A .

Proviamo che, se A è compatto, A è limitato.

A tal fine verifichiamo che, se A non è limitato, dati $k \in \mathbb{N}$ e $\{a_1, \dots, a_k\} \subseteq A$, esiste $a_{k+1} \in A$ tale che

$$d(a_j, a_{k+1}) \geq 1 \quad \forall j = 1, \dots, k.$$

Supponiamo, infatti, che non sia così. Allora esiste $\{a_1, \dots, a_k\} \subseteq A$ tale che $A \subseteq \bigcup_{i=1}^k B(a_i, 1)$.

Siano $b_0, b_1 \in A$. Allora $b_j \in B(a_{i(j)}, 1)$, con $j = 0, 1$ e $i(j) \in \{1, \dots, k\}$. Segue che

$$d(b_0, b_1) \leq d(b_0, a_{i(0)}) + d(a_{i(0)}, a_{i(1)}) + d(a_{i(1)}, b_1) \leq 2 + \max_{i,j \in \{1, \dots, k\}} d(a_i, a_j).$$

Ne segue che $\delta(A) \leq 2 + \max_{i,j \in \{1, \dots, k\}} d(a_i, a_j)$.

Supponiamo ora che A non sia limitato. Prendiamo $a_1 \in A$. Per quanto appena visto, esiste $a_2 \in A$, con $d(a_1, a_2) \geq 1$ e, dati $a_1, \dots, a_k \in A$ con distanza tra due qualunque distinti tra loro almeno 1, esiste $a_{k+1} \in A$ tale che $d(a_i, a_{k+1}) \geq 1$ per $i = 1, \dots, k$. In tal modo, se A non è limitato, esiste una successione $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ a valori in A con $d(a_i, a_j) \geq 1$ per ogni $i, j \in \mathbb{N}$ con $i \neq j$. Se $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ è crescente e $i \neq j$, $\phi(i) \neq \phi(j)$, per cui

$$d(a_{\phi(i)}, a_{\phi(j)}) \geq 1.$$

Dunque $(a_{\phi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ non è di Cauchy. Per la proposizione 4.3, non può essere convergente.

La conclusione è che, se A non è limitato, è possibile costruire una successione a valori in A che non ammette sottosuccessioni convergenti.

□

Osservazione 4.3. In un generico spazio metrico (X, d) un sottoinsieme A di X può essere chiuso e limitato senza essere compatto. Consideriamo in proposito il seguente esempio: sia $B(\mathbb{N})$ lo spazio delle successioni limitate a valori reali, caso particolare dell'esempio 1.7. Sia A l'insieme delle successioni $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$, con $a_k \in \{0, 1\}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. A è limitato, essendo $\|a\|_{B(\mathbb{N})} \leq 1 \quad \forall a \in B(\mathbb{N})$ (vedi la proposizione 4.1). Inoltre A è chiuso. Sia infatti $a = (a_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \overline{A}$. Esiste quindi una successione $(a^k)_{k \in \mathbb{N}}$ a valori in A convergente ad a . La convergenza in $B(\mathbb{N})$ è quella uniforme (vedi la proposizione 2.5), che implica la convergenza puntuale. Quindi per ogni $j \in \mathbb{N}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_j^k = a_j.$$

Poiché $a_j^k \in \{0, 1\}$ per ogni $k, j \in \mathbb{N}$, $a_j \in \overline{\{0, 1\}} = \{0, 1\}$. Pertanto A è chiuso.

A non è compatto: poniamo, per $k, j \in \mathbb{N}$,

$$a_j^k = \begin{cases} 1 & \text{se } j = k, \\ 0 & \text{se } j \neq k. \end{cases}$$

Allora si ha subito $d(a^k, a^h) = 1$ se $h \neq k$. Ciò implica che $(a^k)_{k \in \mathbb{N}}$ non ammette alcuna sottosuccessione convergente, perché nessuna sottosuccessione può essere di Cauchy.

Vedremo, tuttavia, che, nel caso $X = \mathbb{R}^n$, l'enunciato della proposizione 4.4 si può invertire. A tale scopo è cruciale il seguente risultato.

Lemma 4.1. *Sia $n \in \mathbb{N}$. Allora ogni successione limitata in $\mathbb{R}^n$ ammette una sottosuccessione convergente.*

Dimostrazione Dimostriamo l'enunciato per induzione su n .

Il caso $n = 1$ è ben noto.

Supponiamo l'enunciato vero per $n \in \mathbb{N}$ ed estendiamolo a $n+1$. Sia $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione limitata in $\mathbb{R}^{n+1}$. Supponiamo

$$x^k = (x_1^k, \dots, x_n^k, x_{n+1}^k).$$

Poniamo $y^k = (x_1^k, \dots, x_n^k)$. Per la proposizione 4.1, esiste $M \geq 0$ tale tale $\|x^k\|_{n+1} \leq M$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Segue

$$\|y^k\|_n \leq \|x^k\|_{n+1},$$

per cui $(y^k)_{k \in \mathbb{N}}$ è limitata in $\mathbb{R}^n$. Per l'ipotesi induttiva, esistono $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ crescente e $y^\infty \in \mathbb{R}^n$ tali che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y^{\phi(k)} = y^\infty$$

in $\mathbb{R}^n$. Poniamo $z^k = x_{n+1}^{\phi(k)}$. Si ha

$$|z^k| = |x_{n+1}^{\phi(k)}| \leq \|x^{\phi(k)}\|_{n+1} \leq M.$$

Quindi $(z^k)_{k \in \mathbb{N}}$ è limitata in $\mathbb{R}$. Esiste perciò una sua sottosuccessione $(z^{\psi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$, con $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ crescente, convergente a $z^\infty \in \mathbb{R}$.

Definiamo $\chi := \phi \circ \psi$. χ è una funzione da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}$ crescente. Consideriamo la successione $(x^{\chi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$, che è una sottosuccessione di $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$. Si ha

$$(x_1^{\chi(k)}, \dots, x_n^{\chi(k)}) = y^{\chi(k)} = y^{\phi(\psi(k))}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Quindi $(y^{\chi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ è una sottosuccessione di $(y^{\phi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$. Si ha perciò, per la proposizione 4.2,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y^{\chi(k)} = y^\infty$$

in $\mathbb{R}^n$. Ciò equivale, per l'esempio 2.5, a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_j^{\chi(k)} = y_j^\infty$$

per ciascun $j = 1, \dots, n$. Inoltre

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n+1}^{\chi(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} z^{\psi(k)} = z^\infty.$$

Concludiamo, applicando ancora il risultato nell'esempio 2.5, che la successione $(x^{\chi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ è convergente in $\mathbb{R}^{n+1}$.

□

Corollario 4.1. *Siano $n \in \mathbb{N}$ e $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora sono equivalenti:*

- (I) *A è compatto;*
- (II) *A è chiuso e limitato.*

Dimostrazione L'implicazione $(I) \Rightarrow (II)$ segue dalla proposizione 4.4.

Proviamo che (II) implica (I) . Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato e sia $(a^k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione in A . Verifichiamo che possiede una sottosuccessione convergente a un elemento di A . Per il lemma 4.1, $(a^k)_{k \in \mathbb{N}}$ possiede una sottosuccessione convergente a un elemento l di $\mathbb{R}^n$. Per la proposizione 2.6, $l \in \overline{A} = A$ perché A è chiuso.

□

Siamo ora in grado di enunciare e provare la seguente versione generalizzata del teorema di Weierstrass:

Teorema 4.2. *Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici, $A \subseteq X$ compatto, $f : A \rightarrow Y$ continua. Allora:*

- (I) $f(A)$ è compatto in Y ;
- (II) se $Y = \mathbb{R}$, f ammette massimo e minimo.

Dimostrazione (I) Sia $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione in $f(A)$. Dobbiamo provare che ammette una sottosuccessione convergente a un elemento di $f(A)$.

Sia, per $k \in \mathbb{N}$, $a_k \in A$ tale che $f(a_k) = y_k$. Poiché A è compatto, esiste $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ crescente tale che, se $\xi_k = a_{\phi(k)}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = \xi \in A$. Verifichiamo che si ha $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\xi_k) = f(\xi)$. Sia, infatti, $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Poiché f è continua, esiste $\delta(\epsilon) \in \mathbb{R}^+$ tale che, se $a \in A \cap B_X(\xi, \delta(\epsilon))$, $d_Y(f(a), f(\xi)) < \epsilon$. Esiste $k(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tale che, se $k > k(\epsilon)$, $\xi_k \in A \cap B_X(\xi, \delta(\epsilon))$. Di conseguenza,

$$d_Y(f(\xi_k), f(\xi)) < \epsilon.$$

Si ha dunque

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\xi_k) = f(\xi).$$

Perciò $(f(\xi_k))_{k \in \mathbb{N}}$ è una sottosuccessione di $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergente a un elemento di $f(A)$.

Proviamo (II). Da (I) segue che $f(A)$ è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}$. Si tratta quindi di provare che i sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}$ ammettono massimo e minimo.

Sia $B \subseteq \mathbb{R}$ compatto. Per la proposizione 4.4, B è chiuso e limitato. Proviamo (ad esempio) che B ammette massimo.

Per l'assioma dell'estremo superiore, esiste l'estremo superiore di B , $\sup(B)$. Per definizione, $b \leq \sup(B) \forall b \in B$. Si tratta allora di provare che $\sup(B) \in B$. Ragioniamo per assurdo, supponendo $\sup(B) \notin B$. Sia $r \in \mathbb{R}^+$. L'insieme $I(\sup(B), r)$ contiene elementi non appartenenti a B , in particolare $\sup(B)$. Contiene anche elementi di B . Viceversa, si avrebbe $b \leq \sup(B) - r \forall b \in B$. Di conseguenza $\sup(B) - r$ sarebbe un maggiorante di B minore di $\sup(B)$, in contraddizione con la definizione di estremo superiore. Deve dunque essere $I(\sup(B), r) \cap B \neq \emptyset$ per ogni $r \in \mathbb{R}^+$. Perciò $\sup(B) \in Fr(B)$, da cui $\sup(B) \in B$ perché B è chiuso.

Supponendo allora che $\sup(B) \notin B$ si arriva a una contraddizione. Concludiamo che $f(A)$ ammette massimo.

□

Corollario 4.2. *Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ continua ($n, m \in \mathbb{N}$). Allora:*

- (I) $f(A)$ è un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^m$;
- (II) se $m = 1$, f ammette massimo e minimo.

Dimostrazione Segue subito dal teorema 4.2 e dal corollario 4.1.

□

Veniamo ora a un'estensione del teorema di Heine-Cantor, già visto per funzioni reali di una variabile reale. Cominciamo con la seguente

Definizione 4.5. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici, $A \subseteq X$, $f : A \rightarrow Y$. Diremo che f è **uniformemente continua** se $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+$ esiste $\delta(\epsilon) \in \mathbb{R}^+$ tale che, se $a_0, a_1 \in A$ e $d_X(a_0, a_1) < \delta(\epsilon)$, $d_Y(f(a_0), f(a_1)) < \epsilon$.

Teorema 4.3. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici, $A \subseteq X$ compatto, $f : A \rightarrow Y$ continua. Allora f è uniformemente continua.

Dimostrazione Ragioniamo per assurdo: supponiamo che f non sia uniformemente continua. Quindi esiste $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ tale che, $\forall \delta \in \mathbb{R}^+$, esistono $a_\delta, b_\delta \in A$ con $d_X(a_\delta, b_\delta) < \delta$, ma $d_Y(f(a_\delta), f(b_\delta)) \geq \epsilon$. Prendiamo $\delta = 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{k}, \dots$ ($k \in \mathbb{N}$) e scriviamo a_k, b_k invece di $a_{\frac{1}{k}}, b_{\frac{1}{k}}$. Dunque $\forall k \in \mathbb{N}$, $d_X(a_k, b_k) < \frac{1}{k}$, ma $d_Y(f(a_k), f(b_k)) \geq \epsilon$. Poiché A è compatto, esistono $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ crescente e $a_\infty \in A$ tali che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d_X(a_{\phi(k)}, a_\infty) = 0, \quad d_Y(f(a_{\phi(k)}), f(b_{\phi(k)})) \geq \epsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (4.1)$$

Segue che

$$\begin{aligned} d_X(b_{\phi(k)}, a_\infty) &\leq d_X(b_{\phi(k)}, a_{\phi(k)}) + d_X(a_{\phi(k)}, a_\infty) \\ &\leq \frac{1}{\phi(k)} + d_X(a_{\phi(k)}, a_\infty) \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Poiché f è continua, esiste $\delta \in \mathbb{R}^+$ tale che, se $a \in A$ e $d_X(a, a_\infty) < \delta$, $d_Y(f(a), f(a_\infty)) < \frac{\epsilon}{2}$. Da (4.1)-(4.2) segue allora, per k "grande",

$$d_Y(f(a_{\phi(k)}), f(b_{\phi(k)})) \leq d_Y(f(a_{\phi(k)}), f(a_\infty)) + d_Y(f(a_\infty), f(b_{\phi(k)})) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

in contraddizione con (4.1). $\square$

5 Una generalizzazione del teorema di Bolzano

Ricordiamo una definizione e un risultato classici della teoria delle funzioni di variabile reale:

Definizione 5.1. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Diremo che A è un intervallo se, comunque si prendano $a, b \in A$,

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \subseteq A.$$

Vale il seguente teorema di Bolzano:

Teorema 5.1. Siano A un intervallo in $\mathbb{R}$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora $f(A)$ è un intervallo.

Osserviamo che la definizione di intervallo dipende dalla relazione di ordine in $\mathbb{R}$, che (in generali) non ha corrispondente in uno spazio metrico. Cerchiamo quindi delle generalizzazioni di tale definizione. Cominciamo col presentarne due:

Definizione 5.2. Siano (X, d) uno spazio metrico, $A \subseteq X$. Diremo che A è **connesso per archi** se, comunque si prendano x e y in A , esistono a e b reali con $a \leq b$ e $\phi : [a, b] \rightarrow X$ continua, tali che:

(I) $\phi(a) = x$, $\phi(b) = y$;

(II) $\phi([a, b]) \subseteq A$.

Una ϕ così fatta si chiamerà **cammino continuo con sostegno in A** .

Definizione 5.3. Siano $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato e $x, y \in X$. Poniamo

$$[x, y] := \{x + t(y - x) : t \in [0, 1]\}.$$

Sia $A \subseteq X$. Diremo che A è **convesso** se $\forall x, y \in A$

$$[x, y] \subseteq A.$$

Esempio 5.1. Siano $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato, $x_0 \in X$, $r \in \mathbb{R}^+$. Allora $B(x_0, r)$ è un insieme convesso. Infatti siano $x_1, x_2 \in B(x_0, r)$. Se $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} d(x_1 + t(x_2 - x_1), x_0) &= \|x_1 + t(x_2 - x_1) - x_0\| = \|(1-t)(x_1 - x_0) + t(x_2 - x_0)\| \\ &\leq (1-t)\|x_1 - x_0\| + t\|x_2 - x_0\| < r, \end{aligned}$$

essendo $\|x_1 - x_0\| < r$, $\|x_2 - x_0\| < r$ e almeno uno tra $1-t$ e t diverso da 0.

Proposizione 5.1. Siano $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato, $A \subseteq X$ convesso. Allora A è connesso per archi.

Dimostrazione Siano $x_0, x_1 \in A$ e $\phi : [0, 1] \rightarrow X$, $\phi(t) = x_0 + t(x_1 - x_0)$. Lasciamo al lettore verificare che ϕ soddisfa tutte le condizioni della definizione 5.2.

□

Osservazione 5.1. Naturalmente, un sottoinsieme connesso per archi di uno spazio normato non è necessariamente convesso. Sia, ad esempio, $n \geq 2$ e $A = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Allora A non è convesso. Infatti, se $x_0 \in A$, $-x_0 \in A$, ma

$$(1 - \frac{1}{2})x_0 + \frac{1}{2}(-x_0) = 0 \notin A.$$

Tuttavia, A è connesso per archi. Vedi in proposito l'esercizio 5.1.

Il prossimo risultato costituisce il collegamento tra le nozioni introdotte e il teorema di Bolzano in $\mathbb{R}$.

Teorema 5.2. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Allora sono equivalenti:

- (I) A è un intervallo;
- (II) A è convesso;
- (III) A è connesso per archi.

Dimostrazione (I) implica (II). Supponiamo, infatti, che A sia un intervallo. Siano x e y in A , $t \in [0, 1]$. Se $x \leq y$, si ha, essendo $y - x \geq 0$,

$$x \leq x + t(y - x) \leq x + (y - x) = y.$$

Se invece $y - x < 0$,

$$y = x + (y - x) \leq x + t(y - x) \leq x.$$

Concludiamo che, poiché A è un intervallo, $x + t(y - x) \in A \forall t \in [0, 1]$. Perciò, A è convesso.

(II) implica (III), perché tutti i convessi sono connessi per archi.

Resta da far vedere che (III) implica (I). Sia A connesso per archi e siano x e y in A , con $x \leq y$. Si tratta di provare che, se $x \leq z \leq y$, allora $z \in A$. Poiché A è connesso per archi, esistono a e b reali con $a \leq b$ e $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, tali che $\phi(a) = x$, $\phi(b) = y$, $\phi([a, b]) \subseteq A$. Per il teorema di Bolzano in $\mathbb{R}$ $z \in \phi([a, b]) \subseteq A$, da cui la conclusione.

□

Veniamo infine alla seguente naturale generalizzazione del teorema di Bolzano:

Teorema 5.3. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici, $A \subseteq X$ connesso per archi, $f : A \rightarrow Y$ continua. Allora:

- (I) $f(A)$ è connesso per archi in Y ;
- (II) se $Y = \mathbb{R}$, $f(A)$ è un intervallo.

Dimostrazione (II) segue immediatamente da (I) e dal teorema 5.2.

Proviamo allora (I). Siano v e w arbitrari elementi di $f(A)$. Sia $v = f(x)$ e $w = f(y)$, con x e y in A . Poiché A è connesso per archi, esistono a e b reali con $a \leq b$ e $\phi : [a, b] \rightarrow X$ continua, tali che $\phi(a) = x$, $\phi(b) = y$, $\phi([a, b]) \subseteq A$. Poniamo

$$\begin{cases} \psi : [a, b] \rightarrow Y, \\ \psi(t) = f(\phi(t)), \quad t \in [a, b]. \end{cases}$$

ψ è continua per il teorema 3.7(II). Ovviamente, $\psi(t) \in f(A)$, $\forall t \in [a, b]$. Infine, $\psi(a) = f(\phi(a)) = f(x) = v$, $\psi(b) = f(\phi(b)) = f(y) = w$. Quindi, $f(A)$ è connesso per archi. $\square$

Esercizio 5.1. Sia X uno spazio normato su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ con dimensione almeno due. Provare che:

- (I) se x_0 e x_1 sono linearmente indipendenti, $0 \notin [x_0, x_1]$;
- (II) se $x_0 \neq 0$ e $x_1 \neq 0$, per ogni $r \in \mathbb{R}^+$ esiste $x_2 \in B(x_1, r)$ tale che x_0 e x_2 sono linearmente indipendenti;
- (III) provare che $X \setminus \{0\}$ è connesso per archi (suggerimento: siano $x_0, x_1 \in X \setminus \{0\}$. Fissare $r \in \mathbb{R}^+$, $r < \|x_1\|$. Prendere $x_2 \in B(x_1, r)$ linearmente indipendente da x_0 ; costruire un cammino continuo che percorra $[x_0, x_2] \cup [x_2, x_1]$).

Esercizio 5.2. Siano x e y numeri reali. Nel caso $x \leq y$, la notazione $[x, y]$ è stata utilizzata in analisi 1 per indicare $\{z \in \mathbb{R} : x \leq z \leq y\}$. In generale, senza necessariamente supporre $x \leq y$, poniamo provvisoriamente

$$s(x, y) := \{x + t(y - x) : t \in [0, 1]\}.$$

Verificare che

$$s(x, y) = [\min\{x, y\}, \max\{x, y\}].$$

Esercizio 5.3. Determinare i domini naturali delle seguenti funzioni, Dire se sono aperti, chiusi, limitati, connessi per archi. Determinare interno e frontiera.

- (I) $\sqrt{\ln(\frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2})}$;
- (II) $\sqrt{-\sin^2(x_1 - x_2)}$;
- (III) $\ln(\cos(x_1^2 + x_2^2))$;
- (IV) $\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 - 9}{x_1^2 + x_2^2 - 1}}$;
- (V) $\{x \in X : 0 < \|x - x_0\| \leq \delta\}$, con $(X, \|\cdot\|)$ spazio normato, $\delta \in \mathbb{R}^+$;
- (VI) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_2 < x_1 + 1, x_1 > -1\}$;
- (VII) $\{(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) : 0 < r < 1, 0 < \theta < 2\pi\}$;
- (VIII) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 \in \mathbb{Q}) \Rightarrow (x_2 \notin \mathbb{Q})\}$, con $\mathbb{Q}$ insieme dei numeri razionali;
- (IX) ogni insieme finito;
- (X) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

6 Spazi metrici completi. Il teorema delle contrazioni

Abbiamo già visto (definizione 4.4) la nozione di successione di Cauchy e abbiamo già osservato che ogni successione convergente lo è, ma, in generale, non vale il viceversa.

Definizione 6.1. Sia (X, d) uno spazio metrico. Diremo che è **completo** se ogni successione di Cauchy in esso è convergente.

Uno **spazio di Banach** è uno spazio normato completo rispetto alla metrica indotta dalla norma.

Se la norma deriva da un prodotto scalare, si dice che è uno **spazio di Hilbert**.

Teorema 6.1. $\mathbb{R}^n$ normato con la norma euclidea è uno spazio di Hilbert.

Dimostrazione Sappiamo già che la norma euclidea è indotta da un prodotto scalare. Si tratta allora di provare la completezza dello spazio metrico corrispondente.

Sia $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di Cauchy. Supponiamo

$$x^k = (x_1^k, \dots, x_n^k).$$

Fissiamo $\epsilon > 0$. Allora esiste $k(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tale che, se i e j sono numeri naturali maggiori di $k(\epsilon)$, si ha $\|x^i - x^j\| < \epsilon$. Sia $r \in \{1, \dots, n\}$. Consideriamo la successione in $\mathbb{R}$ $(x_r^k)_{k \in \mathbb{N}}$. Se i e j sono numeri naturali maggiori di $k(\epsilon)$, si ha

$$|x_r^i - x_r^j| \leq \|x^i - x^j\| < \epsilon.$$

Dunque, per $r = 1, \dots, n$, $(x_r^k)_{k \in \mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$. Poiché $\mathbb{R}$ è completo, ciascuna successione $(x_r^k)_{k \in \mathbb{N}}$ ammette un limite reale x_r^0 . Poniamo

$$x^0 := (x_1^0, \dots, x_n^0).$$

Allora la successione $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge a x^0 in forza dell'esempio 2.5.

□

Teorema 6.2. Sia A un insieme non vuoto. Lo spazio normato $B(A)$ (esempio 1.7) con la norma $\|\cdot\|_{B(A)}$ è completo.

Dimostrazione Sia $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in $B(A)$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_{B(A)}$. Sia poi $\epsilon > 0$. Allora esiste $k(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tale che, se i e j sono numeri naturali maggiori di $k(\epsilon)$, si ha $\|x^i - x^j\|_{B(A)} < \epsilon$. Sia a un elemento qualunque di A . Consideriamo la successione in $\mathbb{R}$ $(x^k(a))_{k \in \mathbb{N}}$. Se i e j sono numeri naturali maggiori di $k(\epsilon)$, si ha

$$|x^i(a) - x^j(a)| \leq \|x^i - x^j\|_{B(A)} < \epsilon.$$

Dunque, $\forall a \in A$, $(x^k(a))_{k \in \mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$. Poiché $\mathbb{R}$ è completo, ciascuna successione $(x^k(a))_{k \in \mathbb{N}}$ ammette un limite reale $x^0(a)$. Evidentemente, x^0 è una funzione da A a $\mathbb{R}$. Verifichiamo che $x^0 \in B(A)$ e che

$$\|x^k - x^0\|_{B(A)} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow +\infty).$$

Siano $\epsilon > 0$ e $k(\epsilon)$ come prima. Sia $j > k(\epsilon)$. Siano poi $i > k(\epsilon)$ e $a \in A$. Si ha

$$|x^i(a) - x^j(a)| \leq \|x^i - x^j\|_{B(A)} < \epsilon. \quad (6.1)$$

Al limite per $i \rightarrow +\infty$ in (6.1), si ottiene $|x^0(a) - x^j(a)| \leq \epsilon \forall a \in A$. In particolare, dal caso $\epsilon = 1$ otteniamo $\forall a \in A$ e per un arbitrario $j > k(1)$,

$$\begin{aligned} |x^0(a)| &= |(x^0(a) - x^j(a)) + x^j(a)| \\ &\leq |x^0(a) - x^j(a)| + |x^j(a)| \leq 1 + \|x^j\|_{B(A)}. \end{aligned}$$

Perciò $x^0 \in B(A)$ e $\|x^0\|_{B(A)} \leq 1 + \|x^j\|_{\infty}$. Inoltre, se $j > k(\frac{\epsilon}{2})$, abbiamo

$$\|x^0 - x^j\|_{B(A)} \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

□

Proposizione 6.1. *Sia (X, d) uno spazio metrico completo e sua $A \subseteq X$ chiuso. Allora A , con la restrizione di d a $A \times A$, è completo.*

Dimostrazione Esercizio.

□

Definizione 6.2. *Sia (X, d) uno spazio metrico. Indichiamo con $BC(X)$ la classe delle funzioni continue e limitate da X a $\mathbb{R}$.*

Proposizione 6.2. *Sia (X, d) uno spazio metrico. Allora $BC(X)$ è un sottospazio vettoriale chiuso di $B(X)$. Di conseguenza, munito della norma $\|\cdot\|_{B(A)}$, è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione Sia $x^0 \in \overline{BC(X)}$ (la chiusura di $BC(X)$ in $B(X)$). Proviamo che $x^0 \in BC(X)$. Per la proposizione 2.6, esiste una successione $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $BC(X)$ tale che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - x^0\|_{B(A)} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Sia $a^0 \in A$. Verifichiamo che x^0 è continua in a^0 . Sia $\epsilon > 0$. Sia $k \in \mathbb{N}$ tale che $\|x^k - x^0\|_{B(A)} < \frac{\epsilon}{3}$. Poiché x^k è continua, esiste $r > 0$ tale che, se $a \in B(a^0, r)$, allora $|x^k(a) - x^k(a^0)| < \frac{\epsilon}{3}$. Con questa scelta di a , si ha allora

$$\begin{aligned} &|x^0(a) - x^0(a^0)| \\ &= |(x^0(a) - x^k(a)) + (x^k(a) - x^k(a^0)) + (x^k(a^0) - x^0(a^0))| \\ &\leq |x^0(a) - x^k(a)| + |x^k(a) - x^k(a^0)| + |x^k(a^0) - x^0(a^0)| \\ &\leq 2\|x^k - x^0\|_{B(A)} + |x^k(a) - x^k(a^0)| < \epsilon. \end{aligned}$$

Perciò x^0 è continua in a^0 . □

Osservazione 6.1. Se X è compatto, per il teorema di Weierstrass, $BC(X) = C(X)$. Quindi, se X è uno spazio metrico compatto, $C(X)$ è completo.

Veniamo ora al teorema delle contrazioni.

Teorema 6.3. *Siano (X, d) uno spazio metrico completo, $f : X \rightarrow X$ una contrazione, tale, cioè, che esiste $L \in [0, 1)$ per cui si ha*

$$d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y) \quad \forall (x, y) \in X \times X.$$

Allora esiste un unico $l \in X$ tale che $f(l) = l$ (si dice che l è un punto fisso per f).

Dimostrazione Prendiamo $x_0 \in X$ e costruiamo la successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X ponendo $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, in generale $x_{n+1} = f(x_n)$. Verifichiamo che $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy in X . Dato $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq Ld(x_{n-1}, x_n) \leq L^2d(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq \dots \leq L^n d(x_0, x_1).$$

Di conseguenza, dati $n, p \in \mathbb{N}$, si ha

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq (L^n + L^{n+1} + \dots + L^{n+p-1})d(x_0, x_1) \\ &= L^n(1 + L + \dots + L^{p-1})d(x_0, x_1) \leq L^n \sum_{j=0}^{\infty} L^j d(x_0, x_1) \\ &= \frac{L^n}{1-L} d(x_0, x_1) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Quindi per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ esiste $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tale che, se $n > n(\epsilon)$, $\forall p \in \mathbb{N}_0$

$$d(x_n, x_{n+p}) < \epsilon.$$

Dunque $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in X . Poiché (X, d) è completo, esiste $l \in X$ tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$. Verifichiamo che $f(l) = l$. Siano $n \in \mathbb{N}$ e $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Allora

$$d(x_{n+1}, f(l)) = d(f(x_n), f(l)) \leq Ld(x_n, l) \leq d(x_n, l) < \epsilon$$

se $n > n(\epsilon)$. Quindi

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = f(l).$$

Verifichiamo, infine, che il punto fisso è unico. Sia $l' \in X$ tale che $f(l') = l'$. Allora

$$d(l, l') = d(f(l), f(l')) \leq Ld(l, l'),$$

da cui $(L - 1)d(l, l') \geq 0$. Poiché $L - 1 < 0$, ciò implica $d(l, l') = 0$, cioè $l = l'$.

□

Vediamo un'applicazione del teorema 6.3 al problema di Cauchy per equazioni differenziali ordinarie. Consideriamo il sistema seguente:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (6.2)$$

Introduciamo le ipotesi seguenti:

- (I₁) $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$;
- (I₂) $\tau_0, \xi_0 \in \mathbb{R}^+$, $f : I(t_0, \tau_0) \times I(x_0, \xi_0) \rightarrow \mathbb{R}$;
- (I₃) f è continua; inoltre, $\forall t \in I(t_0, r)$ $f(t, \cdot)$ è derivabile in $I(x_0, r)$ con derivata $\frac{\partial f}{\partial x}(t, \cdot)$;
- (I₄) la funzione $\frac{\partial f}{\partial x}$ è continua in $I(t_0, R) \times I(x_0, r)$.

Specifichiamo cosa intendiamo per soluzione locale di (6.2):

Definizione 6.3. Una soluzione locale di (6.2) è una funzione $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

- (I) I è un intervallo in $\mathbb{R}$ con interno non vuoto, $t_0 \in I \subseteq I(t_0, \tau_0)$;
- (II) $\forall t \in I$ $x(t) \in I(x_0, \xi_0)$;
- (III) x è derivabile in I e $x'(t) = f(t, x(t)) \forall t \in I$;
- (IV) $x(t_0) = x_0$.

Utilizzeremo il seguente lemma:

Lemma 6.4. *Siano soddisfatte le ipotesi*

$$(I_1) - (I_4)$$

e sia $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ una soluzione locale di (6.2). Allora

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad \forall t \in I. \quad (6.3)$$

Viceversa, se I è un intervallo con interno non vuoto contenuto in $I(t_0, \tau_0)$, $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua, $\forall t \in I$ $x(t) \in I(x_0, \xi_0)$ e vale (6.3), x è una soluzione locale di (6.2).

Dimostrazione Se $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ è una soluzione locale di (6.2),

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t x'(s) ds = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Supponiamo, viceversa, che valga (6.3). Allora è chiaro che $x(t_0) = x_0$. Inoltre, poiché x è continua, se $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = (t, x(t))$ è continua da I a $\mathbb{R}^2$ (per il teorema 3.6(I)). Di conseguenza, per il teorema 3.7, $f \circ g$ è continua da I a $\mathbb{R}$. Allora, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, $x \in C^1(I)$ e

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad \forall t \in I.$$

□

Vogliamo provare il seguente

Teorema 6.5. *Siano soddisfatte le ipotesi $(I_1) - (I_4)$. Allora esistono $\tau \in (0, \tau_0)$ e $\xi \in (0, \xi_0)$ tali che il problema (6.2) ammette un'unica soluzione locale u di dominio $[t_0 - \tau, t_0 + \tau]$ tale che*

$$\max_{|t-t_0| \leq \tau} |x(t) - x_0| \leq \xi.$$

Dimostrazione Siano $\tau \in (0, \tau_0)$, $\xi \in (0, \xi_0)$. Poniamo

$$X(\tau, \xi) = \{x \in C([t_0 - \tau, t_0 + \tau]) : \max_{[t_0 - \tau, t_0 + \tau]} |x(t) - x_0| \leq \xi\}.$$

Per l'osservazione 6.1, $C([t_0 - \tau, t_0 + \tau])$ con la metrica indotta dalla norma $\|\cdot\|_{B([t_0 - \tau, t_0 + \tau])}$, è uno spazio metrico completo. Lasciamo verificare al lettore (vedi l'esercizio 6.1) che $X(\tau, \xi)$ è chiuso in $C([t_0 - \tau, t_0 + \tau])$. Quindi $X(\tau, \xi)$ è uno spazio metrico completo con la metrica

$$d(x, y) = \max_{t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau]} |x(t) - y(t)|.$$

Data $x \in X(\tau, \xi)$, poniamo

$$\mathcal{T}(x)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Allora $\mathcal{T}(x) \in C([t_0 - \tau, t_0 + \tau])$.

Fissiamo ora $\tau_1 \in (0, \tau_0)$ e $\xi_1 \in (0, \xi_0)$. Supponiamo che

$$|f(t, x)| \leq M \quad \forall (t, x) \in [t_0 - \tau_1, t_0 + \tau_1] \times [x_0 - \xi_1, x_0 + \xi_1],$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| \leq L \quad \forall (t, x) \in [t_0 - \tau_1, t_0 + \tau_1] \times [x_0 - \xi_1, x_0 + \xi_1],$$

con $L, M \in \mathbb{R}^+$. L'esistenza di L e M è una conseguenza del teorema di Weierstrass. Allora, se $0 < \tau \leq \tau_1$, $0 < \xi \leq \xi_1$, $\forall t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$, $\forall x \in X(\tau, \xi)$,

$$|\mathcal{T}(x)(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right| \leq \int_{t_0}^t |f(s, x(s))| ds \leq M|t - t_0| \leq M\tau. \quad (6.4)$$

Inoltre, se $x, y \in X(\tau, \xi)$, si ha, $\forall t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$,

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}(x)(t) - \mathcal{T}(y)(t)| &= \left| \int_{t_0}^t [f(s, x(s)) - f(s, y(s))] ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds \end{aligned}$$

Per il teorema del valor medio, $\forall s \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$ esiste $c(s) \in [x_0 - \xi_1, x_0 + \xi_1]$ tale che

$$|f(s, x(s)) - f(s, y(s))| = \left| \frac{\partial f}{\partial x}(s, c(s))(y(s) - x(s)) \right| \leq L|y(s) - x(s)|.$$

Ne segue che

$$\max_{t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau]} |\mathcal{T}(x)(t) - \mathcal{T}(y)(t)| \leq \int_{t_0}^t L|x(s) - y(s)| ds \leq L\tau \max_{s \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau]} |x(s) - y(s)|. \quad (6.5)$$

Da (6.4) segue che, se $M\tau \leq \xi$, l'operator $\mathcal{T}$ porta $X(\tau, \xi)$ in sé. Da (6.5) segue inoltre che, se $L\tau < 1$, $\mathcal{T}$ è una contrazione in $X(\tau, \xi)$.

Concludiamo che, se $\xi \leq \xi_1$, $M\tau \leq \xi$ e $L\tau < 1$, $\mathcal{T}$ porta $X(\tau, \xi)$ in sé ed è una contrazione in $X(\tau, \xi)$. Dal teorema delle contrazioni segue allora l'esistenza e unicità di un elemento x in $X(\tau, \xi)$ tale che $\mathcal{T}(x) = x$. x è soluzione locale di (6.2) per il lemma 6.4. $\square$

Esercizio 6.1. Provare che, se $F \subseteq \mathbb{R}$ è chiuso in $\mathbb{R}$, e X è uno spazio metrico, $\{f \in BC(X) : f(x) \in F \quad \forall x \in X\}$ è un sottoinsieme chiuso di $BC(X)$.