

Analisi Matematica B

Note delle lezioni

2024/2025

Giovanni Eugenio Comi

Indice

1	Calcolo differenziale in più variabili	3
1.1	Nozioni di base	3
1.1.1	Prodotto scalare, norma e distanza	4
1.1.2	Limiti in \mathbb{R}^n	8
1.1.3	Matrici e autovalori	9
1.2	Nozioni di topologia e continuità delle funzioni	14
1.2.1	Funzioni continue	14
1.2.2	Insiemi aperti, chiusi e compatti	15
1.2.3	Limiti di funzioni	20
1.2.4	Curve	22
1.2.5	Insiemi connessi per archi e Teorema degli Zeri	23
1.3	Derivate parziali prime, gradiente e jacobiano	28
1.3.1	Derivate parziali	28
1.3.2	Differenziabilità in più variabili	29
1.3.3	Piano tangente al grafico di una funzione in più variabili	33
1.3.4	Estremanti relativi e punti critici	34
1.3.5	Funzioni vettoriali di più variabili	39
1.4	Derivate parziali seconde e classificazione dei punti critici	41
1.5	Curve differenziabili	50
1.6	Estremanti vincolati e moltiplicatori di Lagrange	53
1.7	Algoritmo per la ricerca di punti di massimo e minimo	62
2	Integrali in più variabili	63
2.1	Integrali doppi e tripli	63
2.1.1	Teoremi di riduzione	66
2.1.2	Cambiamento di variabili	66
2.2	Cenni di teoria della misura	73
2.3	Integrali curvilinei	74
3	Lavoro di un campo vettoriale	78
3.1	Lavoro di un campo	78
3.2	Campi esatti	81
3.3	Campi chiusi	84
3.4	Campi radiali	89
3.5	Forme differenziali	91
4	Superfici in \mathbb{R}^3, teoremi di Stokes e della divergenza	92
4.1	Superfici in \mathbb{R}^3	92
4.2	Il teorema di Stokes	107
4.3	Il teorema della divergenza	111
5	Funzioni olomorfe e teorema dei residui	115
5.1	Nozioni di base di Analisi Complessa	115
5.2	Funzioni olomorfe	118
5.3	Integrali curvilinei di funzioni complesse	122
5.4	Sviluppabilità in serie delle funzioni olomorfe	132
5.5	Funzioni meromorfe e teorema dei residui	136

5.6	Applicazioni del teorema dei residui al calcolo di integrali	139
6	Serie di Fourier	146
6.1	Spazi $L^p((0, T))$	146
6.2	Coefficienti di Fourier	148
6.3	Convergenza delle serie di Fourier	159
7	Trasformate di Fourier	164
7.1	Spazi $L^p(\mathbb{R})$	164
7.2	Trasformate di Fourier: teoria L^1	167
7.3	Trasformate di Fourier: teoria L^2	171
7.4	Trasformate di Fourier di funzioni razionali fratte	173
8	Cenni di teoria delle distribuzioni	176
8.1	Funzioni di Schwartz e distribuzioni temperate	176
8.2	Derivate deboli	178
8.3	Trasformate di Fourier distribuzionali	179

Capitolo 1

Calcolo differenziale in più variabili

1

In Analisi Matematica A è stato trattato il calcolo differenziale sulla retta reale, in questo corso estenderemo questa teoria allo spazio euclideo n -dimensionale \mathbb{R}^n per ogni $n \geq 2$. Vedremo che questa estensione non è banale, perché, sebbene le nozioni di limite di successioni e funzioni e di continuità di funzioni si estendano in maniera naturale al caso di più variabili, ci sono però delle differenze sostanziali alle quali è importante fare attenzione.

Iniziamo richiamando alcuni concetti fondamentali.

1.1 Nozioni di base

Sia $n \in \mathbb{N}^2$. Lo spazio euclideo reale n -dimensionale \mathbb{R}^n è uno spazio vettoriale su \mathbb{R} di dimensione n , e può essere visto come il prodotto cartesiano di n -copie di \mathbb{R} :

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}.$$

Ogni elemento $x \in \mathbb{R}^n$ si scrive come una n -upla di n coordinate $x = (x_1, \dots, x_n)$, con $x_j \in \mathbb{R}$ per $j = 1, \dots, n$. Questa è la generalizzazione astratta dell'idea cartesiana della rappresentazione dei punti nel piano³. Se $n = 2$, allora $x = (x_1, x_2)$, e le due coordinate sono comunemente chiamate ascissa e ordinata, che sono date dalle intersezioni delle rette parallele agli assi coordinati con gli assi stessi. Se $n = 3$, allora $x = (x_1, x_2, x_3)$, e le tre coordinate sono ascissa, ordinata e altezza.

Così, ogni punto è individuato dalla sua posizione rispetto agli assi coordinati. Inoltre, in questo modo a ogni punto di \mathbb{R}^n è associato il vettore che parte dall'origine e termina nel punto stesso. Quindi si possono identificare punti e vettori in questo senso, ed è per questa ragione che \mathbb{R}^n è uno spazio vettoriale. Allo scopo, bisogna definire operazioni di somma fra vettori e prodotto fra vettori e scalari, ovvero numeri in \mathbb{R} .

Da un punto di vista notazionale, se non altrimenti specificato, $x \in \mathbb{R}^n$ è un vettore colonna:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Il corrispondente vettore riga è $x^t \in (\mathbb{R}^n)^t$, ovvero il vettore trasposto,

$$x^t = (x_1, \dots, x_n).$$

¹Parte di questo capitolo è basata sul libro *Elementi di Analisi Matematica Due* di Nicola Fusco, Paolo Marcellini e Carlo Sbordone.

²Denotiamo con $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ l'insieme dei numeri naturali escluso lo 0, e con $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ l'insieme dei numeri naturali incluso lo 0.

³In realtà, tale rappresentazione venne introdotta da Nicola d'Oresme nel quattordicesimo secolo, Cartesio riprese e sviluppò questa idea nel *Discorso sul Metodo*, dove espose il progetto di unire l'algebra alla geometria euclidea, fornendo quindi un modo per calcolare tutto usando ragione e matematica.

Quindi, definiamo la somma di vettori componente per componente

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \dots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

e il prodotto scalare per vettore in maniera analoga, ovvero per ogni $a \in \mathbb{R}$ poniamo

$$ax = a \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ax_1 \\ \dots \\ ax_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Osserviamo che queste definizioni sono coerenti con quanto noto nel piano cartesiano: infatti, dati due vettori $v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$, la loro somma per la regola del parallelogramma è data da

$$v + w = (v_1 + w_1, v_2 + w_2),$$

e la moltiplicazione per uno scalare $a \in \mathbb{R}$ dà un vettore con la stessa direzione, verso uguale se $a > 0$, opposto se $a < 0$, e lunghezza dilatata di un fattore $|a|$:

$$av = (av_1, av_2).$$

Dunque \mathbb{R}^n è uno spazio vettoriale, con vettore nullo

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = (0, \dots, 0),$$

e opposto di un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ dato da

$$-x = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \dots \\ -x_n \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che finora abbiamo sempre scritto i vettori usando implicitamente la base canonica di \mathbb{R}^n , ovvero i vettori

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix},$$

cioè i vettori e_j con coordinate nulle a eccezione della j -esima che è uguale a 1, per $j \in \{1, \dots, n\}$ ⁴. In questo corso useremo sempre la base canonica di \mathbb{R}^n per scrivere i vettori e le matrici.

1.1.1 Prodotto scalare, norma e distanza

Un'operazione fondamentale in \mathbb{R}^n è il prodotto scalare fra due vettori, che è un modo per quantificare il grado di ortogonalità (o, per contro, parallelismo), come vedremo in seguito.

Definizione 1.1.1. Dati $x, y \in \mathbb{R}^n$, il *prodotto scalare* fra x e y è la quantità scalare

$$x \cdot y := x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n = \sum_{j=1}^n x_jy_j.$$

Alternativamente, il prodotto scalare si può definire usando il prodotto matriciale⁵ fra un vettore riga (matrice $1 \times n$) e un vettore colonna (matrice $n \times 1$):

$$x \cdot y = x^t y = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Talvolta il prodotto scalare è indicato con $\langle x, y \rangle$.

⁴Sottolineiamo che nel capitolo 6 (dedicato alle serie di Fourier) il simbolo e_j avrà un significato diverso.

⁵Si veda la sezione 1.1.3.

Proposizione 1.1.2 (Proprietà del prodotto scalare). Per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e $a, b \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti proprietà:

1. $x \cdot y = y \cdot x$ (simmetria);
2. $(ax + by) \cdot z = a(x \cdot z) + b(y \cdot z)$ (proprietà distributiva);
3. $x \cdot x \geq 0$ e $x \cdot x = 0$ se e solo se $x = 0$ (non negatività e non degenerazione).

Sfruttiamo le proprietà del prodotto scalare di un vettore con sé stesso per definire la norma.

Definizione 1.1.3. La *norma* di un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ è data da

$$\|x\| := \sqrt{(x \cdot x)} = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}.$$

Osserviamo che questa definizione è ben posta, visto che $x \cdot x \geq 0$. Dalle proprietà del prodotto scalare seguono immediatamente due proprietà fondamentali della norma.

Proposizione 1.1.4 (Omogeneità e non degenerazione). Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}$ abbiamo

1. $\|ax\| = |a|\|x\|$ (omogeneità positiva),
2. $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0$ se e solo se $\|x\| = 0$ (non degenerazione).

Se $n = 1$, osserviamo che la norma coincide con il valore assoluto di $x \in \mathbb{R}$, dato che

$$\|x\| = \sqrt{x^2} = |x|.$$

Inoltre, è istruttivo considerare il caso del piano cartesiano \mathbb{R}^2 . Infatti, la definizione di norma è la generalizzazione allo spazio a n -dimensioni del Teorema di Pitagora, dato che nel piano cartesiano la lunghezza di un vettore si calcola vedendo tale vettore come l'ipotenusa di un triangolo con cateti paralleli agli assi coordinati, di lunghezza pari alle coordinate del vettore: se $v = (v_1, v_2)$, allora la lunghezza di v è data da

$$\|v\| := \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

Analogamente si può ragionare nel caso dello spazio \mathbb{R}^3 .

Inoltre, nel piano cartesiano \mathbb{R}^2 e nello spazio \mathbb{R}^3 è noto che il prodotto scalare fra due vettori v e w si può scrivere esplicitamente in termini dell'angolo fra i vettori:

$$v \cdot w = \|v\| \|w\| \cos(\alpha), \tag{1.1.1}$$

dove $\alpha \in [0, \pi]$ è l'angolo minimo fra i vettori v e w . Per verificarlo in \mathbb{R}^2 , scriviamo due vettori $v, w \in \mathbb{R}^2$ in coordinate polari:

$$v = (r \cos(s), r \sin(s)) \quad \text{e} \quad w = (q \cos(t), q \sin(t)),$$

dove $r = \|v\|$, $q = \|w\|$ e $s, t \in [0, 2\pi)$ sono gli angoli che vanno dal semiasse positivo delle ascisse ai vettori v e w rispettivamente. Allora abbiamo

$$v \cdot w = r q (\cos(s) \cos(t) + \sin(s) \sin(t)) = r q \cos(s - t) = \|v\| \|w\| \cos(\alpha).$$

Il caso di \mathbb{R}^3 può essere ricondotto a quello di \mathbb{R}^2 , considerando separatamente tre casi [La seguente spiegazione non è stata vista a lezione]:

- se $v = 0$ o $w = 0$, è tutto ovvio;
- se v e w sono linearmente dipendenti (e non nulli), allora possiamo scrivere $v = \lambda w$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$, e allora abbiamo⁶

$$v \cdot w = \lambda \|w\|^2 = \text{sign}(\lambda) |\lambda| \|w\|^2 = \text{sign}(\lambda) \|\lambda w\| \|w\| = \|v\| \|w\| \cos(\alpha),$$

per $\alpha = 0$ se $\lambda > 0$ e $\alpha = \pi$ se $\lambda < 0$;

⁶Ricordiamo la definizione di funzione segno di un numero reale:

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \\ -1 & \text{se } t < 0 \end{cases}.$$

Com'è noto, $t = \text{sign}(t)|t|$.

- se v e w non sono linearmente dipendenti, allora prendiamo il piano generato da v e w , introduciamo su di esso coordinate ortogonali, e a questo punto ci siamo ricondotti al caso di \mathbb{R}^2 .

In particolare, la formula (1.1.1) implica che $x \cdot y = 0$ se e solo se $\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$, ovvero se i due vettori sono perpendicolari o, equivalentemente, ortogonali. Dunque, per estensione diciamo che due vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$ sono *ortogonali* se $x \cdot y = 0$. Al contrario, dati $x, y \in \mathbb{R}^2$ (o \mathbb{R}^3), il loro prodotto scalare è massimo o minimo solo se sono paralleli, ovvero se $\alpha = 0$ o $\alpha = \pi$, rispettivamente. Come conseguenza, osserviamo che (1.1.1) implica

$$-\|x\| \|y\| \leq x \cdot y \leq \|x\| \|y\| \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}^2 \text{ (o } \mathbb{R}^3),$$

dato che $|\cos(\alpha)| \leq 1$. Questi sono casi particolari della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

Teorema 1.1.5 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz). *Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ abbiamo*

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|,$$

o, equivalentemente,

$$-\|x\| \|y\| \leq x \cdot y \leq \|x\| \|y\|.$$

L'uguaglianza $x \cdot y = \|x\| \|y\|$ vale se e solo se $x = 0$ o $y = \lambda x$ per qualche $\lambda \geq 0$; mentre l'uguaglianza $x \cdot y = -\|x\| \|y\|$ vale se e solo se $x = 0$ o $y = \lambda x$ per qualche $\lambda \leq 0$.

Dimostrazione. Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$. Senza perdita di generalità, assumiamo $x \neq 0$ e $y \neq 0$, dato che altrimenti la disuguaglianza è ovviamente soddisfatta (e si riduce all'uguaglianza $0 = 0$). Osserviamo che per ogni $t \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x + ty\|^2 &= \sum_{j=1}^n (x_j + ty_j)^2 = \sum_{j=1}^n (x_j^2 + t^2 y_j^2 + 2tx_j y_j) \\ &= \sum_{j=1}^n x_j^2 + t^2 \sum_{j=1}^n y_j^2 + 2t \sum_{j=1}^n x_j y_j = \|x\|^2 + t^2 \|y\|^2 + 2t(x \cdot y). \end{aligned}$$

Di conseguenza, il polinomio di secondo grado

$$P(t) = \|y\|^2 t^2 + 2(x \cdot y)t + \|x\|^2$$

deve soddisfare $P(t) \geq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, ma questo è possibile solo se esiste al più una radice reale, ovvero al più una sola soluzione per l'equazione $P(t) = 0$. Questo è possibile se e solo se il discriminante non è positivo, ovvero $\Delta \leq 0$: in questo caso, abbiamo

$$\Delta = 4(x \cdot y)^2 - 4\|y\|^2 \|x\|^2,$$

ed è quindi ovvio che $\Delta \leq 0$ è equivalente alla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Notiamo poi che

$$|x \cdot y| = \|x\| \|y\| \iff \Delta = 0,$$

e ciò è possibile se e solo se esiste un'unica radice reale per il polinomio P , ovvero se esiste un unico $t_0 \in \mathbb{R}$ tale che

$$0 = P(t_0) = \|x + t_0 y\|^2,$$

ma ciò è possibile se e solo se $x + t_0 y = 0$. A questo punto ci sono due casi possibili:

- se $t_0 \neq 0$, allora $y = \lambda x$ per $\lambda = -\frac{1}{t_0}$;
- se $t_0 = 0$, allora $x = 0$.

Questo prova che vale l'uguaglianza nella disuguaglianza di Cauchy-Schwarz se e solo se $x = 0$ o $y = \lambda x$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$. Infine, per quel che riguarda il segno, osserviamo che, se $y = \lambda x$ per qualche $\lambda \geq 0$, allora

$$x \cdot y = x \cdot (\lambda x) = \lambda(x \cdot x) = |\lambda| \|x\|^2 = \|x\| \|\lambda x\| = \|x\| \|y\|,$$

mentre, se $\lambda \leq 0$, allora

$$x \cdot y = x \cdot (\lambda x) = \lambda(x \cdot x) = -|\lambda| \|x\|^2 = -\|x\| \|\lambda x\| = -\|x\| \|y\|,$$

dato che $\lambda = -|\lambda|$, per la definizione di valore assoluto. □

Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz possiamo derivare la disuguaglianza triangolare per la norma.

Proposizione 1.1.6 (Disuguaglianza triangolare). *Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale la disuguaglianza triangolare*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$

e la sua versione alternativa

$$\|x - y\| \geq \left| \|x\| - \|y\| \right|. \quad (1.1.2)$$

Dimostrazione. Per la definizione di norma abbiamo

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y) \cdot (x + y) = \|x\|^2 + 2x \cdot y + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2, \end{aligned}$$

e concludiamo prendendo le radici quadrate di entrambi i membri. Usando poi questa prima disuguaglianza triangolare, osserviamo che

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|,$$

ovvero

$$\|x - y\| \geq \|x\| - \|y\|.$$

D'altra parte, ragionando analogamente vediamo che

$$\|x - y\| = \|y - x\| \geq \|y\| - \|x\|,$$

e quindi

$$\|x - y\| \geq \max\{\|x\| - \|y\|, \|y\| - \|x\|\} = \left| \|x\| - \|y\| \right|.$$

□

Notiamo che la distanza fra due punti nel piano cartesiano \mathbb{R}^2 si può esprimere come la norma della differenza fra i vettori che rappresentano tali punti. Infatti, dati $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$, grazie al Teorema di Pitagora sappiamo che la distanza fra x e y è data da

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = \|x - y\|.$$

Inoltre, se $n = 1$, chiaramente la distanza fra due punti sulla retta reale $x, y \in \mathbb{R}$ è data dal valore assoluto della differenza

$$|x - y| = \|x - y\|.$$

Perciò in \mathbb{R}^n definiamo la *distanza euclidea* tra due punti (vettori) $x, y \in \mathbb{R}^n$ come

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

La distanza gode delle seguenti proprietà elementari, che sono una semplice conseguenza di quelle della norma.

Proposizione 1.1.7 (Proprietà della distanza). **[Non vista a lezione.]** *Per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ abbiamo*

1. $d(x, y) = d(y, x)$ (*simmetria*);
2. $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$ (*non degenerazione*);
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (*disuguaglianza triangolare*);
4. $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|d(x, y)$ (*omogeneità positiva*).

1.1.2 Limiti in \mathbb{R}^n

Ora che abbiamo una nozione di norma, e quindi di distanza, possiamo definire il limite di successioni di punti in \mathbb{R}^n , ovvero successioni di vettori.

Definizione 1.1.8. Una successione $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R}^n$ tende ad $a \in \mathbb{R}^n$ se e solo se

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x_k - a\| = 0,$$

e nel caso scriviamo

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = a,$$

e diciamo che il *limite* di $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty}$ è a .

Notiamo che la definizione è ben posta poiché $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x_k - a\| = 0$ è un limite di numeri reali (positivi), che è già stato definito in Analisi Matematica A.

Anche in \mathbb{R}^n valgono le usuali proprietà dei limiti, con l'aggiunta dell'operazione del prodotto scalare.

Proposizione 1.1.9. Siano $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty}, \{y_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R}^n$ e $\{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R}$. Assumiamo che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = a \quad e \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} y_k = b \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

e

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k = \lambda \quad \text{in } \mathbb{R}.$$

Allora abbiamo

1. $\lim_{k \rightarrow +\infty} (x_k + y_k) = a + b$ in \mathbb{R}^n (limite della somma),
2. $\lim_{k \rightarrow +\infty} (\lambda_k x_k) = \lambda a$ in \mathbb{R}^n (limite del prodotto vettore per scalare),
3. $\lim_{k \rightarrow +\infty} (x_k \cdot y_k) = a \cdot b$ in \mathbb{R} (limite del prodotto scalare).

Osservazione 1.1.10. Sia $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R}^n$ tale che $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = a$ in \mathbb{R}^n . Allora, come facile conseguenza della disuguaglianza triangolare, vediamo che, se $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = a$, allora

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x_k\| = \|a\|.$$

Infatti, per la disuguaglianza triangolare (1.1.2) abbiamo

$$0 \leq \left| \|x_k\| - \|a\| \right| \leq \|x_k - a\| \rightarrow 0 \quad \text{per } k \rightarrow +\infty.$$

D'altra parte, il viceversa è falso, ovvero può succedere che esista il limite delle norme della successione, ma non della successione stessa: si consideri ad esempio

$$x_k = (\sin(k), \cos(k)) \subset \mathbb{R}^2,$$

allora è chiaro che $\|x_k\| = \sqrt{\sin^2(k) + \cos^2(k)} = 1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, di modo che $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x_k\| = 1$, mentre non esiste il limite di x_k , dato che seno e coseno oscillano per $k \rightarrow +\infty$.

Inoltre, l'esistenza del limite in \mathbb{R}^n è equivalente a chiedere che esistano i limiti per ciascuna componente del vettore x_k ; più precisamente, se scriviamo $x_k = (x_{k,1}, \dots, x_{k,n})$, allora

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = a \quad \text{in } \mathbb{R}^n \iff \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{k,j} = a_j \quad \text{in } \mathbb{R} \quad \text{per ogni } j \in \{1, \dots, n\}.$$

Infatti,

$$\|x_k - a\|^2 = \sum_{j=1}^n (x_{k,j} - a_j)^2 \rightarrow 0 \iff x_{k,j} \rightarrow a_j \quad \text{per ogni } j \in \{1, \dots, n\}.$$

Quindi, se per qualche $j \in \{1, \dots, n\}$ la successione $\{x_{k,j}\}_{k=1}^{+\infty}$ non ammette limite, allora non esiste il limite della successione $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R}^n$, come mostrato dall'esempio precedente.

Nel caso $n = 2$, tutti questi risultati si applicano anche alle successioni nel campo complesso \mathbb{C} .

1.1.3 Matrici e autovalori

Una matrice è una tabella ordinata di numeri reali⁷: dati $m, n \in \mathbb{N}$ e $a_{ij} \in \mathbb{R}$ per $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$, la matrice A di dimensioni $m \times n$ (m righe e n colonne) degli elementi a_{ij} è data da

$$A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Chiamiamo $\mathbb{R}^{m \times n}$ l'insieme delle matrici reali $m \times n$, e osserviamo che possiamo vedere una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ come un elemento dello spazio vettoriale \mathbb{R}^{mn} (in altre parole, $\mathbb{R}^{m \times n}$ è isomorfo a \mathbb{R}^{mn}), dato che può essere interpretata come un vettore con mn coordinate. Di conseguenza, $\mathbb{R}^{m \times n}$ è uno spazio vettoriale, con operazioni di somma e prodotto per scalare definiti coordinata per coordinata in maniera analoga a quanto visto in precedenza per i vettori, ovvero, dati $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

e

$$\lambda A = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}.$$

L'elemento nullo di $\mathbb{R}^{m \times n}$ è la matrice nulla

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

e l'opposto di una matrice A è la matrice

$$-A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Come sappiamo dal corso di algebra lineare, le matrici sono un modo per rappresentare le trasformazioni lineari dello spazio, ovvero le funzioni lineari tra due spazi euclidei (anche di dimensione diversa). Di conseguenza, si può definire il prodotto fra matrici per rappresentare la composizione fra trasformazioni lineari.

Siano $m, n, p \in \mathbb{N}$,

$$A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

una matrice $m \times n$, scritta mettendone in evidenza le righe, e

$$B = [b_{jk}]_{\substack{j=1,\dots,n \\ k=1,\dots,p}} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix} = [b^1 | b^2 | \dots | b^p] \in \mathbb{R}^{n \times p}$$

⁷Si possono anche definire matrici di numeri complessi, ma non è necessario in questo corso.

una matrice $n \times p$, scritta mettendone in evidenza le colonne (scritte usando gli apici per differenziarle dalle righe). Il prodotto fra queste matrici è dato dalla matrice $m \times p$ ⁸ le cui componenti sono i prodotti scalari fra i vettori riga e i vettori colonna (che hanno infatti la stessa dimensione n):

$$A \cdot B = [a_i \cdot b^k]_{\substack{i=1,\dots,m \\ k=1,\dots,p}} = \begin{bmatrix} a_1 \cdot b^1 & \dots & a_1 \cdot b^p \\ \dots & \ddots & \dots \\ a_m \cdot b^1 & \dots & a_m \cdot b^p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times p},$$

dove

$$a_i \cdot b^k = (a_{i1} a_{i2} \dots a_{in}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \dots \\ b_{nk} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}.$$

Nel caso particolare $m = p = 1$ abbiamo il prodotto scalare fra vettori, che può infatti essere interpretato come una moltiplicazione tra un vettore colonna e un vettore riga, che ci dà quindi una matrice 1×1 , ovvero uno scalare: date

$$A = [a^t] = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n) \quad \text{e} \quad B = [b] = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix},$$

abbiamo

$$A \cdot B = a^t \cdot b = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n a_j b_j.$$

Un altro caso particolare rilevante è il prodotto matrice per vettore (colonna), che risulta in un vettore colonna della dimensione dei vettori riga della matrice, dato che abbiamo “ $(m \times n) \times (n \times 1) = m \times 1$ ”: più precisamente, se

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

e $x \in \mathbb{R}^n$, allora

$$Ax = \begin{pmatrix} a_1 \cdot x \\ a_2 \cdot x \\ \dots \\ a_m \cdot x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Infine, se consideriamo matrici quadrate $n \times n$ (ponendo quindi $m = n = p$), allora è facile vedere che la moltiplicazione fra matrici ammette un elemento neutro, che è la *matrice identità*

$$I := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

che chiaramente soddisfa

$$AI = IA = A \quad \text{per ogni} \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Quindi, ricordando che una *matrice diagonale* è una matrice $D = [d_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$ tale che solo gli elementi sulla sua diagonale principale possano essere diversi da zero, ovvero $d_{ij} = 0$ per ogni $i \neq j$, vediamo che la matrice identità è la matrice diagonale con elementi tutti uguali a 1 sulla diagonale principale.

⁸La regola da ricordare per le dimensioni è che la dimensione mediana si elide: “ $(m \times n) \cdot (n \times p) = m \times p$ ”.

Più in generale, il prodotto contro una matrice diagonale è notevolmente più facile da calcolare: siano $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

allora abbiamo

$$DA = \begin{bmatrix} d_1 a_{11} & d_1 a_{12} & \dots & d_1 a_{1n} \\ d_2 a_{21} & d_2 a_{22} & \dots & d_2 a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ d_n a_{n1} & d_n a_{n2} & \dots & d_n a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Per questa e altre ragioni legate alla geometria lineare, nello studio delle matrici quadrate sono di particolare interesse le nozioni di autovalore e autovettore, perché permettono di associare una matrice diagonale a una matrice data (se è possibile farlo).

Definizione 1.1.11 (Autovalori e autovettori). Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Diciamo che $\lambda \in \mathbb{R}$ è un *autovalore* di A se esiste $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, tale che

$$Ax = \lambda x.$$

Tale x si dice *autovettore* di A (di autovalore λ)⁹.

Osservazione 1.1.12. Nel caso di una matrice diagonale, gli autovalori sono gli elementi della diagonale principale e gli autovettori sono gli elementi della base canonica di \mathbb{R}^n . Infatti, data

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix},$$

vediamo facilmente che

$$De_j = d_j e_j \quad \text{per ogni } j \in \{1, \dots, n\},$$

di modo che $\lambda_j = d_j$ per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$.

Tuttavia, nel caso di matrici che non siano diagonali, non è immediato individuare autovalori e autovettori. Fortunatamente, si possono calcolare gli autovalori senza dover utilizzare la definizione. Allo scopo, dobbiamo richiamare un concetto fondamentale legato allo studio delle matrici quadrate: il determinante.

Definizione 1.1.13. Il *determinante* è la funzione $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ definita per induzione su n nel seguente modo: data $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

- se $n = 1$, allora $\det(A) := a_{1,1}$,
- se $n \geq 2$, allora

$$\det(A) := \sum_{i=1}^n a_{i1} (-1)^{i+1} \det(A_{i1}),$$

dove A_{i1} è la matrice quadrata $(n-1) \times (n-1)$ che si ottiene da A eliminando la prima colonna e la riga i -esima.

A essere rigorosi, si può definire il determinante in maniera astratta e poi dimostrare che questa è una formula per il suo calcolo, detta *sviluppo di Laplace*. Raccogliamo tutte le informazioni utili sul determinante nella seguente proposizione.

Proposizione 1.1.14. Sia $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Valgono le seguenti proprietà:

⁹Si possono anche definire autovalori complessi, ma ciò va oltre gli scopi di questo corso.

1) per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$ fissato abbiamo

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j} \det(A_{ij}),$$

dove A_{ij} è la matrice quadrata $(n-1) \times (n-1)$ che si ottiene da A eliminando la colonna j -esima e la riga i -esima;

2) per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ fissato abbiamo

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j} \det(A_{ij});$$

3) se $n = 2$, allora

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

4) se $n = 3$, allora

$$\det(A) = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{21} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{31} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix};$$

5) $\det(kA) = k^n \det(A)$ per ogni $k \in \mathbb{R}$;

$$6) \det \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix} \end{pmatrix} = d_1 d_2 \dots d_n;$$

7) $\det(I) = 1$.

Possiamo ora enunciare il teorema relativo al calcolo degli autovalori di una matrice quadrata.

Teorema 1.1.15. Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Abbiamo

$$\lambda \in \mathbb{R} \text{ è un autovalore di } A \iff \det(A - \lambda I) = 0.$$

Come conseguenza della formula per il calcolo del determinante, osserviamo che la funzione

$$\lambda \rightarrow \det(A - \lambda I)$$

è un polinomio di grado n , detto *polinomio caratteristico* della matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Di conseguenza, per il Teorema Fondamentale dell'Algebra, sappiamo che esistono al massimo n autovalori di una matrice quadrata $n \times n$. Tuttavia, non è detto che siano distinti (si pensi alla matrice nulla o all'identità) né che siano esattamente n .

Esempio 1.1.16. Siano $n = 2$ e

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Allora abbiamo

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1,$$

e sappiamo

$$\lambda^2 + 1 = 0 \iff \lambda = \pm i,$$

dove i è l'unità immaginaria (la "radice quadrata di -1"). Di conseguenza, dato che gli autovalori devono essere numeri reali, la matrice A non ha nessun autovalore.

Tuttavia, in questo corso ci interesseremo solo a un tipo particolare di matrici che ammettono sempre n autovalori (reali e contati con le loro molteplicità algebriche), ovvero le matrici simmetriche.

Definizione 1.1.17. Sia $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. A è una *matrice simmetrica* se $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ¹⁰.

Teorema 1.1.18. Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una *matrice simmetrica*. Allora esistono $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ e $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tali che

$$Ax_j = \lambda_j x_j \quad \text{per ogni } j \in \{1, \dots, n\}.$$

In particolare, A ammette n autovalori.

Concludiamo questa sezione parlando della relazione fra gli autovalori di una matrice quadrata (simmetrica), il suo determinante e la sua traccia (della quale diamo adesso la definizione).

Definizione 1.1.19. La *traccia* è la funzione $\text{Tr} : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad \text{per ogni } A = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Teorema 1.1.20. Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una *matrice simmetrica*¹¹ con autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Allora abbiamo

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \quad \text{e} \quad \text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

Nel caso $n = 2$ questo risultato permette di dedurre il segno degli autovalori di una matrice quadrata (simmetrica) a partire dal segno di determinante e traccia.

Corollario 1.1.21. Sia $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ una *matrice simmetrica* con autovalori λ_1, λ_2 . Assumiamo che $\lambda_1 \leq \lambda_2$. Abbiamo i seguenti casi:

- $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ se e solo se $\det(A) > 0$ e $\text{Tr}(A) > 0$, oppure, equivalentemente, se e solo se $\det(A) > 0$ e $a_{11} > 0$ (o $a_{22} > 0$);
- $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ se e solo se $\det(A) > 0$ e $\text{Tr}(A) < 0$, oppure, equivalentemente, se e solo se $\det(A) > 0$ e $a_{11} < 0$ (o $a_{22} < 0$);
- $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ se e solo se $\det(A) < 0$;
- $\lambda_1 = 0 \leq \lambda_2$ se e solo se $\det(A) = 0$ e $\text{Tr}(A) \geq 0$;
- $\lambda_1 \leq 0 = \lambda_2$ se e solo se $\det(A) = 0$ e $\text{Tr}(A) \leq 0$.

Dimostrazione. Grazie al Teorema 1.1.20 sappiamo che

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \quad \text{e} \quad \text{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2.$$

La tesi segue quindi da semplici osservazioni aritmetiche: ad esempio, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ se e solo se il loro prodotto e la loro somma sono positivi, ovvero $\det(A) > 0$ e $\text{Tr}(A) > 0$; mentre λ_1 e λ_2 hanno segno opposto se e solo se il loro prodotto è negativo, ovvero $\det(A) < 0$. Lasciamo i restanti casi come esercizio.

Per quel che riguarda la determinazione del segno degli autovalori in termini del segno di a_{11} (o a_{22}), osserviamo che

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - (a_{12})^2 \quad \text{e} \quad \text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22}.$$

Di conseguenza,

$$\det(A) > 0 \iff a_{11}a_{22} > (a_{12})^2 \geq 0$$

e ciò significa che a_{11} e a_{22} devono avere lo stesso segno: perciò il segno della loro somma dipende solo dal segno di uno dei due addendi. \square

¹⁰In altre parole, la riga i -esima di A è uguale alla colonna i -esima.

¹¹Il teorema in realtà è valido per una classe più ampia di matrici (dette *diagonalizzabili*), ma ciò va oltre gli scopi di questo corso.

1.2 Nozioni di topologia e continuità delle funzioni

Sulla retta reale \mathbb{R} il dominio di definizione “naturale” di una funzione è un intervallo, o al più un’unione di intervalli. Invece, nello spazio euclideo di dimensione n non è ovvio cosa debba generalizzare la nozione di intervallo: il prodotto cartesiano di intervalli sembra un buon candidato, ma presenta degli svantaggi tecnici per il calcolo, mentre la palla è del tutto coerente con la nozione di norma euclidea, però la sua regolarità e simmetria non tiene conto della grande varietà di forme che possono assumere le regioni dello spazio. Inoltre, non è più scontato cosa si intenda con insieme aperto o chiuso (mentre nel caso di intervalli della retta reale si trattava solo di controllare se i punti estremi fossero o meno inclusi nell’intervallo stesso).

Come vedremo, una soluzione “operativa” a questi problemi è usare la nozione stessa di funzione continua per definire gli insiemi aperti. Si può d’altra parte definire il concetto di insieme aperto (e in generale la *topologia* dello spazio euclideo¹²) in maniera indipendente, e poi dimostrare la stretta relazione con la continuità delle funzioni: tale approccio va però oltre gli scopi di questo corso.

1.2.1 Funzioni continue

Definizione 1.2.1. Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in E$.

La funzione f è *continua* in x_0 se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ ¹³ tale che, per ogni $x \in E$ con $\|x - x_0\| < \delta$ abbiamo $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Diciamo poi che $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in E se è continua in ogni punto $x_0 \in E$, e scriviamo $f \in C(E)$.

Vediamo alcuni esempi di funzioni continue in \mathbb{R}^n .

Esempio 1.2.2. Se $n = 2$, allora le funzioni

$$f(x, y) = x, \quad g(x, y) = y \quad \text{e} \quad h(x, y) = x^2 + y^2$$

sono continue in tutto il piano \mathbb{R}^2 .

In generale, le funzioni $f(x) = x_j$ per $j \in \{1, \dots, n\}$ sono continue in \mathbb{R}^n : infatti, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$, abbiamo

$$|f(x) - f(x_0)| = |x_j - x_{0,j}| \leq \|x - x_0\|,$$

e quindi è sufficiente prendere $\delta = \varepsilon$ nella definizione di continuità.

Inoltre, la norma euclidea $g(x) = \|x\|$ è ovviamente una funzione continua in \mathbb{R}^n : infatti, la forma alternativa della disuguaglianza triangolare (1.1.2) implica facilmente che

$$|g(x) - g(x_0)| = \left| \|x\| - \|x_0\| \right| \leq \|x - x_0\|,$$

e quindi si può ancora scegliere $\delta = \varepsilon$ nella definizione di continuità.

Le funzioni continue in più variabili hanno proprietà analoghe a quelle di una variabile reale.

Proposizione 1.2.3. Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f, g \in C(E)$. Allora

1. $af + bg \in C(E)$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$;
2. $f \cdot g \in C(E)$ e $f/g \in C(F)$, dove $F = \{x \in E : g(x) \neq 0\}$;
3. se $f(E) \subseteq D$, dove $D \subseteq \mathbb{R}$ e $\varphi \in C(D)$, allora $\varphi \circ f \in C(E)$.

In particolare, tutti i polinomi in più variabili sono continui su \mathbb{R}^n , le funzioni razionali fratte $\frac{p(x)}{q(x)}$ sono continue in $\{x \in \mathbb{R}^n : q(x) \neq 0\}$, le funzioni esponenziali e^f sono continue in E , e le funzioni logaritmiche $\log(f)$ sono continue in $\{x \in E : f(x) > 0\}$.

Inoltre, siano $m \in \mathbb{N}$ e $f_1, \dots, f_m \in C(E)$, allora

1. se $F(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ soddisfa $F(E) \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^m$ e $g \in C(D)$, allora $g \circ F \in C(E)$;

¹²Il termine *topologia*, che letteralmente significa “studio dei luoghi”, indica la collezione degli insiemi aperti di un determinato spazio, tramite la quale si possono caratterizzare gli insiemi chiusi, le funzioni continue, i limiti e in generale il calcolo.

¹³La notazione $\delta(x_0, \varepsilon)$ significa che δ dipende da x_0 ed ε .

2. $\max\{f_1, \dots, f_m\}, \min\{f_1, \dots, f_m\} \in C(E)$.

Dimostrazione. [Non vista a lezione.] Dimostriamo solo che se f_1 e f_2 sono continue allora $\max\{f_1, f_2\}$ è continua. La dimostrazione col minimo è simile. Sia $x_0 \in E$. Fissiamo $\varepsilon > 0$: per la continuità di f_1 e f_2 esistono $\delta_1, \delta_2 > 0$ tali che $\|x - x_0\| < \delta_j \Rightarrow |f_j(x) - f_j(x_0)| < \varepsilon$. Abbiamo che se $\|x - x_0\| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$, allora:

$$\begin{aligned} \max\{f_1(x), f_2(x)\} - \varepsilon &= \max\{f_1(x) - \varepsilon, f_2(x) - \varepsilon\} \leq \max\{f_1(x_0), f_2(x_0)\} \\ &\leq \max\{f_1(x_0) + \varepsilon, f_2(x_0) + \varepsilon\} = \max\{f_1(x_0), f_2(x_0)\} + \varepsilon; \end{aligned}$$

quindi

$$|\max\{f_1(x), f_2(x)\} - \max\{f_1(x_0), f_2(x_0)\}| < \varepsilon.$$

Avendo dimostrato il risultato per due funzioni, quello per $\max\{f_1, \dots, f_m\}$ segue per induzione su $m \geq 2$. \square

Esempio 1.2.4. Diamo un altro esempio della composizione di m funzioni continue con una funzione di m variabili reali. Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_m \in C(E)$ e $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ data da $g(y) = \|y\|$. Allora è chiaro che

$$g(f_1(x), \dots, f_m(x)) = \sqrt{\sum_{j=1}^m (f_j(x))^2},$$

di modo che la composizione $g \circ F$ rappresenta la norma (punto per punto) del vettore di funzioni $F = (f_1, \dots, f_m)$.

1.2.2 Insiemi aperti, chiusi e compatti

Definizione 1.2.5. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è *aperto* in \mathbb{R}^n se esiste $f \in C(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < 0\}.$$

Un insieme $C \subseteq \mathbb{R}^n$ è *chiuso* in \mathbb{R}^n se esiste $g \in C(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0\}.$$

Benché sia giusto farlo, nel seguito ometteremo di specificare ogni volta che siamo in \mathbb{R}^n , e diremo solo che un insieme è aperto o chiuso.

Osservazione 1.2.6. Nella definizione di insieme aperto (e analogamente per il caso di insieme chiuso) si può equivalentemente richiedere che esista invece $f_1 \in C(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : f_1(x) > 0\},$$

oppure che esistano $f_2 \in C(\mathbb{R}^n)$ e $t \in \mathbb{R}$ tali che

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : f_2(x) < t\},$$

oppure ancora che esistano $f_3 \in C(\mathbb{R}^n)$ e $s \in \mathbb{R}$ tali che

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : f_3(x) > s\}.$$

Infatti, se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua tale che $A = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < 0\}$, allora è chiaro che sono continue anche le funzioni

$$f_1(x) = -f(x), \quad f_2(x) = f(x) + t \quad \text{e} \quad f_3(x) = s - f(x) \quad \text{per ogni } t, s \in \mathbb{R},$$

e viceversa, se esiste una di queste altre funzioni continue, allora si possono definire f e tutte le altre. Si può quindi verificare facilmente che

$$f(x) < 0 \iff f_1(x) > 0 \iff f_2(x) < t \iff f_3(x) > s.$$

Osservazione 1.2.7. Notiamo che questa definizione di insiemi aperti e chiusi è coerente con le nozioni di intervallo aperto e chiuso nel caso della retta reale \mathbb{R} . Infatti, siano $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = (x - b)(x - a).$$

Allora, si verifica facilmente che $f \in C(\mathbb{R})$ e che

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) < 0\} = (a, b) \quad \text{e} \quad \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq 0\} = [a, b],$$

di modo che effettivamente (a, b) è aperto e $[a, b]$ è chiuso nel senso della Definizione 1.2.5.

Esempio 1.2.8. Il cerchio unitario centrato nell'origine, senza però la sua circonferenza, ovvero l'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\},$$

è aperto, visto che basta considerare la funzione continua $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, mentre lo stesso cerchio unito alla sua circonferenza, ovvero

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\},$$

è chiuso, e lo si vede prendendo in considerazione la stessa funzione f . Inoltre, la circonferenza unitaria

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

è chiusa. Infatti, sia $g(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2$: allora è chiaro che $g \in C(\mathbb{R}^2)$ e

$$g(x, y) \leq 0 \iff g(x, y) = 0 \iff x^2 + y^2 = 1 \iff (x, y) \in C.$$

Una famiglia fondamentale di insiemi aperti e chiusi sono le palle e le sfere (alcuni casi particolari delle quali abbiamo visto in dimensione 2 nell'esempio precedente¹⁴).

Definizione 1.2.9. Per ogni $a \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$ definiamo i seguenti insiemi:

- la *palla aperta* di centro a e raggio r è l'insieme (aperto) $B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\}$;
- la *palla chiusa* di centro a e raggio r è l'insieme (chiuso) $\overline{B_r(a)} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq r\}$;
- la *sfera* di centro a e raggio r è l'insieme (chiuso) $\partial B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| = r\}$.

Osservazione 1.2.10. Osserviamo che la palla aperta è effettivamente un insieme aperto, così come la palla chiusa e la sfera sono chiuse. Infatti, è sufficiente considerare la funzione

$$f(x) = \|x - a\|^2 - r^2 = \sum_{j=1}^n (x_j - a_j)^2 - r^2,$$

che è continua in \mathbb{R}^n , essendo un polinomio, e chiaramente soddisfa

- $f(x) < 0$ se e solo se $x \in B_r(a)$,
- $f(x) \leq 0$ se e solo se $x \in \overline{B_r(a)}$,
- $(f(x))^2 \leq 0$ se e solo se $x \in \partial B_r(a)$.

Raccogliamo nella seguente proposizione una serie di fatti utili relativi alla topologia di \mathbb{R}^n .

Proposizione 1.2.11. Valgono i seguenti fatti:

1. se $f \in C(\mathbb{R}^n)$, allora l'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$ è chiuso;
2. dato $E \subseteq \mathbb{R}^n$, E è aperto se e solo se $\mathbb{R}^n \setminus E$ è chiuso, e viceversa E è chiuso se e solo se $\mathbb{R}^n \setminus E$ è aperto;
3. se $A_1, \dots, A_k \subseteq \mathbb{R}^n$ sono aperti, allora $A_1 \cap \dots \cap A_k$ e $A_1 \cup \dots \cup A_k$ sono aperti;

¹⁴Onde non appesantire il linguaggio, quando si lavora in uno spazio euclideo di dimensione generica n si tende a parlare semplicemente di palle e sfere, senza stare a riferirsi a intervalli simmetrici per $n = 1$ o cerchi e circonferenze per $n = 2$.

4. se $C_1, \dots, C_k \subseteq \mathbb{R}^n$ sono chiusi, allora $C_1 \cap \dots \cap C_k$ e $C_1 \cup \dots \cup C_k$ sono chiusi;
5. l'insieme vuoto \emptyset e tutto lo spazio \mathbb{R}^n sono sia chiusi che aperti, e sono gli unici insiemi in \mathbb{R}^n con questa proprietà;
6. un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è aperto se e solo se per ogni $x \in A$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x) \subset A$ (definizione alternativa di aperto);
7. un insieme $C \subseteq \mathbb{R}^n$ è chiuso se e solo se per ogni successione $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty} \subseteq C$ tale che esiste il limite $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x \in \mathbb{R}^n$ abbiamo $x \in C$ (definizione alternativa di chiuso).

Dimostrazione. Vediamo la dimostrazione dei primi cinque punti.

1. Sia $h(x) = (f(x))^2$: chiaramente, $h \in C(\mathbb{R}^n)$ e $h(x) \leq 0$ se e solo se $f(x) = 0$.
2. Assumiamo che E sia aperto. Sia $f \in C(\mathbb{R}^n)$ tale che $x \in E$ se e solo se $f(x) < 0$. Allora $-f \in C(\mathbb{R}^n)$ e

$$-f(x) \leq 0 \iff f(x) \geq 0 \iff x \notin E,$$

ovvero $\mathbb{R}^n \setminus E = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq 0\}$, ed è dunque chiuso. Chiaramente, questo ragionamento può essere fatto in senso opposto, assumendo che $\mathbb{R}^n \setminus E$ sia chiuso. Poi, la seconda parte dell'enunciato è equivalente alla prima, con i ruoli di E e del suo complementare scambiati.

3. Siano $f_j \in C(\mathbb{R}^n)$ tali che $x \in A_j$ se e solo se $f_j(x) < 0$ per ogni $j \in \{1, \dots, k\}$. Allora abbiamo che $x \in A_1 \cap \dots \cap A_k$ se e solo se $f_j(x) < 0$ per ciascun $j \in \{1, \dots, k\}$, e ciò è vero se e solo se $\max\{f_1(x), \dots, f_k(x)\} < 0$; ma la funzione $\max\{f_1(x), \dots, f_k(x)\} < 0$ è continua in \mathbb{R}^n (per la Proposizione 1.2.3), e quindi ne segue che $A_1 \cap \dots \cap A_k$ è aperto. Per l'unione degli aperti, osserviamo che è sufficiente che una sola delle funzioni $f_j(x)$ sia negativa, e quindi consideriamo il minimo di tali funzioni invece del massimo.
4. Si dimostra in maniera analoga al punto precedente.
5. Consideriamo la funzione costante $f(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, che è ovviamente continua in \mathbb{R}^n . Allora abbiamo

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : 1 < 0\} = \emptyset = \{x : 1 \leq 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq 0\}.$$

Quindi, l'insieme vuoto è sia aperto che chiuso, e quindi lo è anche il suo complementare, \mathbb{R}^n . Che questa proprietà caratterizzi l'insieme vuoto e l'intero spazio è un fatto tecnico che va oltre gli scopi del corso.

□

Definiamo ora il bordo (o la frontiera) di un insieme in \mathbb{R}^n .

Definizione 1.2.12. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Il *bordo* di E è l'insieme

$$\partial E := \{x \in \mathbb{R}^n : E \cap B_r(x) \neq \emptyset \text{ e } (\mathbb{R}^n \setminus E) \cap B_r(x) \neq \emptyset \text{ per ogni } r > 0\}.$$

Per dirla in maniera informale, il bordo di un insieme è costituito dai punti che non stanno né del tutto dentro né del tutto fuori, ma “a metà”, nel senso che ogni palla centrata in tali punti dovrà intersecare sia l'insieme che il suo complementare.

Sfruttando la nozione di bordo, possiamo definire rigorosamente cosa si intende quando diciamo che un punto “sta dentro” o “sta fuori” un insieme.

Definizione 1.2.13. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. L'*interno* di E è l'insieme

$$E^\circ := E \setminus \partial E,$$

mentre la *chiusura* di E è l'insieme

$$\overline{E} := E \cup \partial E.$$

Di conseguenza, diciamo che un punto $x \in \mathbb{R}^n$ è *interno* ad E se $x \in E^\circ$, mentre è *esterno* se $x \notin \overline{E}$.

Esempio 1.2.14. Vediamo nel dettaglio il caso di un intervallo aperto sulla retta reale. Siano $n = 1$ e $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Allora abbiamo

$$\partial(a, b) = \{a, b\}, \quad (a, b)^\circ = (a, b) \quad \text{e} \quad \overline{(a, b)} = [a, b].$$

Infatti, dato che $B_r(x) = (x - r, x + r)$, è facile vedere che

$$(a, b) \cap (a - r, a + r) = (a, \min\{b, a + r\}) \neq \emptyset \quad \text{e} \quad ((-\infty, a] \cup [b, +\infty)) \cap (a - r, a + r) \supseteq (a - r, a] \neq \emptyset \quad \text{per ogni } r > 0,$$

e

$$(a, b) \cap (b - r, b + r) = (\max\{a, b - r\}, b) \neq \emptyset \quad \text{e} \quad ((-\infty, a] \cup [b, +\infty)) \cap (b - r, b + r) \supseteq [b, b + r) \neq \emptyset \quad \text{per ogni } r > 0.$$

Per contro, se $x \in (a, b)$, allora

$$((-\infty, a] \cup [b, +\infty)) \cap (x - r, x + r) = \emptyset \quad \text{per ogni } 0 < r < \min\{x - a, b - x\};$$

mentre se $x \notin [a, b]$, allora

$$(a, b) \cap (x - r, x + r) = \emptyset \quad \text{per ogni } 0 < r < \min\{a - x, x - b\}.$$

Osservazione 1.2.15. I simboli scelti per indicare la palla chiusa e la sfera sono coerenti con questa notazione. Infatti, non è difficile mostrare che la sfera $\partial B_r(a)$ è effettivamente il bordo della palla $B_r(a)$, e che $\overline{B_r(a)} = B_r(a) \cup \partial B_r(a)$, ovvero che la palla chiusa è la chiusura della palla aperta.

Osservazione 1.2.16. Tutto lo spazio \mathbb{R}^n non ha bordo, ovvero $\partial \mathbb{R}^n = \emptyset$, dato che il suo complementare è il vuoto, e dunque la seconda condizione nella definizione di bordo non può essere mai soddisfatta.

Enunciamo alcune proprietà fondamentali di bordo, interno e chiusura.

Proposizione 1.2.17. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora

1. E° è un insieme aperto;
2. \overline{E} e ∂E sono insiemi chiusi;
3. $\partial E = \overline{E} \setminus E^\circ$;
4. E è aperto se e solo se $E^\circ = E$;
5. E è chiuso se e solo se $\overline{E} = E$.

Osservazione 1.2.18. Esistono insiemi che non sono né chiusi né aperti. Ad esempio, se consideriamo $E = B_1(0) \cup \{e_1\} = B_1(0) \cup \{(1, 0, \dots, 0)\}$, allora è chiaro che E non è aperto, dato che $E^\circ = B_1(0) \subsetneq E$, e non è neanche chiuso, dato che $\overline{E} = \overline{B_1(0)} \supsetneq E$. Tuttavia, questo tipo di insiemi non sono facili da gestire nell'ambito del calcolo differenziale, e quindi non li considereremo in questo corso.

Diamo poi altre due utili definizioni relative alla topologia di \mathbb{R}^n .

Definizione 1.2.19. Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è *limitato* se esiste $R > 0$ tale che $E \subseteq B_R(0)$. Un insieme è *illimitato* se non è limitato.

Definizione 1.2.20. Un insieme $K \subseteq \mathbb{R}^n$ è *compatto* se è chiuso e limitato.

Dunque, gli insiemi compatti sono la nozione più vicina, in più variabili, a quella di intervallo chiuso e limitato nella retta reale. Infatti, vale una versione del Teorema di Weierstrass sugli insiemi compatti in \mathbb{R}^n . Prima di enunciarlo, definiamo le nozioni di massimo e minimo di una funzione.

Definizione 1.2.21. Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in E$. Diciamo che

- a è un *punto di massimo assoluto* (o *globale*) per f in E se $f(a) \geq f(x)$ per ogni $x \in E$, ovvero se $f(a)$ è il (*valore*) *massimo* di f in E , e in tal caso scriviamo

$$\max_{x \in E} f(x) = f(a);$$

- a è un *punto di minimo assoluto* (o *globale*) per f in E se $f(a) \leq f(x)$ per ogni $x \in E$, ovvero se $f(a)$ è il (*valore*) *minimo* di f in E , e in tal caso scriviamo

$$\min_{x \in E} f(x) = f(a).$$

Per abbreviare, è consuetudine scrivere solo $\max_E f$ e $\min_E f$, lasciando sottintesa la variabile x .

Teorema 1.2.22 (Teorema di Weierstrass in più variabili). *Siano $K \subset \mathbb{R}^n$ un insieme compatto e $f \in C(K)$. Allora esistono $x_{\min}, x_{\max} \in K$ tali che*

$$\min_{x \in K} f(x) = f(x_{\min}) \quad e \quad \max_{x \in K} f(x) = f(x_{\max}).$$

Osservazione 1.2.23. Il Teorema di Weierstrass implica l'esistenza di almeno un punto di massimo e un punto di minimo assoluti, ma ce ne potrebbero essere molteplici, anche infiniti (basti pensare alle funzioni costanti, per le quali ogni punto è sia di massimo che di minimo). Inoltre, il Teorema di Weierstrass fornisce delle condizioni sufficienti per assicurare l'esistenza di punti in cui i valori massimi e minimi di f sul suo dominio sono realizzati, ma tali punti possono esistere anche in casi in cui f non sia continua, o K non sia compatto. In altre parole, le ipotesi del teorema non sono condizioni necessarie.

Osservazione 1.2.24. Il Teorema di Weierstrass equivale a dire che, dati $K \subset \mathbb{R}^n$ compatto e $f \in C(K)$, allora esistono $\max_{x \in K} f(x)$ e $\min_{x \in K} f(x)$. Questa riformulazione è equivalente nel senso che possiamo ridefinire le nozioni di massimo e minimo a partire da quelle di *estremo superiore* ed *estremo inferiore*, ovvero \sup e \inf . Dati $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, diciamo che $M \in \mathbb{R}$ è un *maggiorante* di f su E se $f(x) \leq M$ per ogni $x \in E$ e che $m \in \mathbb{R}$ è un *minorante* di f su E se $f(x) \geq m$ per ogni $x \in E$. Diciamo poi che f è *illimitata superiormente* su E se non esistono maggioranti, mentre è *illimitata inferiormente* se non esistono minoranti (altrimenti, f è *limitata superiormente* o *inferiormente*). Quindi definiamo estremo superiore ed estremo inferiore per casi:

- se f è limitata superiormente, $\sup_{x \in E} f(x)$ è il minimo dei maggioranti;
- se f è illimitata superiormente, $\sup_{x \in E} f(x) := +\infty$;
- se f è limitata inferiormente, $\inf_{x \in E} f(x)$ è il massimo dei minoranti;
- se f è illimitata inferiormente, $\inf_{x \in E} f(x) := -\infty$.

Per abbreviare, è consuetudine scrivere solo $\sup_E f$ e $\inf_E f$, lasciando sottintesa la variabile x . Di conseguenza, $\sup_E f$ e $\inf_E f$ esistono sempre in $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$. Allora, diciamo che f ammette massimo e minimo in E se esistono $x_{\max}, x_{\min} \in E$ tali che

$$f(x_{\max}) = \sup_E f \quad e \quad f(x_{\min}) = \inf_E f,$$

e in tal caso questi valori di f sono il massimo e il minimo, rispettivamente.

Questa interpretazione permette di capire l'importanza del Teorema di Weierstrass: infatti, mentre esistono sempre gli estremi superiori e inferiori di una funzione, non è detto che, pure se sono finiti, siano effettivamente raggiunti da tale funzione in qualche punto.

Inoltre, ciò ci permette di stabilire un criterio di non esistenza di punti di massimo e minimo assoluti:

- se $f(x) < \sup_E f$ per ogni $x \in E$, allora f non ammette massimo su E e non esistono punti di massimo assoluto;
- se $f(x) > \inf_E f$ per ogni $x \in E$, allora f non ammette minimo su E e non esistono punti di minimo assoluto.

In particolare, se $\sup_E f = +\infty$, allora non esistono punti di massimo assoluto di f su E ; e, se $\inf_E f = -\infty$, allora non esistono punti di minimo assoluto di f su E .

Pur non dando informazioni dirette e precise sulla collocazione dei punti di minimo e massimo, il Teorema di Weierstrass in alcuni casi particolari ne dà di indirette e può essere utile a restringere il campo in cui andiamo a cercare dei punti di massimo e minimo.

Esempio 1.2.25. Consideriamo la funzione $f(x, y) = xy(x + y - 1)$ sull'insieme

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\},$$

che è un triangolo rettangolo di cateti di lunghezza 1. Notiamo che T è chiuso e limitato: infatti, è l'intersezione di tre insiemi chiusi, ovvero

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}, \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}, \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 1 - x\},$$

ed è chiaramente contenuto in $B_R(0)$ per ogni $R > 1$. Quindi T è compatto, e allora per il Teorema di Weierstrass f ha un massimo e un minimo in T . Inoltre, abbiamo

$$\min_{(x,y) \in T} f(x, y) \leq 0 \quad \text{e} \quad \max_{(x,y) \in T} f(x, y) = 0,$$

dato che $f(x, y) \leq 0$ per ogni $(x, y) \in T$ e $f(x, y) = 0$ per ogni $(x, y) \in \partial T$.

Non possiamo trarre la stessa conclusione nell'insieme

$$S = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \geq 1\},$$

che è chiuso, visto che è ancora l'intersezione di tre insiemi chiusi, ma non limitato, dato che contiene tutta la semiretta $\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1\}$. Abbiamo che $f(x, y) \geq 0$ per ogni $(x, y) \in S$, e $f(x, y) = 0$ per ogni $(x, y) \in \partial S$, quindi deduciamo che

$$\min_{(x,y) \in S} f(x, y) = 0.$$

Invece, non possiamo dedurre dal Teorema di Weierstrass che f abbia un valore massimo su S . E infatti non lo ha: dimostriamo che f è illimitata superiormente su S , ovvero $\sup_{(x,y) \in S} f(x, y) = +\infty$. Allo scopo, consideriamo la successione di punti $(k, k) \in S$ per ogni $k \in \mathbb{N}$: allora vediamo facilmente che

$$f(k, k) = k^2(2k - 1) \quad \text{e quindi} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} f(k, k) = +\infty,$$

di modo che non possono esistere maggioranti di f su S .

1.2.3 Limiti di funzioni

In maniera analoga a quanto visto per il calcolo in una variabile, definiamo i limiti di funzioni in più variabili.

Definizione 1.2.26. Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}^n$ un suo punto di accumulazione, ovvero tale che per ogni $r > 0$ si abbia che $B_r(a) \cap (E \setminus \{a\}) \neq \emptyset$. Sia $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Diciamo che $f(x)$ tende a $L \in \mathbb{R}$ per x che tende ad a , e scriviamo

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L,$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(a, \varepsilon) > 0$ tale che

$$\forall x \in E : \|x - a\| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Osservazione 1.2.27. In particolare, se $x_0 \in E$ è di accumulazione, allora f è continua in x_0 se e solo se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Inoltre, notiamo che, se E è un aperto, allora ogni punto di E è di accumulazione. Nel seguito, lavoreremo principalmente con insiemi aperti.

Osserviamo che, rispetto al caso della retta reale, il limite in più variabili esiste se e solo se esiste lungo qualunque possibile traiettoria che porta ad a . Quindi, il limite non esiste se non esiste lungo una qualche traiettoria o è diverso lungo due traiettorie diverse. Vediamo due esempi.

Esempio 1.2.28. Siano $n = 2$ e $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ per $(x, y) \neq (0, 0)$. Allora non esiste

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$. Infatti, osserviamo che

- $f(x, 0) = \frac{x^2}{x^2} = 1$ per ogni $x \neq 0$,

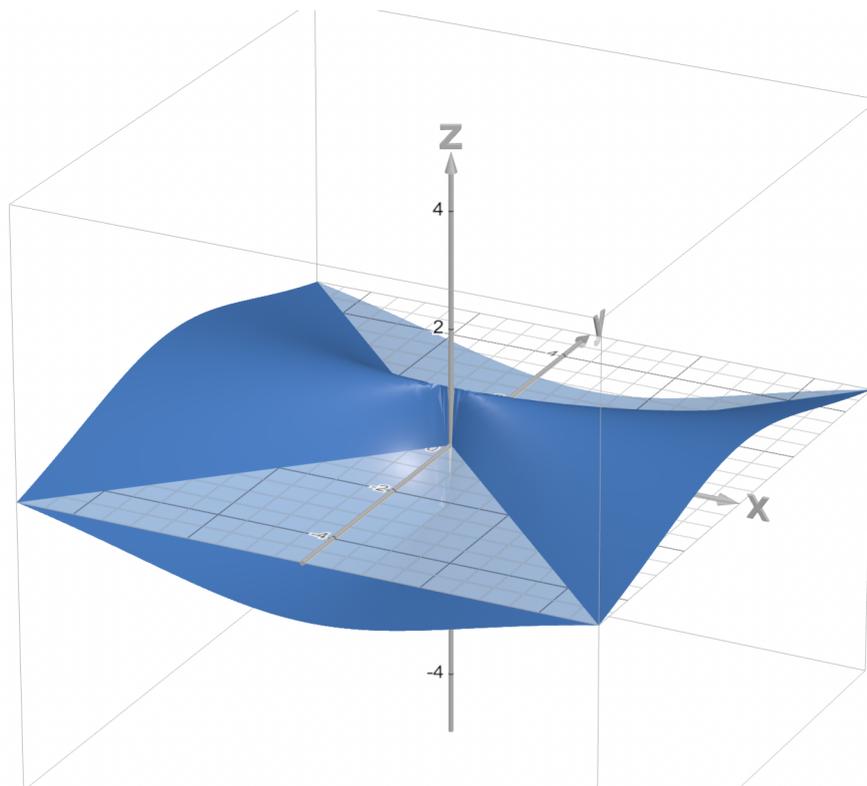


Figura 1.1: Il grafico di $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

- $f(0, y) = \frac{-y^2}{y^2} = -1$ per ogni $y \neq 0$,
- $f(x, mx) = \frac{x^2 - m^2x^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}$ per ogni $x \neq 0$ e $m \in \mathbb{R}$.

Quindi, questa funzione assume diversi valori costanti lungo diverse rette che passano dall'origine, e perciò il suo limite per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ non può esistere.

Esempio 1.2.29. Il limite potrebbe tuttavia esistere lungo tutte le rette che vanno al punto a e avere lo stesso valore, ma non esistere lo stesso come limite in più variabili. Per vedere ciò, poniamo $n = 2$, $a = (0, 0)$ e consideriamo $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$ per $(x, y) \neq (0, 0)$. Allora abbiamo

- $f(x, mx) = \frac{mx^3}{x^4 + m^2x^2} = \frac{mx}{x^2 + m^2}$ per ogni $x \neq 0$ e $m \in \mathbb{R}$, di modo che $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = 0$,
- $f(0, y) = 0$,

ovvero il limite di f lungo una qualunque retta che va nell'origine è 0. Tuttavia, se consideriamo la traiettoria data dalla parabola $y = x^2$, abbiamo

$$f(x, x^2) = \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2} \text{ per ogni } x \neq 0,$$

di modo che $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2) = \frac{1}{2} \neq 0$. Dunque, il limite di $f(x, y)$ per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ non esiste, dato che lungo le rette è 0, mentre lungo una parabola è $\frac{1}{2}$.

Per parlare con maggiore precisione dell'idea di traiettorie di punti nello spazio, dobbiamo introdurre la nozione di curva.

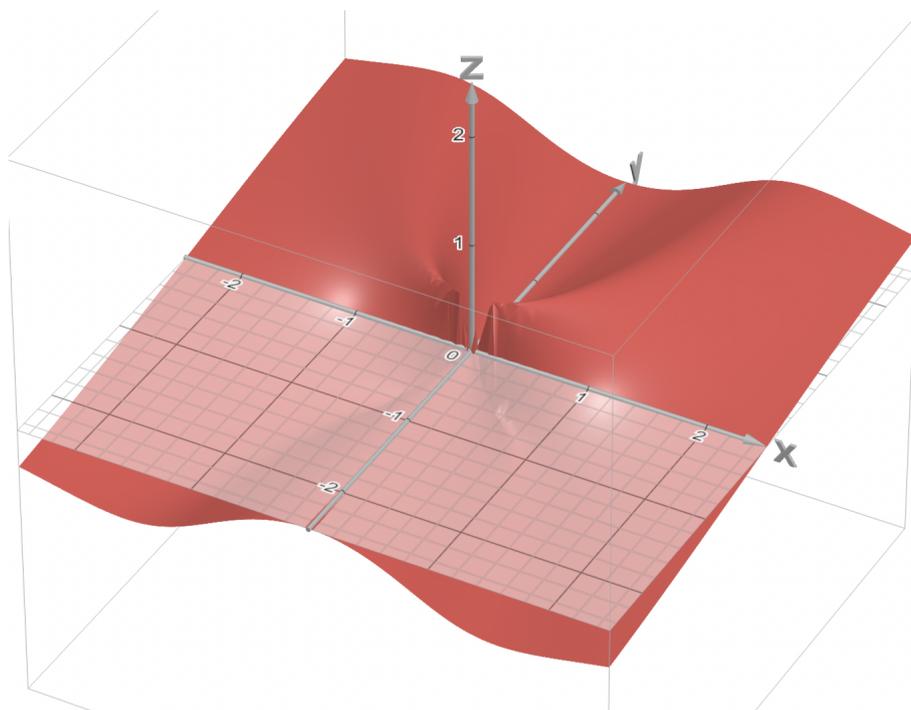


Figura 1.2: Il grafico di $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$.

1.2.4 Curve

Ci si può muovere nel piano e nello spazio lungo delle *curve*¹⁵. Questo termine è in genere usato con due significati diversi: la curva come oggetto geometrico (l'insieme dei punti toccati durante il percorso), o la curva come oggetto cinematico (la curva intesa come traiettoria: posizione di un punto mobile al variare del tempo). In questo corso intendiamo la curva come traiettoria (interpretazione cinematica) e usiamo il termine di “traccia” per l'oggetto geometrico. In molte applicazioni i due punti di vista sono di fatto interscambiabili (si può parlare di “circonferenza” intendendo una qualsiasi traiettoria che la percorra, cioè che la “parametrizzi”), ma è comunque importante fare la distinzione.

Definizione 1.2.30. Una *curva* in $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è una funzione $\gamma : I \rightarrow E$, dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo e $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ è un vettore di funzioni $\gamma_j \in C(I)$ per $j \in \{1, \dots, n\}$ ¹⁶. L'immagine $\gamma(I) \subseteq E$ è la *traiettoria*, o *traccia*, della curva γ .

Osservazione 1.2.31. Osserviamo che la stessa traccia può essere data da diverse curve, ovvero diverse *parametrizzazioni* possono risultare nello stesso oggetto geometrico (percorso però con velocità differenti). Ad esempio, siano

$$I = [0, 1], \quad n = 2, \quad \gamma(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \quad \text{e} \quad \delta(t) = (\cos(2\pi t^2), \sin(2\pi t^2)).$$

Chiaramente $\gamma(I) = \delta(I)$ (sono entrambe la circonferenza unitaria), ma la velocità (concetto che sarà introdotto rigorosamente nella sezione 1.5) di γ è costante in modulo, mentre il modulo della velocità di δ dipende da $t \in [0, 1]$.

Vediamo un esempio fondamentale di curva, ovvero il segmento che unisce due punti nello spazio.

Esempio 1.2.32. Dati i punti $P, Q \in \mathbb{R}^n$, cerchiamo una funzione la cui traccia sia il segmento che va da P a Q , ovvero una parametrizzazione per tale segmento. La maniera più semplice per farlo è scegliere una curva γ la cui traccia coincida con la retta che passa per i punti P e Q , per poi restringerla opportunamente. Osserviamo quindi che si tratta di rappresentare lo spazio affine dato da

$$P + \text{span} \{Q - P\} = \{P + t(Q - P) : t \in \mathbb{R}\}.$$

¹⁵Anche sulla retta reale, dove però le curve sono banalmente dei segmenti.

¹⁶Quindi γ_j è la j -esima componente di γ , e a ogni $t \in I$ viene associato il punto $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t)) \in E$.

Di conseguenza, possiamo scegliere proprio la curva

$$\gamma(t) = P + t(Q - P) = (1 - t)P + tQ = ((1 - t)P_1 + tQ_1, \dots, (1 - t)P_n + tQ_n) \text{ per } t \in \mathbb{R},$$

e poi osservare che $\gamma(0) = P$ (il punto iniziale) e $\gamma(1) = Q$ (il punto finale). Dunque, il segmento da P a Q è dato dalla curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, ovvero lo si ottiene restringendo il dominio di γ all'intervallo $[0, 1]$. Notiamo poi che si potrebbe scegliere qualunque altra curva

$$\delta(t) = P + f(t)(Q - P) \text{ per } t \in [0, 1],$$

dove $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ è una qualche funzione continua, crescente e tale che $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$. Tuttavia, è naturale scegliere la parametrizzazione più semplice, ovvero quella lineare, anche avendo in mente il calcolo di derivate e integrali relativi alle curve (che vedremo nelle sezioni 1.5 e 2.3, e nel capitolo 3).

1.2.5 Insiemi connessi per archi e Teorema degli Zeri

La nozione di curva permette di definire il concetto di connessione per insiemi nello spazio euclideo, che è di fatto la formulazione rigorosa dell'idea che l'insieme "sia costituito da un solo pezzo".

Definizione 1.2.33. Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è *connesso per archi* se per ogni coppia di punti P, Q di E esiste una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow E$ con punto iniziale $\gamma(a) = P$ e punto finale $\gamma(b) = Q$.

Per esempio, l'insieme $E_1 = \{(x, y) : x^2 - y^2 < 1\}$ è connesso per archi, mentre $E_2 = \{(x, y) : x^2 - y^2 > 1\}$ non lo è.

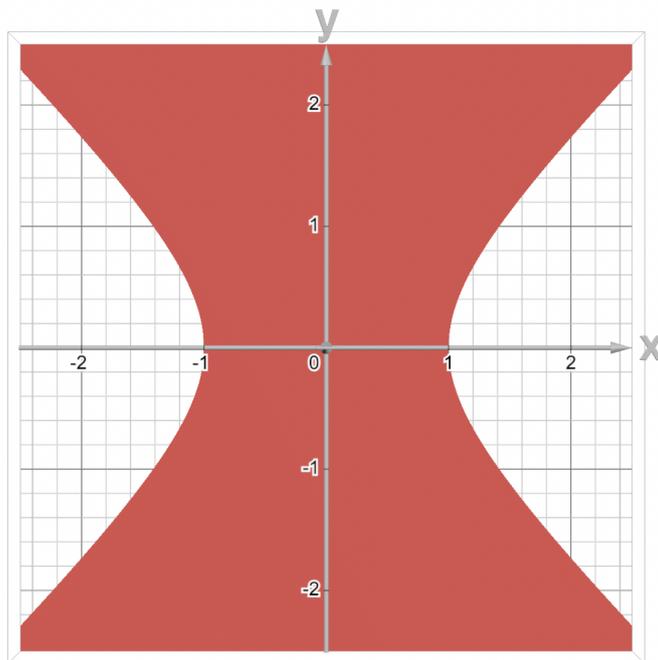


Figura 1.3: L'insieme $E_1 = \{(x, y) : x^2 - y^2 < 1\}$ (in rosso).

Teorema 1.2.34 (Teorema degli zeri). *Se $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è connesso per archi e $f \in C(E)$, allora $f(E)$ è un intervallo in \mathbb{R} . Di conseguenza, se esistono $x_1, x_2 \in E$ tali che $f(x_1) < 0 < f(x_2)$, allora esiste $x_0 \in E$ tale che $f(x_0) = 0$.*

Dimostrazione. Vediamo solo la dimostrazione dell'esistenza effettiva degli zeri. Dato che E è connesso per archi, allora esiste una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow E$ tale che $\gamma(a) = x_1$ e $\gamma(b) = x_2$. Allora, la

funzione di una variabile $h = f \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, e perciò per essa vale il Teorema degli Zeri sulla retta reale: dato che

$$h(a) = f(\gamma(a)) = f(x_1) < 0 < f(x_2) = f(\gamma(b)) = h(b),$$

allora esiste $t_0 \in (a, b)$ tale che $0 = h(t_0) = f(\gamma(t_0))$, e perciò abbiamo $x_0 = \gamma(t_0)$. \square

Si può applicare il Teorema degli Zeri allo scopo di semplificare il compito di individuare insiemi determinati da disequazioni elementari¹⁷ nel piano cartesiano. Illustriamo ora tale metodo.

Sia $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) > 0\}$ per qualche $f \in C(\mathbb{R}^2)$. Denotiamo con $Z(f)$ l'insieme degli zeri di f , ovvero

$$Z(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}.$$

Osserviamo che $Z(f)$ è un chiuso, grazie al punto 1 della Proposizione 1.2.11. Di conseguenza, per il punto 2 della Proposizione 1.2.11, sappiamo che $\mathbb{R}^2 \setminus Z(f)$ è aperto. Supponiamo poi che $Z(f)$ sia un'unione finita di curve, e che

$$\mathbb{R}^2 \setminus Z(f) = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$$

per qualche $k \in \mathbb{N}$, dove gli insiemi A_j sono aperti, disgiunti, connessi per archi, e tali che $\partial A_j \subseteq Z(f)$, per $j \in \{1, \dots, k\}$. Tali insiemi A_j vengono detti *componenti connesse per archi* di $\mathbb{R}^2 \setminus Z(f)$. A questo punto, per conoscere il segno di f , è sufficiente controllare il valore di f in un singolo punto $(x_j, y_j) \in A_j$ per ogni $j \in \{1, \dots, k\}$. Infatti, se f potesse assumere valori con segno opposto in una stessa componente connessa A_j di $\mathbb{R}^2 \setminus Z(f)$, allora per il Teorema degli Zeri f si dovrebbe annullare in qualche punto in A_j , ma ciò è impossibile, poiché $A_j \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus Z(f)$ e quindi $A_j \cap Z(f) = \emptyset$. Dunque, concludiamo che l'insieme E che volevamo trovare è dato dall'unione degli A_j tali che $f(x_j, y_j) > 0$.

Questo metodo si estende facilmente al caso in cui $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) < 0\}$, nel quale basta considerare le componenti A_j tali che $f(x_j, y_j) < 0$. Infine, i casi $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \geq 0\}$ e $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \leq 0\}$ si ottengono ragionando come sopra, e poi unendo gli insiemi A_j trovati all'insieme $Z(f)$.

Vediamo alcuni esempi di applicazioni di questo approccio.

Esempio 1.2.35. Sia

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) > 0\},$$

dove $f(x, y) = xy - 1$. Osserviamo che l'insieme degli zeri di f , $Z(f)$, è dato dall'iperbole equilatera $y = \frac{1}{x}$, ovvero

$$\begin{aligned} Z(f) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{1}{x}, x \neq 0 \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{1}{x}, x > 0 \right\} \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{1}{x}, x < 0 \right\}. \end{aligned}$$

Dunque vediamo che $Z(f)$ è l'unione di due curve, ovvero i due archi dell'iperbole equilatera $xy = 1$. Ora ci basta controllare il valore di f in un singolo punto per ciascuna componente connessa di $\mathbb{R}^2 \setminus Z(f)$, per conoscere il segno di f ovunque. Dunque, osserviamo che

$$\mathbb{R}^2 \setminus Z(f) = A_1 \cup A_2 \cup A_3,$$

dove

- $A_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > \frac{1}{x}, x > 0 \right\}$,
- $A_3 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < \frac{1}{x}, x < 0 \right\}$,

¹⁷Ovvero, che coinvolgono solo funzioni elementari, cioè polinomi, funzioni razionali fratte, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche e loro composizioni.

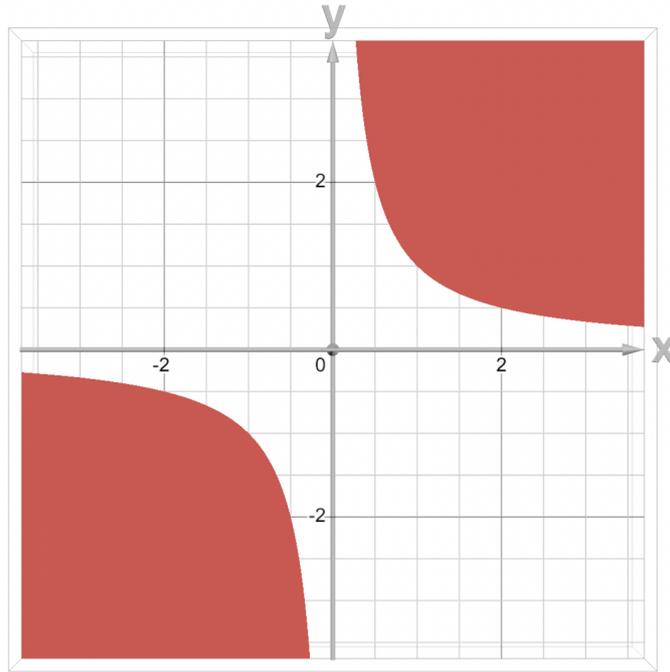


Figura 1.4: L'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1\}$ (in rosso).

- $A_2 = \mathbb{R}^2 \setminus (Z(f) \cup A_1 \cup A_3)$.

Quindi abbiamo:

- se $(x, y) = (2, 2) \in A_1$, allora $f(2, 2) = 4 - 1 = 3 > 0$, e così $f(x, y) > 0$ per ogni $(x, y) \in A_1$;
- se $(x, y) = (0, 0) \in A_2$, allora $f(0, 0) = 0 - 1 = -1 < 0$, e così $f(x, y) < 0$ per ogni $(x, y) \in A_2$;
- se $(x, y) = (-2, -2) \in A_3$, allora $f(-2, -2) = 4 - 1 = 3 > 0$, e così $f(x, y) > 0$ per ogni $(x, y) \in A_3$.

Perciò concludiamo che

$$E = A_1 \cup A_3 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > \frac{1}{x}, x > 0 \right\} \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < \frac{1}{x}, x < 0 \right\}.$$

Mostriamo infine in dettaglio che A_1 è un insieme connesso per archi. Dalla figura risulta intuitivamente chiaro che, dati due punti in A_1 , l'intero segmento che li unisce è contenuto in A_1 . Dimostriamo questo fatto rigorosamente. Siano $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in A_1$ e sia

$$\gamma(t) = ((1-t)x_0 + tx_1, (1-t)y_0 + ty_1), \quad \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

la curva che parametrizza il segmento da (x_0, y_0) a (x_1, y_1) . Affermiamo che $\gamma(t) \in A_1$ per ogni $t \in [0, 1]$. In realtà, ci basta dimostrarlo per ogni $t \in (0, 1)$, dato che $\gamma(0) = (x_0, y_0) \in A_1$ e $\gamma(1) = (x_1, y_1) \in A_1$. Quindi dobbiamo verificare che le due componenti di $\gamma(t)$ soddisfano le condizioni che definiscono A_1 , ovvero

$$\begin{cases} (1-t)y_0 + ty_1 > \frac{1}{(1-t)x_0 + tx_1} \\ (1-t)x_0 + tx_1 > 0 \end{cases}.$$

Osserviamo che $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in A_1$ implica $x_0y_0 > 1, x_1y_1 > 1$, e $x_0, x_1, y_0, y_1 > 0$. Dunque, la seconda condizione segue immediatamente dal fatto che $x_0, x_1 > 0$ e $(1-t), t > 0$ per ogni $t \in (0, 1)$. Per dimostrare la prima condizione, iniziamo osservando che è equivalente a

$$((1-t)x_0 + tx_1)((1-t)y_0 + ty_1) > 1.$$

A questo punto, calcoliamo il prodotto esplicitamente e sfruttiamo il fatto che $x_0y_0 > 1, x_1y_1 > 1$ per ottenere

$$\begin{aligned} ((1-t)x_0 + tx_1)((1-t)y_0 + ty_1) &= (1-t)^2x_0y_0 + t(1-t)x_0y_1 + t(1-t)x_1y_0 + t^2x_1y_1 \\ &> (1-t)^2 + t(1-t)(x_0y_1 + x_1y_0) + t^2 \\ &= 1 + 2t^2 - 2t + t(1-t)(x_0y_1 + x_1y_0) \\ &= 1 - 2t(1-t) + t(1-t)(x_0y_1 + x_1y_0) \\ &= 1 + t(1-t)(x_0y_1 + x_1y_0 - 2). \end{aligned}$$

A questo punto, ci basta mostrare che

$$x_0y_1 + x_1y_0 > 2.$$

Allo scopo, notiamo che

$$x_0y_1 + x_1y_0 > \frac{x_0}{x_1} + \frac{x_1}{x_0};$$

quindi poniamo $\lambda = \frac{x_0}{x_1}$ e dobbiamo trovare il minimo della funzione

$$\varphi : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(\lambda) = \lambda + \frac{1}{\lambda}.$$

Osserviamo che

$$\varphi'(\lambda) = 1 - \frac{1}{\lambda^2} \geq 0 \iff 0 < \lambda \leq 1,$$

con $\varphi'(1) = 0$. Perciò, $\lambda = 1$ è un punto di minimo per φ , ed è un punto di minimo assoluto su $(0, +\infty)$, dato che $\varphi(\lambda) \rightarrow +\infty$ per $\lambda \rightarrow 0^+$ e $\lambda \rightarrow +\infty$. Quindi, ne segue che¹⁸

$$\varphi(\lambda) \geq \varphi(1) = 2 \quad \text{per ogni } \lambda > 0,$$

e allora otteniamo

$$x_0y_1 + x_1y_0 > \frac{x_0}{x_1} + \frac{x_1}{x_0} \geq 2.$$

In conclusione, ciò implica che

$$((1-t)x_0 + tx_1)((1-t)y_0 + ty_1) > 1 + t(1-t)(x_0y_1 + x_1y_0 - 2) \geq 1,$$

dato che $t(1-t) > 0$ per ogni $t \in (0, 1)$. Perciò $\gamma(t) \in A_1$ per ogni $t \in [0, 1]$. Notiamo che un approccio analogo permette di dimostrare che A_3 è un insieme connesso per archi: l'unica differenza risiede nel segno delle coordinate, che richiede una maggiore attenzione relativa ai segni di disuguaglianza. In particolare, se $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in A_3$, allora abbiamo

$$y_0 < \frac{1}{x_0}, \quad x_0 < 0, \quad y_1 < \frac{1}{x_1}, \quad x_1 < 0,$$

e dunque $x_0y_0 > 1, x_1y_1 > 1$, e $x_0, x_1, y_0, y_1 < 0$. Quindi si prende la stessa funzione $\gamma(t)$ e si dimostra che $\gamma(t) \in A_3$ per ogni $t \in [0, 1]$, dato che

$$(1-t)x_0 + tx_1 < 0$$

e

$$((1-t)x_0 + tx_1)((1-t)y_0 + ty_1) > 1 + t(1-t)(x_0y_1 + x_1y_0 - 2) \geq 1,$$

risultato che si ottiene come prima, dato che $\frac{x_0}{x_1} > 0$, essendo il rapporto tra due numeri negativi.

Esempio 1.2.36. Sia

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+y)(x^2 + y^2 - 1) > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) > 0\},$$

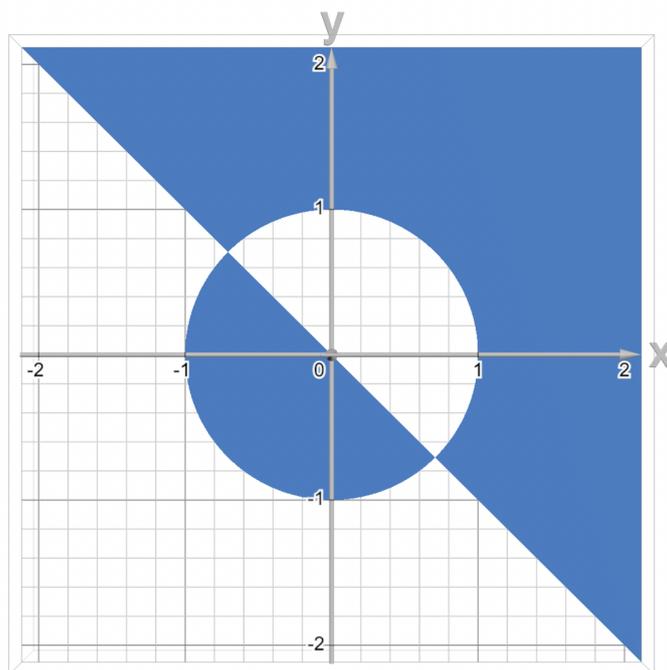


Figura 1.5: L'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + y)(x^2 + y^2 - 1) > 0\}$ (in blu).

dove $f(x, y) = (x + y)(x^2 + y^2 - 1)$. Allora, è chiaro che

$$\begin{aligned} Z(f) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x \text{ oppure } x^2 + y^2 = 1\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}. \end{aligned}$$

Quindi,

$$\mathbb{R}^2 \setminus Z(f) = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4,$$

dove

- $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > -x, x^2 + y^2 > 1\}$,
- $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > -x, x^2 + y^2 < 1\}$,
- $A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < -x, x^2 + y^2 < 1\}$,
- $A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < -x, x^2 + y^2 > 1\}$.

Perciò abbiamo:

- se $(x, y) = (2, 0) \in A_1$, allora $f(2, 0) = 2(4 - 1) = 6 > 0$, e così $f(x, y) > 0$ per ogni $(x, y) \in A_1$;
- se $(x, y) = (\frac{1}{2}, 0) \in A_2$, allora $f(\frac{1}{2}, 0) = \frac{1}{2}(\frac{1}{4} - 1) = -\frac{3}{8} < 0$, e così $f(x, y) < 0$ per ogni $(x, y) \in A_2$;
- se $(x, y) = (-\frac{1}{2}, 0) \in A_3$, allora $f(-\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{2}(\frac{1}{4} - 1) = \frac{3}{8} > 0$, e così $f(x, y) > 0$ per ogni $(x, y) \in A_3$;

¹⁸Alternativamente, si può ottenere questo risultato verificando a mano che

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} \geq 2 \text{ per ogni } \lambda > 0.$$

Infatti, questa disequazione è equivalente a

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 \geq 0 \text{ per ogni } \lambda > 0,$$

che è ovviamente vera, dato che $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$.

- se $(x, y) = (-2, 0) \in A_4$, allora $f(-2, 0) = (-2)(4 - 1) = -6 < 0$, e così $f(x, y) < 0$ per ogni $(x, y) \in A_4$.

Infine concludiamo che

$$E = A_1 \cup A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > -x, x^2 + y^2 > 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < -x, x^2 + y^2 < 1\}.$$

1.3 Derivate parziali prime, gradiente e jacobiano

Da qui in avanti, Ω indica un insieme aperto in \mathbb{R}^n . Ricordiamo la notazione per la base canonica di \mathbb{R}^n (identificando i vettori con i punti):

$$e_j = (0, \dots, \underbrace{1}_j, \dots, 0) \text{ per } j \in \{1, \dots, n\},$$

ovvero gli e_j sono i vettori aventi 1 come j -esima componente e tutte le altre uguali a 0.

1.3.1 Derivate parziali

Definizione 1.3.1 (Derivata parziale e gradiente). Siano $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \Omega$ e $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. La *derivata parziale* di f rispetto a x_j in a è il limite

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{h \rightarrow 0 \text{ in } \mathbb{R}} \frac{f(a + he_j) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_j + h, \dots, a_n) - f(a)}{h},$$

se esiste finito. Se esistono tutte le derivate parziali rispetto a x_1, \dots, x_n in a , il vettore riga che le ha come elementi è il *gradiente* di f in a ,

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

Per le derivate parziali e il gradiente si usano anche le seguenti notazioni:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \partial_{x_j} f = f_{x_j} = \partial_j f$$

e

$$\nabla f = Df = \text{grad} f.$$

Dalla definizione risulta che la derivata parziale in x_j si calcola come derivata prima in x_j , mentre le altre $(n - 1)$ variabili rimangono fisse. Vediamo questo fatto con dei calcoli concreti.

Esempio 1.3.2. Sia $f(x, y) = 2x - xy^2$. Fissando y e derivando in x , vediamo che

$$\partial_x f(x, y) = 2 - y^2;$$

mentre, fissando x e derivando in y , vediamo che

$$\partial_y f(x, y) = -2xy.$$

Si può verificare che questi conti sono coerenti con la definizione delle derivate parziali: infatti, abbiamo

$$\begin{aligned} \partial_x f(x, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2(x+h) - (x+h)y^2) - (2x - xy^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x + 2h - xy^2 - hy^2 - 2x + xy^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h - hy^2}{h} = 2 - y^2, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \partial_y f(x, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2x - x(y+h)^2) - (2x - xy^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x - xy^2 - xh^2 - 2xyh - 2x + xy^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-xh^2 - 2xyh}{h} = -2xy. \end{aligned}$$

Raccogliamo nella seguente proposizione alcune regole per il calcolo delle derivate parziali, che sono analoghe a quelle viste in dimensione 1 (anche la dimostrazione lo è, ed è perciò omessa).

Proposizione 1.3.3. *Siano $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \Omega$ e $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Assumiamo che esistano le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ e $\frac{\partial g}{\partial x_j}(a)$. Allora abbiamo*

$$1) \frac{\partial(f+g)}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + \frac{\partial g}{\partial x_j}(a);$$

$$2) \frac{\partial(cf)}{\partial x_j}(a) = c \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \text{ per ogni } c \in \mathbb{R};$$

$$3) \text{ se } g \text{ e } f \text{ sono continue in } a, \text{ allora } \frac{\partial(fg)}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)g(a) + f(a)\frac{\partial g}{\partial x_j}(a);$$

$$4) \text{ se } g \text{ e } f \text{ sono continue in } a \text{ e } g(a) \neq 0, \frac{\partial\left(\frac{f}{g}\right)}{\partial x_j}(a) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)g(a) - f(a)\frac{\partial g}{\partial x_j}(a)}{(g(a))^2};$$

Inoltre, sia $\phi : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile su I , assumiamo che $f(\Omega) \subseteq I$, di modo che $\phi \circ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sia ben definita, e assumiamo anche che f sia continua in a . Allora esiste la derivata parziale di $\phi \circ f$ rispetto a x_j in a , e abbiamo

$$\frac{\partial(\phi \circ f)}{\partial x_j}(a) = \phi'(f(a))\frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

Se poi esistono le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$, allora

$$\nabla(\phi \circ f)(a) = \phi'(f(a))\nabla f(a).$$

In conclusione, per calcolare le derivate parziali rispetto a una certa variabile, è sufficiente considerare le altre variabili come costanti, e adoperare le regole per il calcolo della derivata prima in quella variabile.

Esempio 1.3.4. Sia $f(x, y) = xe^{x+y}$. Allora abbiamo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(xe^x e^y) = e^y \frac{\partial}{\partial x}(xe^x) = e^y(e^x + xe^x) = (1+x)e^{x+y}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(xe^x e^y) = xe^x \frac{\partial}{\partial y}(e^y) = xe^x e^y = xe^{x+y},$$

e quindi

$$\nabla f(x, y) = ((1+x)e^{x+y}, xe^{x+y}).$$

1.3.2 Differenziabilità in più variabili

Com'è noto, per una funzione f di una variabile reale l'esistenza della derivata prima in un punto a implica la continuità di f in a . Quindi, è naturale domandarsi se ciò sia vero anche in \mathbb{R}^n per $n \geq 2$. Come mostreremo nel seguente esempio, possono esistere tutte le derivate parziali in ogni punto del dominio della funzione, senza però che la funzione sia continua sul dominio.

Esempio 1.3.5. Sia $n = 2$ e

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Infatti, se $(x, y) \neq (0, 0)$, allora abbiamo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Invece, se $(x, y) = (0, 0)$, notiamo che $f(0, 0) = f(h, 0) = f(0, h) = 0$ per ogni $h \in \mathbb{R}$, e quindi otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = 0.\end{aligned}$$

Quindi, le derivate parziali di f esistono in ogni punto di \mathbb{R}^2 . Tuttavia, non è difficile vedere che f non è continua in $(0, 0)$. Infatti abbiamo

$$f(x, 0) = f(0, y) = 0 \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R},$$

e, per ogni $m \in \mathbb{R}$,

$$f(x, mx) = \frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{1 + m^2} \quad \text{per ogni } x \neq 0.$$

Quindi non si può avere $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ (in effetti, il limite non esiste affatto). Si può inoltre mostrare che le derivate parziali non sono continue in $(0, 0)$.

Nell'esempio precedente esistono le derivate parziali, ma non sono funzioni continue in ogni punto del loro dominio. Ciò suggerisce l'importanza della richiesta di continuità delle derivate parziali per la classe di funzioni differenziabili con continuità.

Definizione 1.3.6 (Funzioni differenziabili con continuità, o C^1). Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Diciamo che f è di classe C^1 , o *differenziabile con continuità*, e scriviamo $f \in C^1(\Omega)$, se le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ esistono per ogni $j = 1, \dots, n$ e per ogni $x \in \Omega$, e se $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in C(\Omega)$.

Osservazione 1.3.7. Grazie ai punti (1) e (2) della Proposizione 1.3.3, concludiamo subito che, se $f, g \in C^1(\Omega)$, allora $\alpha f + \beta g \in C^1(\Omega)$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. In altre parole, $C^1(\Omega)$ è uno spazio vettoriale (di dimensione infinita), dato che contiene ogni combinazione lineare dei suoi elementi.

Osserviamo che la definizione di funzioni C^1 non richiede esplicitamente la continuità delle funzioni, ma solo delle derivate: come vedremo, questa è una conseguenza (non banale) della continuità delle derivate parziali.

Una proprietà fondamentale delle funzioni differenziabili è la formula dello sviluppo di Taylor al primo ordine.

Teorema 1.3.8 (Formula di Taylor al I ordine in più variabili). Sia $f \in C^1(\Omega)$. Allora per ogni $a \in \Omega$ vale la formula di Taylor al I ordine per f in a :

$$\begin{aligned}f(a + h) &= f(a) + \nabla f(a) \cdot h + o(\|h\|) \quad \text{per } h \rightarrow 0 \text{ in } \mathbb{R}^n \\ &= f(a) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j + o\left(\sqrt{\sum_{j=1}^n h_j^2}\right) \quad \text{per } h \rightarrow 0 \text{ in } \mathbb{R}^n,\end{aligned} \tag{1.3.1}$$

ovvero

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a) - \nabla f(a) \cdot h}{\|h\|} = 0. \tag{1.3.2}$$

Se una funzione f soddisfa (1.3.2) in un certo punto $a \in \Omega$, allora f è *differenziabile* in a . La formula (1.3.1) si può scrivere alternativamente come

$$f(x) = f(a) + \nabla f(a) \cdot (x - a) + o(\|x - a\|) \quad \text{per } x \rightarrow a \text{ in } \mathbb{R}^n, \tag{1.3.3}$$

e questo ci permette di concludere che una funzione C^1 deve essere necessariamente continua.

Corollario 1.3.9. Sia $f \in C^1(\Omega)$. Allora $f \in C(\Omega)$, ovvero, per ogni $a \in \Omega$ abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Dimostrazione. Grazie a (1.3.3), vediamo che

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) - f(a) = \lim_{x \rightarrow a} \nabla f(a) \cdot (x - a) + o(\|x - a\|) = 0.$$

□

Osservazione 1.3.10. In particolare, il Corollario 1.3.9 implica che possiamo definire equivalentemente $C^1(\Omega)$ come lo spazio delle funzioni continue con derivate parziali continue, ovvero

$$C^1(\Omega) = \left\{ f \in C(\Omega) : \frac{\partial f}{\partial x_j} \in C(\Omega) \text{ per ogni } j \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

Di conseguenza, possiamo applicare i punti (3) e (4) della Proposizione 1.3.3 per concludere che, se $f, g \in C^1(\Omega)$, allora $fg \in C^1(\Omega)$ e $\frac{f}{g} \in C^1(\Omega \setminus Z(g))$. In particolare, dato che già sappiamo che $C^1(\Omega)$ è uno spazio vettoriale, ne deduciamo che tutti i polinomi e le funzioni razionali fratte sono C^1 sul loro dominio. Un analogo discorso stesso vale per le composizioni di funzioni C^1 , grazie alla seconda parte della Proposizione 1.3.3. In conclusione, tutte le funzioni elementari (ovvero funzioni che siano il risultato di somme, prodotti, rapporti e composizioni di polinomi, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche e loro inverse) sono C^1 sul loro dominio di definizione.

Prima di dimostrare la formula dello sviluppo di Taylor al primo ordine, vediamo come ricavarla in un esempio concreto.

Esempio 1.3.11. Sia $f(x, y) = x^2y$. Allora abbiamo

$$\nabla f(x, y) = (2xy, x^2).$$

Quindi, per ogni $(x_0, y_0), (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$, abbiamo

$$\begin{aligned} f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) &= (x_0 + h_1)^2(y_0 + h_2) = x_0^2y_0 + 2x_0y_0h_1 + y_0h_1^2 + x_0^2h_2 + 2x_0h_1h_2 + h_1^2h_2 \\ &= f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + h_1^2(y_0 + h_2) + 2x_0h_1h_2. \end{aligned}$$

Notiamo quindi che

$$h_1^2(y_0 + h_2) + 2x_0h_1h_2 = o\left(\sqrt{h_1^2 + h_2^2}\right) \text{ per } (h_1, h_2) \rightarrow (0, 0),$$

dato che

$$\sqrt{h_1^2 + h_2^2} \geq |h_1| \text{ e } 0 \leq (|h_1| - |h_2|)^2 = h_1^2 + h_2^2 - 2|h_1h_2| \iff 2|h_1h_2| \leq h_1^2 + h_2^2,$$

e quindi

$$\frac{h_1^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leq \frac{h_1^2}{|h_1|} = |h_1| \rightarrow 0 \text{ e } \frac{2|h_1h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leq \frac{h_1^2 + h_2^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \rightarrow 0.$$

Vediamo ora la dimostrazione della formula dello sviluppo di Taylor al I ordine nel caso $n = 2$ e $\Omega = \mathbb{R}^2$. Allo scopo, ci serve un lemma che è l'analogo del Teorema di Lagrange in più variabili. Perciò, ricordiamo prima il Teorema di Lagrange in una dimensione¹⁹.

Teorema 1.3.12 (Teorema di Lagrange). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a < b$, e $f \in C([a, b])$, che sia derivabile su (a, b) . Allora esiste $c \in (a, b)$ tale che*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c),$$

ovvero

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Lemma 1.3.13. *Siano $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ ²⁰, $a, b \in \mathbb{R}$ e $h, k > 0$. Allora esistono due punti P e Q nel rettangolo avente vertici (a, b) , $(a + h, b)$, $(a, b + k)$ e $(a + h, b + k)$ tali che*

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(P)h + \frac{\partial f}{\partial y}(Q)k.$$

¹⁹Già visto nel corso di Analisi Matematica A.

²⁰In realtà, è sufficiente assumere che esistano $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, anche senza che le derivate parziali siano funzioni continue.

Dimostrazione. Applicando il Teorema di Lagrange (Teorema 1.3.12) alle funzioni

$$\varphi(x) = f(x, b+k) \quad \text{e} \quad \psi(y) = f(a, y),$$

che ne soddisfano le ipotesi, essendo continue e derivabili su tutto \mathbb{R} , e quindi otteniamo:

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) - f(a, b) &= f(a+h, b+k) - f(a, b+k) + f(a, b+k) - f(a, b) \\ &= \varphi(a+h) - \varphi(a) + \psi(b+k) - \psi(b) \\ &= \varphi'(a+sh)h + \psi'(b+tk)k \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(a+sh, b+k)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b+tk)k, \end{aligned}$$

per qualche $s \in (0, 1)$, $t \in (0, 1)$. Dunque, abbiamo $P = (a+sh, b+k)$ e $Q = (a, b+tk)$. \square

Dimostrazione. [del Teorema 1.3.8.] Per semplicità, assumiamo $n = 2$ e $\Omega = \mathbb{R}^2$, e usiamo la notazione $\partial_x f$ e $\partial_y f$ per le derivate parziali. Assumiamo inoltre che l'incremento (h, k) sia tale che $h, k > 0$ (il caso generale si affronta in maniera analoga, ma omettiamo i dettagli tecnici). Grazie al Lemma 1.3.13, otteniamo

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) - f(a, b) - \partial_x f(a, b)h - \partial_y f(a, b)k &= \\ &= \partial_x f(P)h + \partial_y f(Q)k - \partial_x f(a, b)h - \partial_y f(a, b)k \\ &= (\partial_x f(P) - \partial_x f(a, b))h + (\partial_y f(Q) - \partial_y f(a, b))k. \end{aligned}$$

Dato che P e Q appartengono al rettangolo di vertici (a, b) , $(a+h, b)$, $(a, b+k)$ e $(a+h, b+k)$, ne segue che la loro distanza dal punto (a, b) è al massimo uguale alla lunghezza della diagonale, ovvero

$$\max\{d(P, (a, b)), d(Q, (a, b))\} \leq d((a+h, b+k), (a, b)) = \sqrt{h^2 + k^2} = \|(h, k)\|. \quad (1.3.4)$$

Osserviamo ora che le derivate parziali $\partial_x f$ e $\partial_y f$ sono continue. Dunque, per ogni $\varepsilon > 0$ fissato esiste $\delta > 0$ tale che

$$|\partial_x f(P) - \partial_x f(a, b)| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |\partial_y f(Q) - \partial_y f(a, b)| < \varepsilon$$

se $\max\{d(P, (a, b)), d(Q, (a, b))\} < \delta$. Dunque, grazie a (1.3.4), è sufficiente prendere h, k tali che $\sqrt{h^2 + k^2} < \delta$. Quindi, sfruttando il fatto che $|h|, |k| \leq \sqrt{h^2 + k^2}$, vediamo che per ogni $\varepsilon > 0$ fissato esiste $\delta > 0$ tale che

$$\frac{|f(a+h, b+k) - f(a, b) - \partial_x f(a, b)h - \partial_y f(a, b)k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} < \varepsilon \frac{|h| + |k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq 2\varepsilon$$

per ogni (h, k) tale che $\|(h, k)\| < \delta$, ovvero,

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{|f(a+h, b+k) - f(a, b) - \partial_x f(a, b)h - \partial_y f(a, b)k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0,$$

che significa

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) - \partial_x f(a, b)h - \partial_y f(a, b)k = o\left(\sqrt{h^2 + k^2}\right) \quad \text{per } (h, k) \rightarrow (0, 0),$$

come volevamo dimostrare. \square

Notiamo ora che possiamo calcolare le derivate di una funzione differenziabile lungo ogni direzione, ovvero ogni retta passante per un punto dato.

Definizione 1.3.14 (Derivata direzionale). Siano $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \Omega$ e $v \in \mathbb{R}^n$. Definiamo la *derivata direzionale* di f in a nella direzione v come il limite (se esiste finito)

$$\partial_v f(a) = \lim_{h \rightarrow 0 \text{ in } \mathbb{R}} \frac{f(a+hv) - f(a)}{h}.$$

In particolare, $\partial_{e_j} f = \frac{\partial f}{\partial x_j}$, di modo che le derivate parziali sono un caso particolare di derivate direzionali. Di particolare interesse è il caso in cui il vettore v è unitario, ovvero ha norma 1.

Proposizione 1.3.15. Siano $f \in C^1(\Omega)$, $a \in \Omega$ e $v \in \mathbb{R}^n$. Allora $\partial_v f(a)$ esiste e soddisfa

$$\partial_v f(a) = \nabla f(a) \cdot v,$$

e, in particolare,

$$-\|\nabla f(a)\| \|v\| \leq \partial_v f(a) \leq \|\nabla f(a)\| \|v\|,$$

e perciò, se $\|\nabla f(a)\| \neq 0$ e $\|v\| = 1$, la seconda disuguaglianza diventa un'uguaglianza se e solo se $v = \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$ e la prima se e solo se $v = -\frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$.

Dimostrazione. Grazie alla formula dello sviluppo di Taylor al I ordine, sappiamo che

$$f(a + tv) = f(a) + \nabla f(a) \cdot (tv) + o(\|tv\|) = f(a) + t\nabla f(a) \cdot v + o(t) \quad \text{per } t \rightarrow 0 \text{ in } \mathbb{R}.$$

Dunque, ne deduciamo facilmente che

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = \nabla f(a) \cdot v.$$

La stima successiva e le altre conseguenze seguono facilmente dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. \square

Osservazione 1.3.16. Come conseguenza di queste proprietà della derivata direzionale, possiamo concludere che il gradiente indica la direzione di massima crescita della funzione. Infatti, abbiamo

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{\|h\|} = \nabla f(a) \cdot \frac{h}{\|h\|} + o(1) \quad \text{per } h \rightarrow 0 \text{ in } \mathbb{R}^n,$$

e quindi $f(a + h) - f(a) \geq 0$ se e solo se $\nabla f(a) \cdot h \geq 0$.

1.3.3 Piano tangente al grafico di una funzione in più variabili

Se $E \subset \mathbb{R}^n$ e $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, il grafico di f su E è l'insieme

$$\text{Grafico}(f) = \{(x, u) \in \mathbb{R}^{n+1} : u = f(x), x \in E\}.$$

In particolare, se $n = 1$, $E = (a, b)$ e $f \in C^1((a, b))$, il grafico della funzione

$$\text{Grafico}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x), x \in (a, b)\}.$$

è una curva nel piano cartesiano: in tal caso, sappiamo che la retta tangente al grafico della funzione in ogni punto $x_0 \in (a, b)$ è data da

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Ragionando in modo analogo, se $n = 2$, $E = \Omega$ e $f \in C^1(\Omega)$, il grafico in \mathbb{R}^3 di f è la superficie²¹

$$\text{Grafico}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in \Omega\},$$

e quindi avremo un piano tangente al grafico in ogni punto $(x_0, y_0) \in \Omega$, dato da

$$z = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Vediamo un esempio concreto.

Esempio 1.3.17. Siano $n = 2$, $\Omega = \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$ e $f(x, y) = x^2 + y^2$. Allora abbiamo

$$\nabla f(x, y) = (2x, 2y), \quad f(0, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \nabla f(0, 0) = (0, 0),$$

di modo che il piano tangente nell'origine è semplicemente $z = 0$.

²¹Concetto che sarà definito rigorosamente nel capitolo 4.

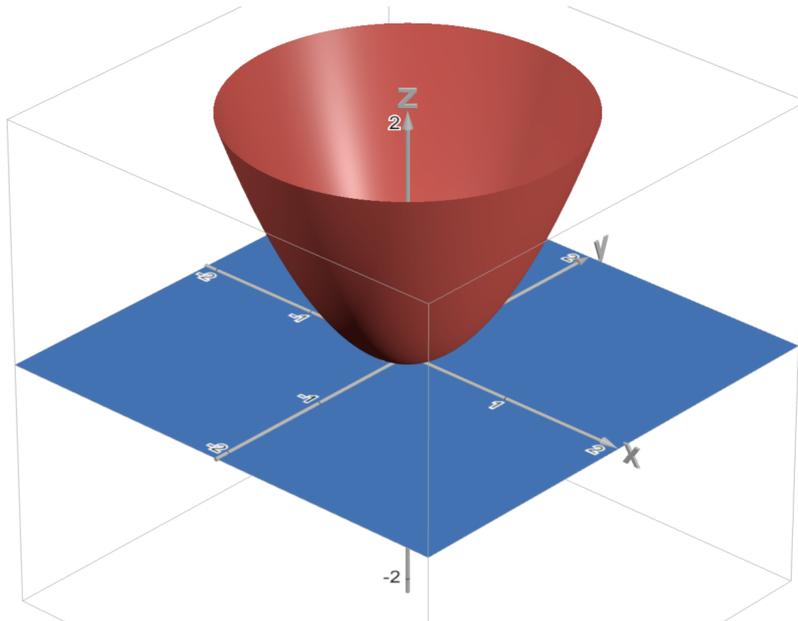


Figura 1.6: Il grafico di $f(x, y) = x^2 + y^2$ (in rosso) e il sup piano tangente nell'origine (in blu).

Possiamo inoltre definire lo *spazio vettoriale tangente* al grafico di f in un punto (x_0, y_0) :

$$\begin{aligned} T_{(x_0, y_0)} \text{Grafico}(f) &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + c_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} : c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Così, vediamo che il piano tangente al grafico di f in (x_0, y_0) è una traslazione dello spazio vettoriale tangente:

$$\begin{aligned} & \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0), (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(x_0, y_0) - \nabla f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left[\begin{matrix} x - x_0 = u \\ y - y_0 = v \end{matrix} \right] = \left\{ \begin{pmatrix} u + x_0 \\ v + y_0 \\ f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \end{pmatrix} : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= T_{(x_0, y_0)} \text{Grafico}(f) + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0, y_0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tutti questi concetti possono essere estesi a dimensioni $n \geq 3$, ma ciò va oltre gli scopi di questo corso.

1.3.4 Estremanti relativi e punti critici

Definizione 1.3.18. Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in E$. Diciamo che

- a è un *punto di massimo relativo* (o *locale*) per f se esiste $r > 0$ tale che, per ogni $x \in E \cap B_r(a)$ (ovvero, $x \in E$ e $\|x - a\| < r$), abbiamo $f(a) \geq f(x)$;

- a è punto di minimo relativo (o locale) per f se esiste $r > 0$ tale che, per ogni $x \in E \cap B_r(a)$, abbiamo $f(a) \leq f(x)$.

In particolare, è chiaro che i punti di massimo e minimo assoluti sono anche punti di massimo e minimo relativi.

Come nel caso di dimensione $n = 1$, vale una forte relazione fra l'esistenza di punti di massimo e minimo relativi e l'annullarsi delle derivate parziali.

Teorema 1.3.19 (Teorema di Fermat in più variabili). *Siano $f \in C^1(\Omega)$ e $a \in \Omega$ ²². Se a è un punto di massimo o di minimo relativo per f , allora $\nabla f(a) = 0$, ovvero $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = 0$ per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$.*

Dimostrazione. Vediamo solo il caso $n = 2$ e $\Omega = \mathbb{R}^2$. Senza perdita di generalità, assumiamo che (a, b) sia un punto di massimo relativo per f (nel caso in cui sia un punto di minimo relativo, si ragiona in modo analogo). Allora consideriamo la funzione $\varphi(t) = f(t, b) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Allora deduciamo che esiste $r > 0$ tale che

$$\varphi(a) = f(a, b) \geq f(t, b) = \varphi(t) \quad \text{per ogni } t \in (a - r, a + r),$$

dato che $|t - a| = \|(t, b) - (a, b)\| < r$. Quindi a è un punto di massimo relativo per φ , e dunque per il Teorema di Fermat in dimensione 1 abbiamo $0 = \varphi'(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$. Consideriamo poi la funzione $\psi(s) = f(a, s) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Allora deduciamo che esiste $r > 0$ tale che

$$\psi(b) = f(a, b) \geq f(a, s) = \psi(s) \quad \text{per ogni } s \in (b - r, b + r),$$

dato che $|s - b| = \|(a, s) - (a, b)\| < r$. Quindi b è un punto di massimo relativo per ψ , e dunque per il Teorema di Fermat in dimensione 1 abbiamo $0 = \psi'(b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$. \square

Vediamo ora due semplici esempi di applicazione del Teorema di Fermat.

Esempio 1.3.20. Sia $f(x, y) = x^2 + y^2$. Allora abbiamo

$$\nabla f(x, y) = (2x, 2y) = (0, 0) \iff (x, y) = (0, 0).$$

Infatti, è facile osservare che $(0, 0)$ è un punto di minimo (assoluto) per f , dato che $x^2 + y^2 \geq 0$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Considerando invece $g(x, y) = -x^2 - y^2$, abbiamo

$$\nabla g(x, y) = (-2x, -2y) = (0, 0) \iff (x, y) = (0, 0).$$

Infatti, è facile osservare che $(0, 0)$ è un punto di massimo (assoluto) per g , dato che $-(x^2 + y^2) \leq 0$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Definizione 1.3.21. Siano $f \in C^1(\Omega)$ e $a \in \Omega$. a è un punto critico di f se $\nabla f(a) = 0$.

Se un punto critico di f non è di massimo, né di minimo relativo, allora è un punto di sella.

Il Teorema di Fermat dunque afferma che ogni punto di massimo o minimo relativo è un punto critico. Il viceversa è però falso, come visto in dimensione $n = 1$. Ne mostriamo un semplice esempio in dimensione $n = 2$.

Esempio 1.3.22. Siano $\Omega = \mathbb{R}^2$ e $f(x, y) = xy$. Allora è chiaro che $\nabla f(x, y) = (y, x)$ di modo che

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff (x, y) = (0, 0).$$

Dunque, l'origine è l'unico punto critico di f . Tuttavia, non è un punto né di massimo né di minimo relativo: infatti, è facile vedere che $(0, 0)$ è un punto di minimo lungo la retta $y = x$, dato che

$$f(x, x) = x^2 \geq 0 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R};$$

mentre è un punto di massimo lungo la retta $y = -x$, dato che

$$f(x, -x) = -x^2 \leq 0 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Quindi, deduciamo che l'origine è un punto di sella.

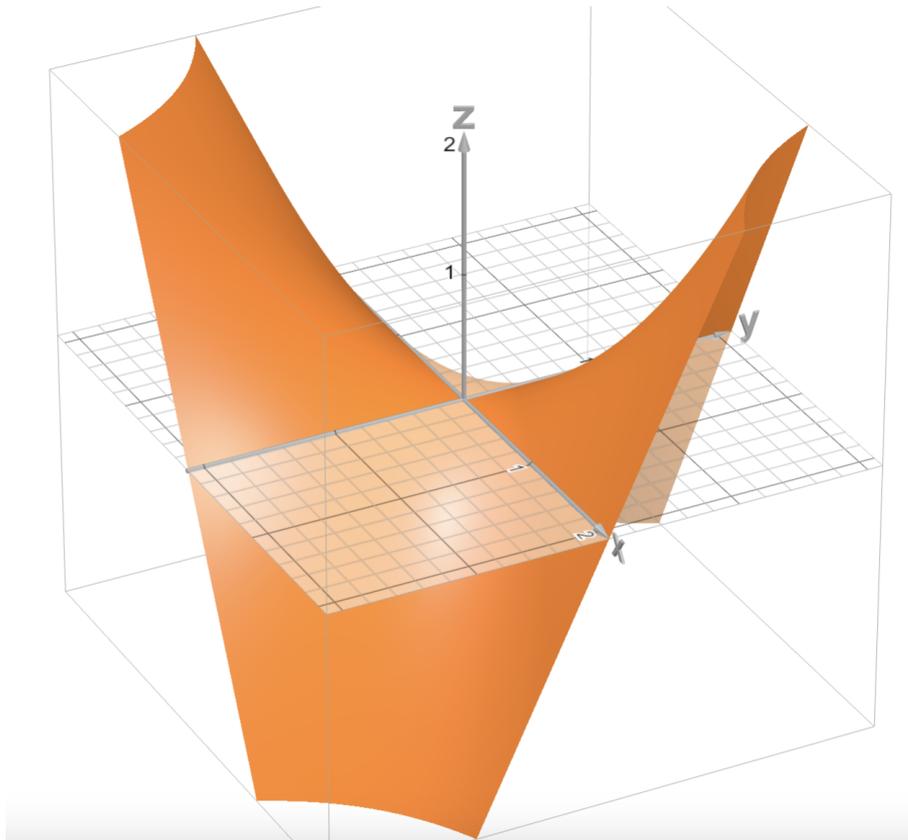


Figura 1.7: Il grafico di $f(x, y) = xy$.

Concludiamo questa sezione con un esempio di applicazione del Teorema di Fermat.

Esempio 1.3.23. Siano $n = 2$, $\Omega = \mathbb{R}^2$ e $f(x, y) = x^3 + xy^2 - x$. Allora abbiamo

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 + y^2 - 1, 2xy),$$

di modo che i punti critici di f sono dati da

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases}.$$

La seconda equazione ha ovviamente due possibili soluzioni: $x = 0$ o $y = 0$. Nel primo caso, la prima equazione si riduce a

$$y^2 - 1 = 0 \iff y = \pm 1;$$

nel secondo caso, la prima equazione si riduce a

$$3x^2 - 1 = 0 \iff x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Di conseguenza, i punti critici di f sono dati da

$$(0, 1), (0, -1), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right).$$

Ora, per capire la natura di questi punti critici, dobbiamo determinare il segno di f . Allo scopo, osserviamo che

$$f(x, y) = x(x^2 + y^2 - 1),$$

di modo che

$$Z(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\} = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

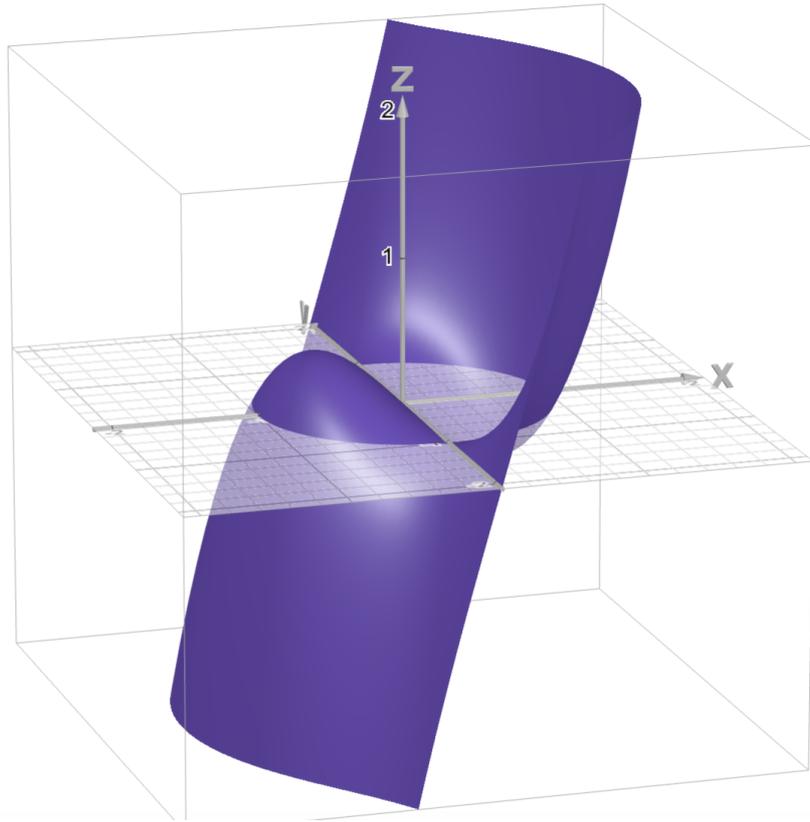


Figura 1.8: Il grafico di $z = x^3 + xy^2 - x$.

Quindi,

$$\mathbb{R}^2 \setminus Z(f) = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4,$$

dove

- $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, x^2 + y^2 > 1\}$,
- $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, x^2 + y^2 < 1\}$,
- $A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, x^2 + y^2 < 1\}$,
- $A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, x^2 + y^2 > 1\}$.

Perciò abbiamo:

- se $(x, y) = (2, 0) \in A_1$, allora $f(2, 0) = 2(4 - 1) = 6 > 0$, e così $f(x, y) > 0$ per ogni $(x, y) \in A_1$;
- se $(x, y) = (\frac{1}{2}, 0) \in A_2$, allora $f(\frac{1}{2}, 0) = \frac{1}{2}(\frac{1}{4} - 1) = -\frac{3}{8} < 0$, e così $f(x, y) < 0$ per ogni $(x, y) \in A_2$;
- se $(x, y) = (-\frac{1}{2}, 0) \in A_3$, allora $f(-\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{2}(\frac{1}{4} - 1) = \frac{3}{8} > 0$, e così $f(x, y) > 0$ per ogni $(x, y) \in A_3$;
- se $(x, y) = (-2, 0) \in A_4$, allora $f(-2, 0) = (-2)(4 - 1) = -6 < 0$, e così $f(x, y) < 0$ per ogni $(x, y) \in A_4$.

In definitiva, concludiamo che

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) > 0\} = A_1 \cup A_3 \quad \text{e} \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) < 0\} = A_2 \cup A_4.$$

²²In realtà, è sufficiente assumere che esistano $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$, anche senza che le derivate parziali siano funzioni continue in Ω .

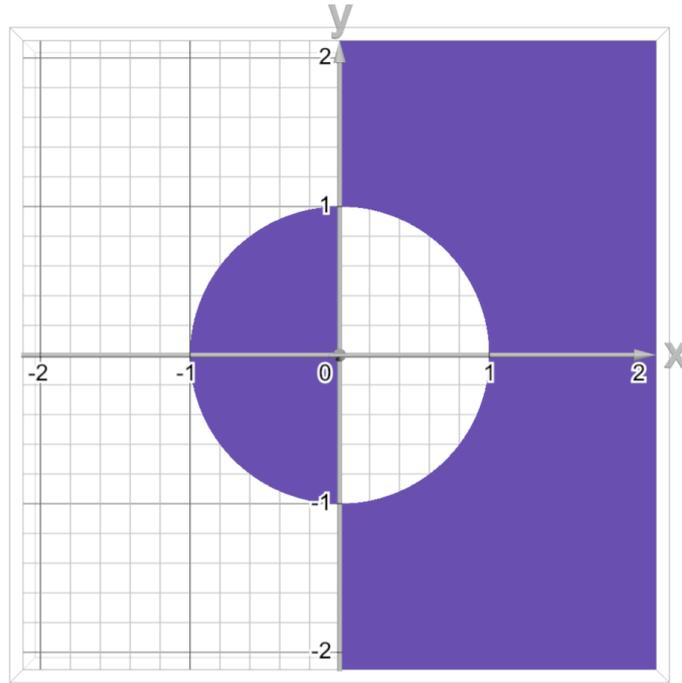


Figura 1.9: L'insieme dove $f(x, y) > 0$ (in blu).

A questo punto, osserviamo che $f(0, 1) = f(0, -1) = 0$ e, come si può vedere dal grafico dei segni di f , abbiamo che 0 è un valore massimo rispetto alle regioni dove f è negativa, mentre è un valore minimo rispetto alle regioni dove f è positiva. Di conseguenza, $(0, 1)$ e $(0, -1)$ sono punti di sella, visto che sono punti critici, ma non possono essere punti di massimo o minimo relativi. Osserviamo poi che $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0) \in A_2$ e $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0) \in A_3$. Dato che $\overline{A_2}$ e $\overline{A_3}$ sono insiemi compatti (essendo chiusi e limitati), per il Teorema di Weierstrass sappiamo che f ammette almeno un punto di massimo e un punto di minimo in $\overline{A_2}$ e in $\overline{A_3}$. D'altra parte, $f(x, y) \leq 0$ in $\overline{A_2}$, con $f(x, y) = 0$ per ogni $(x, y) \in \partial A_2$, di modo che $\max_{(x, y) \in \overline{A_2}} f(x, y) = 0$. Quindi, il minimo di f in $\overline{A_2}$ deve essere raggiunto all'interno, ovvero in A_2 : concludiamo quindi che $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ è un punto di minimo relativo. Analogamente, $f(x, y) \geq 0$ in $\overline{A_3}$, con $f(x, y) = 0$ per ogni $(x, y) \in \partial A_3$, di modo che $\min_{(x, y) \in \overline{A_3}} f(x, y) = 0$. Quindi, il massimo di f in $\overline{A_3}$ deve essere raggiunto all'interno, ovvero in A_3 : concludiamo quindi che $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ è un punto di massimo relativo²³. Infine osserviamo che questi sono solo punti di massimo e minimo relativo, perché

$$f(x, 1) = x^3 \rightarrow \pm\infty \text{ se } x \rightarrow \pm\infty,$$

²³In alternativa, si può ragionare nel seguente modo: abbiamo $B_1(0) = A_2 \cup A_3$, con $f(x, y) < 0$ per ogni $(x, y) \in A_2$ e $f(x, y) > 0$ per ogni $(x, y) \in A_3$, e si può anche verificare a mano che

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}} > 0,$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3} - 1\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}} < 0,$$

Dato che $\overline{B_1(0)}$ è un insieme compatto (essendo chiuso e limitato), il Teorema di Weierstrass implica che f ammette almeno un punto di massimo e un punto di minimo in $\overline{B_1(0)}$. Tuttavia, dato che $f(x, y) = 0$ sul bordo $\partial B_1(0)$, allora il minimo deve essere realizzato nel semicerchio aperto A_2 , dove $f(x, y) < 0$, e il massimo nel semicerchio aperto A_3 , dove $f(x, y) > 0$. Grazie al Teorema di Fermat sappiamo che i punti di massimo e minimo di una funzione C^1 in un insieme aperto sono punti critici, e gli unici punti critici di f rimanenti sono $(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$, perciò concludiamo che $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ è un punto di massimo relativo e $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ è un punto di minimo relativo.

di modo che f è illimitata sia superiormente che inferiormente lungo la retta $y = 1$, e dunque non può ammettere massimi e minimi assoluti.

1.3.5 Funzioni vettoriali di più variabili

In questa sezione siano $m, n \in \mathbb{N}$ e $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Se $F : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ è data da

$$F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ \dots \\ F_m(x) \end{pmatrix},$$

dove $F_j : E \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni di più variabili, allora F è una *funzione vettoriale di più variabili*, le cui componenti sono le funzioni F_j .

Vediamo alcuni casi particolari di funzioni vettoriali:

- se $m = n$, F è un *campo vettoriale*;
- le curve sono funzioni vettoriali, corrispondenti al caso $n = 1$, $m \geq 1$ (con l'ipotesi aggiuntiva della continuità);
- se $m = 1$ e $n \geq 1$, allora si tratta di funzioni reali in più variabili, talvolta dette *scalari* per distinguerle dal caso vettoriale più propriamente detto;
- se $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, allora $F(x) = Ax$ è una funzione lineare vettoriale in più variabili.

Diamo ora la definizione di continuità di funzioni vettoriali in più variabili, che è analoga a quella vista per le funzioni scalari.

Definizione 1.3.24 (Continuità). Sia $F : E \rightarrow \mathbb{R}^m$. F è continua in $a \in E$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(a, \varepsilon) > 0$ tale che

$$\|F(x) - F(a)\|_{\mathbb{R}^m} = \sqrt{\sum_{j=1}^m (F_j(x) - F_j(a))^2} < \varepsilon$$

per ogni $x \in E$ tale che

$$\|x - a\|_{\mathbb{R}^n} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2} < \delta.$$

F è continua in E se è continua in ogni punto di E , e in tal caso scriviamo $F \in C(E; \mathbb{R}^m)$.

In particolare, non è difficile verificare che una funzione vettoriale è continua se e solo se ciascuna delle sue componenti è continua.

Vale un importante risultato sulla continuità della composizione di funzioni vettoriali continue.

Lemma 1.3.25. Siano $m, n, k \in \mathbb{N}$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $F : E \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$ tale che $F(E) \subseteq D$ e $G : D \rightarrow \mathbb{R}^k$. Se $F \in C(E; \mathbb{R}^m)$ e $G \in C(D; \mathbb{R}^k)$, allora $G \circ F \in C(E; \mathbb{R}^k)$.

Le derivate parziali e la differenziabilità di una funzione vettoriale di più variabili sono definite componente per componente come abbiamo visto nel caso delle funzioni scalari. Tali derivate parziali sono le componenti della matrice jacobiana.

Definizione 1.3.26 (Matrice jacobiana). Siano $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $x \in \Omega$. Se F_1, \dots, F_m ammettono derivate parziali in x , allora la matrice $m \times n$ avente per righe i gradienti in x delle funzioni F_j per

$j \in \{1, \dots, m\}$ è la *matrice jacobiana* di F in x :

$$\begin{aligned}
 JF(x) &= \begin{bmatrix} \nabla F_1(x) \\ \nabla F_2(x) \\ \dots \\ \nabla F_m(x) \end{bmatrix} = [\partial_{x_1} F(x) | \partial_{x_2} F(x) | \dots | \partial_{x_n} F(x)], \\
 &\text{dove } \partial_{x_j} F(x) = \begin{bmatrix} \partial_{x_j} F_1(x) \\ \partial_{x_j} F_2(x) \\ \dots \\ \partial_{x_j} F_m(x) \end{bmatrix}, \\
 &= \begin{bmatrix} \partial_{x_1} F_1(x) & \partial_{x_2} F_1(x) & \dots & \partial_{x_n} F_1(x) \\ \partial_{x_1} F_2(x) & \partial_{x_2} F_2(x) & \dots & \partial_{x_n} F_2(x) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \partial_{x_1} F_m(x) & \partial_{x_2} F_m(x) & \dots & \partial_{x_n} F_m(x) \end{bmatrix} = [\partial_{x_j} F_i(x)]_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} \in \mathbb{R}^{m \times n}.
 \end{aligned}$$

Se poi $F_1, \dots, F_m \in C^1(\Omega)$, allora F è differenziabile con continuità in Ω , e scriviamo $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^m)$. In tal caso, la matrice jacobiana è ben definita in tutto Ω .

Vediamo un calcolo concreto della matrice jacobiana nel seguente esempio.

Esempio 1.3.27. Siano $n = 2$, $m = 3$ e $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da

$$F(u, v) = \begin{pmatrix} u \cos(v) \\ u \sin(v) \\ u^2 + v^2 \end{pmatrix}.$$

Allora abbiamo

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \\ 2u \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = \begin{pmatrix} -u \sin(v) \\ u \cos(v) \\ 2v \end{pmatrix},$$

e quindi

$$JF(u, v) = \begin{bmatrix} \cos(v) & -u \sin(v) \\ \sin(v) & u \cos(v) \\ 2u & 2v \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$$

Elenchiamo due casi particolari di matrice jacobiana:

- se $n = 1$, allora $F : \Omega \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ e, assumendo $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^m)$, per ogni $x \in \Omega$ abbiamo

$$JF(x) = F'(x) = \begin{pmatrix} F'_1(x) \\ F'_2(x) \\ \dots \\ F'_m(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times 1} = \mathbb{R}^m;$$

- se $m = 1$, allora $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (che è una funzione scalare di più variabili) e, assumendo $F \in C^1(\Omega)$, per ogni $x \in \Omega$ abbiamo

$$JF(x) = \nabla F(x) = (\partial_{x_1} F(x), \partial_{x_2} F(x), \dots, \partial_{x_n} F(x)) \in \mathbb{R}^{1 \times n} = \mathbb{R}^n.$$

Come conseguenza di questi casi particolari, una notazione alternativa per la matrice jacobiana di un campo F è

$$DF = JF.$$

Analogamente a quanto visto per le funzioni a valori scalari, vale una versione vettoriale della formula dello sviluppo di Taylor.

Teorema 1.3.28 (Formula di Taylor del I ordine per funzioni vettoriali). *Siano $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^m)$ e $a \in \Omega$. Allora abbiamo*

$$F(a + h) = F(a) + JF(a)h + o(h) \quad \text{per } h \rightarrow 0, \quad h \in \mathbb{R}^n,$$

ovvero

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}^n}} \frac{\|F(a + h) - F(a) - JF(a)h\|_{\mathbb{R}^m}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0.$$

Osserviamo che la matrice jacobiana, essendo legata alle derivate parziali, ne condivide le regole di calcolo, ed è quindi lineare rispetto alla somma e ha una regola relativa alla composizione.

Teorema 1.3.29 (Jacobiana di una composizione). *Siano $m, n, p \in \mathbb{N}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $U \subseteq \mathbb{R}^m$ degli insiemi aperti, $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $G : U \rightarrow \mathbb{R}^p$, tali che $F(\Omega) \subseteq U$ e $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^m)$, $G \in C^1(U; \mathbb{R}^p)$. Allora $G \circ F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^p)$ e per ogni $x \in \Omega$ abbiamo*

$$J(G \circ F)(x) = JG(F(x))JF(x),$$

ovvero per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$ e $i \in \{1, \dots, p\}$ abbiamo

$$\frac{\partial(G \circ F)_i}{\partial x_j}(x) = \sum_{l=1}^m \frac{\partial G_l}{\partial y_l}(F(x)) \frac{\partial F_l}{\partial x_j}(x),$$

dove indichiamo con $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ le variabili di G .

La prima formula consiste in un prodotto di matrici $(p \times m) \times (m \times n) = (p \times n)$ ed è l'espressione più compatta della regola, ma è la seconda quella che si usa nei calcoli.

Nel caso $n = 1 = p$, abbiamo $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^m)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ e $G \in C^1(U)$ con $U \subseteq \mathbb{R}^m$, e quindi per ogni $x \in \Omega$ otteniamo

$$(G \circ F)'(x) = \frac{d}{dx}(G \circ F)(x) = \nabla G(F(x)) \cdot F(x) = \sum_{l=1}^m \frac{\partial G}{\partial y_l}(F(x)) F_l(x).$$

Questo è un importante risultato legato alla composizione di funzioni di più variabili con curve differenziabili, come vedremo nella sezione 1.5.

Esempio 1.3.30. [Non visto a lezione.] Siano $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e $g \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^2)$, data da $g(x, y, z) = (a(x, y, z), b(x, y, z))$. Definiamo la funzione $h = f \circ g$, ovvero

$$h(x, y, z) = f(a(x, y, z), b(x, y, z)).$$

Allora, se denotiamo con (u, v) le variabili di f , abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x}(x, y, z) &= \frac{\partial f}{\partial u}(a(x, y, z), b(x, y, z)) \frac{\partial a}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial v}(a(x, y, z), b(x, y, z)) \frac{\partial b}{\partial x}(x, y, z), \\ \frac{\partial h}{\partial y}(x, y, z) &= \frac{\partial f}{\partial u}(a(x, y, z), b(x, y, z)) \frac{\partial a}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial v}(a(x, y, z), b(x, y, z)) \frac{\partial b}{\partial y}(x, y, z), \\ \frac{\partial h}{\partial z}(x, y, z) &= \frac{\partial f}{\partial u}(a(x, y, z), b(x, y, z)) \frac{\partial a}{\partial z}(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial v}(a(x, y, z), b(x, y, z)) \frac{\partial b}{\partial z}(x, y, z), \end{aligned}$$

e quindi

$$\nabla h(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right) (a(x, y, z), b(x, y, z)) \begin{bmatrix} \frac{\partial a}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial a}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial a}{\partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial b}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial b}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial b}{\partial z}(x, y, z) \end{bmatrix}.$$

1.4 Derivate parziali seconde e classificazione dei punti critici

Definizione 1.4.1. Siano $f \in C^1(\Omega)$ e $a \in \Omega$. Se per ogni $i, j \in \{1, \dots, n\}$ esistono le derivate parziali delle derivate parziali prime in a , ovvero $\partial_{x_j}(\partial_{x_i} f)(a)$, allora che f è due volte parzialmente derivabile in a , e le *derivate parziali seconde* di f in a sono date da

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) := \partial_{x_j}(\partial_{x_i} f)(a) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (a)$$

per $i \neq j$, mentre, per $i = j$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) := \partial_{x_i}(\partial_{x_i} f)(a) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (a).$$

Se tutte le derivate parziali seconde esistono in ogni punto di Ω e sono continue, ovvero $\partial_{x_j x_i} f \in C(\Omega)$ per ogni $i, j \in \{1, \dots, n\}$, allora f è due volte differenziabile con continuità, ovvero è di classe C^2 su Ω , e scriviamo $f \in C^2(\Omega)$.

Una notazione alternativa per le derivate seconde che useremo spesso è

$$\partial_{x_j x_i} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \text{per } i \neq j \quad \text{e} \quad \partial_{x_i x_i} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \quad \text{per } i = j.$$

Esempio 1.4.2. Sia $n = 3$ e $f(x, y, z) = xe^{yz}$. Allora abbiamo

$$\partial_x f(x, y, z) = e^{yz}, \quad \partial_y f(x, y, z) = xze^{yz}, \quad \partial_z f(x, y, z) = xye^{yz},$$

e quindi

$$\begin{aligned} \partial_{xx} f(x, y, z) &= 0, & \partial_{xy} f(x, y, z) &= ze^{yz}, & \partial_{xz} f(x, y, z) &= ye^{yz}, \\ \partial_{yx} f(x, y, z) &= ze^{yz}, & \partial_{yy} f(x, y, z) &= xz^2 e^{yz}, & \partial_{yz} f(x, y, z) &= (x + xyz)e^{yz}, \\ \partial_{zx} f(x, y, z) &= ye^{yz}, & \partial_{zy} f(x, y, z) &= (x + xyz)e^{yz}, & \partial_{zz} f(x, y, z) &= xy^2 e^{yz}. \end{aligned}$$

Osserviamo quindi che

$$\begin{aligned} \partial_{xy} f(x, y, z) &= ze^{yz} = \partial_{yx} f(x, y, z), \\ \partial_{xz} f(x, y, z) &= ye^{yz} = \partial_{zx} f(x, y, z), \\ \partial_{yz} f(x, y, z) &= (x + xyz)e^{yz} = \partial_{zy} f(x, y, z). \end{aligned}$$

Risulta ovvio che, per una funzione di n variabili, esistono n derivate parziali prime, e quindi n^2 derivate parziali seconde. Tuttavia, come visto nell'esempio precedente, le derivate parziali seconde miste non dipendono dall'ordine di derivazione, di modo che in realtà bisogna calcolare solo $\frac{n(n+1)}{2}$ derivate parziali seconde²⁴. Questo fatto generale è una conseguenza del seguente risultato.

Teorema 1.4.3 (Lemma di Schwarz). *Se $f \in C^2(\Omega)$, allora*

$$\partial_{x_j x_i} f(x) = \partial_{x_i x_j} f(x) \quad \text{per ogni } i, j \in \{1, \dots, n\} \text{ e } x \in \Omega.$$

Dimostrazione. [Non vista a lezione.] Mostriamo solo il caso $n = 2$ e $\Omega = \mathbb{R}^2$. Di conseguenza, dobbiamo dimostrare che

$$\partial_{xy} f(x, y) = \partial_{yx} f(x, y) \quad \text{per ogni } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Siano $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ e $s, t > 0$. Allora consideriamo i valori di f nei punti

$$(a, b), (a + s, b), (a, b + t), (a + s, b + t),$$

che sono i vertici di un rettangolo, e assegnamo a ciascuno di essi segni alterni, partendo da $+$ in (a, b) e proseguendo in senso antiorario. L'idea di base è quindi considerare la quantità

$$\Delta = (f(a + s, b + t) - f(a, b + t)) - (f(a + s, b) - f(a, b))$$

e dimostrare che è proporzionale alle due derivate parziali miste, ovvero

$$\Delta \approx s\partial_x f(a, b + t) - s\partial_x f(a, b) \approx st\partial_{yx} f(a, b),$$

e

$$\begin{aligned} \Delta &= (f(a + s, b + t) - f(a + s, b)) - (f(a, b + t) - f(a, b)) \approx t\partial_y f(a + s, b) - t\partial_y f(a, b) \\ &\approx ts\partial_{xy} f(a, b). \end{aligned}$$

Per rendere tutto ciò rigoroso, si usa il Teorema di Lagrange per il calcolo in una dimensione. Definiamo la funzione $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$\psi(u) = f(a + s, b + u) - f(a, b + u).$$

²⁴Per notare questo fatto, osserviamo che esistono n derivate seconde rispetto alla stessa variabile, e quindi le derivate parziali seconde rispetto a due variabili diverse sono $n^2 - n$. Visto che però basta calcolare una di queste derivate per conoscere quella rispetto alle variabili in ordine invertito, allora dobbiamo calcolarne $\frac{n^2 - n}{2}$. Sommando di nuovo le n derivate legate alla stessa variabile, otteniamo

$$\frac{n^2 - n}{2} + n = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Allora abbiamo

$$\Delta = \psi(t) - \psi(0) = t\psi'(\xi)$$

per qualche $\xi \in (0, t)$, grazie al Teorema di Lagrange. D'altra parte, abbiamo

$$\psi'(\xi) = \partial_y f(a + s, b + \xi) - \partial_y f(a, b + \xi) = s\partial_x(\partial_y f)(a + \eta, b + \xi) = s\partial_{xy}f(a + \eta, b + \xi)$$

per qualche $\eta \in (0, s)$, di nuovo grazie al Teorema di Lagrange. Definiamo poi la funzione $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$\varphi(v) = f(a + v, b + t) - f(a + v, b).$$

Allora abbiamo

$$\Delta = \psi(s) - \psi(0) = s\psi'(\gamma)$$

per qualche $\gamma \in (0, s)$, grazie al Teorema di Lagrange. D'altra parte, abbiamo

$$\psi'(\gamma) = \partial_x f(a + \gamma, b + t) - \partial_x f(a + \gamma, b) = t\partial_y(\partial_x f)(a + \gamma, b + \delta) = t\partial_{yx}f(a + \gamma, b + \delta)$$

per qualche $\delta \in (0, t)$, di nuovo grazie al Teorema di Lagrange. Di conseguenza, otteniamo

$$ts\partial_{xy}f(a + \eta, b + \xi) = \Delta = st\partial_{yx}f(a + \gamma, b + \delta)$$

per certi $\eta, \gamma \in (0, s)$ e $\xi, \delta \in (0, t)$. Ne segue che

$$\partial_{xy}f(a + \eta, b + \xi) = \partial_{yx}f(a + \gamma, b + \delta)$$

per certi $\eta, \gamma \in (0, s)$ e $\xi, \delta \in (0, t)$, e per ogni $t, s > 0$. Quindi, possiamo mandare $t, s \rightarrow 0^+$, cosa che ovviamente implica $\eta, \xi, \gamma, \delta \rightarrow 0^+$ (per il Teorema dei Carabinieri), e perciò, grazie alla continuità delle derivate seconde, otteniamo

$$\partial_{xy}f(a, b) = \lim_{\eta, \xi \rightarrow 0^+} \partial_{xy}f(a + \eta, b + \xi) = \lim_{\gamma, \delta \rightarrow 0^+} \partial_{yx}f(a + \gamma, b + \delta) = \partial_{yx}f(a, b).$$

□

Definizione 1.4.4. Sia $f \in C^2(\Omega)$. La matrice $n \times n$ delle derivate parziali seconde,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}f(x) &= [\partial_{x_i x_j} f(x)]_{i,j=1,\dots,n} \\ &= \begin{bmatrix} \partial_{x_1 x_1} f(x) & \partial_{x_1 x_2} f(x) & \dots & \partial_{x_1 x_n} f(x) \\ \partial_{x_2 x_1} f(x) & \partial_{x_2 x_2} f(x) & \dots & \partial_{x_2 x_n} f(x) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \partial_{x_n x_1} f(x) & \partial_{x_n x_2} f(x) & \dots & \partial_{x_n x_n} f(x) \end{bmatrix}, \quad x \in \Omega, \end{aligned}$$

è la *matrice hessiana* di f .

Notazioni alternative per la matrice hessiana di f sono

$$D^2 f = \text{Hess } f = \mathbf{H}f.$$

Osservazione 1.4.5. La matrice hessiana di una funzione $f \in C^2(\Omega)$ è sempre simmetrica, grazie al Lemma di Schwarz, ovvero

$$(\mathbf{H}f(x))^t = \mathbf{H}f(x) \quad \text{per ogni } x \in \Omega.$$

Inoltre, si può anche scrivere la matrice hessiana come

$$\mathbf{H}f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \nabla f}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial \nabla f}{\partial x_2}(x) \\ \dots \\ \frac{\partial \nabla f}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix},$$

ricordando che la nabla è un vettore riga.

Esempio 1.4.6. Sia $f(x, y) = xy - 2x^2 - y^3$. Allora abbiamo

$$\nabla f(x, y) = (y - 4x, x - 3y^2)$$

e

$$\mathbb{H} f(x, y) = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -6y \end{bmatrix}.$$

Vale una formula dello sviluppo di Taylor al secondo ordine per le funzioni due volte differenziabili con continuità.

Teorema 1.4.7 (Formula di Taylor al II ordine in più variabili). *Siano $f \in C^2(\Omega)$ e $a \in \Omega$. Allora abbiamo*

$$f(a + h) = f(a) + \nabla f(a) \cdot h + \frac{1}{2} h^t \mathbb{H} f(a) h + o(\|h\|^2) \quad \text{per } h \rightarrow 0 \text{ in } \mathbb{R}^n,$$

dove

$$h^t \mathbb{H} f(a) h = h \cdot (\mathbb{H} f(a) h) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_{x_j x_i} f(a) h_i h_j,$$

e ciò significa che

$$\lim_{h \rightarrow 0 \text{ in } \mathbb{R}^n} \frac{f(a + h) - f(a) - \nabla f(a) \cdot h - \frac{1}{2} h^t \mathbb{H} f(a) h}{\|h\|^2} = 0.$$

Il termine di ordine 2 in questo sviluppo è un caso particolare di forma quadratica.

Definizione 1.4.8. Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. La *forma quadratica* associata alla matrice A è la funzione $Q_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$Q_A(h) = h^t A h = h \cdot (A h) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} h_i h_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} h_i h_j \quad \text{per ogni } h \in \mathbb{R}^n.$$

Osservazione 1.4.9. Se $A = I$ (la matrice identità), allora per ogni $h \in \mathbb{R}^n$ abbiamo

$$Q_I(h) = h \cdot (I h) = h \cdot h = \|h\|^2 = \sum_{j=1}^n h_j^2.$$

Esempio 1.4.10. Siano $n = 2$ e

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Allora per ogni $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ abbiamo

$$\begin{aligned} Q_A \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} &= (h_1 \ h_2) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = (h_1 \ h_2) \begin{pmatrix} h_1 + 2h_2 \\ 3h_1 \end{pmatrix} \\ &= h_1^2 + 2h_1 h_2 + 3h_1 h_2 = h_1^2 + 5h_1 h_2. \end{aligned}$$

Osservazione 1.4.11. La forma quadratica associata alla matrice hessiana di una funzione f in un punto a è data da

$$Q_{\mathbb{H} f(a)}(h) = h^t \mathbb{H} f(a) h = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_{x_j x_i} f(a) h_i h_j.$$

In dimensione 1 il segno della derivata seconda ci permette di capire la natura di un punto critico della funzione che stiamo studiando. Nel caso generale di più variabili, si sfrutta la nozione di segno generalizzata per forme quadratiche.

Definizione 1.4.12. Siano $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matrice simmetrica e Q_A la forma quadratica associata ad A . La matrice A è:

- *definita positiva* se $Q_A(h) > 0$ per ogni $h \neq 0$;
- *definita negativa* se $Q_A(h) < 0$ per ogni $h \neq 0$;

- *semidefinita positiva* se $Q_A(h) \geq 0$ per ogni $h \in \mathbb{R}^n$;
- *semidefinita negativa* se $Q_A(h) \leq 0$ per ogni $h \in \mathbb{R}^n$;
- *non definita* se esistono $h, \tilde{h} \in \mathbb{R}^n$ tali che $Q_A(h) < 0 < Q_A(\tilde{h})$, ovvero se nessuna delle precedenti condizioni vale.

Non sorprendentemente, il segno di una matrice simmetrica è legato a quello dei suoi autovalori (che sono necessariamente tutti reali).

Teorema 1.4.13 (Criterio di Sylvester). *Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matrice simmetrica con autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Allora A è:*

- *definita positiva* se e solo se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0$;
- *definita negativa* se e solo se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n < 0$;
- *semidefinita positiva* se e solo se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$;
- *semidefinita negativa* se e solo se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \leq 0$;
- *non definita* se e solo se esistono $i, k \in \{1, \dots, n\}$ tali che $\lambda_i > 0$ e $\lambda_k < 0$.

Dimostrazione. Diamo un'idea della dimostrazione considerando una matrice diagonale

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Allora la forma quadratica ad essa associata è data da

$$\begin{aligned} Q_A(h) &= (h_1 \ h_2 \ \dots \ h_n) \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_n \end{pmatrix} = (h_1 \ h_2 \ \dots \ h_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 h_1 \\ \lambda_2 h_2 \\ \dots \\ \lambda_n h_n \end{pmatrix} \\ &= \lambda_1 h_1^2 + \lambda_2 h_2^2 + \dots + \lambda_n h_n^2 = \sum_{j=1}^n \lambda_j h_j^2. \end{aligned}$$

Risulta quindi chiaro che $Q_A(h) > 0$ per ogni $h \neq 0$ se e solo se $\lambda_j > 0$ per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$, dato che abbiamo $Q_A(e_i) = \lambda_i$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ e, se per assurdo $\lambda_k < 0$ per qualche $k \in \{1, \dots, n\}$, allora avremmo $Q_A(h) < 0$ per

$$h = -e_k = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{-1}_k, 0, \dots, 0).$$

Questo copre il caso di matrice diagonale definita positiva. Lasciamo i restanti casi per esercizio. \square

Osservazione 1.4.14. Dato che per il Teorema 1.1.20 il determinante di una matrice simmetrica è uguale al prodotto degli autovalori, ovvero

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n,$$

osserviamo che A è certamente non definita se $\det(A) < 0$ e n è pari, poiché in tal caso ci devono essere almeno due autovalori con segno opposto per rendere negativo il prodotto.

Se $n = 2$, si può stabilire il segno di una matrice simmetrica prendendo in considerazione solo il determinante e la traccia (o, in alcuni casi, il segno del primo elemento).

Corollario 1.4.15. *Sia $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ una matrice simmetrica. Allora A è:*

- *definita positiva* se e solo se $\det(A) > 0$ e $\text{Tr}(A) > 0$, oppure, equivalentemente, se e solo se $\det(A) > 0$ e $a_{11} > 0$ (o $a_{22} > 0$);

- *definita negativa se e solo se $\det(A) > 0$ e $\text{Tr}(A) < 0$, oppure, equivalentemente, se e solo se $\det(A) > 0$ e $a_{11} < 0$ (o $a_{22} < 0$);*
- *semidefinita positiva se e solo se $\det(A) \geq 0$ e $\text{Tr}(A) \geq 0$;*
- *semidefinita negativa se e solo se $\det(A) \geq 0$ e $\text{Tr}(A) \leq 0$;*
- *non definita se e solo se $\det(A) < 0$.*

Dimostrazione. È una conseguenza immediata del Corollario 1.1.21 unito al Criterio di Sylvester (Teorema 1.4.13). \square

Possiamo ora caratterizzare i punti critici di una funzione C^2 .

Teorema 1.4.16 (Classificazione dei punti critici). *Siano $f \in C^2(\Omega)$ e $a \in \Omega$ un punto critico di f . Valgono le seguenti implicazioni:*

- *se $\text{H}f(a)$ è definita positiva, allora a è un punto di minimo relativo;*
- *se $\text{H}f(a)$ è definita negativa, allora a è un punto di massimo relativo;*
- *se $\text{H}f(a)$ è non definita, allora a è un punto di sella;*
- *se a è un punto di minimo relativo, allora $\text{H}f(a)$ è semidefinita positiva;*
- *se a è un punto di massimo relativo, allora $\text{H}f(a)$ è semidefinita negativa.*

Dimostrazione. Diamo l'idea della dimostrazione nel primo caso. Dato che a è un punto critico di f , sappiamo che $\nabla f(a) = 0$. Allora, la formula dello sviluppo in serie di Taylor al secondo ordine (Teorema 1.4.7) si riduce a

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}h^t \text{H}f(a)h + o(\|h\|^2) \quad \text{per } h \rightarrow 0 \text{ in } \mathbb{R}^n;$$

e dunque, ponendo $x = a + h$, otteniamo

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \frac{1}{2}(x-a)^t \text{H}f(a)(x-a) + o(\|x-a\|^2) \\ &= \|x-a\|^2 \left(\frac{1}{2} \frac{(x-a)^t}{\|x-a\|} \text{H}f(a) \frac{(x-a)}{\|x-a\|} + o(1) \right) \quad \text{per } x \rightarrow a \text{ in } \mathbb{R}^n, x \neq a. \end{aligned}$$

Dato che $\text{H}f(a)$ è definita positiva, sappiamo che

$$\frac{(x-a)^t}{\|x-a\|} \text{H}f(a) \frac{(x-a)}{\|x-a\|} \geq 0 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^n, x \neq a.$$

D'altra parte, il termine $o(1)$ indica un resto che sta andando a 0 per $x \rightarrow a$, e perciò possiamo tranquillamente assumere che sia arbitrariamente piccolo per x sufficientemente vicino ad a : di conseguenza, esiste $r > 0$ tale che

$$\frac{1}{2} \frac{(x-a)^t}{\|x-a\|} \text{H}f(a) \frac{(x-a)}{\|x-a\|} + o(1) \geq 0 \quad \text{per ogni } x \in B_r(a) \setminus \{a\}.$$

Ciò implica

$$f(x) \geq f(a) \quad \text{per ogni } x \in B_r(a),$$

dato che ovviamente la disuguaglianza è soddisfatta per $x = a$; e questo significa che a è un punto di minimo relativo. \square

Rivediamo i due esempi fondamentali di studio di punti critici alla luce di questo teorema.

Esempio 1.4.17. Sia $f(x, y) = x^2 + y^2$. Allora abbiamo

$$\nabla f(x, y) = (2x, 2y) = (0, 0) \iff (x, y) = (0, 0)$$

e

$$\text{H}f(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{e quindi } \text{H}f(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

che è chiaramente definita positiva. Infatti, è facile osservare che $(0, 0)$ è un punto di minimo assoluto (non soltanto relativo) per f , dato che $x^2 + y^2 \geq 0$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Considerando invece $g(x, y) = -x^2 - y^2$, abbiamo

$$\nabla g(x, y) = (-2x, -2y) = (0, 0) \iff (x, y) = (0, 0).$$

e

$$H g(x, y) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \text{ e quindi } H g(0, 0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

che è chiaramente definita negativa. Infatti, è facile osservare che $(0, 0)$ è un punto di massimo assoluto (non soltanto relativo) per g , dato che $-(x^2 + y^2) \leq 0$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Nel caso particolare della dimensione 2, si può enunciare una versione semplificata del teorema di classificazione dei punti critici.

Teorema 1.4.18 (Classificazione dei punti critici in \mathbb{R}^2). *Siano $n = 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un insieme aperto, $f \in C^2(\Omega)$ e $a \in \Omega$ un punto critico di f . Valgono le seguenti implicazioni:*

- se $\det(H f(a)) > 0$ e $\partial_{xx}f(a) > 0$ (o $\partial_{yy}f(a) > 0$), allora a è un punto di minimo relativo;
- se $\det(H f(a)) > 0$ e $\partial_{xx}f(a) < 0$ (o $\partial_{yy}f(a) < 0$), allora a è un punto di massimo relativo;
- se $\det(H f(a)) < 0$, allora a è un punto di sella.

Dimostrazione. È una conseguenza immediata del teorema di classificazione dei punti critici (Teorema 1.4.16) unito alla caratterizzazione del segno delle matrici simmetriche 2×2 (Corollario 1.4.15). □

Osservazione 1.4.19. Osserviamo che gli ultimi due casi del teorema di classificazione dei punti critici non sono esattamente speculari rispetto ai primi due, come accade in dimensione 1, dato che può succedere che si abbia un punto di massimo o minimo relativo in cui la matrice hessiana abbia almeno un autovalore nullo. In altre parole, se $H f(a)$ è solo semidefinita positiva o negativa (ovvero, se ha almeno un autovalore nullo, e dunque $\det(H f(a)) = 0$), non si può dire nulla di certo sulla natura del punto critico a .

Si consideri ad esempio $f(x, y) = x^2 + y^4$. In tal caso abbiamo

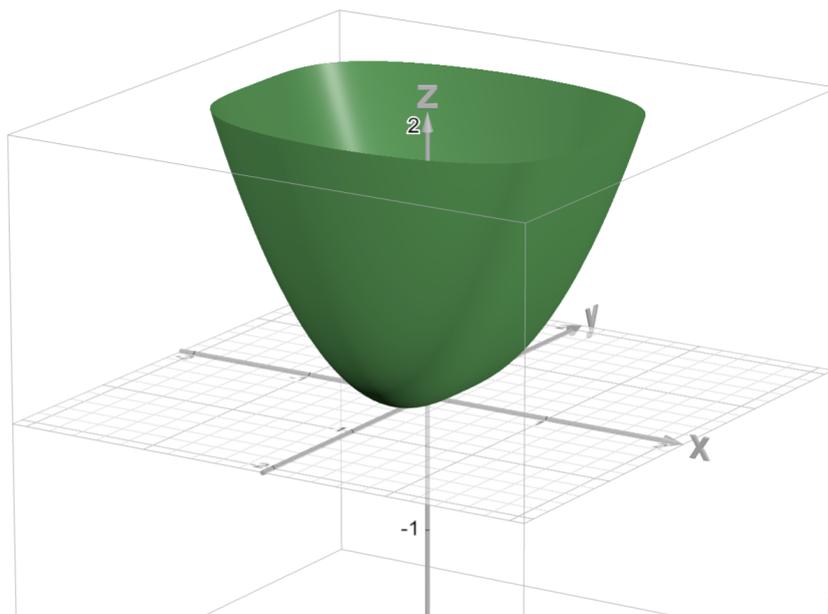


Figura 1.10: Il grafico di $f(x, y) = x^2 + y^4$.

$$\nabla f(x, y) = (2x, 4y^3) = (0, 0) \iff (x, y) = (0, 0),$$

di modo che l'origine è l'unico punto critico di f . Calcoliamo quindi la matrice hessiana:

$$Hf(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{bmatrix}.$$

Dunque, otteniamo

$$Hf(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

che è una matrice semidefinita positiva, ma non definita positiva, dato che i suoi autovalori sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 0$ (la matrice è diagonale). D'altra parte, $(0, 0)$ è un punto di minimo assoluto per f , dato che $f(x, y) = x^2 + y^4 \geq 0 = f(0, 0)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Se invece consideriamo $g(x, y) = x^2 - y^4$, allora abbiamo

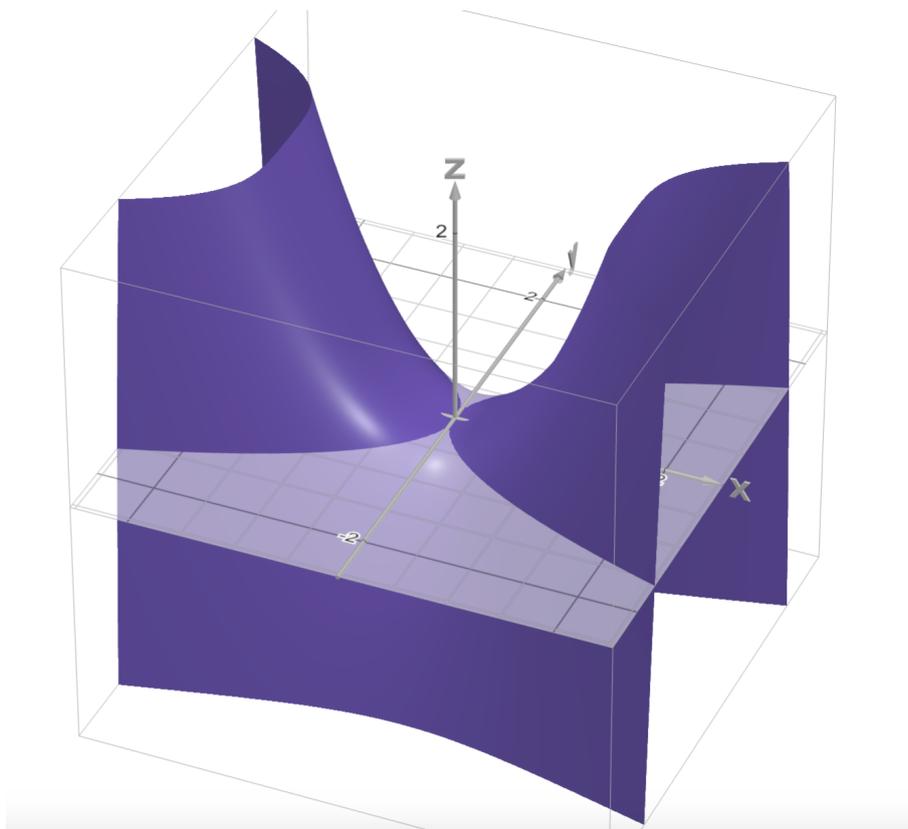


Figura 1.11: Il grafico di $g(x, y) = x^2 - y^4$.

$$\nabla g(x, y) = (2x, -4y^3) = (0, 0) \iff (x, y) = (0, 0),$$

di modo che l'origine è l'unico punto critico di g . La matrice hessiana è data da

$$Hg(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -12y^2 \end{bmatrix},$$

di modo che

$$Hg(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

che è una matrice semidefinita positiva, ma non definita positiva, per quanto visto prima. D'altra parte, $(0, 0)$ è un punto di sella per g , dato che $g(x, 0) = x^2$ e $g(0, y) = -y^4$, di modo che l'origine è un punto di minimo lungo l'asse x e un punto di massimo lungo l'asse y , e quindi non può essere un punto né di massimo né di minimo per g .

In conclusione, abbiamo visto che, se la matrice hessiana è semidefinita positiva in un punto critico, tale punto può essere sia di minimo relativo che di sella.

In maniera analoga, se la matrice hessiana è semidefinita negativa in un punto critico, tale punto può essere sia di massimo relativo che di sella.

Terminiamo questa sezione con un esempio di esercizio.

Esempio 1.4.20. Sia $f(x, y) = xy(x + y - 1)$. Allora abbiamo

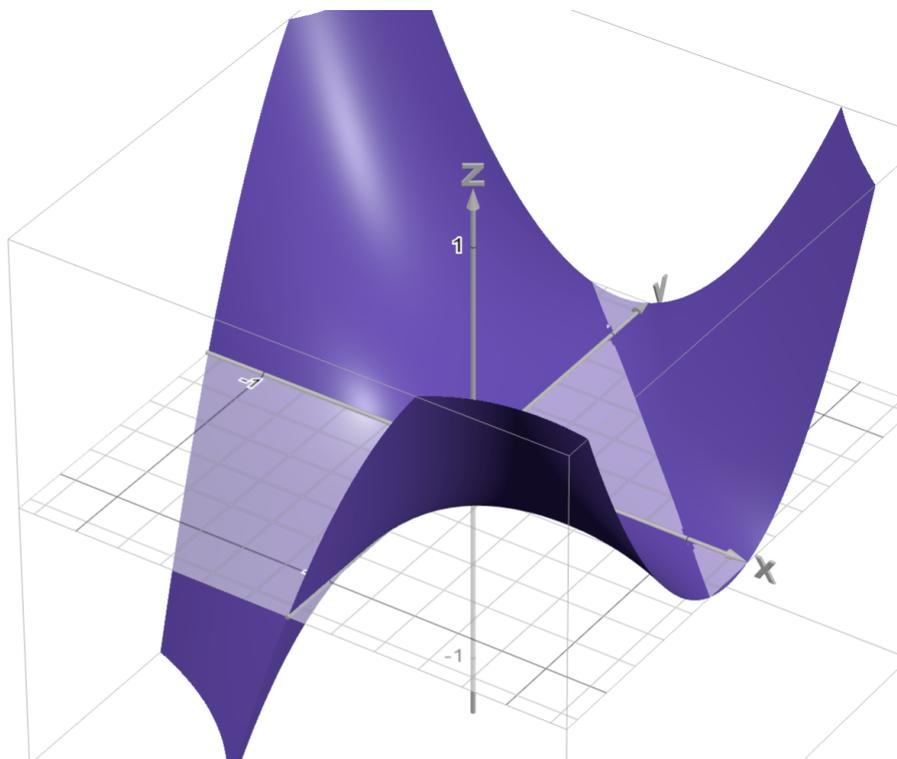


Figura 1.12: Il grafico di $f(x, y) = xy(x + y - 1)$.

$$\nabla f(x, y) = (y(x + y - 1) + xy, x(x + y - 1) + xy) = (y(2x + y - 1), x(x + 2y - 1)) = (0, 0)$$

se e solo se

$$\begin{cases} y(2x + y - 1) = 0, \\ x(x + 2y - 1) = 0. \end{cases}$$

La prima equazione ha come soluzioni $y = 0$ e $y = 1 - 2x$. Nel primo caso, la seconda equazione si riduce a

$$x(x - 1) = 0 \iff x = 0 \text{ o } x = 1,$$

di modo che $(0, 0)$ e $(1, 0)$ sono punti critici di f . Nel secondo caso, la seconda equazione si riduce a

$$x(-3x + 1) = 0 \iff x = 0 \text{ o } x = \frac{1}{3},$$

di modo che $y = 1$ o $y = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, e quindi $(0, 1)$ e $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ sono punti critici di f . In definitiva, i punti critici di f sono:

$$(0, 0), (1, 0), (0, 1), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Ora, la matrice hessiana di f è data da

$$Hf(x, y) = \begin{bmatrix} 2y & 2x + 2y - 1 \\ 2x + 2y - 1 & 2x \end{bmatrix}.$$

Quindi abbiamo:

- se $(x, y) = (0, 0)$, allora

$$Hf(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

che è non definita, dato che $\det(Hf(0, 0)) = -1 < 0$, e perciò $(0, 0)$ è un punto di sella;

- se $(x, y) = (1, 0)$, allora

$$Hf(1, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

che è non definita, dato che $\det(Hf(1, 0)) = -1 < 0$, e perciò $(1, 0)$ è un punto di sella;

- se $(x, y) = (0, 1)$, allora

$$Hf(0, 1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

che è non definita, dato che $\det(Hf(0, 1)) = -1 < 0$, e perciò $(0, 1)$ è un punto di sella;

- se $(x, y) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, allora

$$Hf\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix},$$

che è definita positiva, dato che

$$\det\left(Hf\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right) = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3} > 0 \quad \text{e} \quad \text{Tr}\left(Hf\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right) = \frac{4}{3}^{25},$$

e perciò $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ è un punto di minimo relativo.

1.5 Curve differenziabili

A meno che sia specificato diversamente, in questa sezione assumiamo $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e indichiamo con I un intervallo della retta reale. Riprendiamo ora lo studio di una famiglia particolare di funzioni a valori vettoriali, ovvero le curve, che sono funzioni continue $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, le cui componenti indichiamo con γ_j per $j \in \{1, \dots, n\}$, ovvero

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t)) \quad \text{per ogni } t \in I^{26}.$$

Dato $E \subseteq \mathbb{R}^n$, indichiamo con $C(I; E)$ l'insieme delle curve la cui traiettoria è interamente contenuta dentro E , ovvero

$$C(I; E) := \{\gamma \in C(I; \mathbb{R}^n) : \gamma(I) \subseteq E\}.$$

Per poter studiare le proprietà fini di una curva data, assumiamo che in ogni punto sia ben definito il *vettore velocità* della curva stessa, ovvero che la curva sia *differenziabile*.

Definizione 1.5.1. Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\gamma \in C(I; E)$. Assumiamo che le componenti γ_j siano derivabili in I , nel senso che le derivate $\gamma_j'(t)$ esistono per ogni t all'interno di I , e che negli estremi destri e/o sinistri (se appartengono all'intervallo I , nel qual caso li indichiamo con a, b) esistono rispettivamente la derivata destra e sinistra, ovvero esistono i limiti

$$\gamma_j'(a) := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\gamma_j(a+h) - \gamma_j(a)}{h} \in \mathbb{R}$$

e

$$\gamma_j'(b) := \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\gamma_j(b+h) - \gamma_j(b)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\gamma_j(b-h) - \gamma_j(b)}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\gamma_j(b) - \gamma_j(b-h)}{h} \in \mathbb{R}.$$

Allora il vettore

$$\dot{\gamma}(t) = (\dot{\gamma}_1(t), \dot{\gamma}_2(t), \dots, \dot{\gamma}_n(t)) := (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \dots, \gamma_n'(t)) \in \mathbb{R}^n.$$

è la *derivata*, o *velocità*, di γ in $t \in I$ (intendendo le derivate negli estremi come derivate destre e sinistre, come spiegato sopra). Se $\gamma_j \in C^1(I)$ per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$, ovvero $\gamma_j' \in C(I)$, allora γ è *differenziabile* su I , e scriviamo $\gamma \in C^1(I; E)$.

²⁵Oppure, $\partial_{xx}f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \partial_{yy}f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{2}{3} > 0$.

²⁶Sfruttando l'identificazione fra punti e vettori, rappresentiamo ora i valori di $\gamma(t)$ come un punto in \mathbb{R}^n , anziché un vettore.

Da un punto di vista cinetico, $\dot{\gamma}(t)$ è la velocità istantanea della traiettoria $\gamma(t)$ percorsa da un punto materiale, dato che è il limite per $\Delta t \rightarrow 0$ della velocità media:

$$\dot{\gamma}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\gamma(t + \Delta t) - \gamma(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \gamma(t)}{\Delta t}.$$

Usiamo le seguenti notazioni equivalenti per indicare la velocità o derivata di una curva differenziabile:

$$\dot{\gamma}(t) = \gamma'(t) = \frac{d\gamma}{dt}(t).$$

Vediamo alcuni esempi fondamentali di curve, specialmente nel piano cartesiano.

Esempio 1.5.2. Una qualunque retta nel piano cartesiano $y = mx + q$, per certi $m, q \in \mathbb{R}$, può essere rappresentata come la traccia di una curva. Per esempio, se poniamo $x = t$, allora abbiamo $y = mt + q$, e quindi otteniamo $\gamma(t) = (t, mt + q)$. Chiaramente, $\gamma \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$, e la velocità $\dot{\gamma}(t) = (1, m)$ è costante.

Ovviamente, otterremmo la stessa traccia con diverse parametrizzazioni, che possono corrispondere a diverse velocità di percorrenza. Ad esempio, se poniamo $x = s^3$, allora abbiamo $y = ms^3 + q$ e la curva $\alpha(s) = (s^3, ms^3 + q)$ ha come traccia ancora la retta $y = mx + q$. Anche questa curva è differenziabile su tutto \mathbb{R} , ma la sua derivata è data da

$$\dot{\alpha}(s) = (3s^2, 3ms^2) = 3s^2(1, m),$$

che non è costante, e ciò riflette il fatto che, infatti, i valori delle coordinate di α crescono in valore assoluto più rapidamente per $|s| > 1$ e più lentamente per $|s| < 1$.

Esempio 1.5.3. In generale, se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è un funzione continua, il grafico di f , ovvero l'insieme $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in I\}$, può essere visto come la traccia della curva

$$\gamma(t) = (t, f(t)), \quad \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Se poi f è anche derivabile, allora abbiamo $\dot{\gamma}(t) = (1, f'(t))$.

Esempio 1.5.4. La circonferenza centrata nell'origine di raggio 1, ovvero l'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\},$$

è normalmente parametrizzata mediante la curva

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)), \quad \gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Così abbiamo $\dot{\gamma}(t) = (-\sin(t), \cos(t))$, ed è interessante notare che la velocità scalare di questa curva, ovvero la norma di $\dot{\gamma}$, è costante, dato che $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$.

Esempio 1.5.5. Dati i punti $P, Q \in \mathbb{R}^n$, abbiamo visto nell'Esempio 1.2.32 che una parametrizzazione per il segmento che va da P a Q è data da

$$\gamma(t) = P + t(Q - P) = (1 - t)P + tQ \quad \text{per } t \in [0, 1],$$

di modo che $\dot{\gamma}(t) = Q - P \in \mathbb{R}^n$, ovvero la velocità è costante e coincide proprio con il vettore che va da P a Q . Questo è sensato, dato che $\gamma(t)$ è ben definita su tutto \mathbb{R} , e la sua traccia coincide con la retta che passa per i punti P e Q .

Esempio 1.5.6. Consideriamo il ramo dell'iperbole

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1, x > 0\}.$$

Osserviamo che è normalmente parametrizzato usando le funzioni *coseno iperbolico* e *seno iperbolico*, ovvero

$$\gamma(t) = (\cosh(t), \sinh(t)), \quad \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

dove

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{e} \quad \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Infatti, $\cosh(t) > 0$ e vediamo che

$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2t} + e^{-2t} + 2 - e^{2t} - e^{-2t} + 2}{4} = 1.$$

Inoltre, un semplice calcolo mostra che

$$\begin{aligned}\cosh'(t) &= \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)' = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \sinh(t), \\ \sinh'(t) &= \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)' = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \cosh(t),\end{aligned}$$

di modo che

$$\dot{\gamma}(t) = (\sinh(t), \cosh(t)).$$

Inoltre, se consideriamo l'altro ramo dell'iperbole

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1, x < 0\},$$

allora è facile vedere che può essere parametrizzato da

$$\gamma(t) = (-\cosh(t), \sinh(t)).$$

Visto che le curve sono funzioni definite su intervalli reali a valori vettoriali, se sono differenziabili soddisfano le stesse proprietà delle funzioni differenziabili in più variabili e a valori vettoriali. In particolare, vale la formula di Taylor al I ordine.

Proposizione 1.5.7 (Formula di Taylor al I ordine per una curva). *Sia $\gamma \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$. Per ogni $t \in I^\circ$ abbiamo*

$$\gamma(t+h) = \gamma(t) + \dot{\gamma}(t)h + o(h) \quad \text{per } h \rightarrow 0,$$

ovvero

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t) - \dot{\gamma}(t)h}{h} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n.$$

Inoltre, le derivate delle curve hanno proprietà analoghe a quelle delle derivate delle funzioni reali di una variabile reale, come la regola della derivata della somma e la regola di derivazione della funzione composta.

Lemma 1.5.8. *Siano $\gamma \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$, $J \subset \mathbb{R}$ un intervallo e $\varphi : J \rightarrow I$ tale che $\varphi \in C^1(J)$. Allora $\gamma \circ \varphi \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$ e abbiamo*

$$\frac{d}{dt}(\gamma \circ \varphi)(t) = \dot{\gamma}(\varphi(t))\varphi'(t) \quad \text{per ogni } t \in J. \quad (1.5.1)$$

In particolare, ciò significa che la velocità dipende dalla parametrizzazione e non solo dalla traccia della curva, ovvero dipende dalla formula esplicita scelta per rappresentare in maniera analitica la curva.

Più precisamente, sia $\gamma \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^n)$. Possiamo riparametrizzarla componendola con una mappa C^1 e biunivoca $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ tale che $\varphi'(\sigma) \neq 0$ per ogni $\sigma \in [c, d]$. Allora la curva $\gamma \circ \varphi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ appartiene a $C^1([c, d]; \mathbb{R}^n)$ e percorre le stesse posizioni percorse da γ ; nello stesso ordine se φ è strettamente crescente (ovvero, $\varphi'(\sigma) > 0$), in ordine inverso se φ è strettamente decrescente (ovvero, $\varphi'(\sigma) < 0$). Di conseguenza, la traccia di γ rimane invariata, perché le posizioni percorse da γ sono le stesse di quelle percorse da $\gamma \circ \varphi$; in altre parole, $(\gamma \circ \varphi)([c, d]) = \gamma([a, b])$. Invece, grazie alla regola di derivazione della funzione composta (1.5.1), sappiamo che i vettori velocità nella stessa posizione cambiano di un fattore moltiplicativo scalare uguale a $\varphi'(t)$.

Osservazione 1.5.9. Dalle regole di derivazione del prodotto deduciamo delle proprietà relative alla derivata del prodotto scalare e della norma di curve differenziabili. Nello specifico, se $\alpha, \beta \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$, allora valgono le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\alpha(t) \cdot \beta(t)) &= \dot{\alpha}(t) \cdot \beta(t) + \alpha(t) \cdot \dot{\beta}(t), \\ \frac{d}{dt}\|\alpha(t)\|^2 &= 2\alpha(t) \cdot \dot{\alpha}(t).\end{aligned}$$

Un'altra fondamentale regola di derivazione della composizione riguarda il caso opposto, ovvero quando la curva è la funzione “più interna” della composizione.

Lemma 1.5.10. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, $f \in C^1(\Omega)$ e $\gamma \in C^1(I; \Omega)$. Allora $f \circ \gamma \in C^1(I)$ e abbiamo*

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\gamma(t)) \dot{\gamma}_j(t) \quad \text{per ogni } t \in I.$$

Questa regola di derivazione di una funzione in più variabili composta con una curva permette di dimostrare la caratterizzazione delle funzioni costanti in più variabili.

Infatti, è chiaro che il gradiente di una funzione costante è il vettore nullo, ed è naturale chiedersi se questa proprietà caratterizzi tutte e sole le funzioni costanti, come accade in dimensione 1 con la derivata prima: è in effetti così, come illustrato nel seguente risultato.

Proposizione 1.5.11. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto connesso per archi e $f \in C^1(\Omega)$. Allora f è costante se e solo se $\nabla f(x) = 0$ per ogni $x \in \Omega$.*

La dimostrazione, che lasciamo per esercizio, si basa anche sulla seguente proprietà degli insiemi aperti connessi per archi in \mathbb{R}^n .

Lemma 1.5.12. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto connesso per archi. Allora per ogni $x_0, x_1 \in \Omega$ esiste una curva $\gamma \in C^1([0, 1]; \Omega)$ tale che $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$.*

La dimostrazione di questo risultato è abbastanza tecnica ed è quindi omessa. L'idea di fondo è che dentro un aperto c'è sempre “abbastanza spazio” per regolarizzare un'eventuale curva solamente continua che unisca i due punti $x_0, x_1 \in \Omega$.

1.6 Estremanti vincolati e moltiplicatori di Lagrange

Se si cercano i punti di massimo e minimo di una funzione continua definita su un insieme compatto (dove certamente esistono grazie al Teorema di Weierstrass), può succedere che tali punti si trovino sul bordo di tale insieme, e non all'interno. Tuttavia, il Teorema di Fermat si applica solo a funzioni definite su insiemi aperti, e non ci può aiutare a trovare punti di massimo e minimo sul bordo del dominio. Perciò serve una teoria a sé stante per gli *estremanti vincolati*, ovvero i punti di estremo (massimi o minimi, relativi o assoluti) per una funzione ristretta al bordo del dominio, ovvero il *vincolo*, che, nei casi del piano cartesiano che vedremo, è un'unione di curve differenziabili.

Diamo ora una descrizione matematica del problema.

Siano $n = 2$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme aperto, $E \subset \Omega$ un insieme compatto e $f \in C^1(\Omega)$. Queste ipotesi servono ad assicurarsi che f sia derivabile anche su ∂E . Grazie al Teorema di Weierstrass, sappiamo che f ammette almeno un punto di massimo e un punto di minimo assoluti in E . Assumiamo inoltre che questi punti non siano nell'interno di E (ad esempio, f non ha punti critici in E° , oppure tutti i punti critici in E° sono di sella). Allora questi punti di massimo e minimo assoluti devono appartenere a ∂E . Assumiamo che esista $\gamma \in C^1([a, b]; \Omega)$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, tale che $\partial E = \gamma([a, b])$, ovvero che il bordo di E sia la traccia della curva differenziabile γ . Allora, per studiare il comportamento di f ristretta a ∂E , è sufficiente considerare la funzione

$$h(t) = f(\gamma(t)) = f(x(t), y(t)), \quad h : [a, b] \rightarrow \partial E.$$

Grazie alla regola di derivazione delle funzioni composte con curve (Lemma 1.5.10), sappiamo che $h \in C^1([a, b])$ e che

$$h'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t).$$

Dunque, sia $(x_0, y_0) \in \partial E$ un punto di massimo o minimo assoluto per f in E (e quindi anche in $\partial E \subseteq E$, dato che E è chiuso), e assumiamo che esista $t_0 \in (a, b)$ tale che

$$(x_0, y_0) = \gamma(t_0) = (x(t_0), y(t_0)).$$

Allora, per il Teorema di Fermat in una dimensione, sappiamo che

$$0 = h'(t_0) = \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \dot{\gamma}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)y'(t_0). \quad (1.6.1)$$

Da un punto di vista geometrico, ciò significa che il gradiente della funzione e il vettore tangente alla curva nel punto (x_0, y_0) sono ortogonali.

Questo ragionamento ci dà una condizione necessaria di esistenza di massimo e minimo per una funzione ristretta alla traccia di una curva $\gamma \in C^1([a, b]; \Omega)$: se esiste un punto di massimo o minimo (x_0, y_0) , allora

- (1.6.1) è soddisfatta per qualche $t_0 \in (a, b)$ tale che $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$, oppure
- $(x_0, y_0) = \gamma(a)$, oppure
- $(x_0, y_0) = \gamma(b)$.

Dato che questa è una condizione necessaria e non sufficiente, bisogna poi confrontare i valori $f(\gamma(t_0))$ per ogni $t_0 \in (a, b)$ soluzione di (1.6.1), $f(\gamma(a))$ e $f(\gamma(b))$: i punti dove f ha il valore più grande sono i punti di massimo assoluto, mentre quelli dove f ha il valore più piccolo sono i punti di minimo assoluto.

Illustriamo questo approccio con un esempio.

Esempio 1.6.1. Siano $E = \overline{B_1(0)}$ e $f(x, y) = xy$. Chiaramente, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e sappiamo che f ha un solo punto critico che è un punto di sella (si veda l'Esempio 1.3.22). Quindi, i punti di massimo e minimo di f in E , che devono esistere per il Teorema di Weierstrass, stanno sul bordo di E , che è dato da

$$\partial E = \partial B_1(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} = \gamma([0, 2\pi]) \quad \text{per } \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)).$$

Quindi abbiamo

$$h(t) = f(\cos(t), \sin(t)) = \cos(t) \sin(t) = \frac{\sin(2t)}{2}.$$

Perciò è facile vedere che

$$h'(t) = \cos(2t) = 0 \iff t = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4},$$

e a questi valori corrispondo i punti

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Calcoliamo quindi il valore di f in questi punti e in $\gamma(0) = (1, 0) = \gamma(2\pi)$:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}, \quad f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad f(1, 0) = 0.$$

Concludiamo quindi che $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ sono punti di massimo assoluto per f in ∂E , mentre $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ sono punti di minimo assoluto per f in ∂E ²⁷. A questo punto, dato che f ha solo un punto di sella in $E^\circ = B_1(0)$, concludiamo che questi sono effettivamente punti di massimo e minimo assoluti per f in E . Osserviamo infine che $\nabla f(x, y) = (y, x)$, e quindi i vettori

$$\nabla f(\cos(t), \sin(t)) = (\sin(t), \cos(t)) \quad \text{e} \quad \gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$$

sono ortogonali se e solo se

$$-\sin^2(t) + \cos^2(t) = \cos(2t) = 0,$$

di modo che ritroviamo la stessa equazione.

²⁷Si può anche verificare a mano che questi siano effettivamente punti di massimo e minimo assoluti, osservando che

$$0 \leq (|x| - |y|)^2 = x^2 + y^2 - 2|xy| \iff |xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2} \quad \text{per ogni } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

e quindi

$$-\frac{1}{2} = -\frac{x^2 + y^2}{2} \leq xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{per ogni } x, y \text{ tali che } x^2 + y^2 = 1.$$

Tuttavia, richiedere che tutto il bordo di un insieme compatto nel piano sia la traccia di una sola curva differenziabile pone eccessive limitazioni, dato che esclude la possibilità dell'esistenza di vertici o cuspidi. D'altra parte, non è difficile vedere come generalizzare il metodo esposto sopra.

Dato un insieme compatto $E \subset \mathbb{R}^2$, assumiamo che esistano delle curve $\gamma_j \in C^1([a_j, b_j]; \mathbb{R}^2)$ per $j \in \{1, \dots, k\}$ tali che $\partial E = \gamma_1([a_1, b_1]) \cup \gamma_2([a_2, b_2]) \cup \dots \cup \gamma_k([a_k, b_k])$. Allora è sufficiente applicare l'approccio precedente a ciascuna di queste curve.

Vediamolo esplicitamente con un esempio.

Esempio 1.6.2. Siano $E = [0, 1]^2$ e $f(x, y) = xy$. Chiaramente, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e non ammette punti critici in $E^\circ = (0, 1)^2$, dato che l'origine $(0, 0)$ è infatti un vertice di questo quadrato (si veda l'Esempio 1.3.22). Quindi, i punti di massimo e minimo di f in E , che devono esistere per il Teorema di Weierstrass, stanno sul bordo di E , che è dato da

$$\partial E = \partial[0, 1]^2 = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4,$$

dove

$$\begin{aligned} L_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], y = 0\} = \gamma_1([0, 1]) \text{ per } \gamma_1(t) = (t, 0), \\ L_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1, y \in [0, 1]\} = \gamma_2([0, 1]) \text{ per } \gamma_2(t) = (1, t), \\ L_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], y = 1\} = \gamma_3([0, 1]) \text{ per } \gamma_3(t) = (t, 1), \\ L_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y \in [0, 1]\} = \gamma_4([0, 1]) \text{ per } \gamma_4(t) = (0, t). \end{aligned}$$

Quindi, componiamo f con ciascuna di queste quattro curve:

$$\begin{aligned} h_1(t) &= f(\gamma_1(t)) = f(t, 0) = 0, \\ h_2(t) &= f(\gamma_2(t)) = f(1, t) = t, \\ h_3(t) &= f(\gamma_3(t)) = f(t, 1) = t, \\ h_4(t) &= f(\gamma_4(t)) = f(0, t) = 0. \end{aligned}$$

Dato che h_1 e h_4 sono costanti, tutti i punti del loro dominio sono critici; mentre è chiaro che $h_2'(t) = h_3'(t) = 1$, e quindi h_2 e h_3 non hanno punti critici. Perciò bisogna confrontare i valori di f in $L_1 \cup L_4$ (dove è costante) e nel vertice restante $(1, 1)$:

$$f(x, y) = 0 \text{ per ogni } (x, y) \in L_1 \cup L_4 \text{ e } f(1, 1) = 1.$$

Di conseguenza, concludiamo che tutti i punti dell'insieme $L_1 \cup L_4$ sono punti di minimo assoluto per f in E , mentre $(1, 1)$ è l'unico punto di massimo assoluto di f in E .

Notiamo inoltre che richiedere che f non ammetta punti di massimo e minimo assoluti nell'interno di E serve solo ad assicurarsi che tali punti debbano essere sul bordo, ma il metodo si può applicare anche senza questa assunzione. Infatti, se f ha dei punti di massimo o minimo relativi in E° , si applica il metodo che abbiamo descritto precedentemente per trovare dei candidati per punti di massimo e minimo sul bordo ∂E , e poi è sufficiente valutare la funzione in tutti questi punti (sia quelli in E° che in ∂E), onde trovare quali siano il valore massimo e quello minimo. Sottolineiamo il fatto che eventuali punti di massimo e minimo relativi possono solo appartenere all'interno di E , non al bordo: quindi, se in alcuni dei punti individuati su ∂E la funzione non assume né il valore massimo né quello minimo, questi punti vanno semplicemente scartati.

Vediamo due esempi di questo caso generale.

Esempio 1.6.3. Siano $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, x \geq -1\}$ e $f(x, y) = x^2 + y^2$. Ovviamente, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, e $(0, 0)$ è l'unico punto critico di f , che è anche un punto di minimo assoluto per f in \mathbb{R}^2 , come mostrato nell'Esempio 1.3.23. Dato che $(0, 0) \in E^\circ$, allora è un punto di minimo assoluto anche per f in E . Quanto al bordo di E , osserviamo che

$$\partial E = C \cup L,$$

dove

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2, x \geq -1\} = \gamma_1 \left(\left[-\frac{3}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi \right] \right) \text{ per } \gamma_1(t) = (\sqrt{2} \cos(t), \sqrt{2} \sin(t)),$$

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -1, y \in [-1, 1]\} = \gamma_2([-1, 1]) \text{ per } \gamma_2(t) = (-1, t).$$

Quindi, componiamo f con ciascuna di queste due curve:

$$h_1(t) = f(\gamma_1(t)) = 2(\cos(t))^2 + 2(\sin(t))^2 = 2,$$

$$h_2(t) = f(\gamma_2(t)) = 1 + t^2.$$

Dato che h_1 è costante, tutti i punti del suo dominio sono critici (ovvero, tutti i punti di C); mentre è chiaro che $h_2(t) = 2t$, e quindi l'unico punto critico di h_2 è $t = 0$. Non serve considerare altri punti, dato che i vertici dove si incontrano γ_1 e γ_2 sono contenuti in C . Quindi, confrontiamo i valori di f in $(0, 0)$, in C e in $\gamma_2(0) = (-1, 0)$:

$$f(0, 0) = 0, f(x, y) = 2 \text{ per ogni } (x, y) \in C \text{ e } f(-1, 0) = 1.$$

Di conseguenza, concludiamo che l'unico punto di minimo assoluto è $(0, 0)$, mentre tutti i punti di C sono di massimo assoluto.

Esempio 1.6.4. Siano $E = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$ e $f(x, y) = xy(x + y - 1)$. Per quanto visto nell'Esempio

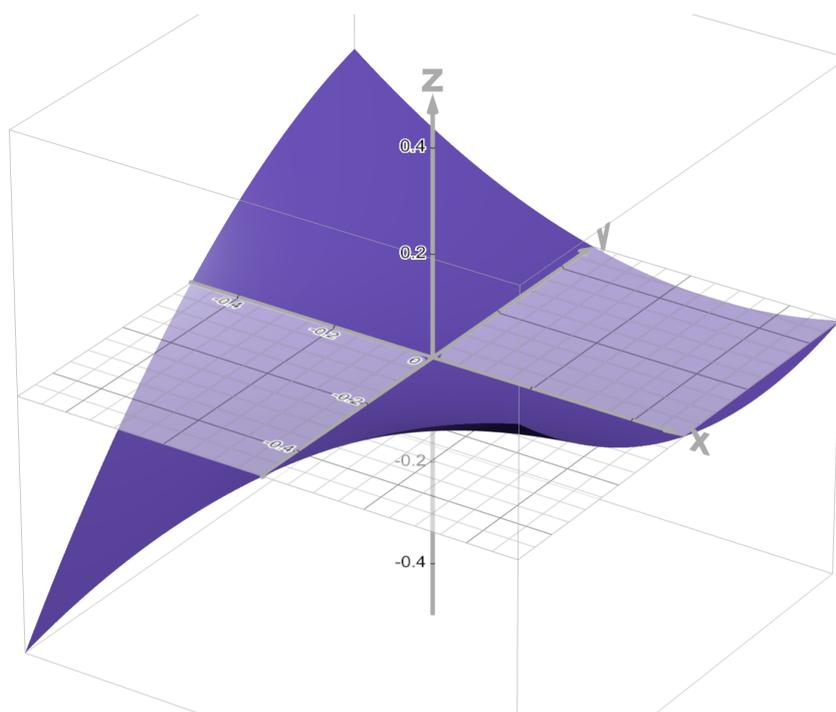


Figura 1.13: Il grafico di $f(x, y) = xy(x + y - 1)$ su $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$.

1.4.20, sappiamo che gli unici punti critici di f in E° sono $(0, 0)$, che è di sella, e $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, che è di minimo relativo. Osserviamo poi che

$$\partial E = \partial \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^2 = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4,$$

dove

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], y = -\frac{1}{2} \right\} = \gamma_1 \left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \right) \text{ per } \gamma_1(t) = \left(t, -\frac{1}{2}\right), \\
 L_2 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{1}{2}, y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \right\} = \gamma_2 \left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \right) \text{ per } \gamma_2(t) = \left(\frac{1}{2}, t\right), \\
 L_3 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], y = \frac{1}{2} \right\} = \gamma_3 \left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \right) \text{ per } \gamma_3(t) = \left(t, \frac{1}{2}\right), \\
 L_4 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -\frac{1}{2}, y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \right\} = \gamma_4 \left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \right) \text{ per } \gamma_4(t) = \left(-\frac{1}{2}, t\right).
 \end{aligned}$$

Quindi, componiamo f con ciascuna di queste quattro curve:

$$\begin{aligned}
 h_1(t) &= f(\gamma_1(t)) = f\left(t, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{t}{2} \left(t - \frac{3}{2}\right) = -\frac{t^2}{2} + \frac{3t}{4}, \\
 h_2(t) &= f(\gamma_2(t)) = f\left(\frac{1}{2}, t\right) = \frac{t}{2} \left(t - \frac{1}{2}\right) = \frac{t^2}{2} - \frac{t}{4}, \\
 h_3(t) &= f(\gamma_3(t)) = f\left(t, \frac{1}{2}\right) = \frac{t}{2} \left(t - \frac{1}{2}\right) = \frac{t^2}{2} - \frac{t}{4}, \\
 h_4(t) &= f(\gamma_4(t)) = f\left(-\frac{1}{2}, t\right) = -\frac{t}{2} \left(t - \frac{3}{2}\right) = -\frac{t^2}{2} + \frac{3t}{4}.
 \end{aligned}$$

Vediamo perciò che

$$\begin{aligned}
 h_1'(t) = h_4'(t) &= -t + \frac{3}{4} = 0 \iff t = \frac{3}{4}, \\
 h_2'(t) = h_3'(t) &= t - \frac{1}{4} = 0 \iff t = \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

Tuttavia, $\frac{3}{4} \notin \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, e dunque non ci possono essere punti di massimo o minimo su $L_1 \cup L_4$, a eccezione forse dei vertici. Quindi dobbiamo calcolare il valore di f nei punti

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \gamma_2\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \text{ e } \gamma_3\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right).$$

Abbiamo

- $f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27}$,
- $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0$,
- $f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$,
- $f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$,
- $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{32}$.

In conclusione, ne segue che $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ sono punti di massimo assoluto, mentre $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ è il punto di minimo assoluto (e, di conseguenza, $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ è solo un punto di minimo relativo, non assoluto).

Infine, è importante osservare che questo metodo si applica anche al caso di un insieme E chiuso ma illimitato, tenendo però presente che il Teorema di Weierstrass non si può più applicare (perché E non è compatto), e dunque non è più certo che esistano dei punti di massimo e minimo assoluti.

In tali situazioni bisogna quindi verificarlo “a mano”, andando a controllare i comportamenti asintotici della funzione lungo determinate curve illimitate che compongono il bordo di E , o che si trovano al suo interno. Infatti, non esiste nessun punto di massimo (o di minimo) assoluto se l'estremo superiore (o l'estremo inferiore) della funzione non vengono raggiunti in nessun punto di E . Ad esempio, ciò si verifica se $\sup_E f = +\infty$ o $\inf_E f = -\infty$: vediamo un esempio di questa situazione.

Esempio 1.6.5. Siano $E = [0, +\infty) \times [0, 1] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \in [0, 1]\}$ e $f(x, y) = xy$. Chiaramente, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e non ammette punti critici in $E^\circ = (0, 1)^2$, dato che l'origine $(0, 0)$ è infatti un vertice della striscia infinita data da E (si veda l'Esempio 1.3.22). Quindi, i punti di massimo e minimo assoluto di f in E , se esistono, stanno sul bordo di E , che è dato da

$$\partial E = \partial([0, +\infty) \times [0, 1]) = L_1 \cup L_2 \cup L_3,$$

dove

$$\begin{aligned} L_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y = 0\} = \gamma_1([0, +\infty)) \text{ per } \gamma_1(t) = (t, 0), \\ L_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y = 1\} = \gamma_2([0, +\infty)) \text{ per } \gamma_2(t) = (t, 1), \\ L_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y \in [0, 1]\} = \gamma_3([0, 1]) \text{ per } \gamma_3(t) = (0, t). \end{aligned}$$

Quindi, componiamo f con ciascuna di queste tre curve:

$$\begin{aligned} h_1(t) &= f(\gamma_1(t)) = f(t, 0) = 0, \\ h_2(t) &= f(\gamma_2(t)) = f(t, 1) = t, \\ h_3(t) &= f(\gamma_3(t)) = f(0, t) = 0. \end{aligned}$$

Dato che h_1 e h_3 sono costanti, tutti i punti del loro dominio sono critici; mentre è chiaro che $h_2'(t) = 1$, e quindi h_2 non ha punti critici. Perciò concludiamo che tutti i punti in $L_1 \cup L_3$ sono punti di minimo assoluto, visto che

$$f(x, y) = 0 \text{ per ogni } (x, y) \in L_1 \cup L_3 \text{ e } f(x, y) = xy \geq 0 \text{ per ogni } (x, y) \in E.$$

D'altra parte, non ci sono candidati per punti di massimo assoluto: ciò suggerisce che non esistano, ed è infatti così. Per vederlo, è sufficiente notare che f va a $+\infty$ lungo la semiretta L_2 , dato che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, 1) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t = +\infty.$$

Dunque, f è illimitata superiormente lungo la semiretta L_2 , e quindi $\sup_{(x, y) \in E} f(x, y) = +\infty$. In conclusione, non esistono punti di massimo per f né assoluti né relativi.

Può peraltro succedere che $\sup_E f < +\infty$ o $\inf_E f > -\infty$, ma che comunque f non ammette massimo o minimo in E , ovvero che l'estremo superiore o l'estremo inferiore non sono raggiunti. In altre parole, può esserci un asintoto lungo una qualche curva illimitata in E .

Esempio 1.6.6. Siano $E = [1, +\infty) \times [0, 1] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, y \in [0, 1]\}$ e $f(x, y) = y(1 - \frac{1}{x})$. Chiaramente, $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{x = 0\})$ e

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{y}{x^2}, 1 - \frac{1}{x} \right),$$

di modo che

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} \frac{y}{x^2} = 0 \\ 1 - \frac{1}{x} = 0 \end{cases} \iff (x, y) = (1, 0).$$

Tuttavia, $(1, 0) \notin E^\circ$, perché $(1, 0) \in \partial E$ (è uno dei vertici di questa striscia infinita). Dunque, f non ha punti critici all'interno di E . Andiamo a studiare il comportamento di f sul bordo di E : osserviamo che

$$\partial E = \partial([1, +\infty) \times [0, 1]) = L_1 \cup L_2 \cup L_3,$$

dove

$$\begin{aligned} L_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, y = 0\} = \gamma_1([1, +\infty)) \text{ per } \gamma_1(t) = (t, 0), \\ L_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, y = 1\} = \gamma_2([1, +\infty)) \text{ per } \gamma_2(t) = (t, 1), \\ L_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1, y \in [0, 1]\} = \gamma_3([0, 1]) \text{ per } \gamma_3(t) = (1, t). \end{aligned}$$

Quindi, componiamo f con ciascuna di queste tre curve:

$$\begin{aligned}h_1(t) &= f(\gamma_1(t)) = f(t, 0) = 0, \\h_2(t) &= f(\gamma_2(t)) = f(t, 1) = 1 - \frac{1}{t}, \\h_3(t) &= f(\gamma_3(t)) = f(1, t) = 0.\end{aligned}$$

Dato che h_1 e h_3 sono costanti, tutti i punti del loro dominio sono critici; mentre è chiaro che $h_2'(t) = \frac{1}{t^2}$, e quindi h_2 non ha punti critici. Perciò concludiamo che tutti i punti in $L_1 \cup L_3$ sono punti di minimo assoluto, visto che

$$f(x, y) = 0 \text{ per ogni } (x, y) \in L_1 \cup L_3 \text{ e } f(x, y) = y \left(1 - \frac{1}{x}\right) \geq 0 \text{ per ogni } (x, y) \in E,$$

dato che $y \geq 0$ e $\frac{1}{x} \leq 1$ per $x \geq 1$. D'altra parte, non ci sono candidati per punti di massimo assoluto: ciò suggerisce che non esistano, ed è infatti così. Per vederlo, è sufficiente considerare il comportamento asintotico di f lungo L_2 :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, 1) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1.$$

Osserviamo a questo punto che

$$y \left(1 - \frac{1}{x}\right) \leq 1 - \frac{1}{x} < 1 \text{ per ogni } x \geq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1.$$

Quindi, concludiamo che

$$\sup_{(x,y) \in E} f(x, y) = 1, \text{ ma } f(x, y) < 1 \text{ per ogni } (x, y) \in E,$$

da cui si deduce che non può esistere nessun punto di massimo assoluto.

Osserviamo però che non è sempre possibile applicare questo approccio, perché può non essere facile trovare delle parametrizzazioni, ovvero delle formule esplicite, per le curve la cui traccia costituisce il vincolo ∂E , oppure le parametrizzazioni che si trovano possono essere difficili da usare.

Ad esempio, consideriamo l'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 \leq 1\}$. Da un punto di vista grafico, questo insieme sembra molto simile al cerchio chiuso unitario $B_1(0)$, ma non è ovvio trovare una parametrizzazione per il bordo $\partial E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 = 1\}$ ²⁸.

Come altro esempio, potremmo considerare l'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + x + y^2 + y \leq 1\}$: si può in effetti dimostrare che $E = B_{\sqrt{\frac{1}{2}}}(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, ma non è del tutto immediato vederlo, e dunque trovare una parametrizzazione per $\partial E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + x + y^2 + y = 1\}$.

Inoltre, osserviamo che finora abbiamo considerato vincoli solo nel piano cartesiano: nonostante per gli scopi di questo corso ciò possa essere sufficiente, in generale è importante poter studiare il comportamento di f su ∂E anche in dimensioni superiori.

Tutte queste considerazioni portano a considerare la possibilità che il vincolo sia implicito, ovvero che ∂E si possa vedere come l'insieme degli zeri di una qualche funzione g sufficientemente regolare. Un'euristica per questa idea può essere la seguente: se $E = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0\}$ per qualche funzione $g \in C(\mathbb{R}^n)$ (dato che E è chiuso), allora pare ragionevole che

$$\partial E = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\} = Z(g).$$

Ciò non è vero in generale, ma succede in molti casi regolari, nei quali la funzione g è anche differenziabile con continuità. Allora bisogna trovare un modo per gestire un vincolo implicito, cioè dato semplicemente dall'equazione $g(x) = 0$ per una funzione $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

²⁸Si può vedere questo insieme come l'unione delle tracce di due curve, dato che

$$y^4 = 1 - x^4 \iff y = \pm \sqrt[4]{1 - x^4},$$

tuttavia queste funzioni non sono facili da maneggiare.

Osservazione 1.6.7. [Non vista a lezione] Partiamo dall'Esempio 1.6.1 per dedurre un modo di studiare gli estremanti vincolati senza sfruttare una rappresentazione esplicita del vincolo $g(x, y) = 0$. Siano $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} = Z(g)$ la circonferenza unitaria centrata nell'origine e $f(x, y) = xy$. Sappiamo che il massimo (assoluto) di f su C è realizzato in $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Quindi, sia

$$M = \max_{(x,y) \in C} f(x, y) = \frac{1}{2}$$

e consideriamo la curva data da

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = M\} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{1}{2x}, x \neq 0 \right\}.$$

Tale curva (che è una iperbole avente come asintoti gli assi coordinati) è tangente a $C = Z(g)$ esattamente nei punti di massimo $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Osserviamo che ciò è equivalente a osservare che i gradienti di f e g , dati da

$$\nabla f(x, y) = (y, x) \quad \text{e} \quad \nabla g(x, y) = (2x, 2y)$$

sono paralleli nei punti $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. In altre parole, se $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ è un punto di massimo vincolato a C , allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} \nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0), \\ g(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

Questo è un caso particolare del Teorema dei Moltiplicatori di Lagrange nel piano cartesiano²⁹.

Enunciamo ora il risultato generale.

Teorema 1.6.8 (Teorema dei Moltiplicatori di Lagrange). *Siano $f, g \in C^1(\Omega)$. Se $a \in Z(g)$ è un punto di massimo o minimo relativo vincolato per f ristretta a $Z(g)$ e $\nabla g(a) \neq 0$, allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che*

$$\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a).$$

In altre parole, $a \in \Omega$ tale che $\nabla g(a) \neq 0$ è la soluzione del sistema di equazioni

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2}(x) \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n}(x) \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$.

Il fattore λ è il *moltiplicatore*, così chiamato perché appunto moltiplica il gradiente della funzione del vincolo g .

È importantissimo notare che il Teorema dei Moltiplicatori di Lagrange fornisce una condizione necessaria, ma non sufficiente, che i punti di massimo o minimo per f ristretta al vincolo $Z(g)$ devono soddisfare. In altre parole, una volta trovati i punti che soddisfano le equazioni del sistema dei moltiplicatori di Lagrange per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$, si deve effettivamente verificare che siano punti di massimo o minimo per f ristretta al vincolo dato.

Una formulazione alternativa di questo risultato è la seguente: consideriamo la funzione *Lagrangiana*

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) - \lambda g(x) \quad \text{per } x \in \Omega \quad \text{e} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

²⁹Naturalmente, il ragionamento fatto in questo caso particolare non costituisce una dimostrazione, la quale, tuttavia, va molto al di là degli scopi di questo corso, ed è perciò omessa.

e cerchiamo i punti critici di questa funzione rispetto alle $(n + 1)$ variabili $(x, \lambda) \in \Omega \times \mathbb{R}$. Infatti, il gradiente di \mathcal{L} è dato da

$$\nabla_{(x,\lambda)}\mathcal{L}(x, \lambda) = (\nabla_x f(x) - \lambda \nabla_x g(x), -g(x)),$$

di modo che

$$\nabla_{(x,\lambda)}\mathcal{L}(x, \lambda) = 0 \iff \begin{cases} \nabla_x f(x) - \lambda \nabla_x g(x) = 0 \\ -g(x) = 0 \end{cases},$$

che è proprio il sistema dei moltiplicatori di Lagrange. Quindi, se $a \in Z(g)$ è un punto di massimo o minimo relativo vincolato per f ristretta a $Z(g)$, deve anche essere un punto critico della funzione Lagrangiana.

Vediamo l'applicazione di questo risultato all'Esempio 1.6.1.

Esempio 1.6.9. Siano $f(x, y) = xy$ e $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Allora abbiamo

$$Z(g) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}, \quad \nabla f(x, y) = (y, x) \quad \text{e} \quad \nabla g(x, y) = (2x, 2y).$$

Quindi, il sistema da risolvere per applicare il Teorema dei Moltiplicatori di Lagrange è il seguente:

$$\begin{cases} y = 2\lambda x \\ x = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2\lambda x \\ x = 4\lambda^2 x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}.$$

Adesso, risulta chiaro che la seconda equazione ammette solo due soluzioni: $x = 0$ o $\lambda = \pm \frac{1}{2}$. Tuttavia, se $x = 0$, allora $y = 0$ (per la prima equazione), e ciò non è coerente con la terza equazione (ovvero, $(0, 0) \notin Z(g)$), quindi questa soluzione non è accettabile. Ne segue che $\lambda = \pm \frac{1}{2}$.

Quindi, se $\lambda = \frac{1}{2}$, allora il sistema di equazioni si riduce a

$$\begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \\ y = x \\ 2x^2 = 1 \end{cases}$$

e ciò chiaramente implica $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. In tal modo troviamo i punti $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, e, ragionando come in precedenza, si può mostrare che sono punti di massimo assoluto per f sulla circonferenza unitaria $Z(g)$.

Se invece $\lambda = -\frac{1}{2}$, allora il sistema di equazioni si riduce a

$$\begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2} \\ y = -x \\ 2x^2 = 1 \end{cases}$$

e ciò chiaramente implica $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. In tal modo troviamo i punti $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, e, ragionando come in precedenza, si può mostrare che sono punti di minimo assoluto per f sulla circonferenza unitaria $Z(g)$.

A questo punto, se vogliamo trovare i punti di massimo e minimo di f su $E = \overline{B_1(0)}$, osserviamo che $\partial E = \partial B_1(0) = Z(g)$ e sfruttiamo i calcoli svolti in precedenza e il fatto che sappiamo che f non ha punti di massimo e minimo locali in $E^\circ = B_1(0)$ per concludere che $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ sono punti di massimo assoluto per f in E , mentre $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ sono punti di minimo assoluto per f in E .

Chiaramente, come mostrato da questo esempio, il Teorema dei Moltiplicatori di Lagrange si può applicare anche soltanto per trovare possibili punti di massimo e minimo relativi di una funzione ristretta a un vincolo dato dall'insieme degli zeri di un'altra opportuna funzione differenziabile con continuità. Questo metodo si applica quindi per trovare i valori massimi e minimi di una funzione di due variabili ristretta a una qualche curva nel piano, o di una funzione di tre variabili ristretta a una superficie nello spazio, senza che tale curva o tale superficie siano per forza parte del bordo di qualche altro insieme dato.

1.7 Algoritmo per la ricerca di punti di massimo e minimo

Concludiamo questo capitolo con uno schema riassuntivo del metodo risolutivo per gli esercizi relativi alla ricerca dei punti di massimo e minimo.

Per gli scopi di questo corso possiamo fare le seguenti ipotesi:

- $n = 2$ o $n = 3$,
- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un aperto,
- $E \subseteq \Omega$ è un insieme aperto o chiuso, e, nel caso in cui E sia chiuso, $\partial E \subset \Omega$,
- $f \in C^2(\Omega)$.

Allora si devono seguire i seguenti punti:

- A) se E è aperto, si cercano i punti critici di f ponendo $\nabla f = 0$ in E , e poi se ne studia la natura tramite il teorema di classificazione dei punti critici, ovvero calcolando Hf in ciascuno di essi e determinando il segno degli autovalori di Hf ; oppure, qualora ciò non porti a nessuna conclusione, si esamina il segno di f e si applica opportunamente il Teorema di Weierstrass;
- B) se E è chiuso,
- 1) si cercano i punti critici di f in E° , come in (A),
 - 2) si studia il comportamento di f su ∂E :
 - I) se $n = 2$ e $\partial E = \gamma_1([a_1, b_1]) \cup \gamma_2([a_2, b_2]) \cup \dots \cup \gamma_k([a_k, b_k])$ per certe curve $\gamma_j \in C^1([a_j, b_j]; \mathbb{R}^2)$ per $j \in \{1, \dots, k\}$, allora si studiano le funzioni $h_j = f \circ \gamma_j$, si trovano eventuali punti critici $\tau_j \in (a_j, b_j)$ (ovvero, tali che $h'_j(\tau_j) = 0$), poi si calcolano i valori di f nei punti $\gamma_j(\tau_j), \gamma_j(a_j), \gamma_j(b_j)$ per $j \in \{1, \dots, k\}$;
 - II) se $\partial E = \{x \in \Omega : g(x) = 0\} = Z(g)$ per qualche $g \in C^1(\Omega)$ tale che $\nabla g(x) \neq 0$ per ogni $x \in \partial E$, allora si applica il Teorema dei Moltiplicatori di Lagrange per trovare dei candidati per punti di massimo e minimo di f su $Z(g)$, e poi si calcolano i valori di f in questi punti;
 - 3) si considerano separatamente i seguenti casi:
 - i) se E è limitato, e dunque è compatto, allora per il teorema di Weierstrass esistono $\max_E f$ e $\min_E f$, e
 - * il valore di f più grande fra quelli individuati su ∂E in (I) o (II) e fra quelli nei punti di massimo relativo in E° trovati in (1) è $\max_E f$, e ogni punto dove tale valore viene raggiunto è un punto di massimo assoluto;
 - * il valore di f più piccolo fra quelli individuati su ∂E in (I) o (II) e fra quelli nei punti di minimo relativo in E° trovati in (1) è $\min_E f$, e ogni punto dove tale valore viene raggiunto è un punto di minimo assoluto;
 - * tutti gli altri punti individuati su ∂E vanno scartati;
 - ii) se E è illimitato, e dunque non è compatto, si calcolano tutti i valori di f elencati in (i), si individuano $\sup_E f$ e $\inf_E f$ (non esiste un metodo universale per tale calcolo, bisogna farlo "a mano", ragionando sulle proprietà della funzione f e dell'insieme E dati), poi
 - si controlla se $\sup_E f$ è strettamente maggiore dei valori di f così trovati: se ciò succede, allora f non ha punti di massimo assoluto (e quindi tutti i punti su ∂E vanno scartati); viceversa, se ciò non succede, allora i punti di massimo assoluto sono quelli dove f raggiunge il valore di $\sup_E f$ e $\max_E f = \sup_E f$;
 - si controlla se $\inf_E f$ è strettamente minore dei valori di f così trovati: se ciò succede, allora f non ha punti di minimo assoluto (e quindi tutti i punti su ∂E vanno scartati); viceversa, se ciò non succede, allora i punti di minimo assoluto sono quelli dove f raggiunge il valore di $\inf_E f$ e $\min_E f = \inf_E f$;
 - in ogni caso, tutti i punti individuati su ∂E che non siano punti di massimo o minimo assoluto vanno scartati.

Capitolo 2

Integrali in più variabili

1

2.1 Integrali doppi e tripli

Diamo ora una definizione di integrali nel piano e nello spazio, sufficientemente generale per gli scopi del corso, ma generalizzabile a spazi di ogni dimensione.

Iniziamo definendo opportuni insiemi sui quali definire questi integrali, cercando di estendere l'approccio della teoria dell'integrale di Riemann in una dimensione, senza però rinunciare alla ricca varietà di possibili forme degli insiemi in \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 .

Definizione 2.1.1 (Tasselli e regioni di integrazione).

Caso $n = 2$. Un *tassello d'integrazione* è un insieme chiuso $E \subset \mathbb{R}^2$ della forma:

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\},$$

dove $a, b \in \mathbb{R}, a < b, \phi, \psi \in C([a, b])$ e $\phi \leq \psi$ su $[a, b]$, oppure

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [a, b], \phi(y) \leq x \leq \psi(y)\}.$$

Una *regione d'integrazione* $A \subset \mathbb{R}^2$ è un'unione finita di tasselli d'integrazione i cui interni sono disgiunti, ovvero tali che le intersezioni tra due tasselli, se non sono vuote, sono sul bordo dei tasselli stessi. In altre parole, esistono E_1, E_2, \dots, E_k regioni di integrazione in \mathbb{R}^2 tali che

$$A = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k \quad \text{e} \quad E_i^\circ \cap E_j^\circ = \emptyset \quad \text{per ogni } i, j \in \{1, \dots, k\}.$$

Caso $n = 3$. Un *tassello d'integrazione* è un insieme chiuso $F \subset \mathbb{R}^3$ della forma:

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in E, \phi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\},$$

dove E è una regione d'integrazione in \mathbb{R}^2 , $\phi, \psi \in C(E)$ e $\phi \leq \psi$ su E , o una forma simile, ma con le variabili x, y e z scambiate tra di loro. Si definisce quindi una regione di integrazione in \mathbb{R}^3 come è stato fatto in \mathbb{R}^2 , ma con tasselli di integrazione in \mathbb{R}^3 .

Notiamo che i tasselli di integrazione in \mathbb{R}^2 sono anche limitati (e dunque compatti), dato che le funzioni continue su insiemi compatti sono limitate, come conseguenza del Teorema di Weierstrass. Quindi, anche le regioni di integrazione in \mathbb{R}^2 sono limitate (e dunque compatte), e perciò, ancora grazie al Teorema di Weierstrass, anche i tasselli e le regioni di integrazione in \mathbb{R}^3 sono limitati (e dunque compatti).

Inoltre, non è difficile osservare che un'unione finita di regioni di integrazione è ancora una regione d'integrazione.

Illustriamo ora il procedimento per arrivare alla definizione di integrale doppio e triplo di una funzione continua, omettendo le dimostrazioni.

¹Parte di questo capitolo è basata sui libri *Elementi di Analisi Matematica Due*, di Nicola Fusco, Paolo Marcellini e Carlo Sbordone, e *Lezioni di Analisi Matematica 2*, di Ermanno Lanconelli.

Siano $E \subset \mathbb{R}^2$ una regione d'integrazione e $f \in C(E)$. Fissato $k \in \mathbb{N}$, consideriamo i seguenti quadrati di lato di lunghezza 2^{-k} , con lati paralleli agli assi coordinati:

$$Q_{ij}^k = [(i-1)2^{-k}, i2^{-k}] \times [(j-1)2^{-k}, j2^{-k}], \text{ per } i, j \in \mathbb{Z}.$$

Sia $\mathcal{F}_k(E)$ la famiglia dei quadrati Q_{ij}^k che intersecano E , ovvero

$$\mathcal{F}_k(E) = \{Q_{ij}^k : Q_{ij}^k \cap E \neq \emptyset\}^2.$$

Osserviamo che $\mathcal{F}_k(E)$ contiene un numero finito di quadrati, dato che E è limitato. Per ogni $Q_{ij}^k \in \mathcal{F}_k(E)$ scegliamo un punto $(x_{ij}^k, y_{ij}^k) \in Q_{ij}^k \cap E$. Definiamo

$$\mathcal{S}_k(f, E, \{(x_{ij}^k, y_{ij}^k)\}_{Q_{ij}^k \in \mathcal{F}_k(E)}) := \sum_{Q_{ij}^k \in \mathcal{F}_k(E)} f(x_{ij}^k, y_{ij}^k)(2^{-k})^2,$$

che è la somma dei volumi di parallelepipedi aventi come base i quadrati Q_{ij}^k e come altezza $f(x_{ij}^k, y_{ij}^k)$. Intuitivamente, possiamo osservare che questa somma di volumi sta convergendo, per $k \rightarrow +\infty$, al volume (con segno) della regione dello spazio compresa fra il grafico di f e l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in E, z = 0\}$. Infatti, se $2^{-k} \rightarrow 0$ i quadrati ricoprono l'insieme E con sempre maggiore precisione, e così la discrepanza fra $f(x, y)$ per $(x, y) \in Q_{ij}^k$ e $f(x_{ij}^k, y_{ij}^k)$ va riducendosi a 0 (dato che f è continua). Si può infatti dimostrare (e la dimostrazione non è per nulla banale) che esiste finito il limite

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{S}_k(f, E, \{(x_{ij}^k, y_{ij}^k)\}_{Q_{ij}^k \in \mathcal{F}_k(E)}),$$

e che non dipende dalla scelta dei punti $(x_{ij}^k, y_{ij}^k) \in Q_{ij}^k$. Questo ci consente finalmente di definire l'integrale doppio.

Definizione 2.1.2 (Integrale doppio). Siano $E \subset \mathbb{R}^2$ una regione d'integrazione e $f \in C(E)$. L'*integrale doppio* di f su E è dato da

$$\iint_E f(x, y) dx dy := \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{S}_k(f, E, \{(x_{ij}^k, y_{ij}^k)\}_{Q_{ij}^k \in \mathcal{F}_k(E)}).$$

Inoltre, l'*area* dell'insieme E è data da:

$$\text{Area}(E) = \iint_E 1 dx dy.$$

La definizione dell'integrale triplo è del tutto simile, con la differenza che il ricoprimento è formato da cubi³.

Siano $E \subset \mathbb{R}^3$ una regione d'integrazione e $f \in C(E)$. Fissato $k \in \mathbb{N}$, consideriamo i seguenti cubi di lato di lunghezza 2^{-k} , con lati paralleli agli assi coordinati:

$$Q_{ij\ell}^k = [(i-1)2^{-k}, i2^{-k}] \times [(j-1)2^{-k}, j2^{-k}] \times [(\ell-1)2^{-k}, \ell2^{-k}], \text{ per } i, j, \ell \in \mathbb{Z}.$$

Sia $\mathcal{F}_k(E)$ la famiglia dei quadrati $Q_{ij\ell}^k$ che intersecano E , ovvero

$$\mathcal{F}_k(E) = \{Q_{ij\ell}^k : Q_{ij\ell}^k \cap E \neq \emptyset\}.$$

Osserviamo che $\mathcal{F}_k(E)$ contiene un numero finito di cubi, dato che E è limitato. Per ogni $Q_{ij\ell}^k \in \mathcal{F}_k(E)$ scegliamo un punto $(x_{ij\ell}^k, y_{ij\ell}^k, z_{ij\ell}^k) \in Q_{ij\ell}^k \cap E$. Definiamo

$$\mathcal{S}_k(f, E, \{(x_{ij\ell}^k, y_{ij\ell}^k, z_{ij\ell}^k)\}_{Q_{ij\ell}^k \in \mathcal{F}_k(E)}) := \sum_{Q_{ij\ell}^k \in \mathcal{F}_k(E)} f(x_{ij\ell}^k, y_{ij\ell}^k, z_{ij\ell}^k)(2^{-k})^3,$$

²Una tale famiglia di quadrati viene detta *ricoprimento diadico* di E , ma non è difficile vedere che si possono usare anche quadrati con la lati la lunghezza dei quali decade in maniera diversa, oppure ancora rettangoli, parallelogrammi e in generale ogni figura geometrica piana che permetta di tassellare il piano cartesiano, ovvero ricoprirlo senza intersezioni fra gli interni degli insiemi del ricoprimento. Non esploriamo però questo diverso approccio, visto che va oltre gli scopi del corso.

³Come in dimensione 2, si potrebbero anche usare famiglie di cubi non diadiche o degli opportuni parallelepipedi, oppure ancora un qualunque ricoprimento dello spazio \mathbb{R}^3 .

che è una somma di ipervolumi, ovvero volumi in dimensione 4, essendo ciascuno degli addendi il prodotto dei volumi dei cubi con un'altezza, data da $f(x_{ij\ell}^k, y_{ij\ell}^k, z_{ij\ell}^k)$, nella quarta dimensione. Intuitivamente, possiamo osservare che $\mathcal{S}_k(f, E, \{(x_{ij\ell}^k, y_{ij\ell}^k, z_{ij\ell}^k)\}_{Q_{ij\ell}^k \in \mathcal{F}_k(E)})$ sta convergendo, per $k \rightarrow +\infty$, all'ipervolume (con segno) della regione dello spazio \mathbb{R}^4 compresa fra il grafico di f e l'insieme $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : (x, y, z) \in E, w = 0\}$. Infatti, se $2^{-k} \rightarrow 0$ i cubi ricoprono l'insieme E con sempre maggiore precisione, e così la discrepanza fra $f(x, y, z)$ per $(x, y, z) \in Q_{ij\ell}^k$ e $f(x_{ij\ell}^k, y_{ij\ell}^k, z_{ij\ell}^k)$ va riducendosi a 0 (dato che f è continua). Si può infatti dimostrare (e la dimostrazione non è per nulla banale) che esiste finito il limite

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{S}_k(f, E, \{(x_{ij\ell}^k, y_{ij\ell}^k, z_{ij\ell}^k)\}_{Q_{ij\ell}^k \in \mathcal{F}_k(E)}),$$

e che non dipende dalla scelta dei punti $(x_{ij\ell}^k, y_{ij\ell}^k, z_{ij\ell}^k) \in Q_{ij\ell}^k$. Questo ci consente finalmente di definire l'integrale triplo.

Definizione 2.1.3 (Integrale triplo). Siano $E \subset \mathbb{R}^3$ una regione d'integrazione e $f \in C(E)$. L'integrale triplo di f su E è dato da

$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz := \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{S}_k(f, E, \{(x_{ij\ell}^k, y_{ij\ell}^k, z_{ij\ell}^k)\}_{Q_{ij\ell}^k \in \mathcal{F}_k(E)}).$$

Inoltre, il volume dell'insieme E è dato da:

$$\text{Volume}(E) = \iiint_E 1 dx dy dz.$$

Enunciamo ora senza dimostrazione le proprietà di base dell'integrale doppio. Quelle dell'integrale triplo sono del tutto simili, e quindi le omettiamo.

Proposizione 2.1.4 (Proprietà elementari dell'integrale doppio). Siano $E, F \subset \mathbb{R}^2$ regioni d'integrazione, $f, g \in C(E) \cap C(F)$, e $a, b \in \mathbb{R}$. Valgono le seguenti proprietà:

1. *linearità dell'integrale:*

$$\iint_E (af(x, y) + bg(x, y)) dx dy = a \iint_E f(x, y) dx dy + b \iint_E g(x, y) dx dy;$$

2. *additività dell'integrale: se $E^\circ \cap F^\circ = \emptyset$ (ovvero, E e F hanno interni disgiunti), allora*

$$\iint_{E \cup F} f(x, y) dx dy = \iint_E f(x, y) dx dy + \iint_F f(x, y) dx dy;$$

3. *confronto: se $f \leq g$ su E , allora*

$$\iint_E f(x, y) dx dy \leq \iint_E g(x, y) dx dy,$$

e, sotto questa ipotesi, abbiamo

$$\iint_E f(x, y) dx dy = \iint_E g(x, y) dx dy$$

se e solo se $f(x, y) = g(x, y)$ per ogni $(x, y) \in E$;

4. *disuguaglianza triangolare per integrali:*

$$\left| \iint_E f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_E |f(x, y)| dx dy.$$

5. *additività generale:*

$$\iint_E f(x, y) dx dy + \iint_F f(x, y) dx dy = \iint_{E \cup F} f(x, y) dx dy + \iint_{E \cap F} f(x, y) dx dy.$$

Nelle prossime due sezioni enunciamo senza dimostrazioni alcuni risultati fondamentali per il calcolo concreto di integrali doppi e tripli.

2.1.1 Teoremi di riduzione

Teorema 2.1.5 (Teorema di riduzione per gli integrali doppi). *Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ un tassello d'integrazione della forma:*

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\},$$

dove $\phi, \psi \in C([a, b])$ e $\phi \leq \psi$ su $[a, b]$. Sia $f \in C(E)$. Allora abbiamo

$$\iint_E f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

e

$$\text{Area}(E) = \int_a^b (\psi(x) - \phi(x)) dx.$$

Teorema 2.1.6 (Teorema di riduzione “per fili” per gli integrali tripli). *Sia $F \subset \mathbb{R}^3$ un tassello d'integrazione della forma:*

$$F = \{(x, y, z) : (x, y) \in E, \phi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\},$$

dove $E \subset \mathbb{R}^2$ è una regione d'integrazione, $\phi, \psi \in C(E)$ e $\phi \leq \psi$ su E . Sia $f \in C(F)$. Allora abbiamo

$$\iiint_F f(x, y, z) dx dy dz = \iint_E \left[\int_{\phi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

e

$$\text{Volume}(F) = \iint_E (\psi(x, y) - \phi(x, y)) dx dy.$$

Teorema 2.1.7 (Teorema di riduzione “per strati” per gli integrali tripli). *Sia $F \subset \mathbb{R}^3$ una regione d'integrazione connessa per archi, e sia*

$$\Pi_3(F) = \{z \in \mathbb{R} : (x, y, z) \in F \text{ per qualche } (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

la proiezione di F sull'asse z , che, essendo F connesso per archi, è un intervallo. Per $z \in \Pi_3(F)$ sia $E_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in F\}$. Per ogni z in $\Pi_3(F)$, $E_z \subset \mathbb{R}^2$ è una regione d'integrazione. Sia $f \in C(F)$. Allora abbiamo

$$\iiint_F f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\Pi_3(F)} \left[\iint_{E_z} f(x, y, z) dx dy \right] dz$$

e

$$\text{Volume}(F) = \int_{\Pi_3(F)} \text{Area}(E_z) dz^4.$$

Sono validi risultati analoghi con i ruoli delle variabili scambiati fra loro.

2.1.2 Cambiamento di variabili

Teorema 2.1.8 (Cambiamento di variabili negli integrali doppi). *Siano $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme aperto, $E \subset U$ una regione d'integrazione, e $\Phi \in C^1(U; \mathbb{R}^2)$ una funzione iniettiva il cui determinante jacobiano non sia mai nullo, ovvero $\det(J\Phi(u, v)) \neq 0$ per ogni $(u, v) \in U$. Sia $f \in C(\Phi(E))$. Allora abbiamo*

$$\iint_{\Phi(E)} f(x, y) dx dy = \iint_E f(\Phi(u, v)) |\det(J\Phi(u, v))| du dv$$

e

$$\text{Area}(\Phi(E)) = \iint_E |\det(J\Phi(u, v))| du dv.$$

⁴Questa formula è la versione generale del *principio di Cavalieri*.

Teorema 2.1.9 (Cambiamento di variabili negli integrali tripli). *Siano $U \subseteq \mathbb{R}^3$ un insieme aperto, $E \subset U$ una regione d'integrazione, $\Phi \in C^1(U; \mathbb{R}^3)$ una funzione iniettiva il cui determinante jacobiano non sia mai nullo, ovvero $\det(J\Phi(u, v, w)) \neq 0$ per ogni $(u, v, w) \in U$. Sia $f \in C(\Phi(E))$. Allora abbiamo*

$$\iiint_{\Phi(E)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_E f(\Phi(u, v, w)) |\det(J\Phi(u, v, w))| du dv dw$$

e

$$\text{Volume}(\Phi(E)) = \iiint_E |\det(J\Phi(u, v, w))| du dv dw.$$

Forniamo una spiegazione euristica della comparsa del determinante jacobiano nel cambiamento di variabili, almeno nel caso di \mathbb{R}^2 .

Osservazione 2.1.10. [Non vista a lezione.] L'idea di base per la dimostrazione del Teorema 2.1.8 è di lavorare con i quadrati diadici Q_{ij}^k della definizione di integrale doppio, e controllare quindi come cambia l'area dell'immagine di un quadrato diadico rispetto alla mappa Φ . Osserviamo che su ciascuno di questi quadrati la mappa Φ può essere approssimata grazie alla Formula di Taylor al I ordine (Teorema 1.3.28):

$$\begin{aligned} \Phi(u, v) &= \Phi(x_{ij}^k, y_{ij}^k) + J\Phi(x_{ij}^k, y_{ij}^k) (u - x_{ij}^k, v - y_{ij}^k) + o(\|(u - x_{ij}^k, v - y_{ij}^k)\|) \\ &= (\Phi(x_{ij}^k, y_{ij}^k) - J\Phi(x_{ij}^k, y_{ij}^k) (x_{ij}^k, y_{ij}^k)) + J\Phi(x_{ij}^k, y_{ij}^k) (u, v) \quad \text{per } (u, v) \in Q_{ij}^k. \end{aligned}$$

Per k abbastanza grande, il termine di resto dato dall' o -piccolo può essere ritenuto trascurabile, e quindi si può assumere che Φ sia data solo dall'approssimazione al primo ordine⁵. Tuttavia, il termine costante

$$\Phi(x_{ij}^k, y_{ij}^k) - J\Phi(x_{ij}^k, y_{ij}^k) (x_{ij}^k, y_{ij}^k)$$

rappresenta solo una traslazione, e l'area di un insieme nel piano è chiaramente invariante per traslazione. Dunque è sufficiente considerare la trasformazione lineare

$$(u, v) \rightarrow J\Phi(x_{ij}^k, y_{ij}^k) (u, v).$$

Calcoliamo perciò l'area dell'immagine di un quadrato rispetto a una trasformazione lineare (che indichiamo sempre con Φ). Sia

$$\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} au + bv \\ cu + dv \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

di modo che

$$J\Phi(u, v) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \det(J\Phi(u, v)) = \det \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = ad - bc.$$

Sia $Q = [0, 1]^2$, di modo che $\Phi(Q)$ è il parallelogramma di vertici $(0, 0)$, (a, c) , (b, d) , $(a + b, c + d)$. Notiamo che questo parallelogramma è non degenere se e solo se i vettori (a, c) e (b, d) sono linearmente indipendenti, ovvero

$$0 \neq ad - bc = \det \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right).$$

Ora dobbiamo calcolare l'area di questo parallelogramma. Per farlo, consideriamo come base il segmento che va dall'origine $(0, 0)$ al punto (a, c) , e cerchiamo l'altezza relativa ad esso. Ciò equivale a calcolare la distanza fra il punto (b, d) e la retta che passa da $(0, 0)$ e (a, c) , che, se $a \neq 0$, è data da

$$y = \frac{c}{a}x.$$

Quindi, l'altezza h relativa alla base scelta è data dalla lunghezza del segmento che va da (b, d) al punto di intersezione con la retta $y = \frac{c}{a}x$ e la retta ortogonale ad essa che passa per (b, d) , ovvero

$$\begin{cases} y = \frac{c}{a}x \\ y = -\frac{a}{c}x + \frac{ab + cd}{c} \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{c^2 + a^2}{ac}x = \frac{ab + cd}{c} \\ y = \frac{c}{a}x \end{cases} \iff \begin{cases} x = a \frac{ab + cd}{a^2 + c^2} \\ y = c \frac{ab + cd}{a^2 + c^2} \end{cases}.$$

⁵Questo ragionamento può essere reso rigoroso, ma omettiamo i dettagli.

In definitiva, troviamo che

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{\left(\frac{ab+cd}{a^2+c^2} - b\right)^2 + \left(\frac{ab+cd}{a^2+c^2} - d\right)^2} \\ &= \frac{1}{a^2+c^2} \sqrt{(a^2b+acd-a^2b-bc^2)^2 + (abc+c^2d-a^2d-c^2d)^2} \\ &= \frac{1}{a^2+c^2} \sqrt{c^2(ad-bc)^2 + a^2(bc-ad)^2} = \frac{1}{a^2+c^2} |ad-bc| \sqrt{a^2+c^2} = \frac{|ad-bc|}{\sqrt{a^2+c^2}}, \end{aligned}$$

di modo che, essendo la base di lunghezza $\|(a, c)\| = \sqrt{a^2+c^2}$, troviamo

$$\begin{aligned} \text{Area}(\Phi(Q)) &= \sqrt{a^2+c^2} \frac{|ad-bc|}{\sqrt{a^2+c^2}} = |ad-bc| = \left| \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right| = |\det(J\Phi(u, v))| \\ &= \iint_Q |\det(J\Phi(u, v))| \, du \, dv, \end{aligned}$$

dato che ovviamente $\iint_{[0,1]^2} 1 \, du \, dv = 1$.

Se $a = 0$, allora la base del parallelogramma è sull'asse y , e quindi l'altezza è esattamente b , mentre la lunghezza della base è c , e quindi otteniamo ancora

$$\text{Area}(\Phi(Q)) = bc = \left| \det \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} \right| = |\det(J\Phi(u, v))| = \iint_Q |\det(J\Phi(u, v))| \, du \, dv.$$

Osservazione 2.1.11. Come notato in precedenza, le regioni di integrazione sono insiemi chiusi. Tuttavia, è intuitivamente chiaro (omettiamo i dettagli tecnici) che, se $n = 2$, l'area della circonferenza è nulla, mentre, se $n = 3$, il volume della sfera è nullo. Per questa ragione, e anche allo scopo di evitare di appesantire la notazione inutilmente, possiamo calcolare gli integrali doppi e tripli su cerchi e palle aperti, dato che il loro bordo non influenza il valore degli integrali.

Vediamo ora due esempi fondamentali di cambiamento di variabili, ovvero le traslazioni e le dilatazioni.

Osservazione 2.1.12 (Traslazioni). Dato $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \in \mathbb{R}^n$, definiamo la *traslazione* associata al vettore τ come la funzione vettoriale

$$\Phi_\tau(u) = u + \tau \quad \text{per } u \in \mathbb{R}^n.$$

Grazie alla Proposizione 1.1.14, è facile vedere che

$$J\Phi_\tau(u) = I \quad \text{e} \quad \det(J\Phi_\tau(u)) = 1.$$

Così, per $n = 2, 3$, per ogni regione d'integrazione $E \subset \mathbb{R}^n$ e $f \in C(E)$, definiamo

$$E - \tau := \{u \in \mathbb{R}^n : u + \tau \in E\}, \quad \text{di modo che } \Phi_\tau(E - \tau) = E.$$

Quindi abbiamo i seguenti casi per il cambiamento di variabili $x = \Phi_\tau(u)$:

- se $n = 2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + \tau_1 \\ v + \tau_2 \end{pmatrix}$, $\text{Area}(E) = \text{Area}(E - \tau)$ e

$$\iint_E f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{E-\tau} f(u + \tau_1, v + \tau_2) \, du \, dv,$$

- se $n = 3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + \tau_1 \\ v + \tau_2 \\ w + \tau_3 \end{pmatrix}$, $\text{Volume}(E) = \text{Volume}(E - \tau)$ e

$$\iiint_E f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{E-\tau} f(u + \tau_1, v + \tau_2, w + \tau_3) \, du \, dv \, dw.$$

Ciò significa che area e volume sono invarianti per traslazioni, com'è intuitivamente ovvio che debba essere (negli spazi euclidei). Ad esempio,

- se $n = 2$ ed $E = \overline{B_r(x_0, y_0)}$, prendiamo $\tau = (x_0, y_0)$ e quindi

$$\iint_{B_r(x_0, y_0)} f(x, y) dx dy = \iint_{B_r(0)} f(u + x_0, v + y_0) du dv,$$

- se $n = 3$ ed $E = \overline{B_r(x_0, y_0, z_0)}$, prendiamo $\tau = (x_0, y_0, z_0)$ e quindi

$$\iiint_{B_r(x_0, y_0, z_0)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{B_r(0)} f(u + x_0, v + y_0, w + z_0) du dv dw.$$

Osservazione 2.1.13 (Dilatazioni). Dato $\lambda > 0$, definiamo la *dilatazione isotropa* (ovvero, uguale in tutte le direzioni dello spazio) di fattore λ come la funzione vettoriale

$$\Phi_\lambda(u) = \lambda u \quad \text{per } u \in \mathbb{R}^n.$$

Grazie alla Proposizione 1.1.14, è facile vedere che

$$J\Phi_\lambda(u) = \lambda I \quad \text{e} \quad \det(J\Phi_\lambda(u)) = \lambda^n.$$

Così, per $n = 2, 3$, per ogni regione d'integrazione $E \subset \mathbb{R}^n$ definiamo

$$\frac{E}{\lambda} := \{u \in \mathbb{R}^n : \lambda u \in E\}, \quad \text{di modo che } \Phi_\lambda\left(\frac{E}{\lambda}\right) = E.$$

Quindi, data $f \in C(E)$, abbiamo i seguenti casi per il cambiamento di variabili $x = \Phi_\lambda(u)$:

- se $n = 2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u \\ \lambda v \end{pmatrix}$ e

$$\iint_E f(x, y) dx dy = \iint_{\frac{E}{\lambda}} f(\lambda u, \lambda v) \lambda^2 du dv,$$

- se $n = 3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u \\ \lambda v \\ \lambda w \end{pmatrix}$ e

$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\frac{E}{\lambda}} f(\lambda u, \lambda v, \lambda w) \lambda^3 du dv dw.$$

Ad esempio, se $E = [0, L]^n$ per $n = 2, 3$, prendiamo $\lambda = L$ e otteniamo:

- se $n = 2$,

$$\iint_{[0, L]^2} f(x, y) dx dy = L^2 \iint_{[0, 1]^2} f(Lu, Lv) du dv,$$

- se $n = 3$,

$$\iiint_{[0, L]^3} f(x, y, z) dx dy dz = L^3 \iiint_{[0, 1]^3} f(Lu, Lv, Lw) du dv dw.$$

Se poi $E = \overline{B_r(0)}$, prendiamo $\lambda = r$ e otteniamo:

- se $n = 2$,

$$\iint_{B_r(0)} f(x, y) dx dy = r^2 \iint_{B_1(0)} f(ru, rv) du dv,$$

- se $n = 3$,

$$\iiint_{B_r(0)} f(x, y, z) dx dy dz = r^3 \iiint_{B_1(0)} f(ru, rv, rw) du dv dw.$$

Le dilatazioni non devono necessariamente essere uguali in ogni direzione dello spazio, ovvero possono essere *anisotrope*, con diversi fattori di scala sui diversi assi coordinati. Vediamo un esempio in \mathbb{R}^2 : dati $\lambda, \mu > 0$, consideriamo la funzione vettoriale

$$\Phi_{\lambda, \mu}(u, v) = \begin{pmatrix} \lambda u \\ \mu v \end{pmatrix}.$$

È facile vedere che

$$J\Phi_{\lambda, \mu}(u, v) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \det(J\Phi_{\lambda, \mu}(u, v)) = \lambda\mu.$$

Un modo per visualizzare geometricamente questo cambiamento di coordinate è osservare che manda il quadrato $[0, 1]^2$ nel rettangolo $[0, \lambda] \times [0, \mu]$ e il cerchio unitario $\overline{B_1(0)}$ nella regione all'interno dell'ellisse di semiassi di lunghezza λ, μ , ovvero

$$E_{\lambda, \mu} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{y}{\mu}\right)^2 \leq 1 \right\},$$

dato che $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ soddisfa $u^2 + v^2 \leq 1$ se e solo se $(x, y) = (\lambda u, \mu v)$ soddisfa la disequazione della riga precedente. All'atto pratico, vediamo che

- se $E = [0, L_1] \times [0, L_2]$, prendiamo $\lambda = L_1$ e $\mu = L_2$ per ottenere

$$\iint_{[0, L_1] \times [0, L_2]} f(x, y) \, dx \, dy = L_1 L_2 \iint_{[0, 1]^2} f(L_1 u, L_2 v) \, du \, dv \quad \text{per ogni } f \in C([0, L_1] \times [0, L_2]);$$

- se $E = E_{a, b}$ l'ellisse di semiassi $a, b > 0$, prendiamo $\lambda = a$ e $\mu = b$ per ottenere

$$\iint_{E_{a, b}} f(x, y) \, dx \, dy = ab \iint_{B_1(0)} f(au, bv) \, du \, dv \quad \text{per ogni } f \in C(E_{a, b}).$$

Consideriamo ora due importanti cambiamenti di variabili per $n = 2$ e $n = 3$: le coordinate polari e le coordinate sferiche, rispettivamente.

Osservazione 2.1.14 (Coordinate polari). Ogni punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ può essere scritto come

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases}$$

per un unico $\rho > 0$ e $\theta \in [0, 2\pi)$, a meno che $(x, y) = (0, 0)$, poiché in tal caso ogni valore di θ va bene. In effetti, abbiamo

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

che è la distanza dall'origine, mentre θ è l'angolo formato dal vettore (x, y) con il semiasse positivo delle x . In particolare, $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ per $x > 0$ e $y \geq 0$, e valgono altre formule analoghe per punti negli altri tre quadranti. Allora il cambiamento di coordinate polari è dato dalla funzione vettoriale

$$\Phi(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \rho \cos(\theta) \\ \rho \sin(\theta) \end{pmatrix}, \quad \Phi : [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

che soddisfa $\Phi \in C^1((0, +\infty) \times (0, 2\pi); \mathbb{R}^2)$,

$$J\Phi(\rho, \theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \det(J\Phi(\rho, \theta)) = \rho \cos^2(\theta) + \rho \sin^2(\theta) = \rho.$$

Osserviamo che

$$\Phi((0, +\infty) \times (0, 2\pi)) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y = 0\},$$

dato che

$$\Phi(0, \theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \Phi(\rho, 0) = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tuttavia, la semiretta $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y = 0\}$ ha area nulla⁶, e dunque, ai fini dell'integrazione, possiamo lavorare su $[0, +\infty) \times [0, 2\pi)$, anche se non è aperto, di modo che $\mathbb{R}^2 = \Phi([0, +\infty) \times [0, 2\pi))$. Così, per ogni regione d'integrazione $E \subset \mathbb{R}^2$ e $f \in C(E)$, abbiamo

$$\iint_E f(x, y) dx dy = \iint_{\Phi^{-1}(E)} f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \rho d\rho d\theta,$$

dove $\Phi^{-1}(E) = \{(\rho, \theta) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi) : (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \in E\}$.

In particolare, se $E = B_r(0)$ e f è radialmente simmetrica, ovvero

$$f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$$

per qualche $g \in C([0, r))$, abbiamo

$$\iint_{B_r(0)} f(x, y) dx dy = \iint_{B_r(0)} g(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^r g(\rho) \rho d\rho d\theta = 2\pi \int_0^r \rho g(\rho) d\rho.$$

Quindi, sfruttiamo l'invarianza dell'area rispetto alle traslazioni e il caso $f = g = 1$ per concludere che

$$\text{Area}(B_r(x_0, y_0)) = \text{Area}(B_r(0)) = 2\pi \int_0^r \rho d\rho = 2\pi \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^r = \pi r^2.$$

Mostriamo un esempio di una rilevante applicazione del passaggio in coordinate polari.

Esempio 2.1.15 (Integrale gaussiano). Sia

$$f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} = g(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad \text{per } g(t) = e^{-t^2}.$$

Allora abbiamo

$$\iint_{B_r(0)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = 2\pi \int_0^r \rho e^{-\rho^2} d\rho = 2\pi \left[-\frac{e^{-\rho^2}}{2} \right]_0^r = \pi (1 - e^{-r^2}).$$

Quindi, se passiamo al limite per $r \rightarrow +\infty$, otteniamo⁷

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{r \rightarrow +\infty} \iint_{B_r(0)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{r \rightarrow +\infty} \pi (1 - e^{-r^2}) = \pi.$$

D'altra parte, è noto che $e^{-(x^2+y^2)} = e^{-x^2} e^{-y^2}$, e ovviamente entrambe queste funzioni sono integrabili su tutta retta reale, essendo continue e positive e dato che, per $x, y \rightarrow \pm\infty$, vanno a 0 più velocemente di ogni potenza negativa. Quindi, applicando il teorema di riduzione per integrali doppi, vediamo che⁸

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) dy = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2, \end{aligned}$$

visto che si tratta dello stesso integrale definito, solo con due diverse variabili d'integrazione, che sono mute. In conclusione, abbiamo trovato che

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \pi \iff \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

visto che l'integrale è chiaramente non negativo. Questo è il valore esatto dell'*integrale gaussiano*, che gioca un ruolo fondamentale in moltissime aree della matematica, e in particolare Probabilità e Statistica.

⁶Ciò è intuitivamente abbastanza chiaro; può essere reso rigoroso, ma omettiamo questi dettagli tecnici.

⁷Questo passaggio andrebbe giustificato per quel che riguarda il significato dell'integrale su tutto il piano \mathbb{R}^2 , ma omettiamo questi dettagli.

⁸Anche qui servirebbe un passaggio in più, perché la regione d'integrazione è illimitata, mentre noi abbiamo definito solo integrali su regioni limitate.

Osservazione 2.1.16 (Coordinate sferiche). Ogni punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ può essere scritto come

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ y = \rho \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ z = \rho \cos(\varphi) \end{cases}$$

per un unico $\rho > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$ e $\varphi \in [0, \pi]$, a meno che $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, poiché in tal caso ogni valore di θ e φ va bene. In effetti, abbiamo

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

che è la distanza dall'origine, mentre θ è l'angolo formato dalla proiezione del vettore (x, y, z) sul piano xy con il semiasse positivo delle x , e φ è l'angolo formato dalla proiezione del vettore (x, y, z) sul piano xz con il semiasse positivo delle z . Allora il cambiamento di coordinate sferiche è dato dalla funzione vettoriale

$$\Phi(\rho, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ \rho \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \rho \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \Phi : [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

che soddisfa $\Phi \in C^1((0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi); \mathbb{R}^3)$,

$$J\Phi(\rho, \theta, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \sin(\varphi) & -\rho \sin(\theta) \sin(\varphi) & \rho \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) & \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) & \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \cos(\varphi) & 0 & -\rho \sin(\varphi) \end{bmatrix}$$

e

$$\det(J\Phi(\rho, \theta, \varphi)) = \rho^2 (-\sin^3(\varphi) \cos^2(\theta) - \sin^3(\varphi) \sin^2(\theta) - \cos^2(\varphi) \sin(\varphi)) = -\rho^2 \sin(\varphi).$$

Osserviamo che

$$\Phi((0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi)) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y = 0\},$$

dato che

$$\Phi(0, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi(\rho, 0, \varphi) = \begin{pmatrix} \rho \sin(\varphi) \\ 0 \\ \rho \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \Phi(\rho, \theta, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \Phi(\rho, \theta, \pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho \end{pmatrix},$$

e che $\sin(\varphi) \geq 0$ per ogni $\varphi \in [0, \pi]$, mentre $\cos(\varphi) \geq 0$ per $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e $\cos(\varphi) \leq 0$ per $\varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$. Tuttavia, il semipiano $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y = 0\}$ ha volume nullo⁹, e dunque, ai fini dell'integrazione, possiamo lavorare su $[0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi]$, anche se non è aperto, di modo che $\mathbb{R}^3 = \Phi([0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi])$. Così, per ogni regione d'integrazione $E \subset \mathbb{R}^3$ e $f \in C(E)$, abbiamo

$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Phi^{-1}(E)} f(\rho \cos(\theta) \sin(\varphi), \rho \sin(\theta) \sin(\varphi), \rho \cos(\varphi)) \rho^2 \sin(\varphi) d\rho d\theta d\varphi,$$

dove

$$\Phi^{-1}(E) = \{(\rho, \theta, \varphi) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi] : (\rho \cos(\theta) \sin(\varphi), \rho \sin(\theta) \sin(\varphi), \rho \cos(\varphi)) \in E\}.$$

In particolare, se $E = B_r(0)$ e f è radialmente simmetrica, ovvero

$$f(x, y, z) = g(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

per qualche $g \in C([0, r))$, abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{B_r(0)} f(x, y, z) dx dy dz &= \int_{B_r(0)} g(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dx dy dz \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^r g(\rho) \rho^2 \sin(\varphi) d\rho d\theta d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^\pi \sin(\varphi) \left(\int_0^r \rho^2 g(\rho) d\rho \right) d\varphi = 4\pi \int_0^r \rho^2 g(\rho) d\rho. \end{aligned}$$

⁹Ciò è intuitivamente abbastanza chiaro; può essere reso rigoroso, ma omettiamo questi dettagli tecnici.

Quindi, sfruttiamo l'invarianza dell'area rispetto alle traslazioni e il caso $f = g = 1$ per concludere che

$$\text{Volume}(B_r(x_0, y_0, z_0)) = \text{Volume}(B_r(0)) = 4\pi \int_0^r \rho^2 d\rho = 4\pi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^r = \frac{4\pi}{3} r^3.$$

2.2 Cenni di teoria della misura

Un approccio più moderno all'integrazione è quello portato avanti nella Teoria della Misura, ovvero lo studio generale di funzioni dotate di opportune proprietà che associano a sottoinsiemi di \mathbb{R}^n un numero reale positivo¹⁰, ovvero la loro *misura n-dimensionale*. Tale teoria astratta va molto oltre gli scopi di questo corso, quindi ci limitiamo a fornire le definizioni di base relative alla misura di Lebesgue, dato che giocherà un ruolo nello studio dei coefficienti e delle trasformate di Fourier (capitoli 6 e 7).

Per cominciare, consideriamo un prodotto cartesiano di n intervalli chiusi e limitati:

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \quad \text{con } a_j, b_j \in \mathbb{R}, \quad a_j \leq b_j \quad \text{per ogni } j \in \{1, \dots, n\}.$$

Insiemi di questo tipo sono una possibile generalizzazione della nozione di intervalli chiusi e limitati a \mathbb{R}^n per $n \geq 2$, oppure della nozione di rettangoli e parallelepipedi a \mathbb{R}^n per $n \geq 4$, e sono perciò talvolta chiamati *iperrettangoli*¹¹.

Adesso definiamo la *volume n-dimensionale* di un iperrettangolo I :

$$\text{Vol}_n(I) := (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n).$$

Tale definizione è coerente con quello che già sappiamo sulla retta, nel piano e nello spazio:

- se $n = 1$, $I = [a_1, b_1]$ è un intervallo, e la sua lunghezza è proprio

$$(b_1 - a_1) = \text{Vol}_1(I);$$

- se $n = 2$, $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ è un rettangolo, e la sua area è proprio

$$(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) = \text{Vol}_2(I);$$

- se $n = 3$, $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ è un parallelepipedo, e il suo volume è proprio

$$(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3) = \text{Vol}_3(I).$$

A questo punto, l'idea di base è la seguente: ogni insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ può essere coperto da una famiglia (potenzialmente infinita) di iperrettangoli $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, ovvero

$$E \subseteq I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_{k-1} \cup I_k \cup I_{k+1} \cup \dots =: \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k.$$

Ciò significa che per ogni $x \in E$ esiste almeno un $k \in \mathbb{N}$ tale che $x \in I_k$. Intuitivamente, l'unione di questi iperrettangoli avrà un volume n -dimensionale che sarà minore o uguale della somma (o serie) dei volumi dei singoli iperrettangoli (per un numero finito di iperrettangoli, questo è un fatto ovvio); e tanto più gli iperrettangoli sono "piccoli" quanto più precisamente la loro unione approssimerà l'insieme dato E . Allora, definiamo la *misura (esterna) n-dimensionale di Lebesgue* come¹²

$$\mu_n(E) := \inf \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} \text{Vol}_n(I_k) : \{I_k\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ è una famiglia di iperrettangoli tale che } E \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k \right\}.$$

Questa definizione è ben posta, perché l'estremo inferiore di un insieme di numeri reali esiste sempre in $\overline{\mathbb{R}} := [-\infty, +\infty]$, e, dato che $\text{Vol}_n(I_k) \geq 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, concludiamo che $\mu_n(E) \in [0, +\infty]$ per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

Enunciamo alcune proprietà elementari di μ_n (la cui dimostrazione, non sempre banale, omettiamo):

¹⁰Più in generale, a partire da questo approccio si possono anche definire misure a valori reali, complessi e perfino vettoriali.

¹¹Altrimenti sono chiamati *intervalli compatti*, ma tale nomenclatura rischia di creare ambiguità, visto che in queste note abbiamo limitato l'uso del termine "intervalli" a sottoinsiemi della retta reale.

¹²Spesso in letteratura si indica la misura di Lebesgue in \mathbb{R}^n con i simboli \mathcal{L}^n o \mathcal{L}^n ; tuttavia preferiamo evitarli onde non causare ambiguità con la definizione di lunghezza di una curva (sezione 2.3).

- 1) $\mu_n(\emptyset) = 0$;
- 2) $\mu_n(\mathbb{R}^n) = +\infty$;
- 3) $\mu_n(I) = \text{Vol}_n(I)$ per ogni iperrettangolo I ;
- 4) $\mu_n(A) \leq \mu_n(B)$ per ogni $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$ (monotonia);
- 5) $\mu_n(A \cup B) \leq \mu_n(A) + \mu_n(B)$ per ogni $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ (subadditività¹³);
- 6) se $E \subset \mathbb{R}$ è un'unione di intervalli, allora $\mu_1(E) = \int_E 1 dx = \text{Lunghezza}(E)$;
- 7) se $E \subset \mathbb{R}^2$ è una regione d'integrazione, allora $\mu_2(E) = \iint_E 1 dx dy = \text{Area}(E)$;
- 8) se $E \subset \mathbb{R}^3$ è una regione d'integrazione, allora $\mu_3(E) = \iiint_E 1 dx dy dz = \text{Volume}(E)$.

In particolare, le proprietà 6), 7) e 8) indicano che μ_n è un'opportuna generalizzazione di lunghezza, area e volume.

A partire da μ_n si può definire la *misura di Lebesgue* propriamente detta, restringendo μ_n a una famiglia di sottoinsiemi di \mathbb{R}^n opportuni, detti *misurabili*; tuttavia non è necessario procedere in tale direzione per gli scopi del corso, dato che gli insiemi che prenderemo in considerazione saranno tutti misurabili¹⁴.

In molti ambiti dell'Analisi Matematica si è rivelato importante studiare proprietà di funzioni che siano valide non per ogni punto del loro dominio, ma per tutti i punti tranne quelli in un insieme di misura di Lebesgue nulla. A questo proposito, diamo due definizioni fondamentali:

- diciamo che un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ tale che $\mu_n(E) = 0$ è *trascurabile*;
- date due funzioni $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tali che l'insieme $\{x \in A : f(x) \neq g(x)\}$ è trascurabile, diciamo che $f(x) = g(x)$ per *quasi ogni* $x \in A$ (oppure, per brevità, per *q.o.* $x \in A$), o alternativamente che $f = g$ *quasi ovunque* in A (oppure, per brevità, *q.o.* in A).

2.3 Integrali curvilinei

Parliamo infine di un'altra estensione dell'integrale di Riemann al calcolo in più variabili, ovvero l'integrale lungo curve (differenziabili almeno a tratti).

In questa sezione assumiamo $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.

Vediamo un ragionamento intuitivo che ci permette di capire come calcolare la lunghezza di una porzione infinitesima di una curva, ovvero l'*elemento d'arco* della curva.

Se $dt > 0$ è molto piccolo, la lunghezza dell'arco della curva dal punto $\gamma(t)$ al punto $\gamma(t + dt)$ è quasi uguale alla distanza fra questi due punti, ovvero

$$ds \approx \|\gamma(t + dt) - \gamma(t)\| = \|\gamma(t) + \dot{\gamma}(t) dt + o(dt) - \gamma(t)\| \approx \|\dot{\gamma}(t)\| dt,$$

grazie alla formula di Taylor al I ordine per le curve differenziabili (Proposizione 1.5.7). Questa euristica può essere resa rigorosa, ma noi ometteremo questi dettagli.

Inoltre, la lunghezza si può calcolare anche per curve che non siano differenziabili in ogni punto del loro dominio di definizione. Perciò, introduciamo un'opportuna classe di curve regolari, ovvero quelle che sono differenziabili a tratti.

¹³Più in generale, abbiamo la subadditività su ogni famiglia infinita di insiemi: $\mu_n\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_n(A_k)$ per ogni famiglia di insiemi $\{A_k\}_k \in \mathbb{N}$.

¹⁴Per completezza, un insieme E si dice misurabile se

$$\mu_n(A) = \mu_n(A \cap E) + \mu_n(A \setminus E) \quad \text{per ogni } A \subseteq \mathbb{R}^n,$$

ovvero se E "taglia bene" ogni altro sottoinsieme di \mathbb{R}^n .

Definizione 2.3.1. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Una curva $\gamma \in C([a, b]; E)$ è *differenziabile a tratti*, o C^1 a tratti su $[a, b]$, e scriviamo $\gamma \in C_{\text{tr}}^1([a, b]; E)$, se esistono $t_0, t_1, \dots, t_k \in [a, b]$ tali che

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$$

e $\gamma \in C^1([t_{j-1}, t_j]; E)$ per ogni $j = 1, \dots, k$.

Quindi, se γ è una curva differenziabile a tratti, allora la sua derivata $\dot{\gamma}$ è ben definita su tutto $[a, b]$ tranne al più in un numero finito di punti. In particolare, le derivate da sinistra e da destra di γ esistono su tutto $[a, b]$ (negli estremi solo da destra e da sinistra, rispettivamente), ma possono assumere valori diversi nei punti $\{t_1, \dots, t_{k-1}\}$.

Definizione 2.3.2. Sia $\gamma \in C_{\text{tr}}^1([a, b]; \mathbb{R}^n)$. Allora

1. $ds(t) = \|\dot{\gamma}(t)\| dt$ è l'elemento d'arco associato a γ ,
2. la lunghezza di γ è data da

$$\mathcal{L}(\gamma) := \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt := \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\dot{\gamma}(t)\| dt,$$

3. se $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $\gamma([a, b]) \subseteq E$ e $f \in C(E)$, l'integrale (curvilineo) di f lungo γ è

$$\int_{\gamma} f ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt := \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

In particolare, se $f = 1$, troviamo

$$\int_{\gamma} 1 ds = \mathcal{L}(\gamma).$$

Diamo alcuni esempi di calcolo della lunghezza di curve e di integrali curvilinei.

Esempio 2.3.3. La lunghezza del segmento che unisce due punti $P, Q \in \mathbb{R}^n$ è ovviamente la distanza fra tali punti, ovvero $d(P, Q) = \|Q - P\|$. Coerentemente con questo fatto, la parametrizzazione di tale segmento $\gamma(t) = P + t(Q - P)$ per $t \in [0, 1]$ soddisfa $\dot{\gamma}(t) = Q - P$, e quindi

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_0^1 \|Q - P\| dt = \|Q - P\|.$$

Esempio 2.3.4. Sappiamo che la lunghezza di una qualunque circonferenza di raggio $r > 0$ è $2\pi r$. Coerentemente con ciò, sia $\gamma(t) = (x_0 + r \cos(t), y_0 + r \sin(t))$ per $t \in [0, 2\pi]$ una parametrizzazione della circonferenza di raggio r centrata in $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Allora abbiamo $\dot{\gamma}(t) = (-r \sin(t), r \cos(t))$ e quindi $\|\dot{\gamma}(t)\| = r$ per ogni $t \in [0, 2\pi]$. Quindi abbiamo $ds = r dt$ e

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$

Se $r = 1$, vediamo che $ds = dt$.

Esempio 2.3.5. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1([a, b])$, e consideriamo la curva

$$\gamma(t) = (t, f(t)), \quad \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

la cui traccia è il grafico di f , ovvero $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b]\}$. Dato che $\dot{\gamma}(t) = (1, f'(t))$, abbiamo $ds = \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$, e la lunghezza di tale grafico è dunque

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt.$$

Esempio 2.3.6. Sia $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ per $t \in [0, 2\pi]$, che è una parametrizzazione della circonferenza unitaria centrata nell'origine del piano cartesiano. Sia $f(x, y) = xy$. Allora, visto che $ds = \|\dot{\gamma}\| dt = dt$, l'integrale di f lungo γ è dato da

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f ds &= \int_0^{2\pi} f(\cos(t), \sin(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \cos(t) \sin(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin(2t)}{2} dt = \left[-\frac{\cos(2t)}{4} \right]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Esempio 2.3.7. Sia $\gamma : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da

$$\gamma(t) = \begin{cases} (\cos(\pi t), \sin(\pi t)) & \text{se } t \in [0, 1] \\ (2t - 3, 0) & \text{se } t \in [1, 2] \end{cases},$$

che è una parametrizzazione della semicirconferenza unitaria centrata nell'origine del piano cartesiano, tagliata dall'asse x . Allora abbiamo

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{cases} (-\pi \sin(\pi t), \pi \cos(\pi t)) & \text{se } t \in (0, 1) \\ (2, 0) & \text{se } t \in (1, 2) \end{cases},$$

di modo che

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = \begin{cases} \pi & \text{se } t \in (0, 1) \\ 2 & \text{se } t \in (1, 2) \end{cases}.$$

Sia $f(x, y) = x^2 + y^2$. L'integrale di f lungo γ è dato da

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f ds &= \int_0^1 f(\cos(\pi t), \sin(\pi t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt + \int_1^2 f(2t - 3, 0) \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_0^1 \pi dt + \int_1^2 (2t - 3)^2 2 dt \\ &= \pi + \left[\frac{(2t - 3)^3}{3} \right]_1^2 = \pi + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \pi + \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Osservazione 2.3.8. Quando una curva ammette una parametrizzazione $\gamma \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^n)$ tale che $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$ per ogni $t \in I$, diciamo che la curva è parametrizzata mediante *lunghezza d'arco*, perché la lunghezza da $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$ è proprio uguale a $(b - a)$, per ogni $a, b \in I$ con $a < b$. In altre parole, la lunghezza della curva è uguale a quella dell'intervallo dei parametri considerato.

Infine, usiamo la regola di derivazione della funzione composta (1.5.1) per verificare che l'integrale di una funzione continua lungo una curva differenziabile è indipendente dalla parametrizzazione scelta.

Lemma 2.3.9. Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $\gamma \in C_{\text{tr}}^1([a, b]; E)$, e $f \in C(E)$. Sia $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ una funzione biunivoca tale che $\varphi \in C^1([c, d])$ e $\varphi'(\sigma) \neq 0$ per ogni $\sigma \in [c, b]$. Allora abbiamo

$$\int_{\gamma \circ \varphi} f ds = \int_{\gamma} f ds.$$

In particolare, $\mathcal{L}(\gamma \circ \varphi) = \mathcal{L}(\gamma)$, ovvero la lunghezza della curva non dipende dalla riparametrizzazione.

Dimostrazione. Per semplicità, dimostriamo solo il caso $\gamma \in C^1([a, b]; E)$. Se assumiamo che $\varphi'(\sigma) > 0$ per ogni $\sigma \in [a, b]$, di modo che $\varphi(c) = a$ e $\varphi(d) = b$, grazie a (1.5.1) abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\gamma \circ \varphi} f ds &= \int_c^d f(\gamma(\varphi(\sigma))) \|\dot{\gamma}(\varphi(\sigma))\| |\varphi'(\sigma)| d\sigma \\ &= \int_c^d f(\gamma(\varphi(\sigma))) \|\dot{\gamma}(\varphi(\sigma))\| \varphi'(\sigma) d\sigma = \left[\begin{array}{l} t = \varphi(\sigma) \\ dt = \varphi'(\sigma) d\sigma \end{array} \right] \\ &= \int_a^b f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_{\gamma} f ds. \end{aligned}$$

Il caso $\varphi'(\sigma) < 0$ per ogni $\sigma \in [a, b]$ si gestisce in modo analogo, solo facendo attenzione al fatto che $|\varphi'(\sigma)| = -\varphi'(\sigma)$.

In particolare, è sufficiente prendere $f = 1$ per ottenere

$$\mathcal{L}(\gamma \circ \varphi) = \int_{\gamma \circ \varphi} 1 \, ds = \int_{\gamma} 1 \, ds = \mathcal{L}(\gamma).$$

Si può anche mostrarlo direttamente: se $\varphi'(\sigma) > 0$ per ogni $\sigma \in [a, b]$, otteniamo

$$ds = \|(\dot{\gamma} \circ \varphi)(\sigma)\| \, d\sigma = \|\dot{\gamma}(\varphi(\sigma))\| |\varphi'(\sigma)| \, d\sigma = \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt,$$

e il caso $\varphi'(\sigma) < 0$ per ogni $\sigma \in [a, b]$ si tratta come spiegato sopra. □

Capitolo 3

Lavoro di un campo vettoriale

3.1 Lavoro di un campo

Ricordiamo alcune utili definizioni relative ai campi vettoriali.

Definizione 3.1.1. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Un *campo vettoriale n -dimensionale* è una funzione a valori vettoriali $F : E \rightarrow \mathbb{R}^n$. Denotiamo con $F_j : E \rightarrow \mathbb{R}$ la j -esima componente di F , di modo che $F = (F_1, \dots, F_n)$ ¹.

Diciamo che F è un campo continuo se ogni F_j è continua per $j \in \{1, \dots, n\}$, e scriviamo $F \in C(E; \mathbb{R}^n)$.

Se E è un insieme aperto, diciamo che F è un campo differenziabile con continuità se ogni F_j è differenziabile con continuità per $j \in \{1, \dots, n\}$, e scriviamo $F \in C^1(E; \mathbb{R}^n)$.

Definizione 3.1.2 (Lavoro di un campo). Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $\gamma \in C_{\text{tr}}^1([a, b]; E)$ una curva e $F \in C(E; \mathbb{R}^n)$ un campo. Il *lavoro del campo F lungo la curva γ* è la quantità scalare

$$\int_{\gamma} F(x) \cdot dx := \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt = \int_a^b \sum_{j=1}^n F_j(\gamma(t)) \dot{\gamma}_j(t) dt.$$

Dato che $\dot{\gamma} \in C_{\text{tr}}([a, b]; \mathbb{R}^n)$, cioè è continua a tratti, ovvero esistono $t_0, t_1, \dots, t_k \in [a, b]$ tali che

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$$

e $\dot{\gamma} \in C([t_{j-1}, t_j]; \mathbb{R}^n)$ per ogni $j = 1, \dots, k$, per definizione di integrale improprio di Riemann abbiamo

$$\int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt := \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt.$$

Onde evitare di appesantire la notazione di questo capitolo, intenderemo sempre in questo senso gli integrali legati al lavoro.

A livello formale, la definizione di lavoro si può rileggere nel seguente modo:

$$\int_{\gamma} F(x) \cdot dx = \int_{\gamma} \sum_{j=1}^n F_j(x) dx_j \quad \text{e} \quad dx_j = \dot{\gamma}_j dt \quad \text{lungo la curva } \gamma.$$

Il lavoro è una quantità scalare introdotta nella meccanica classica da Gaspard Gustave de Coriolis, nell'ambito dello studio della variazione di energia in un sistema: più precisamente, è l'energia usata da un sistema per compiere uno spostamento attraverso l'azione di una forza. L'effetto assoluto di tale azione è massimizzato se la forza è parallela alla direzione tangente allo spostamento (ovvero, alla velocità), e nullo se la forza è ortogonale alla velocità dello spostamento. Di conseguenza, è ragionevole definire il lavoro elementare della forza $F(x)$ relativo allo spostamento elementare dx lungo una curva γ tramite il prodotto scalare $F(x) \cdot dx$, e quindi porre il lavoro complessivo uguale

¹In questo capitolo, per una questione notazionale, è utile vedere i campi vettoriali come vettori riga, anziché colonna.

all'integrale di tale prodotto scalare lungo tutta la curva. Perciò, l'unità di misura del lavoro è il joule, che soddisfa le seguenti relazioni:

$$J = N \cdot m = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}.$$

In fisica (e specialmente nella teoria dell'elettromagnetismo) talvolta il lavoro è chiamato *circuitalazione*.

Notiamo anche che si può stabilire una relazione fra l'integrale che definisce il lavoro di un campo lungo una curva e l'integrale curvilineo definito in precedenza: se indichiamo con $\alpha : [a, b] \rightarrow [0, 2\pi]$ la funzione dell'angolo $\alpha(t)$ realizzato fra i vettori $F(\gamma(t))$ e $\dot{\gamma}(t)$, ovvero la funzione che soddisfa

$$F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) = \|F(\gamma(t))\| \|\dot{\gamma}(t)\| \cos(\alpha(t)),$$

allora abbiamo

$$\int_{\gamma} F(x) \cdot dx = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt = \int_a^b \|F(\gamma(t))\| \|\dot{\gamma}(t)\| \cos(\alpha(t)) dt = \int_{\gamma} \|F\| (\cos \circ \delta) ds,$$

per una qualche funzione $\delta : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 2\pi]$ che soddisfa $\delta(\gamma(t)) = \alpha(t)$.

Vediamo alcuni esempi di calcolo del lavoro di un campo lungo una curva data.

Esempio 3.1.3. Siano $n = 2$, $F(x, y) = (-y, x)$ e $\gamma \in C^1([0, 2\pi]; \mathbb{R}^2)$ data da

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)),$$

di modo che la traccia di γ è la circonferenza unitaria centrata nell'origine. Risulta chiaro che abbiamo $\dot{\gamma}(t) = (-\sin(t), \cos(t))$, e quindi

$$F(\gamma(t)) = (-\sin(t), \cos(t)) = \dot{\gamma}(t).$$

Di conseguenza, il campo vettoriale lungo la curva è parallelo alla velocità (in effetti, è proprio uguale ad essa), e quindi il lavoro è massimizzato. In particolare, se poniamo $u = (x, y)$, abbiamo

$$\int_{\gamma} F(u) \cdot du = \int_0^{2\pi} \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2(t) + \cos^2(t)) dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

Se invece consideriamo il campo vettoriale $G(x, y) = (x, y)$, allora

$$G(\gamma(t)) = (\cos(t), \sin(t)) = \gamma(t).$$

Di conseguenza, il campo vettoriale lungo la curva è ortogonale alla velocità, e quindi il lavoro deve essere nullo. Infatti, abbiamo

$$\int_{\gamma} G(u) \cdot du = \int_0^{2\pi} \gamma(t) \cdot \dot{\gamma}(t) dt = \int_0^{2\pi} (-\cos(t)\sin(t) + \sin(t)\cos(t)) dt = \int_0^{2\pi} 0 dt = 0.$$

Esempio 3.1.4. Siano $n = 3$, $F(x, y, z) = (x, y, z)$ e $\gamma \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^3)$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$. Se poniamo $u = (x, y, z)$, otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F(u) \cdot du &= \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt = \int_a^b (\gamma_1(t)\dot{\gamma}_1(t) + \gamma_2(t)\dot{\gamma}_2(t) + \gamma_3(t)\dot{\gamma}_3(t)) dt \\ &= \left[\frac{1}{2} (\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t) + \gamma_3^2(t)) \right]_a^b = \left[\frac{\|\gamma(t)\|^2}{2} \right]_a^b = \frac{1}{2} (\|\gamma(b)\|^2 - \|\gamma(a)\|^2), \end{aligned}$$

grazie alla regola di derivazione del prodotto $(\gamma_j^2(t))' = 2\gamma_j(t)\dot{\gamma}_j(t) = 2\gamma_j(t)\dot{\gamma}_j(t)$. In particolare, in questo caso il lavoro del campo lungo la curva dipende solo dagli estremi della curva stessa. A riguardo, osserviamo che

$$F(x, y, z) = \nabla p(x, y, z) \quad \text{per} \quad p(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} = \frac{\|(x, y, z)\|^2}{2},$$

e che quindi

$$\int_{\gamma} F(u) \cdot du = p(\gamma(b)) - p(\gamma(a)).$$

Vedremo in seguito che questa è una proprietà generale dei campi che possono essere rappresentati come il gradiente di una funzione differenziabile con continuità.

Esempio 3.1.5. Siano $F \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $P, Q \in \mathbb{R}^n$ e $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ data da

$$\gamma(t) = P + t(Q - P).$$

Quindi, $\dot{\gamma}(t) = Q - P$ è costante, e deduciamo che il lavoro del campo F lungo la curva a velocità costante γ è dato da

$$\int_{\gamma} F(x) \cdot dx = \int_0^1 F(P + t(Q - P)) \cdot (Q - P) dt = \left(\int_0^1 F(P + t(Q - P)) dt \right) \cdot (Q - P),$$

dove l'ultimo integrale va inteso componente per componente, ovvero

$$\left(\int_0^1 F(P + t(Q - P)) dt \right) \cdot (Q - P) = \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 F_j(P + t(Q - P)) dt \right) (Q_j - P_j).$$

In altre parole, il lavoro è il prodotto scalare fra l'azione media della forza lungo la curva (questo è il significato dell'integrale) e la velocità (costante) della curva stessa.

Vediamo ora alcune proprietà del lavoro, che sono analoghe a quelle degli integrali curvilinei (e, per estensione, dell'integrale di Riemann su intervalli della retta reale). Infatti, il lavoro è di fatto un tipo di integrale, e quindi è naturale che sia lineare rispetto ai campi integrati e additivo rispetto alle curve d'integrazione.

Proposizione 3.1.6 (Proprietà del lavoro). *Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $F, G \in C(E; \mathbb{R}^n)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\gamma \in C_{\text{tr}}^1([a, b]; E)$. Allora*

- $\int_{\gamma} (\alpha F(x) + \beta G(x)) \cdot dx = \alpha \int_{\gamma} F(x) \cdot dx + \beta \int_{\gamma} G(x) \cdot dx$ (ovvero, il lavoro è lineare rispetto al campo vettoriale);

- se γ^{-1} è la curva γ percorsa in senso inverso, parametrizzata ad esempio come $\gamma^{-1}(t) = \gamma(b - t)$, $t \in [0, b - a]$, allora

$$\int_{\gamma^{-1}} F(x) \cdot dx = - \int_{\gamma} F(x) \cdot dx$$

(ovvero, il segno del lavoro dipende dal senso di percorrenza della curva);

- se $a < c < b$ e $\eta(t) = \gamma(t)$ per $t \in [a, c]$ e $\varepsilon(t) = \gamma(t)$ per $t \in [c, b]$, allora

$$\int_{\gamma} F(x) \cdot dx = \int_{\eta} F(x) \cdot dx + \int_{\varepsilon} F(x) \cdot dx$$

(ovvero, il lavoro del campo lungo la curva γ è la somma del lavoro compiuto percorrendo le due curve η e ε che la compongono, e dunque il lavoro è additivo rispetto alla curva);

- per ogni funzione biunivoca $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ tale che $\varphi \in C^1([c, d])$ e $\varphi'(u) > 0$ per ogni $u \in [c, d]$ abbiamo

$$\int_{\gamma \circ \varphi} F(x) \cdot dx = \int_{\gamma} F(x) \cdot dx$$

(ovvero, il lavoro di F lungo una curva è indipendente dalla parametrizzazione di tale curva, purché la parametrizzazione abbia velocità non nulla e preservi il verso di percorrenza).

Dimostrazione. La dimostrazione dei punti (1), (2), (3) è immediata, ed è quindi lasciata per esercizio. Consideriamo il punto (4), solo nel caso di $\gamma \in C^1([a, b]; E)$: grazie al cambiamento di variabile per l'integrale di Riemann, abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\gamma \circ \varphi} F(x) \cdot dx &= \int_c^d F(\gamma(\varphi(u))) \cdot (\gamma \circ \varphi)'(u) du = \int_c^d F(\gamma(\varphi(u))) \cdot \dot{\gamma}(\varphi(u)) \varphi'(u) du \\ &= [\varphi(u) = t, \varphi'(u) du = dt] = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt = \int_{\gamma} F(x) \cdot dx. \end{aligned}$$

□

Si può usare la Proposizione 3.1.6 per definire formalmente il lavoro lungo una somma algebrica di curve.

Definizione 3.1.7. Siano $k \in \mathbb{N}$, $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{Z}$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in C_{\text{tr}}^1([a, b]; E)$. L'espressione formale

$$\Gamma = \sum_{j=1}^k m_j \gamma_j = m_1 \gamma_1 + \dots + m_k \gamma_k$$

si dice *catena*², e definiamo il lavoro di un campo $F \in C(E; \mathbb{R}^n)$ lungo Γ come

$$\int_{\Gamma} F(x) \cdot dx := \sum_{j=1}^k m_j \int_{\gamma_j} F(x) \cdot dx = m_1 \int_{\gamma_1} F(x) \cdot dx + \dots + m_k \int_{\gamma_k} F(x) \cdot dx.$$

Se Γ_1 e Γ_2 sono catene, si dice che sono equivalenti, e si scrive $\Gamma_1 \equiv \Gamma_2$, se

$$\int_{\Gamma_1} F(x) \cdot dx = \int_{\Gamma_2} F(x) \cdot dx$$

per ogni campo $F \in C(E; \mathbb{R}^n)$, dove $E \subseteq \mathbb{R}^n$ contiene le immagini delle curve che compongono Γ_1 e Γ_2 .

Osservazione 3.1.8. Rileggendo la Proposizione 3.1.6 nell'ottica della Definizione 3.1.7 deduciamo che $\gamma^{-1} \equiv -\gamma$ (punto (2)) e $\gamma \equiv \eta + \varepsilon$ (punto (3)). In particolare, ciò significa che

$$\int_{-\gamma} F(x) \cdot dx = - \int_{\gamma} F(x) \cdot dx$$

e

$$\int_{\eta+\varepsilon} F(x) \cdot dx = \int_{\eta} F(x) \cdot dx + \int_{\varepsilon} F(x) \cdot dx$$

Questa notazione rende i calcoli riguardanti il lavoro più intuitivi e semplici da scrivere, perciò la adotteremo nel seguito.

3.2 Campi esatti

Definizione 3.2.1 (Campi esatti). Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto. Un campo $F \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$ è *esatto* (o *conservativo*) se è il gradiente di una funzione C^1 , ovvero se esiste $\phi \in C^1(\Omega)$ tale che

$$F(x) = \nabla \phi(x) \quad \text{per ogni } x \in \Omega,$$

cioè $F_j(x) = \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x)$ per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$ e $x \in \Omega$. La funzione ϕ è un *potenziale* di F .

Osservazione 3.2.2. Se ϕ è un potenziale di F , allora, per ogni $c \in \mathbb{R}$, anche $\phi + c$ lo è.

Osservazione 3.2.3. Se $n = 1$, un campo continuo è una funzione continua, e quindi un potenziale è semplicemente una funzione primitiva. Quindi, nel caso 1-dimensionale ogni campo continuo è esatto, poiché ogni funzione continua ammette funzioni primitive³: se $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ è un aperto e $f \in C(\Omega)$, allora tutte le funzioni

$$\phi(x) = \int_{x_0}^x f(y) dy + c, \quad \text{dove } x_0 \in \Omega \text{ e } c \in \mathbb{R},$$

soddisfano $\phi'(x) = f(x)$, e dunque sono primitive di f (e sono in effetti tutte le possibili primitive).

²Precisamente, sarebbe una 1-*catena*, visto che si possono definire catene di dimensione superiore, ma ciò va oltre gli scopi di questo corso.

³Ciò non vuol dire che si possa sempre esprimere tale funzione in termini di somme algebriche, prodotti e rapporti di funzioni elementari: ad esempio, $f(x) = e^{-x^2}$ non ammette una primitiva che si possa scrivere in termini di composizioni fra esponenziali e polinomi, ma ovviamente la funzione integrale $\int_0^x e^{-y^2} dy$ è una sua primitiva.

Il campo nell'Esempio 3.1.4 è esatto (così come il campo G nell'Esempio 3.1.3), e abbiamo visto che in quel caso il lavoro lungo una curva generica si può calcolare esplicitamente in termini del potenziale del campo valutato negli estremi della curva. In effetti, questa è una proprietà generale dei campi esatti. Introduciamo prima la nozione di curva chiusa.

Definizione 3.2.4 (Curve chiuse). Una curva $\gamma \in C([a, b]; \mathbb{R}^n)$ è *chiusa* se $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Teorema 3.2.5. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, $F \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$ un campo esatto e $\phi \in C^1(\Omega)$ un suo potenziale. Allora, per ogni curva $\gamma \in C_{\text{tr}}^1([a, b]; \Omega)$ abbiamo

$$\int_{\gamma} F(x) \cdot dx = \phi(\gamma(b)) - \phi(\gamma(a)).$$

In particolare, per ogni curva chiusa $\gamma \in C_{\text{tr}}^1([a, b]; \Omega)$ abbiamo

$$\int_{\gamma} F(x) \cdot dx = 0.$$

Dimostrazione. Per semplicità, consideriamo solo $\gamma \in C^1([a, b]; \Omega)$. Grazie alla formula della derivazione della funzione composta (Lemma 1.5.10), sappiamo che

$$\frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma)(t) = (\nabla \phi)(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)$$

per ogni $\gamma \in C^1([a, b]; \Omega)$. Dato che $F(x) = \nabla \phi(x)$, abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F(x) \cdot dx &= \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt = \int_a^b \nabla \phi(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma)(t) dt = [(\phi \circ \gamma)(t)]_a^b = \phi(\gamma(b)) - \phi(\gamma(a)). \end{aligned}$$

Se poi $\gamma(a) = \gamma(b)$, allora il lavoro di F lungo γ è ovviamente nullo. □

Osservazione 3.2.6. Alla luce del Teorema 3.2.5, possiamo concludere che il campo $F(x, y) = (-y, x)$ dell'Esempio 3.1.3 non è esatto, dato che il suo lavoro lungo la circonferenza unitaria centrata nell'origine è diverso da zero.

Osservazione 3.2.7. In fisica il potenziale è di solito definito come l'opposto di quello considerato in questo corso (ed è chiamato *energia potenziale*). Più precisamente, un campo F è conservativo (ovvero, esatto) se esiste un'energia potenziale scalare $U \in C^1$ tale che $F = -\nabla U$. Quindi, se $\phi = -U$, il Teorema 3.2.5 implica

$$\int_{\gamma} F(x) \cdot dx = U(\gamma(a)) - U(\gamma(b)),$$

il che significa che il lavoro compiuto dalla forza lungo la curva γ è uguale alla differenza fra l'energia potenziale nel punto di partenza e quella nel punto di arrivo. Ciò acquista particolare senso se intendiamo l'energia potenziale di un sistema come la sua capacità di compiere lavoro, di modo tale che l'energia potenziale viene consumata per compiere il lavoro, e quindi l'energia nel punto iniziale deve essere uguale al lavoro compiuto sommato all'energia nel punto finale.

Se assumiamo in aggiunta che Ω sia connesso per archi, allora valgono anche le implicazioni inverse rispetto a quelle del Teorema 3.2.5, che raccogliamo nel seguente teorema generale sulla relazione fra il lavoro di un campo e l'esistenza di un potenziale per tale campo. Per dimostrarlo, dovremo usare il Lemma 1.5.12 per assicurarci l'esistenza di curve regolari a sufficienza.

Teorema 3.2.8 (Relazione tra campi esatti e lavoro). Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto connesso per archi e $F \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. il campo F è esatto;
2. il lavoro di F lungo ogni curva differenziabile a tratti chiusa in Ω è nullo: se $\gamma \in C_{\text{tr}}^1([a, b]; \Omega)$ e $\gamma(a) = \gamma(b)$, allora

$$\int_{\gamma} F(x) \cdot dx = 0;$$

3. il lavoro di F lungo una curva differenziabile a tratti in Ω dipende solo dai suoi estremi: se $\gamma \in C_{\text{tr}}^1([a, b]; \Omega)$, $\delta \in C_{\text{tr}}^1([c, d]; \Omega)$, e $\gamma(a) = \delta(c)$, $\gamma(b) = \delta(d)$, allora

$$\int_{\gamma} F(x) \cdot dx = \int_{\delta} F(x) \cdot dx.$$

Inoltre, se una delle condizioni (1), (2) o (3) è soddisfatta, allora i potenziali di F hanno tutti la forma

$$\phi(x) = \int_{\gamma_{x_0, x}} F(y) \cdot dy + c \quad \text{per } x \in \Omega, \quad (3.2.1)$$

dove $c \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \Omega$ e $\gamma_{x_0, x} \in C_{\text{tr}}^1([a, b]; \Omega)$ è una qualsiasi curva in Ω che inizia in $x_0 \in \Omega$ e finisce in x , ovvero $\gamma_{x_0, x}(a) = x_0$ e $\gamma_{x_0, x}(b) = x$.

Dimostrazione. (1) \Rightarrow (2): Segue dal Teorema 3.2.5.

(2) \Rightarrow (3): Poniamo $\alpha = \gamma - \delta$, ovvero α è una curva che si può parametrizzare nel seguente modo:

$$\alpha(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{se } a \leq t \leq b, \\ \delta(b + d - t) & \text{se } b \leq t \leq b + d - c. \end{cases}$$

Osserviamo che

- $\alpha(b) = \gamma(b) = \delta(d)$, e quindi $\alpha : [a, b + d - c] \rightarrow \Omega$ è una curva continua,
- $\gamma \in C_{\text{tr}}^1([a, b]; \Omega)$ e $\delta \in C_{\text{tr}}^1([c, d]; \Omega)$, e quindi $\alpha \in C_{\text{tr}}^1([a, b + d - c]; \Omega)$,
- $\alpha(a) = \gamma(a) = \delta(c) = \alpha(b + d - c)$, e quindi α è una curva chiusa in Ω .

Perciò, il punto (2) unito alla Proposizione 3.1.6 (si veda anche l'Osservazione 3.1.8) implica

$$0 = \int_{\alpha} F(x) \cdot dx = \int_{\gamma} F(x) \cdot dx - \int_{\delta} F(x) \cdot dx.$$

(3) \Rightarrow (1) Dato che Ω è un aperto connesso per archi, grazie al Lemma 1.5.12 sappiamo che, per ogni $x_0, x \in \Omega$, esiste $\gamma_{x_0, x} \in C^1([a, b]; \Omega)$ tale che $\gamma_{x_0, x}(a) = x_0$ e $\gamma_{x_0, x}(b) = x$. Quindi fissiamo $c \in \mathbb{R}$ e x_0 in Ω , e per ogni x in Ω definiamo ϕ come in (3.2.1). Notiamo che ϕ è ben definita, dato che, in virtù del punto (3), il lavoro non dipende dalla particolare curva $\gamma_{x_0, x}$ scelta, ma solo dal punto iniziale x_0 e dal punto finale x .

Consideriamo ora $\phi(x + he_j)$ per $h > 0$ e $j \in \{1, \dots, n\}$. Proprio grazie al punto (3), possiamo supporre che $\gamma_{x_0, x+he_j} = \gamma_{x_0, x} + L_x$, dove $L_x : [0, h] \rightarrow \Omega$ è data da $L_x(t) = x + te_j$, ovvero è il segmento da x a $x + he_j$. Notiamo peraltro che, siccome Ω è aperto, $L_x([0, h]) \subset \Omega$ per $h > 0$ abbastanza piccolo, di modo che $\gamma_{x_0, x+he_j} \in C_{\text{tr}}^1([c, d]; \Omega)$, per un opportuno intervallo $[c, d]$. Dunque abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\phi(x + he_j) - \phi(x)}{h} &= \frac{1}{h} \left(\int_{\gamma_{x_0, x+he_j}} F(y) \cdot dy - \int_{\gamma_{x_0, x}} F(y) \cdot dy \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_{\gamma_{x_0, x}} F(y) \cdot dy + \int_{L_x} F(y) \cdot dy - \int_{\gamma_{x_0, x}} F(y) \cdot dy \right) \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h F(x + te_j) \cdot e_j dt = \frac{1}{h} \int_0^h F_j(x + te_j) dt = F_j(x + se_j) \end{aligned}$$

per qualche $s = s(h) \in [0, h]$, grazie al Teorema della Media Integrale. Quindi, per il Teorema dei Carabinieri, deduciamo che $s \rightarrow 0^+$ per $h \rightarrow 0^+$, e concludiamo che

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\phi(x + he_j) - \phi(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} F_j(x + se_j) = F_j(x).$$

Il caso $h \rightarrow 0^-$ può essere trattato analogamente, e dunque abbiamo mostrato che $\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) = F_j(x)$ per ogni $x \in \Omega$ e $j \in \{1, \dots, n\}$. Quindi ϕ è un potenziale di F e F è un campo esatto.

Rimane solo da dimostrare che, dato un qualunque potenziale ϕ di F , allora ϕ soddisfa (3.2.1) per qualche $x_0 \in \Omega$ e $c \in \mathbb{R}$. Se $F = \nabla\phi$, allora il Teorema 3.2.5 implica che

$$\int_{\gamma_{x_0,x}} F(y) \cdot dy = \int_{\gamma_{x_0,x}} \nabla\phi(y) \cdot dy = \phi(\gamma_{x_0,x}(b)) - \phi(\gamma_{x_0,x}(a)) = \phi(x) - \phi(x_0)$$

per ogni $x_0, x \in \Omega$ e $\gamma_{x_0,x} \in C_{\text{tr}}^1([a, b]; \Omega)$ tale che $\gamma(a) = x_0$ e $\gamma(b) = x$. Quindi otteniamo (3.2.1) con $c = \phi(x_0)$. \square

Una conseguenza immediata di questo risultato è che la differenza di potenziale tra due punti x e y in un insieme aperto connesso è data dal lavoro del campo da x a y .

Corollario 3.2.9. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto connesso per archi e $F \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$ un campo esatto. Allora per ogni $\phi \in C^1(\Omega)$ che sia un potenziale di F abbiamo*

$$\phi(y) - \phi(x) = \int_{\gamma_{x,y}} F(z) \cdot dz,$$

dove $\gamma_{x,y} \in C_{\text{tr}}^1([a, b]; \Omega)$ è una curva tale che $\gamma_{x,y}(a) = x$ e $\gamma_{x,y}(b) = y$.

3.3 Campi chiusi

Definizione 3.3.1 (Campi chiusi). Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Un campo $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ è *chiuso* (o *irrotazionale*) se

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \text{ per ogni } i, j \in \{1, \dots, n\},$$

cioè se “le derivate in croce di F coincidono”⁴.

La nozione di campo chiuso viene introdotta per via della sua relazione con quella di campo esatto.

Teorema 3.3.2 (Lemma di Poincaré). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Se il campo $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ è esatto, allora è chiuso.*

Dimostrazione. Dato che F è esatto, esiste $\phi \in C^1(\Omega)$ tale che $F = \nabla\phi$. Tuttavia, il fatto che $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ implica $\phi \in C^2(\Omega)$. Quindi, per $i, j \in \{1, \dots, n\}$ otteniamo

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial F_i}{\partial x_j},$$

grazie al Lemma di Schwarz. \square

In dimensione $n = 3$ possiamo stabilire se F è chiuso calcolando il suo rotore.

Definizione 3.3.3. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto e $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$. Poniamo $F = (F_1, F_2, F_3)$, $i = e_1$, $j = e_2$, $k = e_3$. Il *rotore* di F è

$$\begin{aligned} \nabla \times F := \text{rot } F &:= \det \left(\begin{bmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{bmatrix} \right) \text{ (determinante formale di questa matrice)} \\ &:= i(\partial_y F_3 - \partial_z F_2) - j(\partial_x F_3 - \partial_z F_1) + k(\partial_x F_2 - \partial_y F_1) \\ &= (\partial_y F_3 - \partial_z F_2, -\partial_x F_3 + \partial_z F_1, \partial_x F_2 - \partial_y F_1). \end{aligned}$$

Esempio 3.3.4. Sia

$$F(x, y, z) = (-yz, xz, x^2 + y^2).$$

Allora abbiamo

$$\begin{aligned} \nabla \times F(x, y, z) &= (\partial_y(x^2 + y^2) - \partial_z(xz), -\partial_x(x^2 + y^2) + \partial_z(-yz), \partial_x(xz) - \partial_y(-yz)) \\ &= (2y - x, -2x - y, z + z) = (2y - x, -2x - y, 2z). \end{aligned}$$

⁴In maniera equivalente, si può scrivere $\partial_i F_j = \partial_j F_i$.

Risulta quindi immediata la seguente caratterizzazione di campi chiusi in \mathbb{R}^3 tramite il loro rotore.

Teorema 3.3.5 (Campi chiusi e rotore in dimensione 3). *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto e $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$. Allora F è chiuso se e solo se $\nabla \times F = 0$. In particolare, per ogni $\phi \in C^2(\Omega)$, abbiamo $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$.*

Dimostrazione. La prima parte dell'enunciato è ovvia, la seconda segue dal Lemma di Poincaré (Lemma 3.3.2), dato che $F = \nabla \phi$ è un campo esatto (oppure, la si può dimostrare tramite un calcolo diretto e l'applicazione del Lemma di Schwarz). \square

Osservazione 3.3.6. Il criterio per la chiusura del Teorema 3.3.5 può essere usato anche in dimensione $n = 2$. Infatti, dato un campo $F = (F_1, F_2) \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ per qualche aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, possiamo estenderlo al campo

$$\tilde{F}(x, y, z) := (F_1(x, y), F_2(x, y), 0),$$

di modo che

$$\nabla \times \tilde{F} = (0, 0, \partial_x F_2 - \partial_y F_1),$$

che tra l'altro significa che il rotore di un campo nel piano è ad esso perpendicolare. In conclusione, otteniamo

$$\nabla \times \tilde{F} = 0 \Leftrightarrow \partial_x F_2 - \partial_y F_1 = 0 \Leftrightarrow F \text{ è chiuso.}$$

Vista la semplicità del calcolo del lavoro dei campi esatti, e, visto che verificare la condizione di chiusura è più facile rispetto al dimostrare l'esistenza di un potenziale, è interessante chiedersi se valga l'implicazione opposta del Lemma di Poincaré, ovvero ogni campo chiuso sia esatto. Questo è però falso, come mostrato dal seguente esempio.

Esempio 3.3.7. Sia $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dato da

$$F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Allora abbiamo

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

e

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = \frac{-1}{x^2 + y^2} + \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

e dunque F è un campo chiuso. D'altra parte, non può essere esatto. Infatti, se lo fosse, per il Teorema 3.2.5 il lavoro di F lungo una qualunque curva chiusa dovrebbe essere nullo. Consideriamo quindi la circonferenza centrata in $(0, 0)$ e raggio $r > 0$, che parametrizziamo tramite

$$\gamma(t) = (r \cos(t), r \sin(t)), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Un calcolo diretto mostra che

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F(z) \cdot dz &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-r \sin(t)}{r^2}, \frac{r \cos(t)}{r^2} \right) \cdot (-r \sin(t), r \cos(t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2(t) + \cos^2(t)) dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \neq 0. \end{aligned}$$

Osservazione 3.3.8. Grazie al Teorema 3.2.8, sappiamo che, in un insieme aperto connesso per archi, i potenziali di un campo esatto si scrivono, a meno di una costante, come il lavoro di tale campo lungo un'opportuna curva. L'ostacolo all'esattezza del campo, quindi, è costituita dal venir meno della proprietà che il lavoro lungo una curva dipende solo dagli estremi della curva, come infatti succede nell'Esempio 3.3.7.

Quindi, non tutti i campi chiusi sono esatti, ma tutti i campi chiusi sono *localmente* esatti.

Teorema 3.3.9 (Teorema di Poincaré-Volterra locale). *Siano $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ e $F \in C^1(B_r(a); \mathbb{R}^n)$ un campo chiuso. Allora F è esatto.*

Per dimostrare questo teorema sarà necessario derivare sotto il segno d'integrale. La derivazione sotto il segno d'integrale, ovvero, lo scambiare l'ordine di queste due operazioni, è un risultato che si usa quasi ovunque vi siano applicazioni rilevanti dell'Analisi Matematica (soprattutto ai modelli fisici).

Teorema 3.3.10 (Teorema di derivazione sotto il segno d'integrale). *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e $(x, t) \in \Omega \times [a, b] \rightarrow f(x, t) \in \mathbb{R}$ una funzione $f \in C(\Omega \times [a, b])$ le cui derivate parziali rispetto a x_j sono continue, ovvero $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in C(\Omega \times [a, b])$ per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$. Allora per ogni $x \in \Omega$ abbiamo*

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\int_a^b f(x, t) dt \right] = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, t) dt \quad \text{per ogni } j \in \{1, \dots, n\},$$

o, equivalentemente, se poniamo $\phi(x) = \int_a^b f(x, t) dt$, $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, allora $\phi \in C^1(\Omega)$ e

$$\nabla \phi(x) = \int_a^b \nabla_x f(x, t) dt.$$

Dimostrazione. [Dimostrazione del Teorema 3.3.9] Scriviamo esplicitamente un potenziale di F . Per $x \in B_r(a)$, poniamo

$$L_x : [0, 1] \rightarrow B_r(a), \quad L_x(t) = a + t(x - a),$$

che è la parametrizzazione lineare del segmento che congiunge a a x . Quindi definiamo la funzione

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int_{L_x} F(y) \cdot dy = \int_0^1 F(a + t(x - a)) \cdot (x - a) dt \\ &= \int_0^1 \sum_{j=1}^n F_j(a + t(x - a))(x_j - a_j) dt. \end{aligned}$$

Ora dobbiamo dimostrare che $\frac{\partial \phi}{\partial x_k}(x) = F_k(x)$ per ogni $x \in \Omega$ e $k \in \{1, \dots, n\}$. Notiamo che la funzione

$$f(x, t) = \sum_{j=1}^n F_j(a + t(x - a))(x_j - a_j) = F(a + t(x - a)) \cdot (x - a)$$

soddisfa le ipotesi del Teorema 3.3.10, dato che $F \in C^1(B_r(a); \mathbb{R}^n)$, e quindi dal Teorema 3.3.10 deduciamo che $\phi \in C^1(B_r(a))$, e quindi esistono le derivate parziali di ϕ . Ancora grazie al Teorema 3.3.10 possiamo derivare sotto il segno di integrale, e quindi, per ogni $k \in \{1, \dots, n\}$, otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x_k}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\int_0^1 \sum_{j=1}^n F_j(a + t(x - a))(x_j - a_j) dt \right] \\ &= \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(F_j(a + t(x - a))(x_j - a_j) \right) dt \\ &= \int_0^1 \left[\left(\sum_{j=1}^n t \frac{\partial F_j}{\partial x_k}(a + t(x - a))(x_j - a_j) \right) + F_k(a + t(x - a)) \right] dt, \end{aligned}$$

grazie alla regola di derivazione del prodotto, dato che

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(F_j(a + t(x - a)) \right) &= \frac{\partial}{\partial x_k} F_j(a_1 + t(x_1 - a_1), \dots, a_k + t(x_k - a_k), \dots, a_n + t(x_n - a_n)) \\ &= \frac{\partial F_j}{\partial x_k}(a + t(x - a)) \frac{\partial (a_k + t(x_k - a_k))}{\partial x_k} = t \frac{\partial F_j}{\partial x_k}(a + t(x - a)) \end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial (x_j - a_j)}{\partial x_k} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = k \\ 0 & \text{se } j \neq k \end{cases},$$

di modo che

$$\sum_{j=1}^n F_j(a + t(x - a)) \frac{\partial(x_j - a_j)}{\partial x_k} = F_k(a + t(x - a)),$$

visto che l'unico termine non nullo della somma è proprio il k -esimo. D'altra parte, F è chiuso, e quindi

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k} = \frac{\partial F_k}{\partial x_j}.$$

Di conseguenza, abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x_k}(x) &= \int_0^1 \left[\left(t \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_k}(a + t(x - a))(x_j - a_j) \right) + F_k(a + t(x - a)) \right] dt \\ &= \int_0^1 \left[\left(t \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(a + t(x - a))(x_j - a_j) \right) + F_k(a + t(x - a)) \right] dt \\ &= \int_0^1 (t \nabla F_k(a + t(x - a)) \cdot (x - a) + F_k(a + t(x - a))) dt \\ &= \int_0^1 \left(t \frac{d}{dt} F_k(a + t(x - a)) + F_k(a + t(x - a)) \frac{d}{dt} t \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (t F_k(a + t(x - a))) dt = [t F_k(a + t(x - a))]_0^1 = F_k(a + x - a) = F_k(x), \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la formula della derivata della funzione composta (Lemma 1.5.10) fra la seconda e la terza riga, e la formula della derivata del prodotto fra la terza e la quarta riga. \square

Osservazione 3.3.11. Alla luce del Teorema di Poincaré-Volterra locale, vediamo che il campo nell'Esempio 3.3.7 è esatto in ogni cerchio $B_r(a) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, ovvero tale che $F \in C^1(B_r(a); \mathbb{R}^2)$. Ad esempio, nei semipiani $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ e $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$ i suoi potenziali sono $\phi(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c$, per ogni $c \in \mathbb{R}$. In altre parole, quel campo è esatto in ogni cerchio che non contiene l'origine, e quindi il suo lavoro dipende solo dagli estremi della curva, per ogni curva che non fa un giro completo attorno all'origine.

Esiste una versione più generale, ovvero globale, del Teorema di Poincaré-Volterra. Per poterlo formulare dobbiamo prima introdurre i concetti di curve chiuse deformabili e aperti semplicemente connessi.

Definizione 3.3.12. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e $\gamma \in C([a, b]; \Omega)$ una curva chiusa. Diciamo che γ è *deformabile con continuità a un punto* in Ω se esistono $x_0 \in \Omega$ e $\Psi \in C([a, b] \times [0, 1]; \Omega)$ tale che

$$\begin{aligned} \Psi(t, 0) &= \gamma(t) \quad \text{per ogni } t \in [a, b], \\ \Psi(t, 1) &= x_0 \quad \text{per ogni } t \in [a, b], \\ \Psi(a, s) &= \Psi(b, s) \quad \text{per ogni } s \in [0, 1]. \end{aligned}$$

In altre parole, per ogni $s \in [0, 1]$ fissato, $t \rightarrow \Psi(t, s) \in C([a, b]; \Omega)$ è una curva chiusa, che coincide con γ per $s = 0$, e con il punto x_0 per $s = 1$.

Intuitivamente, ciò significa che possiamo “spostare e stringere” la curva fino a che non si riduce a un unico punto. Notiamo che è cruciale il fatto che la deformazione Ψ sia sempre contenuta in Ω : in altre parole, non è consentito passare per punti del bordo o dell'esterno per deformare la curva.

Si può dimostrare che, se la curva γ è differenziabile a tratti, anche la mappa di deformazione Ψ è più regolare, e ciò è fondamentale per le dimostrazioni dei prossimi due teoremi (che però omettiamo).

Vediamo prima un esempio fondamentale di curva deformabile con continuità a un punto.

Esempio 3.3.13. Sia $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, ovvero la circonferenza unitaria centrata nell'origine. Allora γ è deformabile con continuità all'origine $(0, 0)$: infatti, una possibile mappa di deformazione Ψ è data da

$$\Psi(t, s) = ((1 - s) \cos(t), (1 - s) \sin(t)), \quad \Psi : [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Chiaramente, Ψ è continua, e abbiamo

$$\begin{aligned}\Psi(t, 0) &= (\cos(t), \sin(t)) = \gamma(t) \quad \text{per ogni } t \in [0, 2\pi], \\ \Psi(t, 1) &= (0, 0) \quad \text{per ogni } t \in [0, 2\pi], \\ \Psi(0, s) &= (1 - s, 0) = \Phi(2\pi, s) \quad \text{per ogni } s \in [0, 1].\end{aligned}$$

Da un punto di vista geometrico, questa deformazione coincide con il restringere il raggio della circonferenza fino a 0.

Osserviamo ora che il lavoro di un qualunque campo vettoriale lungo una curva costante, ovvero in un singolo punto, è nullo: infatti, se $\gamma(t) = x_0 \in \Omega$ per ogni $t \in [a, b]$, allora $\dot{\gamma} = 0$, e per ogni $F \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$ abbiamo

$$\int_{\gamma} F(x) \cdot dx = \int_a^b F(x_0) \cdot 0 \, dt = 0.$$

Teorema 3.3.14. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ un campo chiuso. Per ogni curva $\gamma \in C_{\text{tr}}^1([a, b]; \Omega)$ chiusa e deformabile con continuità a un punto in Ω abbiamo*

$$\int_{\gamma} F(x) \cdot dx = 0.$$

In altre parole, se un campo è chiuso, il lavoro è lungo una curva chiusa e deformabile con continuità a un punto è uguale a quello in un singolo punto, ovvero è nullo.

Risulta quindi importante lavorare solo con curve chiuse deformabili con continuità a un punto.

Definizione 3.3.15. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Diciamo che Ω è *semplicemente connesso* se è connesso per archi e ogni curva chiusa in Ω è deformabile con continuità a un punto in Ω .

In maniera intuitiva, possiamo quindi dire che un insieme aperto connesso per archi è semplicemente connesso se “non ha buchi attorno ai quali non si possa far passare una curva chiusa”.

Osservazione 3.3.16. \mathbb{R}^n è un insieme semplicemente connesso, così come ogni semispazio $\{x \in \mathbb{R}^n : x_j > c\}$ per $j \in \{1, \dots, n\}$ e $c \in \mathbb{R}$, e ogni palla aperta $B_r(a)$ per $a \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$.

Invece, dato $x_0 \in \mathbb{R}^n$, l'insieme $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$ è semplicemente connesso se e solo se $n \geq 3$. Infatti, se $n = 1$ non è connesso per archi (è l'unione di due semirette aperte disgiunte); se $n = 2$ qualunque circonferenza centrata in x_0 non può essere deformata con continuità a un punto; mentre se $n \geq 3$ si può aggirare x_0 sfruttando le dimensioni superiori (ciò è ovvio qualora la curva sia contenuta in un piano, omettiamo i dettagli tecnici del caso generale).

Teorema 3.3.17 (Teorema di Poincaré-Volterra globale). *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto semplicemente connesso e $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ un campo chiuso. Allora F è esatto.*

Osservazione 3.3.18. Come implicazione opposta del Teorema di Poincaré-Volterra globale, notiamo che, se esiste un campo $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ che è chiuso ma non è esatto, allora Ω non è semplicemente connesso.

Osserviamo inoltre che il Teorema di Poincaré-Volterra globale è solo una condizione necessaria per l'esattezza del campo. Infatti, siano $n = 2$ e

$$F(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right), \quad F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Sappiamo che $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ non è semplicemente connesso. Verifichiamo che F è chiuso:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = \frac{x(-2y)}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y(-2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) \quad \text{per ogni } (x, y) \neq (0, 0).$$

Per il Teorema di Poincaré-Volterra locale sappiamo che F è esatto in ogni cerchio $B_r(a)$ tale $(0, 0) \notin B_r(a)$. Calcoliamone quindi un potenziale usando l'approccio della dimostrazione del teorema stesso: dati $a = (a_1, a_2) \neq (0, 0)$ e $0 < r < \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \|a\|$ (di modo che $(0, 0) \notin B_r(a)$), per ogni $(x, y) \in B_r(a)$ poniamo

$$L_{(x,y)} : [0, 1] \rightarrow B_r(a), \quad L_{(x,y)}(t) = (a_1 + t(x - a_1), a_2 + t(y - a_2))$$

e così abbiamo

$$\begin{aligned}
\phi(x, y) &= \int_{L(x, y)} F(w) \cdot dw = \int_0^1 F(a_1 + t(x - a_1), a_2 + t(y - a_2)) \cdot (x - a_1, y - a_2) dt \\
&= \int_0^1 \left(\frac{a_1 + t(x - a_1)}{(a_1 + t(x - a_1))^2 + (a_2 + t(y - a_2))^2}, \frac{a_2 + t(y - a_2)}{(a_1 + t(x - a_1))^2 + (a_2 + t(y - a_2))^2} \right) \cdot (x - a_1, y - a_2) dt \\
&= \int_0^1 \frac{(a_1 + t(x - a_1))(x - a_1) + (a_2 + t(y - a_2))(y - a_2)}{(a_1 + t(x - a_1))^2 + (a_2 + t(y - a_2))^2} dt \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{2(a_1 + t(x - a_1))(x - a_1) + 2(a_2 + t(y - a_2))(y - a_2)}{(a_1 + t(x - a_1))^2 + (a_2 + t(y - a_2))^2} dt \\
&= \left[\frac{1}{2} \log((a_1 + t(x - a_1))^2 + (a_2 + t(y - a_2))^2) \right]_0^1 = \frac{1}{2} (\log(x^2 + y^2) - \log(a_1^2 + a_2^2)) \\
&= \log(\sqrt{x^2 + y^2}) + c, \quad \text{dove } c = -\frac{1}{2} \log(a_1^2 + a_2^2),
\end{aligned}$$

grazie alla regola di integrazione indefinita

$$\int \frac{f'(t)}{f(t)} dt = \log(|f(t)|) + C, \quad C \in \mathbb{R}, \quad (3.3.1)$$

per $f(t) = (a_1 + t(x - a_1))^2 + (a_2 + t(y - a_2))^2$. In questo modo abbiamo trovato i potenziali ϕ , che sono in effetti ben definiti su tutto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, e quindi concludiamo che F è esatto su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, anche se l'insieme in questione non è semplicemente connesso.

Approfittiamo di questo esempio per mostrare come trovare il potenziale usando la definizione, ovvero risolvendo l'equazione (differenziale alle derivate parziali) $\nabla\phi = F$. Dobbiamo quindi trovare $\phi \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$ tale che

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial x}(x, y) = F_1(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y}(x, y) = F_2(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} \end{cases}.$$

Osserviamo quindi che entrambe le equazioni equivalgono a cercare primitive della funzione al secondo membro. Partiamo quindi dalla prima: consideriamo y come una costante e calcoliamo l'integrale indefinito

$$\int \frac{x}{x^2 + y^2} dx = \int \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 + y^2} dx = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + k,$$

ancora grazie a (3.3.1). Notiamo che $k = k(y)$, ovvero dobbiamo a priori considerarla come una funzione dipendente da y , dato che abbiamo calcolato le primitive di ϕ in x , e quindi ci potrebbe essere un'altra dipendenza da y . Per determinare k inseriamo questa espressione di ϕ nella seconda equazione:

$$\frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{\partial\phi}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} + k'(y) \iff k'(y) = 0 \iff k(y) = c \quad \text{per qualche } c \in \mathbb{R}.$$

Quindi, concludiamo di nuovo che i potenziali di F sono

$$\phi(x, y) = \log(\sqrt{x^2 + y^2}) + c \quad \text{per } c \in \mathbb{R}.$$

3.4 Campi radiali

[Sezione non vista a lezione.]

Gran parte dei campi studiati in fisica godono delle simmetrie dello spazio euclideo, come l'omogeneità e l'isotropia. Perciò è interessante analizzare più nel dettaglio campi vettoriali che siano radialmente simmetrici.

Definizione 3.4.1. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è *radiale* se per ogni x in A e ogni $y \in \mathbb{R}^n$ con $\|x\| = \|y\|$, anche $y \in A$ (cioè, A è unione di sfere con centro nell'origine).

Una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è *radiale* se il suo dominio A è radiale e se per ogni $x, y \in A$ con $\|x\| = \|y\|$ si ha che $f(x) = f(y)$ (cioè, se il valore $f(x)$ dipende solo dalla distanza di x dall'origine). In altri termini,

$$f(x) = \phi(\|x\|),$$

dove $\phi : A_{\text{rad}} \rightarrow \mathbb{R}$ e $A_{\text{rad}} = \{\rho \in [0, +\infty) : \rho = \|x\| \text{ per qualche } x \in A\}$.

Un campo $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ è *radiale* se A è radiale e se esiste una funzione $\phi : A_{\text{rad}} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$F(x) = x \phi(\|x\|).$$

In altri termini, F è un campo avente direzione $\frac{x}{\|x\|}$ orientata come x (se $\phi(\|x\|) > 0$) o in senso inverso (se $\phi(\|x\|) < 0$), e modulo $\|F(x)\| = \|x\| |\phi(\|x\|)|$ che dipende solo dalla distanza di x dall'origine.

Esempio 3.4.2. Sia $n = 3$ e poniamo $0 = (0, 0, 0)$. Il campo gravitazionale generato da una massa $m > 0$ in 0 è il campo radiale $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dato da

$$F(x) = -Gm \frac{x}{\|x\|^3} = x \left(-\frac{Gm}{\|x\|^3} \right) = x \phi(\|x\|),$$

dove G è la costante di gravitazione universale e $\phi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ è data da $\phi(u) = -\frac{Gm}{u^3}$. Inoltre, notiamo che si può anche scrivere

$$F(x) = x \varphi(\|x\|^2),$$

per $\varphi(t) = -\frac{Gm}{t^{\frac{3}{2}}}$.

Osservazione 3.4.3. Una definizione equivalente di campo radiale F richiede che esista una funzione $\varphi : \widetilde{A}_{\text{rad}} \rightarrow \mathbb{R}$, dove $\widetilde{A}_{\text{rad}} = \{\rho^2 \in [0, +\infty) : \rho = \|x\| \text{ per qualche } x \in A\}$, tale che $F(x) = x \varphi(\|x\|^2)$. Infatti, è sufficiente porre $\varphi(t) = \phi(\sqrt{t})$ e $\phi(t) = \varphi(t^2)$.

Un fatto affascinante (specialmente per le applicazioni a svariati problemi in fisica) è che tutti i campi radiali continui sono esatti.

Teorema 3.4.4 (I campi radiali sono esatti). *Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto radiale connesso per archi e $F \in C(A; \mathbb{R}^n)$ un campo radiale, $F(x) = x \varphi(\|x\|^2)$, dove $\varphi \in C(\widetilde{A}_{\text{rad}})$.*

Allora F è esatto. Inoltre, tutti i potenziali di F sono dati da $\psi : A \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\psi(x) = \frac{1}{2} \int_{r_0}^{\|x\|^2} \varphi(u) du,$$

per qualche $r_0 \in \widetilde{A}_{\text{rad}}$.

Dimostrazione. È sufficiente calcolare il gradiente di ψ : per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$ applichiamo la formula della derivata della funzione composta (e la definizione di integrale di Riemann) per ottenere

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x) = \frac{1}{2} \varphi(\|x\|^2) \frac{\partial}{\partial x_j} \|x\|^2 = x_j \varphi(\|x\|^2) = F_j(x).$$

Di conseguenza, se $\xi(x)$ è un altro potenziale di F , allora

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\psi(x) - \xi(x)) = F_j(x) - F_j(x) = 0 \text{ per ogni } x \in \Omega \text{ e } j \in \{1, \dots, n\},$$

e questo implica che $\xi(x) = \psi(x) + C$ per qualche $C \in \mathbb{R}$. Infine, è chiaro che questa costante C si può scrivere come $\frac{1}{2} \int_{r_1}^{r_0} \varphi(u) du$ per qualche altro $r_1 \in \widetilde{A}_{\text{rad}}$. \square

3.5 Forme differenziali

Osserviamo che, almeno formalmente, il “prodotto scalare” nella definizione di lavoro di un campo si può sviluppare come segue:

$$F(x) \cdot dx = \sum_{j=1}^n F_j(x) dx_j = F_1(x) dx_1 + F_2(x) dx_2 + \cdots + F_n(x) dx_n.$$

Vediamo che esiste un modo per rendere rigorosa un’espressione di questo tipo.

Definizione 3.5.1 (Forme differenziali). Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Una *forma differenziale*⁵ in Ω è un’espressione del tipo

$$\omega = a_1(x)dx_1 + \cdots + a_n(x)dx_n = \sum_{j=1}^n a_j(x) dx_j,$$

per certe funzioni $a_1, \dots, a_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Diciamo che la forma ω è continua o C^1 su Ω se lo sono le funzioni a_1, \dots, a_n .

Data $\gamma \in C_{\text{tr}}^1([a, b]; \Omega)$, $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, definiamo *l’integrale della forma ω su γ* come

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_{\gamma} a_1(x)dx_1 + \cdots + a_n(x)dx_n = \int_{\gamma} \sum_{j=1}^n a_j(x) dx_j \\ &:= \int_a^b [a_1(\gamma(t))x_1'(t) + \cdots + a_n(\gamma(t))x_n'(t)] dt = \int_a^b \sum_{j=1}^n a_j(\gamma(t)) x_j'(t) dt \\ &= \int_a^b (a_1(\gamma(t)), \dots, a_n(\gamma(t))) \cdot \dot{\gamma}(t) dt \end{aligned}$$

Osservazione 3.5.2. Le forme differenziali ω sono in corrispondenza biunivoca con i campi vettoriali F , la corrispondenza essendo data da

$$\omega = a_1(x)dx_1 + \cdots + a_n(x)dx_n \leftrightarrow F(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x)).$$

Se questa relazione è soddisfatta, allora l’integrale della forma ω su γ e il lavoro del corrispondente campo F sulla stessa γ sono identici:

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} F(x) \cdot dx.$$

Di conseguenza, diciamo che la forma ω è esatta se F è esatto, ovvero, se

$$\omega = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) dx_j$$

per qualche $\phi \in C^1(\Omega)$; e che ω è chiusa se è C^1 e

$$\frac{\partial a_j}{\partial x_i} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \text{ per ogni } i, j \in \{1, \dots, n\},$$

ovvero, se il campo F associato a ω è chiuso. Risulta quindi ovvio che tutti i risultati visti finora si traducono immediatamente nel linguaggio delle forme differenziali⁶.

⁵Più precisamente, dovremmo parlare di 1-forme differenziali, dato che è possibile definire altri tipi di forme che per integrali su insiemi di dimensioni superiori. Tuttavia, ciò va oltre gli scopi di questo corso.

⁶Il formalismo delle forme differenziali viene introdotto in Geometria Differenziale, perché ha il vantaggio di essere indipendente dal sistema di coordinate scelto (ciò è specialmente utile quando si lavora su superfici, senza tener conto della parametrizzazione). Ha inoltre delle utili applicazioni in analisi complessa, come menzionato nel capitolo 5.

Capitolo 4

Superfici in \mathbb{R}^3 , teoremi di Stokes e della divergenza

4.1 Superfici in \mathbb{R}^3

Abbiamo visto in precedenza che i grafici di funzioni continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ possono essere visti come casi particolari di curve nel piano cartesiano. Nella fattispecie,

$$\text{Grafico}(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b]\} = \gamma([a, b]), \text{ per } \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (t, f(t)).$$

Abbiamo poi accennato al significato geometrico del grafico di una funzione continua in due variabili, ovvero, se $A \subset \mathbb{R}^2$ è un aperto connesso per archi e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora $\text{Grafico}(f) = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A\}$ è una superficie nello spazio tridimensionale¹. Vediamo ora come definire più in generale le superfici in \mathbb{R}^3 .

Definizione 4.1.1 (Superfici parametrizzate). Una *superficie parametrizzata* in \mathbb{R}^3 è una funzione

$$\Phi : A \rightarrow \mathbb{R}^3, \Phi(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix},$$

dove $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è un aperto connesso per archi e

1. Φ è iniettiva, ovvero, per ogni $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in A$ tali che $(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2)$ abbiamo $\Phi(u_1, v_1) \neq \Phi(u_2, v_2)$;
2. $\Phi \in C^1(A, \mathbb{R}^3)$;
3. la matrice jacobiana di Φ ha rango massimo (ovvero, rango 2) in ogni punto $(u, v) \in A$, ovvero, i due vettori colonna che la compongono sono linearmente indipendenti,

$$2 = \text{Rank}(J\Phi(u, v)) = \text{Rank}([\partial_u \Phi(u, v) | \partial_v \Phi(u, v)]) = \text{Rank} \left(\begin{bmatrix} \partial_u x(u, v) & \partial_v x(u, v) \\ \partial_u y(u, v) & \partial_v y(u, v) \\ \partial_u z(u, v) & \partial_v z(u, v) \end{bmatrix} \right).$$

L'immagine $S = \Phi(A) \subset \mathbb{R}^3$ è una *superficie* in \mathbb{R}^3 , e la funzione a valori vettoriali Φ viene anche detta una *parametrizzazione della superficie*.

A meno che non sia specificato altrimenti, nel resto della sezione indichiamo con A un aperto connesso per archi in \mathbb{R}^2 .

Esempio 4.1.2. Vediamo come ogni funzione $f \in C^1(A)$ definisce una superficie parametrizzata, se poniamo

$$\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}.$$

¹In dimensione $n \geq 2$ è meglio lavorare su insiemi aperti, onde evitare problemi di estensione delle funzioni e delle loro derivate sul bordo di tali insiemi, mentre è relativamente facile considerare anche i punti estremi degli intervalli di \mathbb{R} .

Infatti, è chiaro che $\Phi \in C^1(A; \mathbb{R}^3)$, Φ è iniettiva e

$$J\Phi(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \partial_x f(x, y) & \partial_y f(x, y) \end{bmatrix}$$

ha ovviamente rango 2. Altrettanto facilmente si vede che la superficie coincide con il grafico di f :

$$\Phi(A) = \text{graf}(f) = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Ad esempio, se $f(x, y) = x^2 + y^2$, la superficie è un paraboloide, e

$$J\Phi(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2x & 2y \end{bmatrix}.$$

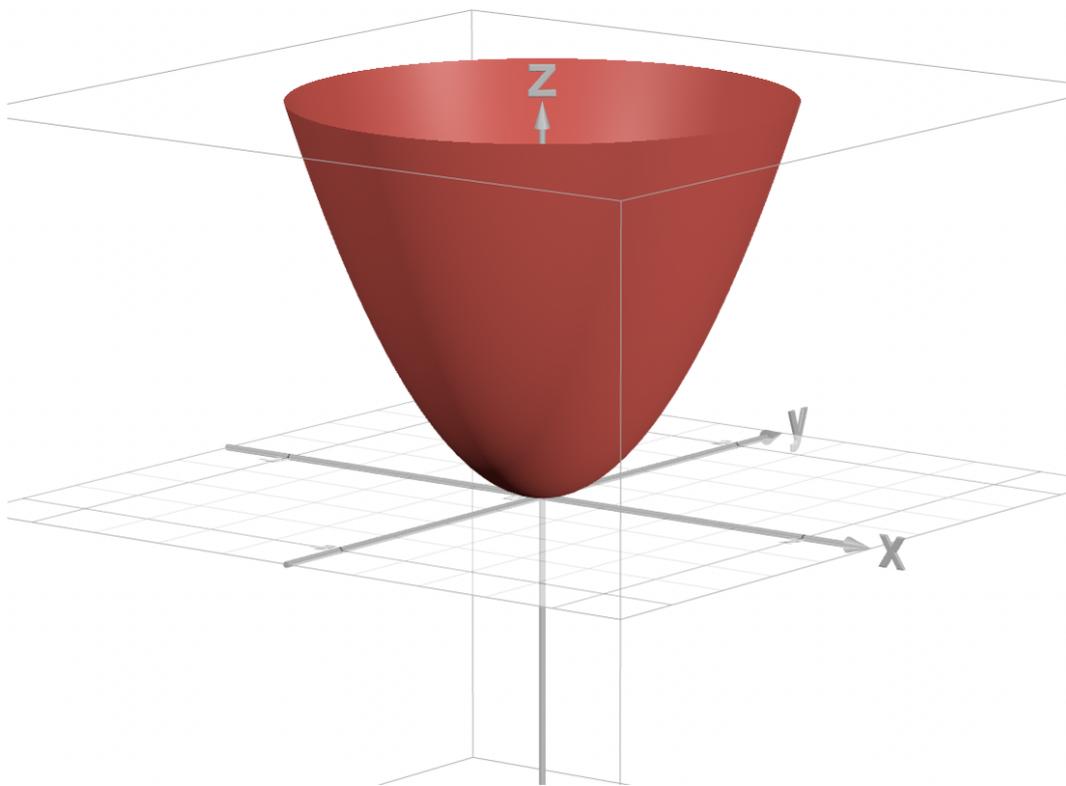


Figura 4.1: Il paraboloide dato dal grafico di $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Mostriamo con un esempio come si possono dare diverse parametrizzazioni della stessa superficie.

Esempio 4.1.3. Sia $\partial B_1(0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, ovvero la sfera unitaria centrata nell'origine dello spazio \mathbb{R}^3 . Osserviamo che

$$z^2 = 1 - (x^2 + y^2) \iff z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2} \text{ per } x^2 + y^2 \leq 1.$$

Quindi otteniamo una parametrizzazione per ciascuna delle due metà della sfera rispetto al piano $\{z = 0\}$:

$$\Phi_{\pm}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{pmatrix}, \quad \Phi_{\pm} : A \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

dove $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. In tal modo si perde l'equatore, ovvero la circonferenza $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$: in realtà lo si può includere, ma le due parametrizzazioni saranno sovrapposte su tale circonferenza. Notiamo poi che

$$J\Phi_{\pm}(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \mp \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} & \mp \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{bmatrix},$$

che pure non è ben definito sull'equatore.

Una parametrizzazione alternativa è ovviamente data dalle coordinate sferiche:

$$\Phi(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \Phi : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

per cui abbiamo

$$J\Phi(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \sin(\varphi) & \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ \cos(\theta) \sin(\varphi) & \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ 0 & -\sin(\varphi) \end{bmatrix}.$$

Questa parametrizzazione non copre invece metà della circonferenza nel piano $\{y = 0\}$, ovvero

$$C_{\{y=0, x \geq 0\}} = \{(\sin(\varphi), 0, \cos(\varphi)) \in \mathbb{R}^3 : \varphi \in [0, \pi]\} = \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 1, x \geq 0\}.$$

Si può ovviamente estendere Φ a $[0, 2\pi) \times [0, \pi]$, di modo da coprire tutta la sfera, perdendo però il rango massimo per la matrice jacobiana, dato che

$$J\Phi(\theta, 0) = \begin{bmatrix} 0 & \cos(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Una terza parametrizzazione deriva dal vedere la sfera come una superficie di rotazione, che sono superfici che possono essere parametrizzate da funzioni Φ della forma

$$\Phi(\theta, z) = \begin{pmatrix} \psi(z) \cos(\theta) \\ \psi(z) \sin(\theta) \\ z \end{pmatrix}, \quad \Phi : (0, 2\pi) \times I \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

per qualche funzione $\psi : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$, oppure

$$\Phi(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \rho \cos(\theta) \\ \rho \sin(\theta) \\ \xi(\rho) \end{pmatrix}, \quad \Phi : J \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

per qualche funzione $\xi : J \subseteq (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Nel caso della sfera unitaria centrata nell'origine, se $\rho^2 = x^2 + y^2$, abbiamo ovviamente $z^2 + \rho^2 = 1$, cosicché $\rho = \psi(z) = \sqrt{1 - z^2}$ e quindi

$$\Phi(\theta, z) = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - z^2} \cos(\theta) \\ \sqrt{1 - z^2} \sin(\theta) \\ z \end{pmatrix}, \quad \Phi : (0, 2\pi) \times (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

con

$$J\Phi(\theta, z) = \begin{bmatrix} -\sqrt{1 - z^2} \sin(\theta) & -\frac{z}{\sqrt{1 - z^2}} \cos(\theta) \\ \sqrt{1 - z^2} \cos(\theta) & -\frac{z}{\sqrt{1 - z^2}} \sin(\theta) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Anche questa Φ non copre la semicirconferenza $C_{\{y=0, x \geq 0\}}$ e può essere estesa a $[0, 2\pi) \times [-1, 1]$, di modo da coprire tutta la sfera, perdendo però la differenziabilità nei poli.

Viceversa, $z = \xi(\rho) = \pm\sqrt{1 - \rho^2}$, di modo che in quest'altro modo si parametrizzano separatamente la semisfera nel semispazio $\{z > 0\}$ e quella in $\{z < 0\}$. Lasciamo i calcoli per esercizio.

Osservazione 4.1.4. Una superficie di rotazione non può mai essere coperta completamente dalla sua parametrizzazione, dato che, onde mantenere l'iniettività, si deve avere $\theta \in (0, 2\pi)$, e quindi non vengono coperte le curve

$$\Phi(0, z) = \begin{pmatrix} \psi(z) \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \text{ per } z \in I \quad \text{o} \quad \Phi(\rho, 0) = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ \xi(\rho) \end{pmatrix} \text{ per } \rho \in J,$$

a seconda della parametrizzazione scelta. In particolare, è evidente che la traccia di queste curve è un sottoinsieme del semipiano $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y = 0\}$.

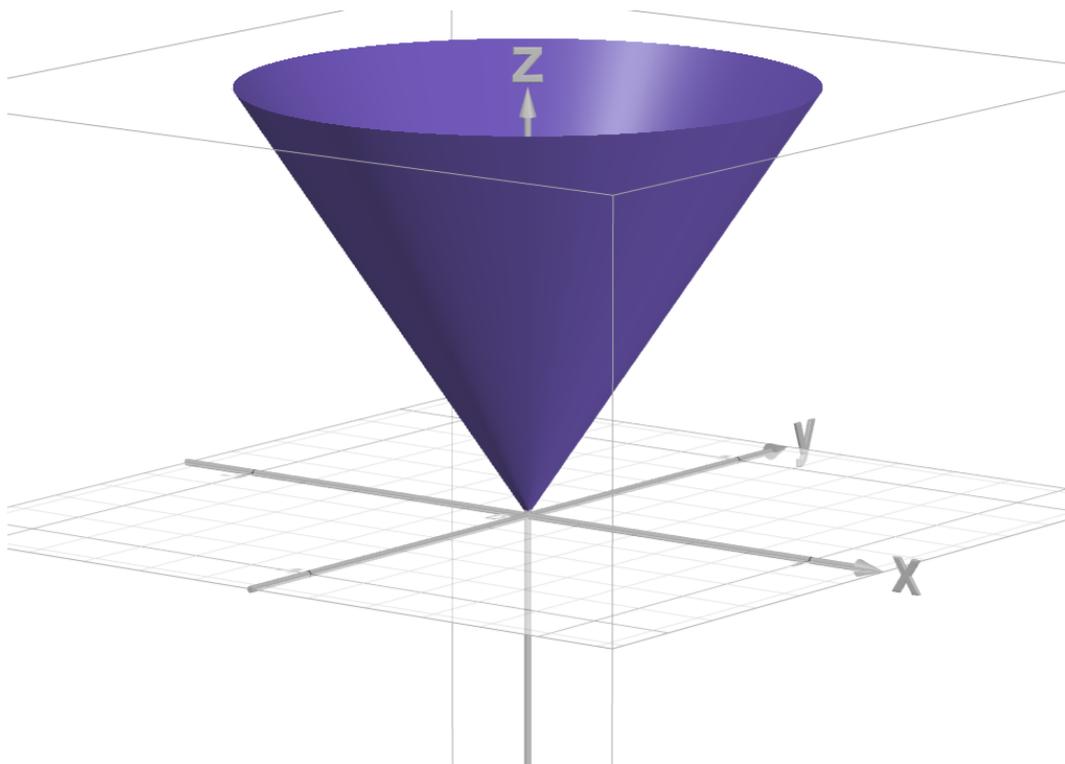


Figura 4.2: Il cono di inclinazione $m = \frac{3}{2}$ e altezza $h = 1$.

Esempio 4.1.5. Vediamo un esempio del secondo tipo di parametrizzazione di una superficie di rotazione tramite una famiglia di coni con la punta nell'origine: per $m, h > 0$, poniamo

$$\text{Co}_{m,h} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = m\sqrt{x^2 + y^2}, 0 < z < h\},$$

che è il cono di inclinazione m e altezza h . Quindi, se poniamo $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, possiamo parametrizzare $\text{Co}_{m,h}$ tramite la mappa $\Phi : (0, \frac{h}{m}) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da

$$\Phi(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \rho \cos(\theta) \\ \rho \sin(\theta) \\ m\rho \end{pmatrix}.$$

Esempio 4.1.6. [Non visto a lezione.] Un altro rilevante esempio di superficie parametrizzata è il toro. Dati $R, r > 0$ tali che $R > r$, la superficie

$$T_{R,r} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R \right)^2 + z^2 = r^2 \right\}$$

è il toro centrato nell'origine e che ruota attorno all'asse z , tale che la circonferenza data da una sezione verticale della "ciambella" ha raggio r , mentre la circonferenza centrale della sezione della "ciambella" intersecata con il piano $\{z = 0\}$ ha raggio R .

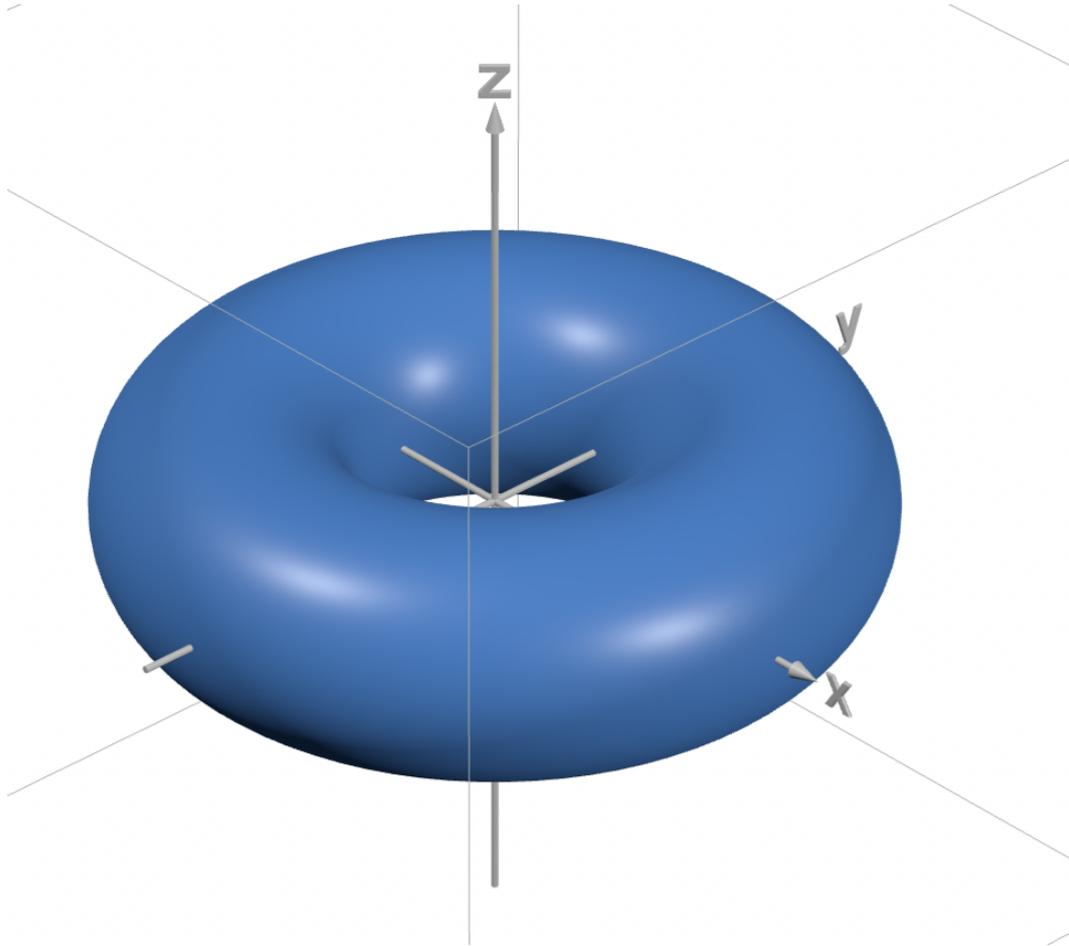


Figura 4.3: Il toro di raggi $R = 2$ e $r = 1$.

Una parametrizzazione è quindi data dalla funzione $\Phi : (0, 2\pi)^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\Phi(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} (R + r \cos(\varphi)) \cos(\theta) \\ (R + r \cos(\varphi)) \sin(\theta) \\ r \sin(\varphi) \end{pmatrix},$$

che soddisfa $\Phi((0, 2\pi)^2) = T_{R,r} \setminus (C_1 \cup C_2)$, dove C_1 e C_2 sono le circonferenze

$$C_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - R)^2 + z^2 = r^2, y = 0\}$$

e

$$C_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = (R + r)^2, z = 0\}.$$

In maniera analoga a quanto visto con i grafici delle funzioni in più variabili, si introduce la nozione dello spazio tangente a una superficie in un punto.

Definizione 4.1.7 (Spazio vettoriale tangente). Sia $S = \Phi(A) \subset \mathbb{R}^3$ una superficie in \mathbb{R}^3 , dove Φ è una sua parametrizzazione. Lo *spazio vettoriale tangente* a S in un punto $P_0 = \Phi(u_0, v_0) \in S$, per qualche $(u_0, v_0) \in A$, è

$$\begin{aligned} T_{P_0}S &= \text{span}\{\partial_u \Phi(u_0, v_0), \partial_v \Phi(u_0, v_0)\} = \{a \partial_u \Phi(u_0, v_0) + b \partial_v \Phi(u_0, v_0) : a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a \partial_u x(u_0, v_0) + b \partial_v x(u_0, v_0) \\ a \partial_u y(u_0, v_0) + b \partial_v y(u_0, v_0) \\ a \partial_u z(u_0, v_0) + b \partial_v z(u_0, v_0) \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

che definisce un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^3 , avente dimensione $\dim(T_{P_0}S) = 2$.

Un vettore $V \in T_{P_0}S$ è un *vettore tangente* a S in P_0 .

Il piano tangente a S in P_0 è lo spazio affine

$$\begin{aligned}\Pi_{P_0}S &= P_0 + T_{P_0}S = \{P_0 + a\partial_u\Phi(u_0, v_0) + b\partial_v\Phi(u_0, v_0) : a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x(u_0, v_0) + a\partial_u x(u_0, v_0) + b\partial_v x(u_0, v_0) \\ y(u_0, v_0) + a\partial_u y(u_0, v_0) + b\partial_v y(u_0, v_0) \\ z(u_0, v_0) + a\partial_u z(u_0, v_0) + b\partial_v z(u_0, v_0) \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}\end{aligned}$$

Introduciamo ora la nozione di prodotto vettoriale in \mathbb{R}^3 , che è un modo per calcolare un vettore ortogonale a due vettori dati (che non siano paralleli).

Definizione 4.1.8 (Prodotto vettoriale). Indichiamo la base canonica di \mathbb{R}^3 con

$$i = (1, 0, 0), \quad j = (0, 1, 0), \quad k = (0, 0, 1).$$

Il prodotto vettoriale $U \times V \in \mathbb{R}^3$ di due vettori $U = (u_1, u_2, u_3), V = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ è

$$\begin{aligned}U \times V &= \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \quad (\text{determinante formale di questa matrice}) \\ &= i(u_2v_3 - u_3v_2) - j(u_1v_3 - u_3v_1) + k(u_1v_2 - u_2v_1) \\ &= (u_2v_3 - u_3v_2, -u_1v_3 + u_3v_1, u_1v_2 - u_2v_1).\end{aligned}$$

Proposizione 4.1.9 (Proprietà del prodotto vettoriale). *Siano $U, V, W \in \mathbb{R}^3$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Allora abbiamo*

- 1) $(aU + bV) \times W = aU \times W + bV \times W$;
- 2) $U \times V = -V \times U$;
- 3) $\|U \times V\|^2 + (U \cdot V)^2 = \|U\|^2\|V\|^2$;
- 4) $U \cdot (V \times W) = \det([U|V|W])$, ovvero tale prodotto è uguale al determinante della matrice avente U, V, W come colonne (o , equivalentemente, righe) in tale ordine.

Dimostrazione. Le dimostrazioni di (1), (2) e (4) seguono direttamente dalla definizione di prodotto vettoriale e dalla formula del determinante di una matrice quadrata 3×3 (punto (4) della Proposizione 1.1.14). Dimostriamo l'equazione (3): notiamo che

$$\begin{aligned}2\|U \times V\|^2 &= \sum_{i,j=1}^3 (u_i v_j - u_j v_i)^2 = \sum_{i,j=1}^3 (u_i^2 v_j^2 + u_j^2 v_i^2 - 2u_i u_j v_i v_j) \\ &= 2 \left(\sum_{i=1}^3 u_i^2 \right) \left(\sum_{j=1}^3 v_j^2 \right) - 2 \left(\sum_{i=1}^3 u_i v_i \right) \left(\sum_{j=1}^3 u_j v_j \right) \\ &= 2 (\|U\|^2\|V\|^2 - (U \cdot V)^2).\end{aligned}$$

□

Corollario 4.1.10 (Interpretazione geometrica del prodotto vettoriale). *Siano $U, V \in \mathbb{R}^3$. Allora abbiamo*

- 1) $\|U \times V\| = \|U\| \|V\| \sin(\alpha)$, dove $\alpha \in [0, \pi]$ è l'angolo più piccolo tra i vettori U e V nel piano da essi generato;
- 2) se U e V sono linearmente dipendenti, ovvero esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $aU + bV = 0$ (in altri termini, se U e V sono paralleli oppure uno dei due vettori è nullo), allora $U \times V = 0$;
- 3) $U \cdot (U \times V) = V \cdot (U \times V) = 0$, ovvero il vettore $U \times V$ è ortogonale allo spazio vettoriale $\text{span}\{U, V\}$, generato da U e V ;
- 4) il vettore $U \times V$ è diretto in modo che "dalla sua cima" si vede l'angolo α procedere da U verso V in senso antiorario.

Dimostrazione. Sappiamo che $U \cdot V = \|U\| \|V\| \cos(\alpha)$, e dunque, per il punto (2) della Proposizione 4.1.9, otteniamo

$$\|U \times V\|^2 = \|U\|^2 \|V\|^2 - \|U\|^2 \|V\|^2 \cos^2(\alpha) = \|U\|^2 \|V\|^2 (1 - \cos^2(\alpha)) = \|U\|^2 \|V\|^2 \sin^2(\alpha),$$

e questo dimostra il punto (1), dato che $\sin(\alpha) \geq 0$. Chiaramente, se $U = 0$ o $V = 0$, allora $U \times V = 0$. Se poi U e V sono paralleli, allora $\alpha = 0$ o $\alpha = \pi$, e quindi $\sin(\alpha) = 0$, e questo implica il punto (2). Il punto (3) segue in automatico dal punto (4) della Proposizione 4.1.9 e dalle proprietà del determinante. Omettiamo invece la dimostrazione del punto (4). \square

Osservazione 4.1.11. Particolarmente importante è il fatto che $U \times V$ sia perpendicolare a $\text{span}\{U, V\}$, perché ciò permette di determinare la direzione perpendicolare alla superficie S in un suo punto P_0 , ovvero, perpendicolare al suo piano tangente in P_0 .

Definizione 4.1.12 (Campo vettoriale unitario normale a una superficie parametrizzata). Sia $S = \Phi(A)$ una superficie parametrizzata da una funzione $\Phi : A \rightarrow \mathbb{R}^3$. Il *vettore unitario normale* a S in un punto $P_0 = \Phi(u_0, v_0)$, per qualche $(u_0, v_0) \in A$, è

$$n_S(P_0) = \frac{\partial_u \Phi(u_0, v_0) \times \partial_v \Phi(u_0, v_0)}{\|\partial_u \Phi(u_0, v_0) \times \partial_v \Phi(u_0, v_0)\|}.$$

Al variare di P_0 su S , $n_S(P_0)$ definisce un campo vettoriale $n_S : S \rightarrow \mathbb{R}^3$, che è chiamato il *campo vettoriale unitario normale a S associato alla parametrizzazione Φ* .

Un vettore normale a S in P_0 è un vettore non nullo $W \in \text{span}\{n_S(P_0)\}$, cioè avente la forma $W = \lambda n_S(P_0)$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$.

Proposizione 4.1.13 (Proprietà del campo vettoriale unitario normale a una superficie parametrizzata). Sia $S = \Phi(A)$ una superficie parametrizzata in \mathbb{R}^3 . Allora

1. il campo vettoriale unitario n_S normale a S associato alla parametrizzazione Φ soddisfa

$$n_S \in C(S; \mathbb{R}^3) \quad e \quad \|n_S(P)\| = 1 \quad \text{per ogni } P \in S;$$

2. esistono solo due campi vettoriali unitari normali a S : se n_S è associato alla parametrizzazione $\Phi : A \rightarrow \mathbb{R}^3$, allora l'altro è $-n_S$, ed è associato alla parametrizzazione

$$\Psi(u, v) = \Phi(v, u), \quad \text{per } (u, v) \in A' = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : (v, u) \in A\};$$

3. tutti e soli i vettori normali a S in P_0 sono perpendicolari al spazio vettoriale tangente a S in P_0 , ovvero,

$$W \in T_{P_0} S \iff n_S(P_0) \cdot W = 0.$$

Dimostrazione. Dato che la parametrizzazione Φ è differenziabile con continuità, allora i campi vettoriali $\partial_u \Phi(u, v)$ e $\partial_v \Phi(u, v)$ sono funzioni continue, e lo stesso vale per il loro prodotto vettoriale. Inoltre, tali vettori sono linearmente indipendenti per ogni (u, v) (perché $J\Phi(u, v)$ ha rango 2), e dunque $\partial_u \Phi(u, v) \times \partial_v \Phi(u, v) \neq 0$ per ogni (u, v) . Dunque, è chiaro che n_S è continuo, e, per definizione, è anche unitario, ovvero ha norma uguale a 1. I punti (2) e (3) seguono dalla definizione di prodotto vettoriale e dal punto (1) della Proposizione 4.1.9: infatti, se indichiamo con $\partial_1 \Phi$ e $\partial_2 \Phi$ le derivate parziali rispetto alla prima e alla seconda coordinata, rispettivamente, allora abbiamo

$$\partial_u \Psi(u, v) \times \partial_v \Psi(u, v) = \partial_2 \Phi(v, u) \times \partial_1 \Phi(v, u) = -\partial_1 \Phi(v, u) \times \partial_2 \Phi(v, u) = -n_S(\Phi(v, u)).$$

\square

Esempio 4.1.14. Semplici considerazioni geometriche permettono di dedurre che la sfera unitaria centrata nell'origine ammette i due seguenti campi vettoriali unitari normali continui: per ogni $(x, y, z) \in \partial B_1(0)$, abbiamo

$$n_{\partial B_1(0)}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad e \quad -n_{\partial B_1(0)}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix},$$

ovvero, sono i vettori che partono da un punto della sfera $\partial B_1(0)$ e puntano verso l'esterno o l'interno della palla $B_1(0)$, rispettivamente.

Verifichiamo questo fatto prendendo in analisi le varie parametrizzazioni già viste, e mostrando che in tutti i casi la normale trovata può essere estesa con continuità di modo da coprire tutta la sfera. Iniziamo con le coordinate sferiche:

$$\Phi(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \Phi : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

per cui abbiamo

$$\partial_\theta \Phi(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \partial_\varphi \Phi(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ -\sin(\varphi) \end{pmatrix},$$

e il loro prodotto vettoriale è dato da

$$\partial_\theta \Phi(\theta, \varphi) \times \partial_\varphi \Phi(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} -\cos(\theta) \sin^2(\varphi) \\ -\sin(\theta) \sin^2(\varphi) \\ -\sin^2(\theta) \sin(\varphi) \cos(\varphi) - \cos^2(\theta) \sin(\varphi) \cos(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(\theta) \sin^2(\varphi) \\ -\sin(\theta) \sin^2(\varphi) \\ -\sin(\varphi) \cos(\varphi) \end{pmatrix},$$

la cui norma è

$$\|\partial_\theta \Phi(\theta, \varphi) \times \partial_\varphi \Phi(\theta, \varphi)\| = \sqrt{\cos^2(\theta) \sin^4(\varphi) + \sin^2(\theta) \sin^4(\varphi) + \sin^2(\varphi) \cos^2(\varphi)} = \sin(\varphi).$$

Quindi il vettore unitario normale alla sfera $\partial B_1(0)$ è dato da

$$\begin{aligned} n_{\partial B_1(0)}(\Phi(\theta, \varphi)) &= \frac{\partial_\theta \Phi(\theta, \varphi) \times \partial_\varphi \Phi(\theta, \varphi)}{\|\partial_\theta \Phi(\theta, \varphi) \times \partial_\varphi \Phi(\theta, \varphi)\|} = \frac{1}{\sin(\varphi)} \begin{pmatrix} -\cos(\theta) \sin^2(\varphi) \\ -\sin(\theta) \sin^2(\varphi) \\ -\sin(\varphi) \cos(\varphi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\cos(\theta) \sin(\varphi) \\ -\sin(\theta) \sin(\varphi) \\ -\cos(\varphi) \end{pmatrix} = -\Phi(\theta, \varphi), \end{aligned}$$

che è ben definito e continuo su tutto $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$ ed è proprio il vettore $\begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$ in coordinate sferiche.

Consideriamo poi la parametrizzazione della sfera come una superficie di rotazione:

$$\Phi(\theta, z) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-z^2} \cos(\theta) \\ \sqrt{1-z^2} \sin(\theta) \\ z \end{pmatrix}, \quad \Phi : (0, 2\pi) \times (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

con

$$\partial_\theta \Phi(\theta, z) = \begin{pmatrix} -\sqrt{1-z^2} \sin(\theta) \\ \sqrt{1-z^2} \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \partial_z \Phi(\theta, z) = \begin{pmatrix} -\frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \cos(\theta) \\ -\frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \sin(\theta) \\ 1 \end{pmatrix},$$

e il loro prodotto vettoriale è dato da

$$\partial_\theta \Phi(\theta, z) \times \partial_z \Phi(\theta, z) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-z^2} \cos(\theta) \\ \sqrt{1-z^2} \sin(\theta) \\ z \sin^2(\theta) + z \cos^2(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-z^2} \cos(\theta) \\ \sqrt{1-z^2} \sin(\theta) \\ z \end{pmatrix},$$

la cui norma è

$$\|\partial_\theta \Phi(\theta, z) \times \partial_z \Phi(\theta, z)\| = \sqrt{(1-z^2) \cos^2(\theta) + (1-z^2) \sin^2(\theta) + z^2} = 1.$$

Quindi il vettore unitario normale alla sfera $\partial B_1(0)$ è dato da

$$n_{\partial B_1(0)}(\Phi(\theta, z)) = \frac{\partial_\theta \Phi(\theta, z) \times \partial_z \Phi(\theta, z)}{\|\partial_\theta \Phi(\theta, z) \times \partial_z \Phi(\theta, z)\|} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-z^2} \cos(\theta) \\ \sqrt{1-z^2} \sin(\theta) \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\theta, z),$$

che è ben definito e continuo su tutto $[0, 2\pi] \times [-1, 1]$ ed è proprio $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ rispetto al sistema di coordinate di rotazione rispetto all'asse z .

Infine, prendiamo la parametrizzazione della mezza sfera $\partial_+ B_1(0) = \partial B_1(0) \cap \{z > 0\}$ come grafico cartesiano:

$$\Phi_+(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{pmatrix}, \quad \Phi_+ : A \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

dove $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. Ricordiamo che

$$\partial_x \Phi_+(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \partial_y \Phi_+(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \end{pmatrix},$$

e il loro prodotto vettoriale è dato da

$$\partial_x \Phi_+(x, y) \times \partial_y \Phi_+(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \\ 1 \end{pmatrix},$$

la cui norma è

$$\|\partial_x \Phi_+(x, y) \times \partial_y \Phi_+(x, y)\| = \sqrt{\frac{x^2}{1 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{1 - x^2 - y^2} + 1} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + 1 - x^2 - y^2}{1 - x^2 - y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

Quindi il vettore unitario normale è dato da

$$n_{\partial_+ B_1(0)}(\Phi_+(x, y)) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{pmatrix} = \Phi_+(x, y),$$

che è ben definito e continuo su tutto $\bar{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Inoltre, dato che sulla mezza sfera superiore abbiamo $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, ciò significa che

$$n_{\partial_+ B_1(0)}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{per ogni } (x, y, z) \in \partial_+ B_1(0).$$

Sulla mezza sfera inferiore $\partial_- B_1(0)$ abbiamo il vettore unitario normale opposto, visto che, con calcoli analoghi, otteniamo

$$\Phi_-(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{pmatrix}, \quad \Phi_- : A \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\partial_x \Phi_-(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \partial_y \Phi_-(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \end{pmatrix},$$

$$n_{\partial_- B_1(0)}(\Phi_-(x, y)) = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{pmatrix} = -\Phi_-(x, y) = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix},$$

dato che $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ su $\partial_- B_1(0)$.

La scelta di un campo vettoriale unitario continuo n normale a una superficie parametrizzabile S corrisponde alla scelta di una *orientazione* per S , ovvero di un modo per stabilire quali siano le facce “interna” ed “esterna” di S . Più precisamente, diamo la seguente definizione.

Definizione 4.1.15. Una superficie S si dice *orientabile* se esiste un campo vettoriale unitario n normale a S che sia continuo su tutta S . Una superficie orientabile si dice *orientata* se è stato scelto un campo vettoriale continuo n , che definisce quindi l'*orientazione positiva* (mentre quella data da $-n$ è l'orientazione negativa). In tal caso, la faccia dalla quale “esce” il campo vettoriale n che definisce l'orientazione è detta *faccia positiva*, mentre l'altra è detta *faccia negativa*. Scriviamo (S, n) per indicare la superficie orientabile S su cui sia stata scelta l'orientazione data dal campo vettoriale unitario n , e quindi la coppia (S, n) si chiama *superficie orientata*.

Osservazione 4.1.16. Se un tale campo vettoriale continuo n esiste, allora il campo opposto $-n$ determina una seconda orientazione di S : grazie alla Proposizione 4.1.13, queste sono le uniche due possibilità, non possono esistere altre orientazioni. Intuitivamente, S è orientabile se ha due facce (o lati), quella dalla quale “esce” n e quella dalla quale “esce” $-n$.

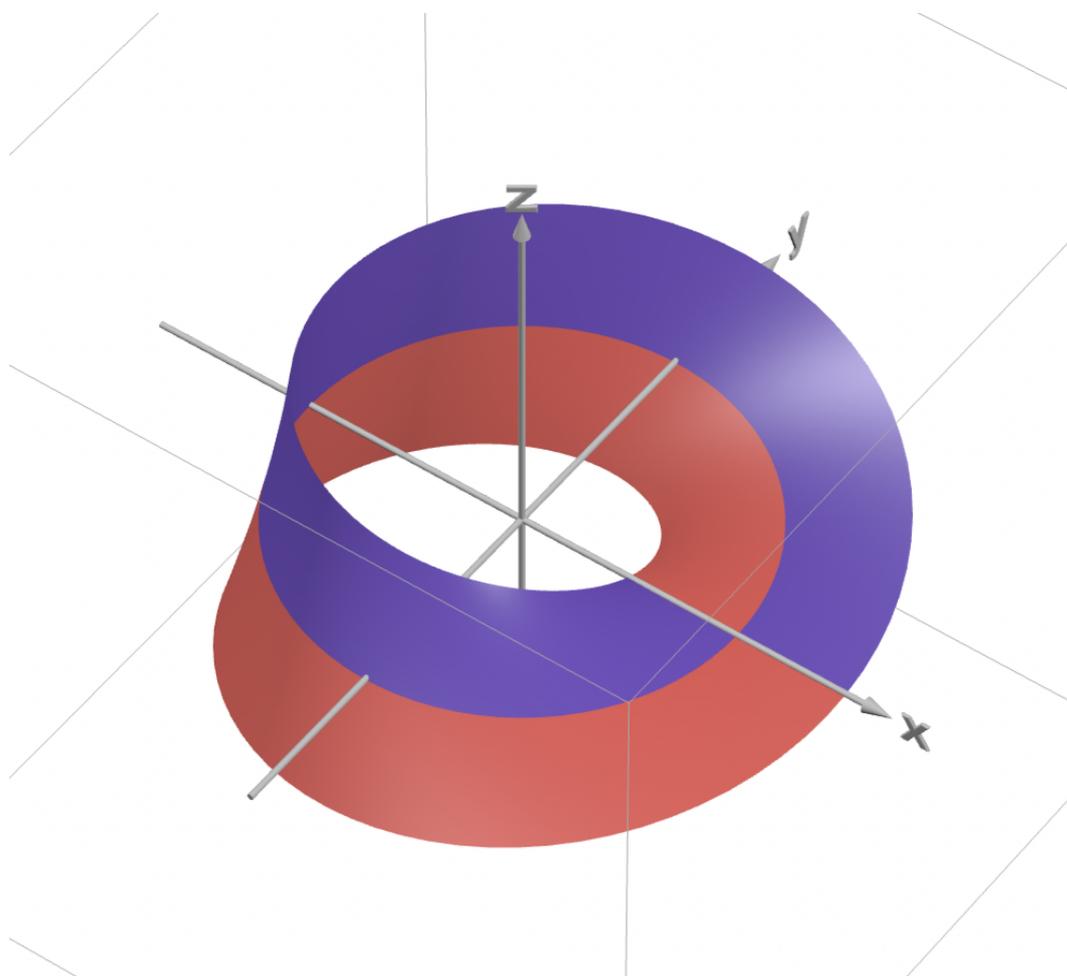


Figura 4.4: Il nastro di Möbius: notare come la striscia esterna (in rosso) diventa interna dopo un giro, e viceversa la striscia esterna (in blu) diventa interna.

Osservazione 4.1.17. Esistono superfici in \mathbb{R}^3 che non sono orientabili, ovvero, per le quali non esiste un campo vettoriale unitario normale che sia continuo. La più semplice e famosa tra esse è il nastro di Möbius, che può essere parametrizzato come

$$\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{v}{2} \cos\left(\frac{u}{2}\right)\right) \cos(u) \\ \left(1 + \frac{v}{2} \cos\left(\frac{u}{2}\right)\right) \sin(u) \\ \frac{v}{2} \sin\left(\frac{u}{2}\right) \end{pmatrix}$$

per $u \in (0, 2\pi)$ e $v \in (-1, 1)$. Φ può essere chiaramente estesa a tutto $\mathbb{R} \times [-1, 1]$, se non ci si preoccupa di perdere l'iniettività, di modo da poter tener conto della possibilità di raggiungere un punto dopo aver compiuto un giro completo in θ . Allora, se calcoliamo il campo vettoriale unitario n normale al nastro di Möbius usando la sua definizione, notiamo che

$$\Phi(u, 0) = \Phi(u + 2\pi, 0) \quad \text{e} \quad n(\Phi(u, 0)) = -n(\Phi(u + 2\pi, 0)) \quad \text{per ogni } u \in [0, 2\pi),$$

ovvero che dopo un giro del nastro di Möbius lungo la circonferenza unitaria nel piano $\{z = 0\}$ l'orientazione del vettore normale è ribaltata. Di conseguenza, non vi si può definire un campo vettoriale unitario normale che sia continuo su tutto il nastro.

Come è stato fatto per la lunghezza delle curve, analizziamo adesso gli strumenti per il calcolo dell'area delle superfici parametrizzate e per la definizione degli integrali di funzioni continue su tali superfici.

Definizione 4.1.18 (Elemento d'area e integrale di superficie). Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizzabile in \mathbb{R}^3 e sia $\Phi : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ una sua parametrizzazione. L'elemento d'area $d\sigma$ su S in $P = \Phi(u, v)$ è l'espressione:

$$d\sigma(P) = \|\partial_u \Phi(u, v) \times \partial_v \Phi(u, v)\| \, du \, dv.$$

Se $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora

$$\iint_S f \, d\sigma := \iint_A f(\Phi(u, v)) \|\partial_u \Phi(u, v) \times \partial_v \Phi(u, v)\| \, du \, dv$$

è l'integrale di f sulla superficie S (o integrale di superficie di f su S). In particolare, l'area della superficie S è data da

$$\text{Area}(S) = \iint_A \|\partial_u \Phi(u, v) \times \partial_v \Phi(u, v)\| \, du \, dv.$$

Osservazione 4.1.19. L'integrale di superficie è indipendente dalla scelta della parametrizzazione e dell'orientamento di S , e quindi è veramente ben definito solo in base alla superficie stessa.

Inoltre, la motivazione per questa definizione è legata alla seguente approssimazione per l'area di un piccolo quadrangolo sulla superficie S . Nello specifico, siano $(u_0, v_0) \in A$ e $h_1, h_2 > 0$ tali che $[u_0, u_0 + h_1] \times [v_0, v_0 + h_2] \subset A$. Allora, se h_1, h_2 sono sufficientemente piccoli, l'area del quadrangolo $\Phi([u_0, u_0 + h_1] \times [v_0, v_0 + h_2])$ è approssimativamente uguale a quella del parallelogramma nel piano tangente $\Pi_{\Phi(u_0, v_0)} S$ i cui lati sono i vettori $\partial_u \Phi(u_0, v_0) h_1$ e $\partial_v \Phi(u_0, v_0) h_2$ che partono da $\Phi(u_0, v_0)$ e i due lati ad essi paralleli. Se $\alpha \in [0, \pi]$ è l'angolo più piccolo fra i vettori $\partial_u \Phi(u_0, v_0)$ e $\partial_v \Phi(u_0, v_0)$, l'area di questo parallelogramma è data da

$$\|\partial_u \Phi(u_0, v_0) h_1\| \|\partial_v \Phi(u_0, v_0) h_2\| \sin(\alpha) = \|\partial_u \Phi(u_0, v_0) \times \partial_v \Phi(u_0, v_0)\| h_1 h_2,$$

grazie alle proprietà del prodotto scalare. Ragionando euristicamente, questo è l'elemento d'area di S , se poniamo $h_1 = du$ e $h_2 = dv$.

Mostriamo il calcolo dell'elemento d'area nel caso concreto di una sfera di raggio r (centrata nell'origine, senza perdita di generalità).

Esempio 4.1.20. Siano $r > 0$ e $\partial B_r(0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$. Parametizziamo questa sfera usando le coordinate sferiche:

$$\Phi(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ r \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \Phi : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

per cui abbiamo

$$\partial_\theta \Phi(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} -r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ r \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \partial_\varphi \Phi(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ -r \sin(\varphi) \end{pmatrix},$$

$$\partial_\theta \Phi(\theta, \varphi) \times \partial_\varphi \Phi(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} -r^2 \cos(\theta) \sin^2(\varphi) \\ -r^2 \sin(\theta) \sin^2(\varphi) \\ -r^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

e quindi otteniamo

$$\|\partial_\theta \Phi(\theta, \varphi) \times \partial_\varphi \Phi(\theta, \varphi)\| = r^2 \sqrt{\cos^2(\theta) \sin^4(\varphi) + \sin^2(\theta) \sin^4(\varphi) + \sin^2(\varphi) \cos^2(\varphi)} = r^2 \sin(\varphi).$$

Quindi

$$d\sigma(\Phi(\theta, \varphi)) = r^2 \sin(\varphi) d\theta d\varphi,$$

da cui segue che²

$$\text{Area}(\partial B_r(0)) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin(\varphi) d\theta d\varphi = 2\pi r^2 \left(\int_0^\pi \sin(\varphi) d\varphi \right) = 4\pi r^2.$$

Mostriamo anche un esempio di calcolo di integrale di superficie sulla sfera di raggio r . Sia $f(x, y, z) = |z|$. Per definizione, abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_r(0)} f d\sigma &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(r \cos(\theta) \sin(\varphi), r \sin(\theta) \sin(\varphi), r \cos(\varphi)) r^2 \sin(\varphi) d\theta d\varphi \\ &= r^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r |\cos(\varphi)| \sin(\varphi) d\theta d\varphi = 2\pi r^3 \int_0^\pi |\cos(\varphi)| \sin(\varphi) d\varphi \\ &= 2\pi r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) d\varphi = 2\pi r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\varphi) d\varphi \\ &= 2\pi r^3 \left[-\frac{\cos(2\varphi)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi r^3 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 2\pi r^3. \end{aligned}$$

Definizione 4.1.21 (Flusso di un campo attraverso una superficie orientata). Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizzabile in \mathbb{R}^3 e sia $n_S : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale unitario normale a S (cioè, la scelta di un orientamento per S). Sia $F \in C(S; \mathbb{R}^3)$ un campo vettoriale. Il *flusso di F attraverso (S, n)* è l'integrale di superficie

$$\iint_S F \cdot n_S d\sigma.$$

Se Φ è una parametrizzazione di S compatibile con n_S , allora vale la seguente formula esplicita per calcolare il flusso:

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot n_S d\sigma &= \iint_A F(\Phi(u, v)) \cdot \frac{\partial_u \Phi(u, v) \times \partial_v \Phi(u, v)}{\|\partial_u \Phi(u, v) \times \partial_v \Phi(u, v)\|} \|\partial_u \Phi(u, v) \times \partial_v \Phi(u, v)\| du dv \\ &= \iint_A F(\Phi(u, v)) \cdot (\partial_u \Phi(u, v) \times \partial_v \Phi(u, v)) du dv. \end{aligned}$$

Osservazione 4.1.22. Discutiamo l'interpretazione fisica del flusso di un campo attraverso una superficie orientata: se F è il campo della velocità di un fluido e S è una superficie attraverso la quale passa il fluido, allora il valore assoluto del flusso è il volume di fluido che attraversa S in un'unità di tempo, dato che è l'integrale di superficie del volume elementare di fluido che passa attraverso l'elemento d'area $d\sigma$. Infatti, ragionando in maniera intuitiva, si può pensare che l'elemento d'area $d\sigma$ sia riferito a una porzione "infinitesima" di superficie, che è approssimativamente piatta, e quindi il volume di fluido che passa attraverso tale porzione di superficie è dato dal prodotto fra l'area della base, $d\sigma$, e l'altezza, che è $F \cdot n_S$, ovvero $\|F\| |\cos(\alpha)|$, dove $\alpha \in [0, \pi]$ è l'angolo minimo fra F e n_S . Il flusso ha poi un segno, legato al fatto che il volume di fluido sia entrante o uscente dalla superficie, ovvero che la velocità punti dentro alla superficie o fuori da essa, rispetto all'orientazione scelta.

²A rigore, non sarebbe proprio l'area di tutta la superficie della sfera, visto che questa parametrizzazione non copre la semicirconferenza

$$C_{\{y=0, x \geq 0\}, r} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = r^2, x \geq 0, y = 0\}.$$

Tuttavia, è intuitivamente ovvio che questa circonferenza ha area nulla, essendo un insieme di dimensione 1, e quindi $\text{Area}(\partial B_r(0) \setminus C_{\{y=0, x \geq 0\}, r}) = \text{Area}(\partial B_r(0))$.

Vediamo un esempio di flusso attraverso la superficie della sfera $\partial B_r(0)$ per qualche $r > 0$ fissato.

Esempio 4.1.23. Siano $r > 0$ e $\partial B_r(0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$. Parametizziamo questa sfera usando le coordinate sferiche:

$$\Phi(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ r \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \Phi : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Come abbiamo visto in precedenza, abbiamo

$$\partial_\theta \Phi(\theta, \varphi) \times \partial_\varphi \Phi(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} -r^2 \cos(\theta) \sin^2(\varphi) \\ -r^2 \sin(\theta) \sin^2(\varphi) \\ -r^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \end{pmatrix},$$

che corrisponde all'orientazione data dal vettore unitario normale che punta dentro la palla $B_r(0)$. Sia $F(x, y, z) = (0, 0, z)$. Allora abbiamo

$$\begin{aligned} \iint_{\partial B_r(0)} F \cdot n_{\partial B_r(0)} d\sigma &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (0, 0, r \cos(\varphi)) \cdot \begin{pmatrix} -r^2 \cos(\theta) \sin^2(\varphi) \\ -r^2 \sin(\theta) \sin^2(\varphi) \\ -r^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \end{pmatrix} d\theta d\varphi \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (r \cos(\varphi)) (-r^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi)) d\theta d\varphi \\ &= -2\pi r^3 \int_0^\pi \sin(\varphi) \cos^2(\varphi) d\varphi = -2\pi r^3 \left[-\frac{\cos^3(\varphi)}{3} \right]_0^\pi = -\frac{4}{3} \pi r^3. \end{aligned}$$

In maniera intuitiva possiamo notare una differenza fondamentale fra superfici come la sfera da una parte e altre superfici come il cono o la semisfera dall'altra: sulla sfera ci si può muovere in ogni direzione senza mai "uscire" dalla superficie, mentre sulla semisfera ci sono delle direzioni lungo le quali prima o poi si "uscirà", ovvero si raggiungerà una sorta di *bordo* della superficie. Perciò le superfici orientate vengono generalmente divise fra quelle chiuse (dalle quali non è possibile "uscire") e quelle con bordo: diamo qua sotto una definizione rigorosa.

Allo scopo, dobbiamo prima definire una tipologia di curve che saranno fondamentali da questo punto in avanti.

Definizione 4.1.24. Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\gamma \in C([a, b]; E)$ una curva. Diciamo che γ è una curva *semplice e chiusa* se è iniettiva su $[a, b)$ e $\gamma(a) = \gamma(b)$; ovvero se $\gamma(t) \neq \gamma(s)$ per ogni $t, s \in [a, b)$ con $t \neq s$, e $\gamma(a) = \gamma(b)$.

In altre parole, una curva semplice e chiusa non si autointerseca, se non nel punto di partenza e nel punto di arrivo.

Definizione 4.1.25 (Superfici con bordo). Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un aperto limitato connesso per archi. Siano $\gamma_j \in C_{\text{tr}}^1([a_j, b_j]; \mathbb{R}^2)$ per $j \in \{1, \dots, k\}$ delle curve semplici e chiuse tali che

$$\partial A = \gamma_1([a_1, b_1]) \cup \dots \cup \gamma_k([a_k, b_k]),$$

che non si sovrappongono se non sugli estremi, ovvero

$$\gamma_i((a_i, b_i)) \cap \gamma_j((a_j, b_j)) = \emptyset \quad \text{per ogni } i \neq j,$$

e parametrizzate in modo da avere A sulla sinistra rispetto al senso di percorrenza. Scriviamo $\partial A = \gamma_1 + \dots + \gamma_k$ quando vogliamo intendere ∂A come una curva.

Siano $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto tale che $U \supset A \cup \partial A = \bar{A}$, e $\Phi \in C^1(U; \mathbb{R}^3)$ una funzione tale che $\Phi : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una superficie parametrizzata. Poniamo $\Gamma_j := \Phi \circ \gamma_j : [a_j, b_j] \rightarrow \mathbb{R}^3$ per $j \in \{1, \dots, k\}$. Assumiamo che le curve Γ_j possano essere riparametrizzate in modo da essere curve semplici e chiuse.

Allora, $S = \Phi(A)$ è una superficie il cui *bordo* è $\partial S := \Phi(\partial A)$, ed è composto dall'unione delle tracce delle curve Γ_j , ovvero

$$\partial S = \Gamma_1([a_1, b_1]) \cup \dots \cup \Gamma_k([a_k, b_k]),$$

e scriviamo $\partial S = \Gamma_1 + \dots + \Gamma_k$ quando vogliamo intendere ∂S come una curva.

L'unione $S \cup \partial S$ è una *superficie con bordo*. Se poi (S, n) è una superficie orientata, allora $(S \cup \partial S, n)$ è una *superficie orientata con bordo*.

Osservazione 4.1.26. Osserviamo che il concetto di bordo differisce sostanzialmente per insiemi e superfici. Infatti, se vediamo una superficie come un sottoinsieme di \mathbb{R}^3 , allora ha sempre un bordo topologico non vuoto, che coincide con la sua chiusura topologica. Per questo una superficie non viene vista come un semplice sottoinsieme di \mathbb{R}^3 , ma come l'immagine di un'opportuna funzione differenziabile. E infatti, il bordo di una superficie è l'immagine in \mathbb{R}^3 del bordo dell'insieme dei parametri in \mathbb{R}^2 .

Osservazione 4.1.27. Osserviamo che le curve Γ_j nella definizione di bordo di una superficie appartengono a $C_{\text{tr}}^1([a_j, b_j]; \mathbb{R}^3)$, grazie a una variante del teorema di composizione di funzioni vettoriali differenziabili (Teorema 1.3.29).

Osservazione 4.1.28. Possiamo riformulare la precedente definizione per stabilire l'orientazione sul bordo ∂S indotta da quella di una superficie orientata S : se si osserva dalla parte della faccia positiva della superficie (quella da cui esce il vettore n_S), ciascuna curva Γ_j è percorsa in modo da vedere S sulla sinistra rispetto al senso di percorrenza³.

Ovviamente, questa caratterizzazione funziona solo con le superfici orientate (od orientabili) con bordo: infatti, il nastro di Möbius ha come bordo un'unica curva, rispetto alla quale la superficie stessa si trova ora a destra ora a sinistra, indipendentemente dal verso di percorrenza scelto per la curva che descrive il bordo dell'insieme dei parametri.

Vediamo due esempi di superfici orientate con bordo.

Esempio 4.1.29. Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x > 0\}$ la semisfera nel semispazio $\{x > 0\}$. Parametizziamo S usando la seguente variante delle coordinate sferiche, con l'orientazione da essa indotta:

$$\Phi(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \Phi : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Osserviamo che

$$\partial \left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, \pi) \right) = \left(\left\{-\frac{\pi}{2}\right\} \times [0, \pi] \right) \cup \left(\left\{\frac{\pi}{2}\right\} \times [0, \pi] \right) \cup \left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times \{0\} \right) \cup \left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times \{\pi\} \right),$$

essendo che questi sono i quattro segmenti che compongono il bordo di tale rettangolo. Quindi, per definizione di bordo di una superficie, abbiamo

$$\begin{aligned} \partial S &= \Phi \left(\partial \left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, \pi) \right) \right) = \{(0, -\sin(\varphi), \cos(\varphi)) : \varphi \in [0, \pi]\} \cup \\ &\cup \{(0, \sin(\varphi), \cos(\varphi)) : \varphi \in [0, \pi]\} \cup \{(0, 0, 1)\} \cup \{(0, 0, -1)\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = 1, x = 0\}, \end{aligned}$$

e l'orientazione di questa circonferenza è data da quella della curva che parametrizza il bordo del rettangolo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, \pi)$ tale che il rettangolo sia sempre sulla sinistra rispetto al verso di percorrenza. Precisamente, abbiamo

$$\partial \left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, \pi) \right) = \gamma([0, 4]),$$

dove

$$\gamma(t) = \begin{cases} \left(-\frac{\pi}{2} + \pi t, 0\right) & \text{se } t \in [0, 1] \\ \left(\frac{\pi}{2}, \pi(t-1)\right) & \text{se } t \in [1, 2] \\ \left(\pi(3-t) - \frac{\pi}{2}, \pi\right) & \text{se } t \in [2, 3] \\ \left(-\frac{\pi}{2}, \pi(4-t)\right) & \text{se } t \in [3, 4] \end{cases}, \quad \gamma : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

³Il bordo così orientato viene talvolta indicato con $\partial^+ S$.

Dunque, ∂S è la traccia della curva

$$\Gamma(t) = \Phi(\gamma(t)) = \begin{cases} (0, 0, 1) & \text{se } t \in [0, 1] \\ (0, \sin(\pi(t-1)), \cos(\pi(t-1))) & \text{se } t \in [1, 2] \\ (0, 0, -1) & \text{se } t \in [2, 3] \\ (0, -\sin(\pi(4-t)), \cos(\pi(4-t))) & \text{se } t \in [3, 4] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (0, 0, 1) & \text{se } t \in [0, 1] \\ (0, \sin(\pi(t-1)), \cos(\pi(t-1))) & \text{se } t \in [1, 2] \\ (0, 0, -1) & \text{se } t \in [2, 3] \\ (0, \sin(\pi(t-2)), \cos(\pi(t-2))) & \text{se } t \in [3, 4] \end{cases}.$$

Quindi, a meno di una riparametrizzazione, vediamo che ∂S è la circonferenza nel piano $\{x = 0\}$ percorsa in senso antiorario, se guardata dal semiasse x negativo, ovvero parametrizzata da

$$\Gamma(\tau) = (0, \sin(\tau), \cos(\tau)), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Ciò è coerente con l'orientazione indotta dalle coordinate sferiche (si veda l'Esempio 4.1.14), rispetto alla quale

$$n_S(\Phi(\theta, \varphi)) = \begin{pmatrix} -\cos(\theta) \sin(\varphi) \\ -\sin(\theta) \sin(\varphi) \\ -\cos(\varphi) \end{pmatrix},$$

ovvero la faccia positiva di S è quella interna alla palla $B_1(0)$, e perciò la circonferenza ∂S è effettivamente percorsa di modo da tenere la faccia positiva di S sulla sinistra.

Esempio 4.1.30. Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}, 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ un tronco di cono con asse di rotazione dato dall'asse z . Parametriamo S tramite la parametrizzazione cartesiana:

$$\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{x^2 + y^2} \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}.$$

Quindi, per definizione, abbiamo

$$\partial S = \Phi(\partial A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 1\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, z = 2\},$$

e la prima circonferenza è percorsa in senso orario, mentre la seconda in senso antiorario, di modo da tenere A sempre sulla sinistra. Infatti, abbiamo

$$\partial A = \gamma_1([0, 2\pi]) \cup \gamma_2([0, 2\pi]),$$

dove

$$\gamma_1(t) = (\sin(t), \cos(t)) \quad \text{e} \quad \gamma_2(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t)).$$

Dunque, ∂S è l'unione delle tracce delle curve

$$\Gamma_1(t) = \Phi(\gamma_1(t)) = (\sin(t), \cos(t), 1) \quad \text{e} \quad \Gamma_2(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t), 2).$$

Ciò è coerente con l'orientazione indotta dalle coordinate cartesiane: infatti, abbiamo

$$\partial_x \Phi(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x \\ \sqrt{x^2 + y^2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \partial_y \Phi(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ y \\ \sqrt{x^2 + y^2} \end{pmatrix},$$

di modo che

$$\partial_x \Phi(x, y) \times \partial_y \Phi(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ 1 \end{pmatrix},$$

che è un vettore che punta verso l'alto nella direzione z , visto che la sua terza componente è positiva. Di conseguenza, la faccia positiva di S è quella che guarda "verso l'alto", ovvero all'interno del cono $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > \sqrt{x^2 + y^2}\}$. Perciò, le circonferenze Γ_1 e Γ_2 sono effettivamente percorse di modo da tenere la faccia positiva di S sulla sinistra.

4.2 Il teorema di Stokes

Richiamiamo la definizione di rotore per campi in \mathbb{R}^3 .

Definizione 4.2.1. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto e $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$. Poniamo $F = (F_1, F_2, F_3)$. Il rotore di F è

$$\nabla \times F := \text{rot } F := (\partial_y F_3 - \partial_z F_2, -\partial_x F_3 + \partial_z F_1, \partial_x F_2 - \partial_y F_1).$$

Teorema 4.2.2 (Teorema di Stokes, o del rotore). *Siano $(S \cup \partial S, n)$ una superficie orientata con bordo, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto tale che $S \cup \partial S \subset \Omega$ e $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$. Allora, se poniamo $w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, abbiamo*

$$\iint_S (\nabla \times F) \cdot n \, d\sigma = \int_{\partial S = \Gamma_1 + \dots + \Gamma_k} F(w) \cdot dw, \quad (4.2.1)$$

ovvero, il lavoro di F lungo $\partial S = \Gamma_1 + \dots + \Gamma_k$ è pari al flusso del rotore di F attraverso S .

Il membro a destra dell'equazione nel teorema di Stokes, ovvero, il lavoro di F lungo la curva chiusa data da ∂S , è detto *circuitazione di F lungo il bordo di S* . Quindi, il teorema di Stokes afferma che il flusso del rotore di un campo attraverso una superficie con bordo è uguale alla circuitazione del campo lungo il bordo della superficie.

Osservazione 4.2.3. Utilizzando le definizioni (e il Teorema 1.3.29) rendiamo esplicite (e quindi calcolabili i casi specifici) tutte le espressioni presenti nel Teorema di Stokes:

$$\iint_S (\nabla \times F) \cdot n \, d\sigma = \iint_A (\nabla \times F)(\Phi(u, v)) \cdot (\partial_u \Phi(u, v) \times \partial_v \Phi(u, v)) \, du \, dv,$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\partial S = \Gamma_1 + \dots + \Gamma_k} F(w) \cdot dw &= \sum_{j=1}^k \int_{a_j}^{b_j} F(\Gamma_j)(t) \cdot \dot{\Gamma}_j(t) dt \\ &= \sum_{j=1}^k \int_{a_j}^{b_j} F(\Phi \circ \gamma_j)(t) \cdot \frac{d}{dt}(\Phi \circ \gamma_j)(t) dt \\ &= \sum_{j=1}^k \int_{a_j}^{b_j} F(\Phi \circ \gamma_j)(t) \cdot [J\Phi(\gamma_j(t)) \dot{\gamma}_j(t)] dt \\ &= \sum_{j=1}^k \int_{a_j}^{b_j} \begin{pmatrix} F_1(\Phi \circ \gamma_j)(t) \\ F_2(\Phi \circ \gamma_j)(t) \\ F_3(\Phi \circ \gamma_j)(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_u x(\gamma_j(t)) & \partial_v x(\gamma_j(t)) \\ \partial_u y(\gamma_j(t)) & \partial_v y(\gamma_j(t)) \\ \partial_u z(\gamma_j(t)) & \partial_v z(\gamma_j(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix} dt \end{aligned}$$

Osservazione 4.2.4. Notiamo che il teorema di Stokes diventa banale nel caso di campi esatti: infatti, se $F = \nabla \phi$ per qualche $\phi \in C^2(\Omega)$, allora $\nabla \times F = 0$ e il lavoro di F lungo qualunque curva chiusa è nullo, di modo che (4.2.1) si riduce a $0 = 0$. Per contro, nel caso di campi chiusi, il teorema di Stokes fornisce una nuova informazione: dato che $\nabla \times F = 0$, se F è chiuso, allora deduciamo che

$$\int_{\partial S} F(w) \cdot dw = 0$$

per ogni bordo ∂S di una superficie orientata con bordo $(S \cup \partial S, n)$.

Verifichiamo il teorema di Stokes con un esempio non banale.

Esempio 4.2.5. Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x > 0\}$ la semisfera nel semispazio $\{x > 0\}$, e consideriamo la superficie con bordo $(S \cup \partial S, n)$ parametrizzata tramite le coordinate sferiche e orientata di modo che la faccia interna alla palla $B_1(0)$ sia la faccia positiva, come nell'Esempio 4.1.29. Quindi, $d\sigma = \sin(\varphi) \, d\theta \, d\varphi$,

$$n(\Phi(\theta, \varphi)) = \begin{pmatrix} -\cos(\theta) \sin(\varphi) \\ -\sin(\theta) \sin(\varphi) \\ -\cos(\varphi) \end{pmatrix} \text{ per } (\theta, \varphi) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, \pi),$$

e ∂S è la circonferenza nel piano $\{x = 0\}$ percorsa in senso orario, ovvero parametrizzata da

$$\Gamma(t) = (0, \sin(t), \cos(t)), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Sia $F(x, y, z) = (x, -z, y)$, di modo che $\nabla \times F(x, y, z) = (2, 0, 0)$. Perciò, otteniamo

$$\begin{aligned} \iint_S (\nabla \times F) \cdot n \, d\sigma &= \int_0^\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} -\cos(\theta) \sin(\varphi) \\ -\sin(\theta) \sin(\varphi) \\ -\cos(\varphi) \end{pmatrix} \sin(\varphi) \, d\theta \, d\varphi \\ &= \int_0^\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -2 \cos(\theta) \sin^2(\varphi) \, d\theta \, d\varphi \\ &= -2 [\sin(\theta)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\varphi - \cos(\varphi) \sin(\varphi)}{2} \right]_0^\pi = -2\pi. \end{aligned}$$

D'altro lato, il lavoro di F lungo Γ è dato da

$$\begin{aligned} \int_\Gamma F(w) \cdot dw &= \int_0^{2\pi} (0, -\cos(t), \sin(t)) \cdot (0, \cos(t), -\sin(t)) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\cos^2(t) - \sin^2(t)) \, dt = \int_0^{2\pi} (-1) \, dt = -2\pi. \end{aligned}$$

Consideriamo ora un esempio un po' più complicato, che riguarda l'aggirare una limitazione apparente nel teorema di Stokes.

Esempio 4.2.6. Siano $r, h > 0$ e $\text{Cil}_{r,h} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2, z \in (0, h)\}$, che è un cilindro di raggio r e altezza h , con asse di rotazione dato dall'asse z , e circonferenza di base nel piano xy . Osserviamo che la parametrizzazione naturale è quella di rotazione data da

$$\Phi(\theta, z) = \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ z \end{pmatrix}, \quad (\theta, z) \in A = (0, 2\pi) \times (0, h).$$

Non è difficile vedere che

$$\partial_\theta \Phi(\theta, z) = \begin{pmatrix} -r \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_z \Phi(\theta, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \partial_\theta \Phi(\theta, z) \times \partial_z \Phi(\theta, z) = \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix},$$

di modo che

$$\|\partial_\theta \Phi(\theta, z) \times \partial_z \Phi(\theta, z)\| = r \quad \text{e} \quad n_{\text{Cil}_{r,h}}(\Phi(\theta, z)) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo inoltre che l'elemento d'area è dato da

$$d\sigma = \|\partial_\theta \Phi(\theta, z) \times \partial_z \Phi(\theta, z)\| \, d\theta \, dz = r \, d\theta \, dz,$$

di modo che l'area del cilindro è

$$\text{Area}(\text{Cil}_{r,h}) = \int_0^h \int_0^{2\pi} r \, d\theta \, dz = 2\pi r h.$$

Intuitivamente, il cilindro è una superficie con bordo, e tale bordo è dato dalle due circonferenze “in fondo” e “in cima”, ovvero

$$C_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2, z = 0\} \quad \text{e} \quad C_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2, z = h\}.$$

Tuttavia, vediamo che la Definizione 4.1.25 non si applica in questo caso, dato che abbiamo

$$\partial A = (\{0\} \times [0, h]) \cup (\{2\pi\} \times [0, h]) \cup ([0, 2\pi] \times \{0\}) \cup ([0, 2\pi] \times \{h\})$$

e quindi

$$\Phi(\partial A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = r, y = 0, z \in [0, h]\} \cup C_1 \cup C_2,$$

che non può essere la traccia di una o più curve semplici e chiuse, visto che il segmento verticale in z dovrebbe essere percorso due volte affinché si possa tornare al punto di partenza. Pare quindi

che non si possa applicare il teorema di Stokes a una superficie tanto semplice come quella del cilindro.

D'altra parte, se consideriamo una superficie cilindrica "aperta di un angolo ε ", ovvero

$$\text{Cil}_{r,h,\varepsilon} := \Phi(A_\varepsilon), \text{ dove } A_\varepsilon = (0, 2\pi - \varepsilon) \times (0, h) \text{ per qualche } \varepsilon \in (0, 2\pi),$$

allora vediamo che $\text{Cil}_{r,h,\varepsilon}$ è una superficie con bordo, con

$$\begin{aligned} \partial\text{Cil}_{r,h,\varepsilon} = \Phi(\partial A_\varepsilon) &= \{(r, 0, z) : z \in (0, h)\} \cup \{(r \cos(\varepsilon), -r \sin(\varepsilon), z) : z \in (0, h)\} \cup \\ &\cup \{(r \cos(t), r \cos(t), 0) : t \in [0, 2\pi - \varepsilon]\} \cup \{(r \cos(t), r \cos(t), h) : t \in [0, 2\pi - \varepsilon]\}, \end{aligned}$$

che è l'unione di due segmenti verticali in z e di due archi di circonferenza ai livelli $z = 0$ e $z = h$. Questa è la traccia della curva (semplice e chiusa) $\Gamma_\varepsilon = \Phi \circ \gamma_\varepsilon$, dove

$$\gamma_\varepsilon(t) = \begin{cases} ((2\pi - \varepsilon)t, 0) & \text{se } t \in [0, 1] \\ (2\pi - \varepsilon, h(t - 1)) & \text{se } t \in [1, 2] \\ ((2\pi - \varepsilon)(3 - t), h) & \text{se } t \in [2, 3] \\ (0, h(4 - t)) & \text{se } t \in [3, 4] \end{cases}, \quad \gamma : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

di modo che

$$\Gamma_\varepsilon(t) = \begin{cases} (r \cos((2\pi - \varepsilon)t), r \sin((2\pi - \varepsilon)t), 0) & \text{se } t \in [0, 1] \\ (r \cos(\varepsilon), -r \sin(\varepsilon), h(t - 1)) & \text{se } t \in [1, 2] \\ (r \cos((2\pi - \varepsilon)(3 - t)), r \sin((2\pi - \varepsilon)(3 - t)), h) & \text{se } t \in [2, 3] \\ (r, 0, h(4 - t)) & \text{se } t \in [3, 4] \end{cases}.$$

Notiamo che Γ_ε è percorsa nel senso corretto. Infatti, la normale indotta dalla parametrizzazione Φ (che ovviamente è la stessa anche per questa superficie cilindrica) punta verso l'esterno del cilindro solido, dunque la faccia positiva è quella esterna, e Γ_ε è effettivamente percorsa di modo da tenerla sulla sinistra. Per questa ragione, l'arco di circonferenza per $z = 0$ è percorso in senso antiorario, mentre quello per $z = h$ in senso orario. Quindi, possiamo applicare il teorema di Stokes alla superficie orientata $(\text{Cil}_{r,h,\varepsilon} \cup \partial\text{Cil}_{r,h,\varepsilon}, n_{\text{Cil}_{r,h,\varepsilon}})$: per ogni $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$, con $\Omega \supset \overline{\text{Cil}_{r,h}} \supset \text{Cil}_{r,h,\varepsilon} \cup \partial\text{Cil}_{r,h,\varepsilon}$ abbiamo

$$\int_{\text{Cil}_{r,h,\varepsilon}} (\nabla \times F) \cdot n_{\text{Cil}_{r,h}} \, d\sigma = \int_{\partial\text{Cil}_{r,h,\varepsilon} = \Gamma_\varepsilon} F(w) \cdot dw.$$

A questo punto, l'idea è di calcolare il limite per $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Omettiamo i dettagli tecnici, ma è intuitivamente chiaro che " $\text{Cil}_{r,h,\varepsilon} \rightarrow \text{Cil}_{r,h}$ ", di modo che a sinistra nell'equazione otteniamo tutta la superficie cilindrica. Per quanto riguarda il lavoro, osserviamo che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \Gamma_\varepsilon(t) = \begin{cases} (r \cos(2\pi t), r \sin(2\pi t), 0) & \text{se } t \in [0, 1] \\ (r, 0, h(t - 1)) & \text{se } t \in [1, 2] \\ (r \cos(2\pi(3 - t)), r \sin(2\pi(3 - t)), h) & \text{se } t \in [2, 3] \\ (r, 0, h(4 - t)) & \text{se } t \in [3, 4] \end{cases} =: \Gamma(t),$$

e possiamo vedere Γ come la somma $\gamma_1 + \ell_1 + \gamma_2 + \ell_2$, dove

$$\begin{aligned} \gamma_1(\tau) &= (r \cos(\tau), r \sin(\tau), 0), \quad \tau \in [0, 2\pi], \\ \ell_1(\tau) &= (r, 0, \tau), \quad \tau \in [0, h], \\ \gamma_2(\tau) &= (r \cos(\tau), -r \sin(\tau), h), \quad \tau \in [0, 2\pi], \\ \ell_2(\tau) &= (r, 0, h - \tau), \quad \tau \in [0, h], \end{aligned}$$

di modo che γ_1 è la circonferenza per $z = 0$ percorsa in senso antiorario, γ_2 quella per $z = h$ percorsa in senso orario, mentre ℓ_1 e ℓ_2 sono entrambe il segmento verticale in $z \in [0, h]$, percorso nei due sensi opposti. Dunque, per le proprietà del lavoro (Proposizione 3.1.6) abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F(w) \cdot dw &= \int_{\gamma_1} F(w) \cdot dw + \int_{\ell_1} F(w) \cdot dw + \int_{\gamma_2} F(w) \cdot dw + \int_{\ell_2} F(w) \cdot dw \\ &= \int_{\gamma_1} F(w) \cdot dw + \int_{\ell_1} F(w) \cdot dw + \int_{\gamma_2} F(w) \cdot dw - \int_{\ell_1} F(w) \cdot dw \\ &= \int_{\gamma_1} F(w) \cdot dw + \int_{\gamma_2} F(w) \cdot dw. \end{aligned}$$

In conclusione, possiamo porre $\partial\text{Cil}_{r,h} = \gamma_1 + \gamma_2$ (con un piccolo abuso di notazione), e così otteniamo

$$\int_{\text{Cil}_{r,h}} (\nabla \times F) \cdot n_{\text{Cil}_{r,h}} d\sigma = \int_{\partial\text{Cil}_{r,h}=\gamma_1+\gamma_2} F(w) \cdot dw.$$

Come abbiamo notato in precedenza, il rotore può essere anche definito per un campo in dimensione 2, tramite un'opportuna estensione in dimensione 3. Ciò permette di riformulare il teorema di Stokes per $n = 2$.

Corollario 4.2.7 (Teorema di Green). *Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ un aperto limitato connesso per archi. Siano $\gamma_j \in C_{\text{tr}}^1([a_j, b_j]; \mathbb{R}^2)$ per $j \in \{1, \dots, k\}$ delle curve semplici e chiuse tali che*

$$\partial D = \gamma_1([a_1, b_1]) \cup \dots \cup \gamma_k([a_k, b_k]),$$

con $\gamma_i((a_i, b_i)) \cap \gamma_j((a_j, b_j)) = \emptyset$ per ogni $i \neq j$, e parametrizzate in modo da avere D sulla sinistra rispetto al senso di percorrenza. Scriviamo $\partial D = \gamma_1 + \dots + \gamma_k$ quando vogliamo intendere ∂D come una curva. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto tale che $D \cup \partial D \subset \Omega$ e $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$, $F = (F_1, F_2)$. Allora, se poniamo $w = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, abbiamo

$$\iint_D (\partial_x F_2 - \partial_y F_1) dx dy = \int_{\partial D=\gamma_1+\dots+\gamma_k} F(w) \cdot dw. \quad (4.2.2)$$

In particolare, se $F(x, y) = (-\alpha y, \beta x)$ per $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $\alpha + \beta \neq 0$, allora

$$\text{Area}(D) = \frac{1}{\alpha + \beta} \int_{\partial D=\gamma_1+\dots+\gamma_k} F(w) \cdot dw = \frac{1}{\alpha + \beta} \int_{\partial D=\gamma_1+\dots+\gamma_k} (-\alpha y dx + \beta x dy), \quad (4.2.3)$$

e quindi, se $\alpha = \beta = 1$, $k = 1$, $\partial D = \gamma([a, b])$ e $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, allora

$$\text{Area}(D) = \frac{1}{2} \int_{\gamma} F(w) \cdot dw = \frac{1}{2} \int_a^b (-y(t) \dot{x}(t) + x(t) \dot{y}(t)) dt. \quad (4.2.4)$$

Dimostrazione. Per applicare il teorema di Stokes, vediamo D come la superficie

$$\tilde{D} = \{(u, v, 0) \in \mathbb{R}^3 : (u, v) \in D\},$$

parametrizzata tramite la funzione

$$\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi : D \rightarrow \tilde{D}.$$

Vediamo quindi che

$$\partial_u \Phi(u, v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_v \Phi(u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \partial_u \Phi(u, v) \times \partial_v \Phi(u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

di modo che l'elemento d'area di \tilde{D} è semplicemente $d\sigma = du dv$, mentre la normale a \tilde{D} è il vettore $n_{\tilde{D}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Inoltre, vediamo che \tilde{D} è una superficie orientata con bordo, ovvero $\partial\tilde{D} = \Phi(\partial D)$, che è composto dalle curve $\Gamma_j = (\gamma_{j,1}, \gamma_{j,2}, 0)$, dove $\gamma_j = (\gamma_{j,1}, \gamma_{j,2})$, per $j \in \{1, \dots, k\}$. Consideriamo poi il campo

$$\tilde{F}(x, y, z) = (F_1(x, y), F_2(x, y), 0),$$

di modo che

$$\nabla \times \tilde{F}(x, y, z) = (0, 0, \partial_x F_2(x, y) - \partial_y F_1(x, y)),$$

e dunque

$$(\nabla \times \tilde{F}) \cdot n_{\tilde{D}} = \partial_x F_2 - \partial_y F_1.$$

Quindi, per ottenere (4.2.2), è sufficiente applicare il teorema di Stokes alla superficie orientata con bordo $(\tilde{D} \cup \partial\tilde{D}, n_{\tilde{D}})$ e al campo $\tilde{F} \in C^1(\tilde{\Omega}; \mathbb{R}^3)$, dove $\tilde{\Omega} = \Omega \times \mathbb{R}$. Infatti, se poniamo $\tilde{w} = (x, y, z)$, abbiamo

$$\begin{aligned} \iint_D (\partial_x F_2 - \partial_y F_1) dx dy &= \iint_{\tilde{D}} (\nabla \times \tilde{F}) \cdot n_{\tilde{D}} d\sigma = \int_{\partial\tilde{D}} \tilde{F}(\tilde{w}) \cdot d\tilde{w} = \sum_{j=1}^k \int_{a_j}^{b_j} \tilde{F}(\Gamma_j(t)) \cdot \dot{\Gamma}_j(t) dt \\ &= \sum_{j=1}^k \int_{a_j}^{b_j} F(\gamma_j(t)) \cdot \dot{\gamma}_j(t) dt = \int_{\partial D} F(w) \cdot dw, \end{aligned}$$

dato che

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\Gamma_j(t)) \cdot \dot{\Gamma}_j(t) &= (F_1(\gamma_j(t)), F_2(\gamma_j(t)), 0) \cdot (\dot{\gamma}_{j,1}(t), \dot{\gamma}_{j,2}(t), 0) \\ &= F_1(\gamma_j(t))\dot{\gamma}_{j,1}(t) + F_2(\gamma_j(t))\dot{\gamma}_{j,2}(t) = F(\gamma_j(t)) \cdot \dot{\gamma}_j(t). \end{aligned}$$

Infine, se $F(x, y) = (-\alpha y, \beta x)$, allora $\partial_x F_2 - \partial_y F_1 = \beta + \alpha$. Perciò, (4.2.3) e (4.2.4) seguono da (4.2.2). \square

Esempio 4.2.8. Mostriamo un'applicazione di (4.2.4).

Se $D = B_r(0) \subset \mathbb{R}^2$ per qualche $r > 0$, di modo che ∂D è la circonferenza di raggio r centrata nell'origine percorsa in senso antiorario, allora, ponendo $\alpha = \beta = 1$, otteniamo

$$\begin{aligned} \text{Area}(B_r(0)) &= \frac{1}{2} \int_{\partial D} (-y dx + x dy) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(- (r \sin(t)) (-r \sin(t)) + (r \cos(t)) (r \cos(t)) \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 dt = \pi r^2. \end{aligned}$$

In maniera analoga, si può applicare (4.2.4) al calcolo dell'area dell'ellisse

$$E_{a,b} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \right\} \quad \text{per } a, b > 0.$$

Osservazione 4.2.9. Se $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ è chiuso, allora il teorema di Green (Corollario 4.2.7) implica

$$\int_{\partial D} F(w) \cdot dw = 0$$

per ogni bordo ∂D di un aperto limitato connesso per archi D che soddisfa le ipotesi del Corollario 4.2.7. Questo fatto è di fondamentale importanza nella dimostrazione del teorema di Poincaré-Volterra globale nel piano, grazie al teorema di Jordan, che afferma che una qualunque curva C^1 a tratti, semplice e chiusa delimita una regione del piano (ovvero, divide \mathbb{R}^2 in una parte “dentro alla curva” e una parte “fuori dalla curva”).

4.3 Il teorema della divergenza

Diamo una definizione generale dell'operatore divergenza, che è definito su ogni campo vettoriale differenziabile con continuità.

Definizione 4.3.1. Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Sia $F \in C^1(U; \mathbb{R}^n)$ un campo vettoriale e poniamo $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$. La *divergenza* di F è

$$\nabla \cdot F(x) := \text{div} F(x) := \partial_{x_1} F_1(x) + \partial_{x_2} F_2(x) + \dots + \partial_{x_n} F_n(x) = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} F_j(x) \quad \text{per ogni } x \in U.$$

In particolare, se $n = 2$, abbiamo

$$\nabla \cdot F = \partial_{x_1} F_1 + \partial_{x_2} F_2;$$

mentre, se $n = 3$, abbiamo

$$\nabla \cdot F = \partial_{x_1} F_1 + \partial_{x_2} F_2 + \partial_{x_3} F_3.$$

È utile notare che vale la seguente regola del prodotto per la divergenza, la cui dimostrazione è lasciata per esercizio.

Lemma 4.3.2. *Siano $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, $F \in C^1(U; \mathbb{R}^n)$ e $g \in C^1(U)$. Allora abbiamo*

$$\nabla \cdot (gF)(x) = g(x)\nabla \cdot F(x) + F(x) \cdot \nabla g(x) \quad \text{per ogni } x \in U. \quad (4.3.1)$$

Enunceremo il teorema della divergenza nei due casi particolari del piano, $n = 2$, e dello spazio, $n = 3$ (se $n = 1$, il risultato è equivalente al teorema fondamentale del calcolo integrale). Allo scopo, ci serve introdurre la nozione di aperti limitati con bordo regolare in \mathbb{R}^n per $n = 2, 3$.

Definizione 4.3.3 (Aperto con bordo regolare e normale esterna in \mathbb{R}^2). Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un aperto limitato connesso per archi. Il bordo $\partial\Omega$ di Ω è *regolare a pezzi* se esistono delle curve semplici e chiuse $\gamma_j \in C_{\text{tr}}^1([a_j, b_j]; \mathbb{R}^2)$ per $j \in \{1, \dots, k\}$, tali che

$$\partial\Omega = \gamma_1([a_1, b_1]) \cup \dots \cup \gamma_k([a_k, b_k])$$

e che non si sovrappongono se non sugli estremi, ovvero

$$\gamma_i((a_i, b_i)) \cap \gamma_j((a_j, b_j)) = \emptyset \quad \text{per ogni } i \neq j.$$

La *normale* n_Ω a $\partial\Omega$ esterna a Ω è il campo vettoriale unitario tale che, in ogni punto di $\gamma_1((a_1, b_1)) \cup \dots \cup \gamma_k((a_k, b_k))$ dove $\dot{\gamma}_j$ è ben definito per qualche $j \in \{1, \dots, k\}$, è ortogonale al vettore tangente $\dot{\gamma}_j$, per un opportuno $j \in \{1, \dots, k\}$, e che punta verso l'esterno di Ω .

Teorema 4.3.4 (Teorema della divergenza in \mathbb{R}^2 , o di Gauss-Green). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un aperto limitato connesso per archi, con bordo $\partial\Omega$ regolare a pezzi, e sia n_Ω la normale esterna a Ω . Sia $F \in C^1(U; \mathbb{R}^2)$, per un qualche aperto $U \supset \Omega \cup \partial\Omega$. Allora abbiamo*

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n_\Omega \, ds = \iint_{\Omega} \nabla \cdot F \, dx \, dy.$$

Vediamo un'interessante applicazione di questo teorema.

Esempio 4.3.5. Siano $r > 0$ e $\Omega = B_r(0)$, il cerchio di raggio r centrato nell'origine. Allora $\partial\Omega = \partial B_r(0)$ è la circonferenza di raggio r centrata nell'origine, che è ovviamente regolare a pezzi, visto che è parametrizzato da

$$\gamma(t) = (r \cos(t), r \sin(t)) \quad \text{per } t \in [0, 2\pi].$$

Da un punto di vista geometrico, è chiaro che la normale esterna al cerchio è

$$n_{B_r(0)}(x, y) = \frac{1}{r}(x, y),$$

che infatti soddisfa

$$n_{B_r(0)}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) = \frac{1}{r}(r \cos(t), r \sin(t)) \cdot (-r \sin(t), r \cos(t)) = 0.$$

Sia $F(x, y) = (x, y)$, di modo che $\nabla \cdot F(x, y) = 2$. Allora, per il teorema della divergenza, otteniamo

$$\begin{aligned} 2 \text{Area}(B_r(0)) &= \iint_{B_r(0)} \nabla \cdot F(x, y) \, dx \, dy = \int_{\partial B_r(0)} F(x, y) \cdot n_{B_r(0)}(x, y) \, ds \\ &= \int_{\partial B_r(0)} \frac{x^2 + y^2}{r} \, ds = r \text{Lunghezza}(\partial B_r(0)), \end{aligned}$$

dato che $x^2 + y^2 = r^2$ su $\partial B_r(0)$. E quindi, dato che $\text{Lunghezza}(\partial B_r(0)) = 2\pi r$ (come visto nella sezione 2.3), ricaviamo di nuovo la formula $\text{Area}(B_r(0)) = \pi r^2$.

Un'altra importante conseguenza del teorema della divergenza è che troviamo la versione delle formule di integrazione per parti valide nel piano.

Corollario 4.3.6 (Formule di integrazione per parti in \mathbb{R}^2). Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un aperto limitato connesso per archi, con bordo $\partial\Omega$ regolare a pezzi, e sia n_Ω la normale esterna a Ω . Siano $F \in C^1(U; \mathbb{R}^2)$ e $g \in C^1(U)$, per un qualche aperto $U \supset \Omega \cup \partial\Omega$. Allora abbiamo

$$\iint_{\Omega} g \nabla \cdot F \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} g F \cdot n_\Omega \, ds - \iint_{\Omega} F \cdot \nabla g \, dx \, dy.$$

In particolare, per ogni $f, g \in C^1(U)$ abbiamo

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} g \, dx \, dy &= \int_{\partial\Omega} g f n_{\Omega,1} \, ds - \iint_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x} \, dx \, dy, \\ \iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial y} g \, dx \, dy &= \int_{\partial\Omega} g f n_{\Omega,2} \, ds - \iint_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial y} \, dx \, dy, \end{aligned}$$

dove $n_\Omega = (n_{\Omega,1}, n_{\Omega,2})$.

Dimostrazione. Per dimostrare la prima formula, è sufficiente applicare il teorema della divergenza al campo gF e la regola di Leibniz (4.3.1). Le formule successive si ottengono scegliendo i campi $F = (f, 0)$ e $F = (0, f)$, rispettivamente. \square

Passiamo ora al teorema della divergenza nello spazio \mathbb{R}^3 .

Definizione 4.3.7 (Aperto con bordo regolare e normale esterna in \mathbb{R}^3). Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un aperto limitato connesso per archi. Il bordo $\partial\Omega$ di Ω è *regolare a pezzi* se esistono delle superfici con bordo $S_j \cup \partial S_j = \Phi_j(A_j) \cup \Phi_j(\partial A_j)$ per $j \in \{1, \dots, k\}$, per certe parametrizzazioni $\Phi_j \in C^1(U_j; \mathbb{R}^3)$ e aperti $U_j \supset A_j \cup \partial A_j$, tali che

$$\partial\Omega = S_1 \cup \partial S_1 \cup \dots \cup S_k \cup \partial S_k,$$

e che ogni “cucitura” ∂S_j non interseca le “pezze aperte”, ovvero

$$(\partial S_1 \cup \dots \cup \partial S_k) \cap (S_1 \cup \dots \cup S_k) = \emptyset.$$

La normale n_Ω a $\partial\Omega$ esterna a Ω è il campo vettoriale unitario normale definito in ogni punto di $S_1 \cup \dots \cup S_k$, e che punta verso l'esterno di Ω , ovvero, dato $x \in S_j$ per qualche $j \in \{1, \dots, k\}$, abbiamo $n_\Omega(x) = n_{S_j}(x)$ se n_{S_j} punta verso $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$, altrimenti $n_\Omega(x) = -n_{S_j}(x)$.

Teorema 4.3.8 (Teorema della divergenza in \mathbb{R}^3 , o di Gauss-Ostrogradsky). Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un aperto limitato connesso per archi, con bordo $\partial\Omega$ regolare a pezzi, e sia n_Ω la normale esterna a Ω . Sia $F \in C^1(U; \mathbb{R}^3)$, per un qualche aperto $U \supset \Omega \cup \partial\Omega$. Allora abbiamo

$$\iint_{\partial\Omega} F \cdot n_\Omega \, d\sigma = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot F \, dx \, dy \, dz,$$

ovvero, il flusso (uscende) di F attraverso il bordo di Ω è uguale all'integrale della divergenza di F dentro Ω .

Vediamo un'applicazione di questo teorema analoga a quella vista in precedenza nel caso $n = 2$.

Esempio 4.3.9. Siano $r > 0$ e $\Omega = B_r(0)$, la palla di raggio r centrata nell'origine. Allora $\partial\Omega = \partial B_r(0)$ è la sfera di raggio r centrata nell'origine, che è una superficie parametrizzata chiusa (ovvero, senza bordo), e quindi $B_r(0)$ è un aperto con bordo regolare (a pezzi), la cui normale esterna è

$$n_{B_r(0)}(x, y, z) = \frac{1}{r}(x, y, z).$$

Sia $F(x, y, z) = (x, y, z)$, di modo che $\nabla \cdot F(x, y, z) = 3$. Allora, per il teorema della divergenza, otteniamo

$$\begin{aligned} 3 \text{Volume}(B_r(0)) &= \iiint_{B_r(0)} \nabla \cdot F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial B_r(0)} F(x, y, z) \cdot n_{B_r(0)}(x, y, z) \, d\sigma \\ &= \iint_{\partial B_r(0)} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r} \, d\sigma = r \text{Area}(\partial B_r(0)), \end{aligned}$$

dato che $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ su $\partial B_r(0)$. E quindi, dato che $\text{Area}(\partial B_r(0)) = 4\pi r^2$ (si veda l'Esempio 4.1.20), ricaviamo di nuovo la formula $\text{Volume}(B_r(0)) = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Analogamente a quanto visto nel piano, un'altra importante conseguenza del teorema della divergenza è la derivazione della versione delle formule di integrazione per parti nello spazio.

Corollario 4.3.10 (Formule di integrazione per parti in \mathbb{R}^3). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un aperto limitato connesso per archi, con bordo $\partial\Omega$ regolare a pezzi, e sia n_Ω la normale esterna a Ω . Siano $F \in C^1(U; \mathbb{R}^3)$ e $g \in C^1(U)$, per un qualche aperto $U \supset \Omega \cup \partial\Omega$. Allora abbiamo*

$$\iiint_{\Omega} g \nabla \cdot F \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial\Omega} g F \cdot n_\Omega \, d\sigma - \iiint_{\Omega} F \cdot \nabla g \, dx \, dy \, dz.$$

In particolare, per ogni $f, g \in C^1(U)$ abbiamo

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} g \, dx \, dy \, dz &= \iint_{\partial\Omega} g f n_{\Omega,1} \, d\sigma - \iiint_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x} \, dx \, dy \, dz \\ \iiint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial y} g \, dx \, dy \, dz &= \iint_{\partial\Omega} g f n_{\Omega,2} \, d\sigma - \iiint_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial y} \, dx \, dy \, dz \\ \iiint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial z} g \, dx \, dy \, dz &= \iint_{\partial\Omega} g f n_{\Omega,3} \, d\sigma - \iiint_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial z} \, dx \, dy \, dz \end{aligned}$$

dove $n_\Omega = (n_{\Omega,1}, n_{\Omega,2}, n_{\Omega,3})$.

Dimostrazione. Per dimostrare la prima formula, è sufficiente applicare il teorema della divergenza al campo gF e la regola di Leibniz (4.3.1). Le formule successive si ottengono scegliendo i campi $F = (f, 0, 0)$, $F = (0, f, 0)$ e $F = (0, 0, f)$, rispettivamente. \square

Capitolo 5

Funzioni olomorfe e teorema dei residui

1

5.1 Nozioni di base di Analisi Complessa

Iniziamo ricordando la definizione dei numeri complessi e di altri utili concetti ad essi associati.

Consideriamo il piano \mathbb{R}^2 e vi definiamo le seguenti operazioni di somma e prodotto: per ogni $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$

- $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$,
- $(x_1, y_1) \times (x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$.

Il piano \mathbb{R}^2 con queste operazioni è il *piano complesso* \mathbb{C} , e i suoi elementi sono i *numeri complessi*. In particolare, $z \in \mathbb{C}$ se e solo se esistono $x, y \in \mathbb{R}$ tali che z è associato al punto (x, y) . L'insieme delle coppie $(x, 0)$ si identifica con \mathbb{R} , ovvero $(x, 0) \equiv x$. Chiamiamo l'elemento $i := (0, 1)$ l'*unità immaginaria*, che soddisfa

$$i^2 = (0, 1) \times (0, 1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0) = -1.$$

Ciò permette di scrivere ogni $z \in \mathbb{C}$ come

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + y(0, 1) = x + iy.$$

In particolare, la *parte reale* di z è x e la *parte immaginaria* è y : scriviamo

$$\operatorname{Re}(z) = x \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}(z) = y.$$

Ciò significa che i è l'unico numero complesso con parte immaginaria positiva che è soluzione dell'equazione $z^2 = -1$ (l'altra soluzione è ovviamente $-i$). Le operazioni di somma e prodotto ottengono quindi una chiara interpretazione algebrica: per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$, abbiamo

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

e

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Dato $z \in \mathbb{C}$ definiamo il *modulo* di z come

$$|z| := \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

¹Parte di questo capitolo è basata sul libro *Introduzione alla Analisi Complessa* di Michele Carriero e Simone Cito.

che è la norma euclidea del punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (o la sua distanza dall'origine, equivalentemente). Ciò permette di scrivere ogni $z \in \mathbb{C}$ in *forma trigonometrica* e in *forma esponenziale*: dati $(\rho, \theta) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases},$$

otteniamo

$$z = \rho \cos(\theta) + i\rho \sin(\theta) = \rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = \rho e^{i\theta},$$

dato che vale l'*identità di Euler*²

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta).$$

Il modulo di z soddisfa $|z| = \rho$. Il parametro θ si dice *argomento* di z , e, se $z \neq 0$, esiste un unico $\theta \in [0, 2\pi)$ che è argomento di z , ed è chiamato *argomento principale* di z .

Dato $z \in \mathbb{C}$, definiamo il *coniugato* di z come

$$\bar{z} := \operatorname{Re}(z) - i \operatorname{Im}(z) = x - iy,$$

ed è immediato verificare che soddisfa le seguenti proprietà:

- $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ e $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$,
- se $z = \rho e^{i\theta}$, allora $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$,
- $z\bar{z} = |z|^2$,
- se $z \neq 0$, $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$,
- se $|z| = 1$ e $z = e^{i\theta}$, allora $\bar{z} = \frac{1}{z} = e^{-i\theta}$, e in particolare $\frac{1}{i} = \bar{i} = -i$,
- per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ abbiamo $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ e $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.

Dato che \mathbb{C} è il piano euclideo con le operazioni di somma e prodotto definite sopra, possiamo definire le nozioni di insiemi aperti o chiusi, punti di accumulazione, limiti e continuità in \mathbb{C} semplicemente traducendo quelle date per \mathbb{R}^2 .

Vediamo in particolare le definizioni di limite e continuità per funzioni definite su sottoinsiemi di \mathbb{C} e a valori complessi.

Definizione 5.1.1. Siano $E \subseteq \mathbb{C}$, $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ ed $a \in \mathbb{C}$ un punto di accumulazione per E ³. Diciamo che il *limite di f per z che tende ad a* è $L \in \mathbb{C}$, e scriviamo

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = L,$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|f(z) - L| < \varepsilon$ per ogni $z \in E$ tale che $z \neq a$ e $|z - a| < \delta$.

Definizione 5.1.2. Siano $E \subseteq \mathbb{C}$, $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ ed $z_0 \in E$. Diciamo che f è *continua* in z_0 se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ per ogni $z \in E$ tale che $|z - z_0| < \delta$.

Se z_0 è di accumulazione per E , allora f è continua in z_0 se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Queste definizioni sono in effetti del tutto equivalenti alle definizioni di limiti e continuità per campi vettoriali su \mathbb{R}^2 . Infatti, ogni funzione $f : E \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ può essere vista come un campo vettoriale nel seguente modo: poniamo

$$u(z) := \operatorname{Re}(f(z)) \quad \text{e} \quad v(z) := \operatorname{Im}(f(z)), \quad \text{di modo che} \quad f(z) = u(z) + iv(z)$$

²Dalla quale segue la famosa *identità di Euler*:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

³Ovvero, tale che per ogni $r > 0$ abbiamo $(E \setminus \{a\}) \cap B_r(a) \neq \emptyset$, o equivalentemente tale che per ogni $r > 0$ esiste $z \neq a$ tale che $z \in E$ e $|z - a| < r$. Ricordiamo che, se E è aperto, ogni $a \in E$ è di accumulazione per E .

di modo che $u, v : E \rightarrow \mathbb{R}$, e, sfruttando la corrispondenza fra $z = x + iy \in \mathbb{C}$ e il punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, vediamo che f può essere rappresentata come

$$\tilde{f}(x, y) = (\tilde{u}(x, y), \tilde{v}(x, y)),$$

dove $\tilde{u}(x, y) = u(x + iy)$ e $\tilde{v}(x, y) = v(x + iy)$. In tal modo, deduciamo immediatamente una funzione di variabile complessa è continua se e solo se lo sono le sue parti reali e immaginarie, viste come funzioni di due variabili a valori reali. Vediamo alcuni esempi.

Esempio 5.1.3. La *funzione del coniugio* $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$, è continua. Infatti, è lineare, abbiamo $u(z) = x$ e $v(z) = -y$, e quindi f è naturalmente associata al campo

$$\tilde{f}(x, y) = (x, -y).$$

Esempio 5.1.4. Sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definita da $f(z) = z^2$. Allora, è chiaro che

$$f(z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy,$$

da cui deduciamo $u(z) = x^2 - y^2$ e $v(z) = 2xy$. Quindi, il campo vettoriale associato a f è

$$\tilde{f}(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy),$$

che è ovviamente continuo, essendo composto da funzioni polinomiali.

Data l'identificazione fra $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $z = x + iy \in \mathbb{C}$, nel seguito, data una funzione di variabile complessa f , scriveremo equivalentemente $f(z)$ e $f(x, y)$, con un piccolo abuso di notazione.

Infine, diamo la definizione rigorosa della nozione di polinomio su \mathbb{C} e di radice di un polinomio.

Definizione 5.1.5. Sia $n \in \mathbb{N}_0$. Un *polinomio complesso di grado n* è la funzione

$$p(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n = \sum_{j=0}^n a_jz^j,$$

per certi coefficienti $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, con $a_n \neq 0$. Denotiamo con

$$Z(p) = \{z \in \mathbb{C} : p(z) = 0\}$$

l'insieme delle *radici* di p , ovvero delle soluzioni dell'equazione $p(z) = 0$.

Uno dei risultati più stupefacenti legati alla natura algebrica di \mathbb{C} è il Teorema fondamentale dell'algebra, che afferma che ogni polinomio complesso p di grado n ammette esattamente n radici, contate con la loro molteplicità (ovvero, se due radici sono uguali, vanno contate due volte).

Teorema 5.1.6 (Teorema fondamentale dell'algebra, o di D'Alembert-Gauss). *Sia $p(z) = \sum_{j=0}^n a_jz^j$ un polinomio complesso di grado $n \geq 1$. Allora esistono z_1, \dots, z_n in \mathbb{C} (non necessariamente distinti) tali che*

$$p(z) = a_n(z - z_1) \cdots (z - z_n).$$

In particolare, l'equazione

$$p(z) = 0$$

ha n soluzioni z_1, \dots, z_n (alcune delle quali potrebbero essere tra loro coincidenti), e quindi $Z(p)$ contiene al più n elementi distinti.

Oltre al caso banale delle equazioni di primo grado, sono note le formule risolutive per due rilevanti famiglie di equazioni polinomiali.

Dati $w \in \mathbb{C}$, $w = |w|e^{i\theta}$, per qualche $\theta \in [0, 2\pi)$, e $n \in \mathbb{N}$, abbiamo

$$z^n - w = 0 \iff z^n = w \iff z = |w|^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})} \text{ per } k \in \{0, 1, \dots, n-1\},$$

che è la formula delle *radici n -esime* di un numero complesso.

Siano invece $a, b, c \in \mathbb{C}$ con $a \neq 0$. Allora, se poniamo $\Delta := b^2 - 4ac$ e scriviamo $\Delta = |\Delta|e^{i\theta}$ per qualche $\theta \in [0, 2\pi)$, sfruttiamo la formula per le radici quadrate (il caso $n = 2$ dell'equazione vista sopra) per ottenere

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c = 0 &\iff z = \frac{-b + \sqrt{|\Delta|}e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{2k\pi}{2})}}{2a} \text{ per } k \in \{0, 1\} \\ &\iff z = \frac{-b + \sqrt{|\Delta|}e^{i\frac{\theta}{2}}e^{ik\pi}}{2a} \text{ per } k \in \{0, 1\} \\ &\iff z = \frac{-b \pm \sqrt{|\Delta|}e^{i\frac{\theta}{2}}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{|b^2 - 4ac|}e^{i\frac{\theta}{2}}}{2a}. \end{aligned}$$

In particolare, se $\Delta \in \mathbb{R}$ e $\Delta \geq 0$, allora $\theta = 0$ e le soluzioni sono date da

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Se invece $\Delta \in \mathbb{R}$ e $\Delta < 0$, allora $\theta = \pi$ e le soluzioni sono date da

$$z = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

Infine, è importante notare che il teorema di Ruffini relativo alla divisione per i polinomi reali vale anche su \mathbb{C} , di modo che lo si può usare per ridurre il grado di un polinomio del quale si conoscano già delle radici.

5.2 Funzioni olomorfe

In questa sezione indichiamo sempre con $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un insieme aperto.

Definizione 5.2.1. Siano $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ e $z_0 \in \Omega$. La *derivata complessa* di f in z_0 è il limite

$$\lim_{\mathbb{C} \ni h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} =: f'(z_0),$$

se esiste in \mathbb{C} , e in tal caso f si dice *derivabile (in senso complesso)* in z_0 .

Talvolta, la derivata complessa di f in z_0 si indica con $\frac{df}{dz}(z_0)$.

Esempio 5.2.2. Sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definita da $f(z) = c$ per qualche $c \in \mathbb{C}$, ovvero f è una funzione costante. Allora per ogni $z, h \in \mathbb{C}$ abbiamo

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0,$$

e quindi

$$f'(z) = \lim_{\mathbb{C} \ni h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Di conseguenza, le funzioni costanti hanno derivata nulla, come nel caso reale.

Esempio 5.2.3. Sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definita da $f(z) = z^2$. Mostriamo che f è derivabile su tutto \mathbb{C} : per ogni $z, h \in \mathbb{C}$ abbiamo

$$\frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = \frac{2hz + h^2}{h} = 2z + h,$$

e quindi

$$f'(z) = \lim_{\mathbb{C} \ni h \rightarrow 0} (2z + h) = 2z.$$

Come nel caso delle derivate di funzioni di una variabile reale, una funzione derivabile in senso complesso è anche continua.

Lemma 5.2.4. Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ è derivabile in $z_0 \in \Omega$, allora f è continua in z_0 .

Dimostrazione. Per la definizione di derivata, abbiamo

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = f'(z_0)h + o(h) \rightarrow 0 \quad \text{per } h \rightarrow 0,$$

e quindi, se poniamo $z = z_0 + h$, otteniamo

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0) \rightarrow f(z_0) \quad \text{per } z \rightarrow z_0.$$

□

Ciò suggerisce che la nozione di derivata in senso complesso sia più forte di quella di semplice esistenza delle derivate parziali in senso reale in \mathbb{R}^2 .

Definizione 5.2.5. Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. La funzione f è *olomorfa* in Ω se è derivabile in ogni punto $z \in \Omega$, ovvero se $f'(z)$ esiste per ogni $z \in \Omega$. Se $\Omega = \mathbb{C}$, allora f è *intera*.

Mostriamo con un esempio che non tutte le funzioni complesse sono derivabili nel loro dominio.

Esempio 5.2.6. Sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definita da $f(z) = \bar{z}$. Facciamo vedere che f non è olomorfa, in quanto non è derivabile in nessun punto $z \in \mathbb{C}$. Per far vedere che non esiste il limite del rapporto incrementale, è sufficiente mostrare che, calcolando il limite lungo diverse rette che passano per l'origine, si ottengono risultati diversi. Quindi, poniamo $h = \varepsilon e^{i\theta}$ per qualche $\theta \in [0, 2\pi)$ e notiamo che

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\bar{z} + \bar{h} - \bar{z}}{h} = \frac{\bar{h}}{h} = \frac{\varepsilon e^{-i\theta}}{\varepsilon e^{i\theta}} = e^{-2i\theta}.$$

Ora, se mandiamo $\varepsilon \rightarrow 0^+$, ovvero se calcoliamo il limite lungo la retta che forma un angolo θ con il semiasse positivo dell'asse delle ascisse, vediamo che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{f(z + \varepsilon e^{i\theta}) - f(z)}{\varepsilon e^{i\theta}} = e^{-2i\theta},$$

che ovviamente dipende dalla retta scelta. In particolare, se $\theta = 0$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$ (ovvero, se ci muoviamo lungo i semiassi positivi degli assi x e y), otteniamo

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{f(z + \varepsilon) - f(z)}{\varepsilon} = 1$$

e

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{f(z + i\varepsilon) - f(z)}{i\varepsilon} = e^{-i\pi} = -1,$$

e dunque concludiamo che il limite (complesso) del rapporto incrementale non esiste. Tuttavia, è interessante notare che il campo vettoriale su \mathbb{R}^2 associato a f , ovvero

$$\tilde{f}(x, y) = (x, -y)$$

(si veda l'Esempio 5.1.3), è chiaramente differenziabile con continuità in senso reale: questo ci fa capire che la richiesta di derivabilità in senso complesso è più forte di quella dell'esistenza e della continuità delle derivate parziali in senso reale.

In maniera analoga, si può dimostrare che anche la funzione $g(z) = |z|^2$ non è derivabile in senso complesso in nessun punto. Lasciamo la dimostrazione per esercizio.

Le funzioni olomorfe sono in effetti molto più regolari, rispetto alle funzioni derivabili di variabile reale.

Teorema 5.2.7 (Condizioni di Cauchy-Riemann). Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Poniamo $f = u + iv$, dove $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Allora f è olomorfa in Ω se e solo se $u, v \in C^1(\Omega)$ e soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \partial_x u(z) = \partial_y v(z), \\ \partial_x v(z) = -\partial_y u(z), \end{cases}$$

per ogni $z \in \Omega$. Inoltre, se f è olomorfa, abbiamo

$$f'(z) = \partial_x f(z) = \partial_x u(z) + i\partial_x v(z) = -i\partial_y u(z) + \partial_y v(z) = -i\partial_y f(z). \quad (5.2.1)$$

Dimostrazione. Assumiamo che f sia olomorfa in Ω e $u, v \in C^1(\Omega)$, e dimostriamo solo le equazioni di Cauchy-Riemann. Per ogni $z \in \Omega$ calcoliamo il limite del rapporto incrementale per incrementi reali $h \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \lim_{\mathbb{R} \ni h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \lim_{\mathbb{R} \ni h \rightarrow 0} \frac{u(z+h) - u(z)}{h} + \lim_{\mathbb{R} \ni h \rightarrow 0} i \frac{v(z+h) - v(z)}{h} \\ &= \lim_{\mathbb{R} \ni h \rightarrow 0} \frac{u(x+h+iy) - u(x+iy)}{h} + \\ &\quad + i \lim_{\mathbb{R} \ni h \rightarrow 0} \frac{v(x+h+iy) - v(x+iy)}{h} \\ &= \partial_x u(z) + i \partial_x v(z). \end{aligned}$$

Se invece consideriamo incrementi puramente immaginari ih per $h \in \mathbb{R}$, otteniamo

$$\begin{aligned} \lim_{\mathbb{R} \ni h \rightarrow 0} \frac{f(z+ih) - f(z)}{ih} &= \lim_{\mathbb{R} \ni h \rightarrow 0} \frac{u(x+i(y+h)) - u(x+iy)}{ih} + \\ &\quad + \lim_{\mathbb{R} \ni h \rightarrow 0} i \frac{v(x+i(y+h)) - v(x+iy)}{ih} \\ &= \frac{1}{i} \partial_y u(z) + \partial_y v(z) = -i \partial_y u(z) + \partial_y v(z). \end{aligned}$$

Dato che entrambi i limiti sono uguali a $f'(z)$, concludiamo che

$$\partial_x u(z) + i \partial_x v(z) = f'(z) = -i \partial_y u(z) + \partial_y v(z) \Leftrightarrow \partial_x u(z) = \partial_y v(z) \text{ e } \partial_x v(z) = -\partial_y u(z).$$

□

Applichiamo le equazioni di Cauchy-Riemann per verificare che alcune funzioni elementari sono (o non sono) olomorfe.

Esempio 5.2.8. Sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definita da $f(z) = z$, di modo che $u(z) = x$ e $v(z) = y$. Queste funzioni appartengono a $C^1(\mathbb{R}^2)$, e soddisfano

$$\begin{aligned} \partial_x u(z) &= 1 = \partial_y v(z), \\ \partial_y u(z) &= 0 = -\partial_x v(z). \end{aligned}$$

Dunque f è olomorfa in \mathbb{C} , e perciò è intera. In particolare, grazie a (5.2.1), vediamo che

$$f'(z) = \frac{\partial}{\partial x} z = \frac{\partial}{\partial x} x + i \frac{\partial}{\partial x} y = 1.$$

Esempio 5.2.9. Sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definita da $f(z) = z^2$. Abbiamo visto che $u(z) = x^2 - y^2$ e $v(z) = 2xy$. Queste funzioni appartengono a $C^1(\mathbb{R}^2)$, e soddisfano

$$\begin{aligned} \partial_x u(z) &= 2x = \partial_y v(z), \\ \partial_y u(z) &= -2y = -\partial_x v(z). \end{aligned}$$

Dunque f è olomorfa in \mathbb{C} , e perciò è intera. In particolare, grazie a (5.2.1), vediamo che

$$f'(z) = \frac{\partial}{\partial x} z^2 = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 - y^2) + i \frac{\partial}{\partial x} (2xy) = 2x + 2iy = 2z.$$

Esempio 5.2.10. Sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definita da $f(z) = \bar{z}$, di modo che $u(z) = x$ e $v(z) = -y$. Allora abbiamo

$$\begin{aligned} \partial_x u(z) &= 1 \neq \partial_y v(z) = -1, \\ \partial_y u(z) &= 0 = -\partial_x v(z). \end{aligned}$$

Quindi, la prima equazione di Cauchy-Riemann non è mai soddisfatta, e infatti f non è olomorfa in \mathbb{C} (o su qualunque aperto Ω).

Esempio 5.2.11. Sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definita da

$$f(z) = e^z := e^{x+iy} := e^x e^{iy} = e^x \cos(y) + ie^x \sin(y).$$

Di conseguenza, abbiamo $u(z) = e^x \cos(y)$ e $v(z) = e^x \sin(y)$. Queste funzioni appartengono a $C^1(\mathbb{R}^2)$, e soddisfano

$$\begin{aligned} \partial_x u(z) &= e^x \cos(y) = \partial_y v(z), \\ \partial_y u(z) &= -e^x \sin(y) = -\partial_x v(z). \end{aligned}$$

Dunque f è olomorfa in \mathbb{C} , e perciò è intera. In particolare, grazie a (5.2.1), vediamo che

$$\frac{d}{dz} e^z = \frac{\partial}{\partial x} e^z = \partial_x u(z) + i \partial_x v(z) = e^x \cos(y) + ie^x \sin(y) = e^z.$$

Dato che la definizione di derivata complessa è del tutto analoga a quella delle derivate reali in una variabile, valgono le usuali regole di derivazione.

Teorema 5.2.12. Siano $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfe in Ω e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Allora abbiamo:

1) $\alpha f + \beta g$ è olomorfa in Ω e

$$(\alpha f + \beta g)'(z) = \alpha f'(z) + \beta g'(z) \quad \text{per ogni } z \in \Omega;$$

2) fg è olomorfa in Ω e

$$(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z) \quad \text{per ogni } z \in \Omega;$$

3) $\frac{f}{g}$ è olomorfa in $\{z \in \Omega : g(z) \neq 0\} = \Omega \setminus Z(g)$ e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)} \quad \text{per ogni } z \in \Omega \text{ tale che } g(z) \neq 0.$$

Vale anche un analogo risultato per la derivazione delle funzioni composte.

Teorema 5.2.13. Siano $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa in Ω , $A \subset \mathbb{C}$ un aperto tale che $f(\Omega) \subseteq A$ e $g : A \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa in A . Allora $g \circ f$ è olomorfa in Ω e abbiamo

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) f'(z) \quad \text{per ogni } z \in \Omega.$$

Come applicazione di questi risultati, mostriamo che il seno e il coseno complessi sono funzioni intere.

Esempio 5.2.14. Per definizione, abbiamo

$$\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{e} \quad \sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Le funzioni e^{iz} ed e^{-iz} sono ovviamente intere, visto che sono la composizione della funzione esponenziale $f(z) = e^z$ con le funzioni $g_1(z) = iz$ e $g_2(z) = -iz$, rispettivamente. Quindi, anche $\cos(z)$ e $\sin(z)$ sono intere, visto che sono combinazioni lineari di queste due funzioni. Inoltre, applicando le regole per il calcolo delle derivate, vediamo facilmente che

$$\frac{d}{dz} \cos(z) = \frac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2} = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin(z)$$

e

$$\frac{d}{dz} \sin(z) = \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos(z).$$

Consideriamo poi la versione complessa della funzione gaussiana.

Esempio 5.2.15. La funzione $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $h(z) = e^{z^2}$, è intera. Infatti, chiaramente le funzioni $f(z) = e^z$ e $g(z) = z^2$ sono olomorfe su \mathbb{C} , e dunque intere, e perciò lo è la loro composizione. Inoltre, abbiamo

$$h'(z) = 2ze^{z^2}.$$

Analogamente, la funzione $h(z) = e^{-z^2}$ è intera, con derivata $h'(z) = -2ze^{-z^2}$.

In particolare, deduciamo da questi risultati che ogni funzione elementare, ovvero una funzione che sia il risultato di somme, prodotti, rapporti e composizioni di polinomi, esponenziali e funzioni trigonometriche⁴, è olomorfa nel suo dominio di definizione.

Vediamo quindi come calcolare la derivata di un polinomio complesso.

Esempio 5.2.16. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ la funzione $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z^n$, è intera. Infatti è data dal prodotto di n funzioni $h(z) = z$. Applicando la formula (5.2.1) vediamo che

$$\frac{d}{dz} z^n = \frac{\partial}{\partial x} (x + iy)^n = n(x + iy)^{n-1} = nz^{n-1}.$$

Quindi, dato un polinomio complesso $p(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$, per certi $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, sfruttiamo la linearità della derivazione per dedurre che

$$p'(z) = \sum_{j=1}^n j a_j z^{j-1},$$

in perfetta analogia con il caso dei polinomi reali.

Come conseguenza di questo risultato, e della regola di derivazione dei rapporti di funzioni olomorfe, concludiamo che anche le funzioni razionali fratte si derivano come nel caso reale. Mostriamo in particolare il caso delle potenze negative di z .

Esempio 5.2.17. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ la funzione $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z^{-n} = \frac{1}{z^n}$, è olomorfa. Applicando la regola della derivata del rapporto e il fatto che la derivata della funzione costante è nulla, vediamo che

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z^n} \right) = \frac{-nz^{n-1}}{z^{2n}} = -\frac{n}{z^{n+1}}.$$

5.3 Integrali curvilinei di funzioni complesse

Visto che ogni funzione di variabile complessa f può essere vista come un campo vettoriale su \mathbb{R}^2 , è sensato definire una sorta di “lavoro” di f lungo una curva γ nel piano complesso. Data la corrispondenza biunivoca fra \mathbb{C} e \mathbb{R}^2 , la definizioni legate al concetto di curva che abbiamo visto in precedenza negli spazi euclidei si trasportano con naturalezza nel piano complesso. Raccogliamo quelle rilevanti per questo capitolo nella seguente definizione.

Definizione 5.3.1. Sia $E \subseteq \mathbb{C}$. Una *curva* in E è una funzione continua

$$\gamma : [a, b] \rightarrow E, \quad \gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t),$$

per certi $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, e $\gamma_1, \gamma_2 \in C([a, b]; \mathbb{R})$. Diciamo poi che γ è *chiusa* se $\gamma(a) = \gamma(b)$, e che è *semplice e chiusa* se $\gamma(t) \neq \gamma(s)$ per ogni $t, s \in [a, b]$, con $t \neq s$, e $\gamma(a) = \gamma(b)$. Infine, γ è *differenziabile a tratti*, e scriviamo $\gamma \in C_{\text{tr}}^1([a, b]; E)$, se esistono $t_0, t_1, \dots, t_k \in [a, b]$ tali che $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ e $\gamma \in C^1([t_{j-1}, t_j]; E)$ per ogni $j = 1, \dots, k$.

Quindi, se γ è una C^1 a tratti, allora la sua derivata $\dot{\gamma}$ è ben definita su tutto $[a, b]$ tranne al più in un numero finito di punti. In particolare, le derivate da sinistra e da destra di γ esistono su tutto $[a, b]$, ma possono assumere valori diversi nei punti $\{t_1, \dots, t_{k-1}\}$.

Enunciamo senza dimostrarlo un opportuno adattamento complesso della regola della derivazione della funzione composta per campi e curve.

⁴A essere precisi, andrebbero inserite nella lista anche le funzioni inverse, come il logaritmo e le funzioni radici, ma queste presentano alcuni problemi di buona positura sul piano complesso, la trattazione dei quali va al di là degli scopi di questo corso.

Proposizione 5.3.2. Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa in Ω e $\gamma \in C_{\text{tr}}^1([a, b]; \Omega)$. Allora, per ogni $t \in [a, b]$ tale che esiste $\dot{\gamma}(t)$, abbiamo

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = f'(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t). \quad (5.3.1)$$

Possiamo ora definire l'integrale lungo una curva complessa.

Definizione 5.3.3. Siano $\gamma \in C_{\text{tr}}^1([a, b]; \Omega)$ e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua. L'integrale di f lungo γ è

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt,$$

dove $f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t)$ è un prodotto di numeri complessi.

Un modo informale per ricordarsi la formula dell'integrale curvilineo di una funzione complessa è il seguente:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = [z = \gamma(t)] = \int_a^b f(\gamma(t)) d(\gamma(t)) = \int_a^b f(\gamma(t)) \frac{d(\gamma(t))}{dt} dt = \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt.$$

Inoltre, notiamo che, visto che $\dot{\gamma}$ può essere discontinua in un numero finito di punti $t_1, \dots, t_{k-1} \in [a, b]$, l'integrale va inteso in senso improprio di Riemann, ovvero

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt := \int_a^{t_1} f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt + \dots + \int_{t_{k-1}}^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt.$$

In maniera analoga a quanto visto per il lavoro di un campo, si può mostrare che l'integrale curvilineo di una funzione complessa è lineare e non dipende dalla parametrizzazione della curva, purché tale parametrizzazione abbia velocità non nulla e preservi il verso di percorrenza. Se si cambia il verso di percorrenza, l'integrale curvilineo cambia segno. Enunciamo precisamente questi fatti.

Proposizione 5.3.4. Siano $\gamma \in C_{\text{tr}}^1([a, b]; \Omega)$, $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continue e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Allora

$$1) \int_{\gamma} (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz = \alpha \int_{\gamma} f(z) dz + \beta \int_{\gamma} g(z) dz;$$

2) se γ^{-1} è la curva γ percorsa in senso inverso (o $-\gamma$, secondo la notazione introdotta nella Definizione 3.1.7), parametrizzata ad esempio come $\gamma^{-1}(t) = \gamma(b - t)$, $t \in [0, b - a]$, allora

$$\int_{\gamma^{-1}} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz;$$

3) per ogni funzione biunivoca $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ tale che $\varphi \in C^1([c, d])$ e $\varphi'(u) > 0$ per ogni $u \in [c, d]$ abbiamo

$$\int_{\gamma \circ \varphi} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz;$$

4) se $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ per certe curve $\gamma_1, \gamma_2 \in C^1$ a tratti in Ω , nel senso che percorrere γ equivale a percorrere prima γ_1 e poi γ_2 (secondo la notazione introdotta nella Definizione 3.1.7), allora

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

Vediamo un esempio.

Esempio 5.3.5. Siano $f(z) = e^z$ e $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ data da

$$\gamma(t) = \begin{cases} e^{it} & \text{se } t \in [0, \pi] \\ \frac{2}{\pi}t - 3 & \text{se } t \in [\pi, 2\pi] \end{cases},$$

che è la semicirconferenza unitaria centrata nell'origine nel semipiano immaginario positivo, unita al diametro sull'asse reale percorso da -1 a 1 . Osserviamo che

$$\frac{d}{dt}e^{it} = \frac{d}{dt}(\cos(t) + i\sin(t)) = -\sin(t) + i\cos(t) = i(\cos(t) + i\sin(t)) = ie^{it}$$

e

$$\frac{d}{dt}e^{e^{it}} = e^{e^{it}} ie^{it},$$

grazie a (5.3.1). Chiaramente

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{cases} ie^{it} & \text{se } t \in [0, \pi] \\ \frac{2}{\pi} & \text{se } t \in [\pi, 2\pi] \end{cases},$$

e quindi $\dot{\gamma}$ è discontinua nei punti $t_0 = 0, t_1 = \pi, t_2 = 2\pi$. Allora abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} e^z dz &= \int_0^{\pi} e^{e^{it}} ie^{it} dt + \int_{\pi}^{2\pi} e^{\frac{2}{\pi}t-3} \frac{2}{\pi} dt \\ &= \left[e^{e^{it}} \right]_0^{\pi} + \left[e^{\frac{2}{\pi}t-3} \right]_{\pi}^{2\pi} = e^{-1} - e^1 + e^1 - e^{-1} = 0. \end{aligned}$$

Osserviamo che possiamo anche non dare un'unica parametrizzazione di γ , ma parametrizzare separatamente la semicirconferenza e il diametro:

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2, \quad \text{dove } \gamma_1(t) = e^{it}, t \in [0, \pi] \quad \text{e } \gamma_2(t) = t, t \in [-1, 1].$$

In virtù dei punti (3) e (4) della Proposizione 5.3.4, si ottiene lo stesso risultato, come possiamo verificare:

$$\int_{\gamma} e^z dz = \int_{\gamma_1} e^z dz + \int_{\gamma_2} e^z dz = \left[e^{e^{it}} \right]_0^{\pi} + \int_{-1}^1 e^t dt = e^{-1} - e + \left[e^t \right]_{-1}^1 = e^{-1} - e + e - e^{-1} = 0.$$

Notiamo che possiamo scrivere l'integrale di una funzione continua f lungo γ in termini delle sue parti reali e immaginarie: se $f = u + iv$ e $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, allora

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b (u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t))) (\dot{x}(t) + i\dot{y}(t)) dt \\ &= \int_a^b \left[(u(\gamma(t))\dot{x}(t) - v(\gamma(t))\dot{y}(t)) + i(u(\gamma(t))\dot{y}(t) + v(\gamma(t))\dot{x}(t)) \right] dt \\ &= \int_a^b (u(\gamma(t)), -v(\gamma(t))) \cdot (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) dt + i \int_a^b (v(\gamma(t)), u(\gamma(t))) \cdot (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) dt \\ &= \int_{\Gamma} G(w) \cdot dw + i \int_{\Gamma} H(w) \cdot dw, \end{aligned} \tag{5.3.2}$$

dove

$$\Gamma(t) = (x(t), y(t)), \quad G(x, y) = (u(x, y), -v(x, y)) \quad \text{e} \quad H(x, y) = (v(x, y), u(x, y)).$$

Quindi, l'integrale di una funzione continua complessa f lungo una curva è uguale alla somma complessa del lavoro (reale) di due campi vettoriali⁵.

Sfruttiamo quindi la teoria sul lavoro dei campi per dimostrare il seguente risultato⁶.

⁵Alternativamente, si può riformulare questa argomentazione usando la notazione delle forme differenziali: osserviamo che

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b \left[(u(\gamma(t))\dot{x}(t) - v(\gamma(t))\dot{y}(t)) + i(u(\gamma(t))\dot{y}(t) + v(\gamma(t))\dot{x}(t)) \right] dt \\ &= \int_{\gamma} (u dx - v dy) + i \int_{\gamma} (v dx + u dy). \end{aligned}$$

Dunque la forma differenziale complessa $f(z) dz$ soddisfa la relazione

$$f(z) dz = (u(x, y) + iv(x, y))(dx + idy) = (u(x, y) dx - v(x, y) dy) + i(v(x, y) dx + u(x, y) dy).$$

⁶O la sua equivalente versione con le forme differenziali, osservando che una forma differenziale complessa C^1 è chiusa se e solo se lo sono la sua parte reale e la sua parte immaginaria.

Teorema 5.3.6. Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, con $f = u + iv$, dove $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Allora f è olomorfa in Ω se e solo se i campi $(u, -v)$ e (v, u) appartengono a $C^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ e sono chiusi⁷.

Dimostrazione. Assumendo $u, v \in C^1(\Omega)$, vediamo che i campi $(u, -v)$ e (v, u) sono chiusi se e solo se

$$\partial_y u = -\partial_x v \quad \text{e} \quad \partial_y v = \partial_x u,$$

che sono le equazioni di Cauchy-Riemann (scambiate di ordine). Per il Teorema 5.2.7 risulta quindi che, se f è olomorfa in Ω , allora $u, v \in C^1(\Omega)$ e soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann, e quindi $(u, -v), (v, u) \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ e sono chiusi. Viceversa, se $(u, -v), (v, u) \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$, allora ovviamente $u, v \in C^1(\Omega)$, e, se questi campi sono chiusi, allora le equazioni di Cauchy-Riemann sono soddisfatte, e dunque f è olomorfa in Ω , di nuovo per il Teorema 5.2.7. \square

Osservazione 5.3.7. [Non visto a lezione.] Equivalentemente, $u, v \in C^1(\Omega)$ soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann se e solo se i campi $G = (u, -v)$ e $H = (v, u)$ hanno rotore nullo: infatti, se poniamo

$$\tilde{G}(x, y, z) = (u(x, y), -v(x, y), 0) \quad \text{e} \quad \tilde{H}(x, y, z) = (v(x, y), u(x, y), 0),$$

abbiamo

$$\nabla \times \tilde{G} = (0, 0, -\partial_x v - \partial_y u) \quad \text{e} \quad \nabla \times \tilde{H} = (0, 0, \partial_x u - \partial_y v).$$

Una conseguenza fondamentale del Teorema 5.3.6 è che l'integrale di funzioni olomorfe lungo curve chiuse deformabili a un punto è nullo.

Teorema 5.3.8 (Teorema integrale di Cauchy). Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa. Allora, per ogni curva chiusa $\gamma \in C_{\text{tr}}^1([a, b]; \Omega)$, che sia deformabile con continuità a un punto in Ω , abbiamo

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

In particolare, se Ω è semplicemente connesso, allora il risultato è valido per ogni curva chiusa C^1 a tratti.

Dimostrazione. Per il Teorema 5.3.6 sappiamo che $(u, -v), (v, u) \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ e sono chiusi, quindi possiamo applicare il Teorema 3.3.14 per concludere che il lavoro dei campi $(u, -v)$ e (v, u) lungo una curva chiusa C^1 a tratti deformabile con continuità a un punto in Ω è nullo. Se poi Ω è semplicemente connesso, applichiamo il teorema di Poincaré-Volterra globale (Teorema 3.3.17) per concludere che i campi $(u, -v)$ e (v, u) sono esatti, e dunque il loro lavoro lungo curve chiuse C^1 a tratti è nullo. Quindi, grazie a (5.3.2), queste conclusioni si applicano all'integrale curvilineo di f . \square

Vediamo il calcolo di integrali curvilinei di una famiglia fondamentale di funzioni di variabile complessa.

Esempio 5.3.9. Siano $n \in \mathbb{Z}$ e $f(z) = z^n$. Se $n \geq 0$, f è olomorfa in \mathbb{C} , e dunque per il teorema integrale di Cauchy otteniamo

$$\int_{\gamma} z^n dz = 0$$

per ogni curva chiusa $\gamma \in C_{\text{tr}}^1([a, b]; \mathbb{C})$. Se invece $n \leq -1$, f è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, quindi il teorema integrale di Cauchy non si può applicare a curve che passano attorno all'origine, le quali non possono essere deformate a un punto in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. In particolare, consideriamo la circonferenza centrata nell'origine di raggio $r > 0$ (percorsa in senso antiorario): se $\gamma_r(t) = re^{it}$ per $t \in [0, 2\pi]$, abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_r} z^n dz &= \int_0^{2\pi} r^n e^{int} i r e^{it} dt = \begin{cases} \int_0^{2\pi} i dt & \text{se } n = -1 \\ \int_0^{2\pi} i r^{n+1} e^{i(n+1)t} dt & \text{se } n \neq -1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2\pi i & \text{se } n = -1 \\ \left[r^{n+1} \frac{e^{i(n+1)t}}{n+1} \right]_0^{2\pi} & \text{se } n \neq -1 \end{cases} = \begin{cases} 2\pi i & \text{se } n = -1 \\ 0 & \text{se } n \neq -1 \end{cases}. \end{aligned}$$

⁷Ovvero se e solo se la forma differenziale complessa $f(z)dz$ è chiusa in Ω .

Più in generale, per $z_0 \in \mathbb{C}$ e $r > 0$ consideriamo $\gamma_{z_0, r}(t) = z_0 + re^{it}$ per $t \in [0, 2\pi]$, ovvero, la circonferenza centrata in z_0 di raggio r percorsa in senso antiorario: allora abbiamo

$$\int_{\gamma_{z_0, r}} \frac{1}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} rie^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i \quad (5.3.3)$$

e

$$\int_{\gamma_{z_0, r}} (z - z_0)^n dz = \int_0^{2\pi} r^n e^{int} rie^{it} dt = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = 0$$

per ogni $n \in \mathbb{Z}, n \neq -1$.

Osservazione 5.3.10. L'esempio precedente mostra, in particolare, che

$$\int_{\gamma_r} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \quad (5.3.4)$$

per $\gamma_r(t) = re^{it}, \gamma_r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$. Come abbiamo visto in precedenza, l'integrale curvilineo complesso può essere visto come una somma complessa di lavori reali. Nel caso particolare di $f(z) = \frac{1}{z}$, per $z \neq 0$, abbiamo

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2},$$

di modo che $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ per

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad v(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Quindi, vediamo che

$$G(x, y) = (u(x, y), -v(x, y)) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right),$$

$$H(x, y) = (v(x, y), u(x, y)) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Ciò significa che

$$\int_{\gamma_r} \frac{1}{z} dz = \int_{\Gamma_r} G(w) \cdot dw + i \int_{\Gamma_r} F(w) \cdot dw,$$

dove $\Gamma_r(t) = (r \cos(t), r \sin(t)), t \in [0, 2\pi]$. Osserviamo che il campo G è esatto in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, essendo che

$$G(x, y) = \nabla \phi(x, y) \quad \text{per} \quad \phi(x, y) = \log(\sqrt{x^2 + y^2})$$

(si veda l'Osservazione 3.3.18); mentre F è l'esempio di campo chiuso che non è esatto che abbiamo visto in Esempio 3.3.7. Di conseguenza, abbiamo

$$\int_{\Gamma_r} G(w) \cdot dw = 0 \quad \text{e} \quad \int_{\Gamma_r} F(w) \cdot dw = 2\pi,$$

e quindi otteniamo di nuovo (5.3.4).

Presentiamo ora il secondo risultato fondamentale relativo al calcolo di integrali curvilinei in \mathbb{C} . Allo scopo, definiamo rigorosamente il concetto di "regione del piano circondata da una curva".

Definizione 5.3.11. Sia $\gamma \in C_{\text{tr}}^1([a, b]; \Omega)$ una curva semplice e chiusa. La *regione circondata da γ in Ω* è l'insieme aperto $D(\gamma) \subset \Omega$, dato dalla componente connessa per archi di $\Omega \setminus \gamma([a, b])$ che si trova sempre sulla sinistra rispetto al verso di percorrenza di γ .

Teorema 5.3.12 (Formula integrale di Cauchy). *Siano $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa, e $\gamma \in C_{\text{tr}}^1([a, b]; \Omega)$ una curva semplice e chiusa, che sia deformabile con continuità a un punto in Ω , e che sia percorsa in senso antiorario. Sia $z_0 \in D(\gamma)$. Allora abbiamo*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

In particolare, se Ω è semplicemente connesso, il risultato è valido per ogni curva C^1 a tratti, semplice e chiusa, e percorsa in senso antiorario.

Dimostrazione. Osserviamo che la funzione $h(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$ è olomorfa in $\Omega \setminus \{z_0\}$. Sia

$$\gamma_{z_0, r}(t) = z_0 + re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

la circonferenza percorsa in senso antiorario di centro z_0 e raggio r , per $r > 0$ piccolo a sufficienza di modo che $\gamma_{z_0, r}([0, 2\pi]) \subset D(\gamma)$. Sia δ un segmento che va da un punto di γ a un punto di $\gamma_{z_0, r}$. Allora la curva $\Gamma = \gamma + \delta - \gamma_{z_0, r} - \delta$ è una curva chiusa deformabile con continuità ad un punto in $\Omega \setminus \{z_0\}$. Infatti, visto che il segmento δ viene percorso due volte (in sensi opposti), si può deformare con continuità Γ allontanando le due curve δ e $-\delta$ l'una dall'altra: in questo modo, stiamo "aprendo" la curva γ e la circonferenza $\gamma_{z_0, r}$, di modo che non facciamo più un giro completo attorno al punto z_0 , e dunque riusciamo ora a deformare con continuità questa curva a un punto in $\Omega \setminus \{z_0\}$. Quindi, per il teorema integrale di Cauchy abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \int_{\delta} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \int_{\gamma_{z_0, r}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \int_{\delta} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\ &= \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \int_{\gamma_{z_0, r}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \end{aligned}$$

ovvero

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma_{z_0, r}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt = i \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt.$$

D'altra parte, osserviamo che $r > 0$ è arbitrario (purché piccolo abbastanza) e quindi possiamo prendere il limite per $r \rightarrow 0^+$:

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = i \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt.$$

Inoltre, dato che f è continua (essendo olomorfa), vediamo che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $r_0 > 0$ tale che

$$|f(z_0 + re^{it}) - f(z_0)| < \varepsilon \quad \text{per ogni } 0 < r < r_0,$$

dato che $|z_0 + re^{it} - z_0| = r$. Di conseguenza, concludiamo che⁸

$$\left| \int_0^{2\pi} (f(z_0 + re^{it}) - f(z_0)) dt \right| \leq \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it}) - f(z_0)| dt < 2\pi\varepsilon \quad \text{per ogni } r < r_0.$$

Ciò significa che

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt = \int_0^{2\pi} f(z_0) dt = 2\pi f(z_0).$$

□

Osserviamo che la formula integrale di Cauchy è un risultato estremamente potente: significa che, se conosciamo una funzione olomorfa f lungo una curva C^1 a tratti, semplice e chiusa, allora possiamo determinare il valore di f in ogni punto z_0 nella regione del piano delimitata dalla curva stessa. Questo è falso per le funzioni differenziabili reali di variabili reale: non basta conoscere il valore sui punti estremi di un intervallo per conoscere quello all'interno (né tanto meno è vero l'analogo in due dimensioni).

Vediamo ora delle applicazioni del teorema integrale e della formula integrale di Cauchy al calcolo di integrali reali⁹.

⁸Data una funzione vettoriale $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, abbiamo

$$\left\| \int_a^b g(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|g(t)\| dt,$$

e in particolare ciò è vero per funzioni a valori complessi, grazie all'identificazione fra vettori in \mathbb{R}^2 e numeri complessi, e a quella fra la norma in \mathbb{R}^2 e il modulo in \mathbb{C} .

⁹"La via più breve fra due verità sulla retta dei numeri reali passa attraverso il piano complesso", Jacques Hadamard.

Esempio 5.3.13. Calcoliamo $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$.

Osserviamo che questo è un integrale improprio di Riemann, quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx := \lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\sin(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^R \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

A voler essere precisi, i limiti a $-\infty$ e 0^- andrebbero fatti usando altre variabili, ma, dato che $\frac{\sin(x)}{x}$ è pari, si possono usare le stesse. Ora, vogliamo mostrare che l'espressione

$$I_{R,\varepsilon} = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\sin(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^R \frac{\sin(x)}{x} dx, \quad \text{per } R > \varepsilon > 0,$$

è uguale a un'altra della quale sappiamo calcolare i limiti. Osserviamo che $\frac{\cos(x)}{x}$ è una funzione dispari su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, quindi

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\cos(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^R \frac{\cos(x)}{x} dx = 0.$$

Ne segue perciò che

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx = iI_{R,\varepsilon}.$$

Consideriamo perciò la funzione $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$, che è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Consideriamo la curva C^1 a tratti, semplice e chiusa

$$\Gamma_{\varepsilon,R} = \gamma_R + \ell_{-R,-\varepsilon} + \gamma_{\varepsilon} + \ell_{\varepsilon,R} \quad \text{per } R > \varepsilon > 0,$$

dove

- γ_R è la semicirconferenza di raggio R centrata nell'origine nel semipiano $\{y > 0\}$, percorsa in senso antiorario, parametrizzata ad esempio da $\gamma_R(t) = Re^{it}$ per $t \in [0, \pi]$,
- $\ell_{-R,-\varepsilon}$ è il segmento sulla retta reale che va da $-R$ a $-\varepsilon$, parametrizzato ad esempio da $\ell_{-R,-\varepsilon}(t) = t$ per $t \in [-R, -\varepsilon]$,
- γ_{ε} è semicirconferenza di raggio ε centrata nell'origine nel semipiano $\{y > 0\}$, percorsa in senso orario, parametrizzata ad esempio da $\gamma_{\varepsilon}(t) = \varepsilon e^{i(\pi-t)} = -\varepsilon e^{-it}$ per $t \in [0, \pi]$,
- $\ell_{\varepsilon,R}$ è il segmento sulla retta reale che va da ε a R , parametrizzato ad esempio da $\ell_{\varepsilon,R}(t) = t$ per $t \in [\varepsilon, R]$.

Osserviamo che $\Gamma_{\varepsilon,R}$ è deformabile a un punto in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, poiché è in effetti contenuta in

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : |z| > \frac{\varepsilon}{2}, \operatorname{Im}(z) > -\frac{\varepsilon}{4} \right\},$$

e questo aperto è semplicemente connesso, dato che non ha "buchi". Dunque, applichiamo il teorema integrale di Cauchy a f e $\Gamma_{\varepsilon,R}$ e otteniamo

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

D'altra parte, l'integrale curvilineo si scompone in quattro parti:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} \frac{e^{iz}}{z} dz &= \int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}} Rie^{it} dt + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{it}}{t} dt + \int_0^{\pi} \frac{e^{-i\varepsilon e^{-it}}}{-\varepsilon e^{-it}} \varepsilon i e^{-it} dt + \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{it}}{t} dt \\ &= i \int_0^{\pi} e^{iRe^{it}} dt - i \int_0^{\pi} e^{-i\varepsilon e^{-it}} dt + iI_{R,\varepsilon}. \end{aligned}$$

Quindi da queste due equazioni ricaviamo

$$I_{R,\varepsilon} = \int_0^{\pi} e^{-i\varepsilon e^{-it}} dt - \int_0^{\pi} e^{iRe^{it}} dt.$$

Vediamo prima il limite per $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Dato che la funzione e^{iz} è continua, possiamo ragionare come nella dimostrazione del Teorema 5.3.12 per concludere che¹⁰

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^\pi e^{-i\varepsilon e^{-it}} dt = \int_0^\pi 1 dt = \pi.$$

Per quanto riguarda il limite per $R \rightarrow +\infty$, osserviamo che

$$e^{iRe^{it}} = e^{iR \cos(t) - R \sin(t)},$$

e quindi

$$\left| e^{iRe^{it}} \right| = e^{-R \sin(t)}.$$

Notiamo che $\sin(t) \geq \frac{2}{\pi}t$ per ogni $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, e perciò

$$e^{-R \sin(t)} \leq e^{-R \frac{2}{\pi}t} \text{ per ogni } t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Grazie alla simmetria della funzione seno rispetto a $\frac{\pi}{2}$, abbiamo

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi e^{iRe^{it}} dt \right| &\leq \int_0^\pi e^{-R \sin(t)} dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin(t)} dt \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \frac{2}{\pi}t} dt \\ &= 2 \left[-\frac{\pi}{2R} e^{-R \frac{2}{\pi}t} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{R} (1 - e^{-R}) \rightarrow 0 \text{ per } R \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

In conclusione, otteniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_{R,\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^\pi e^{-i\varepsilon e^{-it}} dt - \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi e^{iRe^{it}} dt = \pi.$$

Esempio 5.3.14. [Non visto a lezione.] Mostriamo come calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ usando la formula integrale di Cauchy. Anche in questo caso si tratta di un integrale improprio di Riemann di una funzione pari, e quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Perciò ci interessa trovare un modo per esprimere

$$I_R = \int_{-R}^R \frac{1}{1+x^2} dx$$

in termini di un'espressione di cui sappiamo calcolare il limite per $R \rightarrow +\infty$. Osserviamo che

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z+i)(z-i)}.$$

¹⁰Alternativamente, possiamo osservare che, per $|z| \leq 1$, la funzione esponenziale soddisfa la disuguaglianza

$$|e^z - 1| \leq (e-1)|z|.$$

Infatti, abbiamo $|z^n| = |z|^n \leq |z|$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e quindi

$$|e^z - 1| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} - 1 \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|z|^n}{n!} \leq |z| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = (e-1)|z|.$$

Perciò

$$\int_0^\pi e^{-i\varepsilon e^{-it}} dt = \int_0^\pi (e^{-i\varepsilon e^{-it}} - 1) dt + \int_0^\pi 1 dt = \int_0^\pi (e^{-i\varepsilon e^{-it}} - 1) dt + \pi,$$

e

$$\left| \int_0^\pi (e^{-i\varepsilon e^{-it}} - 1) dt \right| \leq \int_0^\pi |e^{-i\varepsilon e^{-it}} - 1| dt \leq (e-1) \int_0^\pi \varepsilon dt = (e-1)\pi\varepsilon \rightarrow 0 \text{ per } \varepsilon \rightarrow 0^+,$$

di modo che otteniamo

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^\pi e^{-i\varepsilon e^{-it}} dt = \pi.$$

Perciò possiamo applicare la formula integrale di Cauchy alla funzione

$$f : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = \frac{1}{z+i}$$

nel punto $z_0 = i$ e alla curva C^1 a tratti, semplice e chiusa, e percorsa in senso antiorario

$$\Gamma_R = \gamma_R + \ell_R,$$

dove

- γ_R è la semicirconfenza di raggio R centrata nell'origine nel semipiano $\{y > 0\}$, percorsa in senso antiorario, parametrizzata ad esempio da $\gamma_R(t) = Re^{it}$ per $t \in [0, \pi]$,
- ℓ_R è il segmento sulla retta reale che va da $-R$ a R , parametrizzato ad esempio da $\ell_R(t) = t$ per $t \in [-R, R]$.

Chiaramente, f è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$, $i \in D(\Gamma_R)$ per $R > 1$, e Γ_R è deformabile a un punto in $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ (in effetti, lo è in ogni aperto che contiene strettamente il semipiano $\{y > 0\}$). Quindi, otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i} = f(i) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{f(z)}{z-i} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{1}{1+z^2} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_0^\pi \frac{1}{1+R^2e^{2it}} Rie^{it} dt + \int_{-R}^R \frac{1}{1+t^2} dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_0^\pi \frac{1}{1+R^2e^{2it}} Rie^{it} dt + I_R \right), \end{aligned}$$

da cui deduciamo

$$I_R = \pi - \int_0^\pi \frac{1}{1+R^2e^{2it}} Rie^{it} dt.$$

Mostriamo ora che quest'ultimo integrale tende a 0 per $R \rightarrow +\infty$. Infatti, per la disuguaglianza triangolare abbiamo

$$|1 + R^2e^{2it}| \geq |R^2e^{2it}| - 1 = |R^2 - 1| = R^2 - 1 \quad \text{per ogni } R > 1,$$

e quindi otteniamo

$$\left| \int_0^\pi \frac{Rie^{it}}{1+R^2e^{2it}} dt \right| \leq \int_0^\pi \frac{|Rie^{it}|}{|1+R^2e^{2it}|} dt \leq \int_0^\pi \frac{R}{R^2-1} dt = \pi \frac{R}{R^2-1} \rightarrow 0 \quad \text{per } R \rightarrow +\infty.$$

In conclusione, troviamo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\pi - \int_0^\pi \frac{1}{1+R^2e^{2it}} Rie^{it} dt \right) = \pi.$$

Esempio 5.3.15. [Non visto a lezione.] Calcoliamo gli integrali di Fresnel:

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx \quad \text{e} \quad \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx.$$

Prima di tutto, osserviamo che questi integrali impropri convergono: infatti,

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{R}} \cos(x^2) dx &= [x = \sqrt{t}] = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \frac{\cos(t)}{2\sqrt{t}} dt = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \frac{\cos(t)}{2\sqrt{t}} dt \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\left[\frac{\sin(t)}{2\sqrt{t}} \right]_0^R + \int_0^R \frac{\sin(t)}{4t^{\frac{3}{2}}} dt \right) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{4t^{\frac{3}{2}}} dt, \end{aligned}$$

e quest'ultimo integrale converge. Un conto analogo dimostra che anche l'integrale di Fresnel per il seno converge.

Ora, è chiaro che

$$\int_0^{+\infty} e^{-ix^2} dx = \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx - i \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx,$$

e quindi consideriamo la funzione intera $f(z) = e^{-z^2}$ e la curva C^1 a tratti, semplice e chiusa,

$$\Gamma_R = \gamma_R + \alpha_R + \ell_R,$$

dove

- γ_R è l'arco di circonferenza di raggio R centrata nell'origine nel semipiano $\{y > 0\}$, percorsa in senso antiorario da 0 a $\frac{\pi}{4}$ radianti, parametrizzata ad esempio da $\gamma_R(t) = Re^{it}$ per $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$,
- α_R è il segmento della retta $\{y = x\}$ che va da $Re^{i\frac{\pi}{4}}$ a 0 , parametrizzato ad esempio da $\alpha_R(t) = (R-t)e^{i\frac{\pi}{4}}$ per $t \in [0, R]$,
- ℓ_R è il segmento sulla retta reale che va da 0 a R , parametrizzato ad esempio da $\ell_R(t) = t$ per $t \in [0, R]$.

Visto che \mathbb{C} è chiaramente semplicemente connesso, deduciamo che Γ_R è deformabile a un punto. Quindi, per il teorema integrale di Cauchy, abbiamo

$$\int_{\Gamma_R} e^{-z^2} dz = 0.$$

D'altra parte, l'integrale curvilineo si scompone in tre parti:

$$\int_{\Gamma_R} e^{-z^2} dz = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 e^{2it}} Rie^{it} dt + \int_0^R e^{-(R-t)^2 e^{i\frac{\pi}{2}}} (-e^{i\frac{\pi}{4}}) dt + \int_0^R e^{-t^2} dt.$$

Scriviamo in maniera più esplicita il secondo integrale della somma nella riga precedente:

$$\begin{aligned} \int_0^R e^{-(R-t)^2 e^{i\frac{\pi}{2}}} (-e^{i\frac{\pi}{4}}) dt &= [R-t = u] = \int_R^0 e^{-iu^2} e^{i\frac{\pi}{4}} du \\ &= - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \int_0^R (\cos(u^2) - i \sin(u^2)) du \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\int_0^R \cos(u^2) du + \int_0^R \sin(u^2) du \right) + \\ &\quad - i \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\int_0^R \cos(u^2) du - \int_0^R \sin(u^2) du \right). \end{aligned}$$

Ora, sappiamo che

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R e^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

visto che è metà dell'integrale gaussiano. D'altra parte, ragionando come nell'Esempio 5.3.13, vediamo che

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 e^{2it}} Rie^{it} dt \right| &= \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 \cos(2t) - iR^2 \sin(2t)} Rie^{it} dt \right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 \cos(2t)} R dt \\ &= \left[2t = \frac{\pi}{2} - \theta \right] = R \int_{\frac{\pi}{2}}^0 e^{-R^2 \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)} \left(-\frac{d\theta}{2} \right) \\ &= \frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2 \sin(\theta)} d\theta \leq \frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2 \frac{2}{\pi} \theta} d\theta \\ &= \frac{R}{2} \left[-\frac{\pi}{2R^2} e^{-R^2 \frac{2}{\pi} \theta} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4R} (1 - e^{-R^2}) \rightarrow 0 \text{ as } R \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Di conseguenza, prendiamo il limite per $R \rightarrow +\infty$ e otteniamo

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\int_0^{+\infty} \cos(u^2) du + \int_0^{+\infty} \sin(u^2) du \right) + i \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\int_0^{+\infty} \cos(u^2) du - \int_0^{+\infty} \sin(u^2) du \right) \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 e^{2it}} R i e^{it} dt + \int_0^R e^{-t^2} dt \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \end{aligned}$$

Quindi, eguagliando le parti reali e le parti immaginarie, otteniamo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\int_0^{+\infty} \cos(u^2) du + \int_0^{+\infty} \sin(u^2) du \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\int_0^{+\infty} \cos(u^2) du - \int_0^{+\infty} \sin(u^2) du \right) = 0 \end{cases},$$

la cui soluzione è chiaramente

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

5.4 Sviluppabilità in serie delle funzioni olomorfe

In maniera analoga a quanto visto nel calcolo reale, possiamo definire le serie di potenze nel piano complesso.

Definizione 5.4.1. Una *serie di potenze (complessa)* è una serie della forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

dove $z_0 \in \mathbb{C}$ è il *centro* della serie, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$ è la successione dei coefficienti della serie e z è la variabile (complessa) della serie.

Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ *raggio di convergenza* della serie è

$$R := \sup \{ |z - z_0| : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ converge} \} \in [0, +\infty].$$

Il raggio di convergenza può essere calcolato usando la seguente formula:

$$R = \frac{1}{L}, \quad \text{dove } L = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

con la convenzione che $\frac{1}{0} = +\infty$ e $\frac{1}{+\infty} = 0$.

Quindi, abbiamo i tre seguenti casi:

- se $R = 0$, la serie converge solo per $z = z_0$ (ed è costante, uguale ad a_0),
- se $R = +\infty$, la serie converge¹¹ per ogni $z \in \mathbb{C}$,
- se $R \in (0, +\infty)$, la serie converge in $B_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ (il cerchio aperto di raggio R centrato in z_0), non converge in $\mathbb{C} \setminus \overline{B_R(z_0)}$, mentre non si può dire nulla in generale circa la convergenza sulla circonferenza $\partial B_R(z_0) = \{z : |z - z_0| = R\}$.

Vediamo con un esempio cosa può succedere sulla circonferenza $\partial B_R(z_0)$.

¹¹Più precisamente, la serie converge assolutamente, ovvero, convergono sia la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ che la serie dei moduli $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| |z - z_0|^n$. Ciò è vero anche nel punto successivo e per le serie che appaiono nella Proposizione 5.4.4 e nei Teoremi 5.4.6 e 5.5.4; tuttavia ciò non è fondamentale per gli scopi di questo corso, e perciò omettiamo tale dettaglio.

Esempio 5.4.2. [Non visto a lezione.] Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$. Allora è chiaro che $z_0 = 0$ e $R = 1$.

Osserviamo che, per $z \in \partial B_1(0)$, valgono i seguenti casi:

- se $z = 1$, abbiamo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$,
- se $z = e^{i\theta}$ per $\theta \in (0, 2\pi)$, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge.

Come vedremo, una serie di potenze complessa è derivabile in senso complesso infinite volte nel cerchio aperto dove converge. Perciò, diamo una definizione rigorosa delle derivate complesse di ordine superiore.

Definizione 5.4.3. Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa in Ω . Se $f' : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ è derivabile (in senso complesso) in $z_0 \in \Omega$, allora f è due volte derivabile (in senso complesso) in z_0 , e la sua *derivata seconda* è la derivata della derivata prima, ovvero

$$f''(z_0) = \frac{d^2 f}{dz^2}(z_0) := (f')'(z_0) = \frac{d}{dz} \left(\frac{df}{dz} \right) (z_0).$$

In generale, siano $n \geq 3$ e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $f, f', f'', \dots, f^{(n-2)}$ siano olomorfe in Ω . Allora f è n -volte derivabile (in senso complesso) in $z_0 \in \Omega$ se $f^{(n-1)}$ è derivabile (in senso complesso) in z_0 , e la sua *derivata n-esima* è la derivata della derivata $(n-1)$ -esima, ovvero

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{d^n f}{dz^n}(z_0) := (f^{(n-1)})'(z_0) = \frac{d}{dz} \left(\frac{d^{n-1} f}{dz^{n-1}} \right) (z_0).$$

Infine, f è infinitamente derivabile (in senso complesso) (o derivabile infinite volte) in Ω se per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $f^{(n)}$ ed è una funzione olomorfa in Ω .

Proposizione 5.4.4. Sia $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ per qualche $z_0 \in \mathbb{C}$ e $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$. Assumiamo che la serie S abbia un raggio di convergenza $R > 0$. Allora S è olomorfa in $B_R(z_0)$ ed è infinitamente derivabile in $B_R(z_0)$. Inoltre, abbiamo

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

e in generale

$$S^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z-z_0)^{n-k}.$$

per ogni $k \geq 1$.

Dimostrazione. La forma delle derivate dipende dalla versione complessa della ben nota regola di derivazione dei monomi:

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dz^k} (z - z_0)^n &= \begin{cases} n(n-1)\dots(n-k+1)(z - z_0)^{n-k} & \text{se } 1 \leq k \leq n \\ 0 & \text{se } k \geq n+1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!} (z - z_0)^{n-k} & \text{se } 1 \leq k \leq n \\ 0 & \text{se } k \geq n+1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Mostrare poi l'effettiva convergenza è molto più delicato, e omettiamo tale parte della dimostrazione. \square

Esempio 5.4.5 (Serie geometrica in \mathbb{C}). Se $z \in \mathbb{C}$ e $|z| < 1$, allora la serie geometrica di ragione z è

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Infatti, per ogni $m \in \mathbb{N}_0$, abbiamo

$$(1 + z + \dots + z^m)(1 - z) = 1 + z + \dots + z^m - z - z^2 - \dots - z^{m+1} = 1 - z^{m+1},$$

e dunque, se $z \neq 1$, vediamo che

$$\sum_{n=0}^m z^n = 1 + z + \dots + z^m = \frac{1 - z^{m+1}}{1 - z}.$$

D'altra parte, $|z^{m+1}| = |z|^{m+1} \rightarrow 0$ per $m \rightarrow +\infty$ se $|z| < 1$, e quindi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^m z^n = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1 - z^{m+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}.$$

La serie geometrica è chiaramente una serie di potenze, con $z_0 = 0$ e $a_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}_0$, di modo che è immediato verificare che il raggio di convergenza è proprio $R = 1$. Inoltre, calcolando la derivata k -esima per ogni $k \in \mathbb{N}$, otteniamo¹²

$$\sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)z^{n-k} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} z^{n-k} = \frac{k!}{(1-z)^{k+1}}.$$

Teorema 5.4.6 (Analiticità delle funzioni olomorfe). *Siano $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa, $z_0 \in \Omega$ e $R > 0$ tale che $\overline{B_R(z_0)} \subset \Omega$. Sia $\gamma \in C_{\text{tr}}^1([a, b]; \Omega)$ una curva semplice e chiusa, deformabile con continuità a un punto in Ω , percorsa in senso antiorario e tale che $B_R(z_0) \subsetneq D(\gamma)$. Allora per ogni $z \in B_R(z_0)$ abbiamo*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

dove i coefficienti sono dati da

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw.$$

Di conseguenza, f è infinitamente derivabile in senso complesso in Ω , e abbiamo

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}_0.$$

Dimostrazione. **[Non vista a lezione.]** Grazie alla formula integrale di Cauchy deduciamo che

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0) + (z_0 - z)} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} dw. \end{aligned}$$

Dato che $B_R(z_0) \subsetneq D(\gamma)$, abbiamo

$$\left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right| < 1,$$

e dunque, per quanto visto sulla serie geometrica,

$$\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n.$$

¹²La k -esima derivata di $\frac{1}{1-z}$ si calcola usando le usuali regole di derivazione delle funzioni composte.

Quindi, otteniamo¹³

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)} \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} dw &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{n=0}^{+\infty} f(w) \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} dw \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \cdot (z-z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n, \end{aligned}$$

dove

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw.$$

Quindi, f è uguale a una serie di potenze in $B_R(z_0)$, e perciò la Proposizione 5.4.4 ci assicura che f ammette derivate complesse $f^{(k)}$ di ogni ordine $k \in \mathbb{N}$, in $B_R(z_0)$ e che $f^{(k)}$ è olomorfa in $B_R(z_0)$ per ogni $k \geq 1$. Applicando questo risultato per ogni $z_0 \in \Omega$, troviamo¹⁴ che f ammette infinite derivate olomorfe in tutto Ω . Infine, grazie alla Proposizione 5.4.4 sappiamo che

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k}$$

per ogni $k \geq 1$, e dunque, se poniamo $z = z_0$, otteniamo

$$f^{(k)}(z_0) = k(k-1)\dots 1 a_k = k! a_k$$

da cui si ricava

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}} dw = a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}.$$

□

Osservazione 5.4.7. Il Teorema 5.4.6 dimostra che ogni funzione olomorfa è *analitica*, ovvero è infinitamente derivabile e coincide con il suo sviluppo in serie di Taylor centrato in un qualunque punto nel suo dominio (e convergente in un opportuno cerchio).

Infatti, ciò è ben noto per i principali esempi di funzioni olomorfe (oltre ai polinomi), ovvero la funzione esponenziale, il seno e il coseno, che soddisfano:

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Notiamo inoltre che queste tre serie hanno raggio di convergenza $R = +\infty$, e ciò è coerente con il fatto che le rispettive funzioni sono in effetti intere, ovvero olomorfe sull'intero piano complesso.

Osservazione 5.4.8. Un'altra conseguenza del Teorema 5.4.6 è che ci permette di ampliare le conclusioni dell'Esempio 5.3.9 a curve più generali. Precisamente, sia $\gamma \in C_{\text{tr}}^1([a, b]; \mathbb{C})$ una curva semplice e chiusa, percorsa in senso antiorario, e sia $z_0 \in D(\gamma)$. Allora per $n \in \mathbb{Z}$ abbiamo

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{(z-z_0)^n} dz = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 0 & \text{se } n \neq 1. \end{cases}$$

Infatti, se $n \leq 0$, stiamo integrando una funzione olomorfa, e quindi il risultato è una conseguenza del teorema integrale di Cauchy; invece, se $n \geq 1$, si tratta di applicare il teorema 5.4.6 alla funzione $f(z) = 1$, il cui sviluppo in serie di potenze ovviamente soddisfa $a_0 = 1$ e $a_k = 0$ per ogni $k \geq 1$.

¹³Lo scambio fra serie e integrale è estremamente delicato, e in generale non è possibile. Tuttavia, si può dimostrare che, sotto queste ipotesi, è corretto. Omettiamo questi dettagli tecnici.

¹⁴A rigore, bisognerebbe verificare che le diverse serie coincidano sulle intersezioni dei diversi cerchi dove sono definite, ma omettiamo questi dettagli tecnici.

5.5 Funzioni meromorfe e teorema dei residui

Definiamo una classe di funzioni che sono olomorfe tranne in un numero finito di punti¹⁵.

Definizione 5.5.1. Una funzione m è *meromorfa* in Ω se può essere scritta come

$$m(z) = \frac{f(z)}{p(z)},$$

dove p è un polinomio e f è una funzione olomorfa in Ω tale che $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in \Omega \cap Z(p)$. La funzione m è definita su $\Omega \setminus Z(p)$. I punti in $Z(p) \cap \Omega$ sono i *poli* (o le *singolarità*) di m . Diciamo che un polo $z_0 \in Z(p) \cap \Omega$ è di *ordine* $k \in \mathbb{N}$, se p è divisibile per $(z - z_0)^k$, ma non per $(z - z_0)^{k+1}$.

Osservazione 5.5.2. Tutte le funzioni razionali fratte di variabile complessa sono funzioni meromorfe. Inoltre, ogni funzione meromorfa è olomorfa al di fuori dei suoi poli, ovvero in $\Omega \setminus Z(p)$.

Notiamo poi che talvolta non viene richiesto nella definizione di funzione meromorfa m che il numeratore f non si annulli negli zeri del denominatore: non è infatti strettamente necessario. Tuttavia, senza questa ipotesi, potrebbe non essere più sempre vero che i punti in $Z(p) \cap \Omega$ siano dei poli, ovvero punti dove la funzione m non è olomorfa, o che abbiamo un certo ordine. Infatti, se $f(z_0) = 0$, ciò significa¹⁶ che esiste $j \in \mathbb{N}$, e $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa in Ω , tale che $f(z) = (z - z_0)^j g(z)$ e $g(z_0) \neq 0$. D'altra parte, se abbiamo anche $z_0 \in Z(p) \cap \Omega$, allora $p(z) = (z - z_0)^k q(z)$ per qualche $k \in \mathbb{N}$ e qualche polinomio q di grado minore di p e tale che $q(z_0) \neq 0$. Quindi, se $j \geq k$, ne segue che

$$m(z) = \frac{f(z)}{p(z)} = (z - z_0)^{j-k} \frac{g(z)}{q(z)}$$

e questa funzione è chiaramente derivabile anche in z_0 , di modo che m è in realtà olomorfa in $(\Omega \setminus Z(p)) \cup \{z_0\}$. Se invece $1 \leq j < k$, allora z_0 è un polo di m , ma di ordine $k - j$, e non k . Per questa ragione, è più semplice chiedere che $f(z_0) \neq 0$, ovvero, in un certo senso, lavorare direttamente con una "frazione irriducibile". Un esempio concreto di questo caso è dato dalla funzione $\frac{\sin(z)}{z}$, che non è immediatamente definita in $z_0 = 0$. Sfruttando però lo sviluppo in serie di potenze, vediamo facilmente che

$$\frac{\sin(z)}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!},$$

e quest'ultima serie è ovviamente ben definita e convergente su tutto \mathbb{C} , di modo che la funzione

$$h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} = \begin{cases} \frac{\sin(z)}{z} & \text{se } z \neq 0 \\ 1 & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

è intera (e in particolare senza alcun polo). Ciò è legato al fatto che $z_0 = 0$ è una discontinuità eliminabile, esattamente com'è noto nel caso reale per funzione $\frac{\sin(x)}{x}$.

Esempio 5.5.3. La funzione $m(z) = \frac{e^z}{z^2 + 1}$ è meromorfa in \mathbb{C} e olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$, con poli $z = \pm i$.

Teorema 5.5.4 (Sviluppo di Laurent per funzioni meromorfe). Sia $m = \frac{f}{p}$ una funzione meromorfa non banale in Ω (ovvero, tale che f non sia la funzione nulla) e sia $z_0 \in Z(p) \cap \Omega$ un polo di ordine $k \in \mathbb{N}$. Allora esiste $r > 0$ tale che m è olomorfa in

$$B_r(z_0) \setminus \{z_0\} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$$

ed esistono dei coefficienti $\{a_n\}_{n=-k}^{+\infty} \subset \mathbb{C}$ tali che $a_{-k} \neq 0$ e

$$\begin{aligned} m(z) &= \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} + \frac{a_{-k+1}}{(z - z_0)^{k-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots \\ &= \sum_{n=-k}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{per ogni } z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}. \end{aligned}$$

¹⁵In realtà, esiste una definizione più generale, comunemente usata in Analisi Complessa, ma quella che diamo è sufficiente ai fini di questo corso.

¹⁶Omettiamo la dimostrazione di questo fatto.

Dimostrazione. [Non vista a lezione.] Dato che z_0 è un polo di ordine $k \geq 1$, abbiamo $p(z) = (z - z_0)^k q(z)$ per un qualche polinomio q di grado inferiore a quello di p tale che $q(z_0) \neq 0$. Quindi, abbiamo

$$m(z) = \frac{f(z)}{p(z)} = \frac{f(z)}{(z - z_0)^k q(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^k} \frac{f(z)}{q(z)},$$

e la funzione $\frac{f}{q}$ è olomorfa in $B_r(z_0)$ per qualche $r > 0$ tale che $q(z) \neq 0$ per ogni $z \in \Omega$ tale che $|z - z_0| < r$ (visto che q ha un numero finito di radici, si può sempre trovare tale r). Perciò, m è olomorfa in $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$, e possiamo scrivere lo sviluppo in serie di $\frac{f}{q}$ centrato in z_0 , per ottenere

$$m(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} \frac{f(z)}{q(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^k} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - z_0)^{n-k} = \sum_{n=-k}^{+\infty} b_{n+k} (z - z_0)^n,$$

che è lo sviluppo di m che dovevamo dimostrare, se poniamo $a_n = b_{n+k}$. Inoltre, $a_{-k} \neq 0$, poiché $b_0 \neq 0$, dato che $f(z_0) \neq 0$. Infine, lo sviluppo in serie di $\frac{f}{q}$ converge in $B_r(z_0)$, visto che è una funzione olomorfa, e quindi lo sviluppo di m converge in $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. \square

Esempio 5.5.5. Sia $m(z) = \frac{1}{z^2 - 1}$, che è ben definita e olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$. I suoi poli sono quindi $z = \pm 1$. Sfruttando il calcolo della serie geometrica complessa, scriviamo lo sviluppo di Laurent di m in $z_0 = 1$:

$$\begin{aligned} m(z) &= \frac{1}{z^2 - 1} = \frac{1}{z - 1} \frac{1}{z + 1} = \frac{1}{z - 1} \frac{1}{z - 1 + 2} = \frac{1}{2(z - 1)} \frac{1}{1 + \frac{z-1}{2}} = \frac{1}{2(z - 1)} \frac{1}{1 - \frac{1-z}{2}} \\ &= \frac{1}{2(z - 1)} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{z-1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z - 1)^{n-1} = \sum_{n=-1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}} (z - 1)^n \\ &= \frac{1}{2(z - 1)} - \frac{1}{4} + \frac{(z - 1)}{8} - \frac{(z - 1)^2}{16} + \frac{(z - 1)^3}{32} + \dots, \end{aligned}$$

e osserviamo che questa serie converge se e solo se $0 < |z - 1| < 2$, ovvero in

$$B_2(1) \setminus \{1\} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - 1| < 2\}.$$

Definizione 5.5.6. Sia m una funzione meromorfa in Ω e sia $z_0 \in \Omega$. Se z_0 è un polo di m , allora il coefficiente a_{-1} dello sviluppo di Laurent di m in z_0 è il *residuo* di m in z_0 , e scriviamo

$$a_{-1} = \text{Res}(m(z), z = z_0).$$

Se z_0 non è un polo di m , allora poniamo $\text{Res}(m(z), z = z_0) = 0$.

Osservazione 5.5.7. Se m è una funzione meromorfa e $z_0 \in \Omega$ non è un polo di m , allora lo sviluppo di Laurent di m in z_0 è semplicemente lo sviluppo in serie di potenze di m centrato in z_0 . Quindi, è sensato porre $a_{-1} = 0$ in tal caso, e questo giustifica l'estensione della definizione di residuo per i punti di $\Omega \setminus Z(p)$.

Vediamo come è possibile calcolare il residuo di una funzione meromorfa in un punto senza per forza calcolare lo sviluppo di Laurent.

Proposizione 5.5.8 (Caratterizzazione del residuo). *Siano m una funzione meromorfa in Ω e $z_0 \in \Omega$. Se m ha un polo di ordine 1 in z_0 , allora*

$$\text{Res}(m(z), z = z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)m(z) = \frac{f(z_0)}{p'(z_0)}. \quad (5.5.1)$$

Se z_0 è un polo di m di ordine $k \geq 2$, allora

$$\text{Res}(m(z), z = z_0) = \frac{1}{(k - 1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z - z_0)^k m(z)]. \quad (5.5.2)$$

Dimostrazione. Se z_0 è un polo di m di ordine 1, allora per il Teorema 5.5.4 esiste $r > 0$ tale che

$$m(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$$

per ogni $z \in \Omega$ tale che $0 < |z - z_0| < r$. Allora è chiaro che

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)m(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} a_{-1} + (z - z_0) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n = a_{-1} = \text{Res}(m(z), z = z_0).$$

Ora, dato che f è olomorfa, in particolare è continua. Inoltre, $p(z_0) = 0$, per definizione di polo, e dunque

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)m(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{f(z)}{p(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \frac{(z - z_0)}{p(z) - p(z_0)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{\left(\frac{p(z) - p(z_0)}{(z - z_0)} \right)} = \frac{f(z_0)}{p'(z_0)}.$$

Se invece z_0 è un polo di m di ordine $k \geq 2$, allora per il Teorema 5.5.4 esiste $r > 0$ tale che

$$\begin{aligned} m(z) &= \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} + \frac{a_{-k+1}}{(z - z_0)^{k-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{a_{-k+j}}{(z - z_0)^{k-j}} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n \end{aligned}$$

per ogni $z \in \Omega$ tale che $0 < |z - z_0| < r$. Quindi vediamo che

$$\begin{aligned} (z - z_0)^k m(z) &= \sum_{j=0}^{k-1} a_{-k+j} (z - z_0)^j + (z - z_0)^k \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \\ &= a_{-k} + a_{-k+1}(z - z_0) + \cdots + a_{-1}(z - z_0)^{k-1} + a_0(z - z_0)^k + a_1(z - z_0)^{k+1} + \dots, \end{aligned}$$

e perciò, visto che

$$\frac{d^j}{dz^j} [(z - z_0)^l] = \begin{cases} \frac{l!}{(l-j)!} (z - z_0)^{l-j} & \text{se } 1 \leq j \leq l \\ 0 & \text{se } j \geq l + 1 \end{cases},$$

abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z - z_0)^k m(z)] &= (k-1)! a_{-1} + k! a_0 (z - z_0) + \frac{(k+1)!}{2} a_1 (z - z_0)^2 + \dots \\ &= (k-1)! a_{-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{(n+1)!} a_n (z - z_0)^{n+1} \\ &= (k-1)! a_{-1} + (z - z_0) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{(n+1)!} a_n (z - z_0)^n, \end{aligned}$$

e questo conclude la dimostrazione. \square

I residui giocano un ruolo fondamentale nel calcolo degli integrali curvilinei di funzioni meromorfe, come mostrato nel seguente fondamentale teorema.

Teorema 5.5.9 (Teorema dei residui). *Siano $m = \frac{f}{p}$ una funzione meromorfa in Ω , sia $\gamma \in C_{\text{tr}}^1([a, b]; \Omega)$ una curva semplice e chiusa, che sia deformabile con continuità a un punto in Ω , e che sia percorsa in senso antiorario. Supponiamo inoltre che γ non passi per nessun punto in $Z(p)$, ovvero $\gamma([a, b]) \cap Z(p) = \emptyset$. Allora abbiamo*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} m(z) dz = \sum_{w \in D(\gamma)} \text{Res}(m(z), z = w) = \sum_{w \in D(\gamma) \cap Z(p)} \text{Res}(m(z), z = w).$$

Dimostrazione. [Non vista a lezione.] Se non ci sono poli di m in $D(\gamma)$, allora si può mostrare¹⁷ che m è una funzione olomorfa in un aperto $\Omega' \subset \Omega$ tale che $\gamma([a, b]) \subset \Omega'$ e γ è deformabile a un punto in Ω' . Quindi, in tal caso, per il teorema integrale di Cauchy, deduciamo che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} m(z) dz = 0.$$

Assumiamo ora che ci sia un solo polo $w \in D(\gamma) \cap Z(p)$. Allora si può mostrare che esiste $k \geq 1$ tale che $(z - w)^k m(z)$ è una funzione olomorfa in un aperto $\Omega' \subset \Omega$ tale che $\gamma([a, b]) \subset \Omega'$ e γ è deformabile a un punto in Ω' . Ne segue che esiste una funzione olomorfa $h : \Omega' \rightarrow \mathbb{C}$ tale che

$$m(z) = \frac{a_{-k}}{(z - w)^k} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - w} + h(z) \quad \text{per ogni } z \in \Omega', z \neq w.$$

Allora, grazie al teorema integrale di Cauchy e all'Osservazione 5.4.8 otteniamo

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} m(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{a_{-k}}{(z - w)^k} dz + \dots + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{a_{-1}}{z - w} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} h(z) dz = a_{-1}.$$

Infine, se ci sono più poli in $D(\gamma)$, allora l'idea è di tagliare la curva γ di modo da vederla come la somma di curve chiuse e semplici, deformabili a un punto in Ω e percorse in senso antiorario, e tali che ciascuna di queste curve circonda un solo polo in $D(\gamma)$. \square

5.6 Applicazioni del teorema dei residui al calcolo di integrali

Vediamo ora varie applicazioni del teorema dei residui al calcolo di integrali reali.

Esempio 5.6.1. Mostriamo come calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ tramite il calcolo dei residui, in alternativa alla formula integrale di Cauchy applicata nell'Esempio 5.3.14. La funzione $m(z) = \frac{1}{1+z^2}$ è chiaramente meromorfa in \mathbb{C} , con poli nei punti $\{i, -i\}$. Come in precedenza, consideriamo la curva C^1 a tratti, semplice e chiusa, e percorsa in senso antiorario

$$\Gamma_R = \gamma_R + \ell_R,$$

dove

- γ_R è la semicirconferenza di raggio R centrata nell'origine nel semipiano $\{y > 0\}$, percorsa in senso antiorario, parametrizzata ad esempio da $\gamma_R(t) = Re^{it}$ per $t \in [0, \pi]$,
- ℓ_R è il segmento sulla retta reale che va da $-R$ a R , parametrizzato ad esempio da $\ell_R(t) = t$ per $t \in [-R, R]$.

Visto che \mathbb{C} è semplicemente connesso, Γ_R è deformabile a un punto. Inoltre, è chiaro che non passa per nessuno dei due poli di m . Osserviamo poi che, per $R > 1$, $D(\Gamma_R)$ contiene solo il polo $z_0 = i$, che è di ordine 1, dato che

$$z^2 + 1 = (z + i)(z - i),$$

e il cui residuo è dato da

$$\text{Res}(m(z), z = i) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{1}{1 + z^2} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z - i)}{(z + i)(z - i)} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z + i} = \frac{1}{2i},$$

grazie alla Proposizione 5.5.8. Di conseguenza, otteniamo

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{1}{1 + z^2} dz = \frac{1}{2i}$$

e quindi

$$\int_{\Gamma_R} \frac{1}{1 + z^2} dz = \pi.$$

A questo punto, si scrive l'integrale curvilineo come la somma dell'integrale sulla semicirconferenza e quello sul segmento, per poi passare al limite per $R \rightarrow +\infty$ come mostrato nell'Esempio 5.3.14.

¹⁷Qui e nel seguito omettiamo i dettagli tecnici.

Esempio 5.6.2. [Non visto a lezione.] Calcoliamo $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$.

Allo scopo, osserviamo che la funzione $m(z) = \frac{1}{1+z^4}$ è chiaramente meromorfa in \mathbb{C} , e i suoi poli sono le soluzioni dell'equazione

$$z^4 = -1 = e^{i\pi} \iff z \in \left\{ e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}, e^{i\frac{5\pi}{4}}, e^{i\frac{7\pi}{4}} \right\}.$$

Ciascuno di questi poli ha ordine 1, dato che ciascuna soluzione dell'equazione ha molteplicità 1, e abbiamo

$$(z^4 + 1) = (z - e^{i\frac{\pi}{4}})(z - e^{i\frac{3\pi}{4}})(z - e^{i\frac{5\pi}{4}})(z - e^{i\frac{7\pi}{4}}).$$

Consideriamo la curva C^1 a tratti, semplice e chiusa, e percorsa in senso antiorario

$$\Gamma_R = \gamma_R + \ell_R,$$

dove

- γ_R è la semicirconfenza di raggio R centrata nell'origine nel semipiano $\{y > 0\}$, percorsa in senso antiorario, parametrizzata ad esempio da $\gamma_R(t) = Re^{it}$ per $t \in [0, \pi]$,
- ℓ_R è il segmento sulla retta reale che va da $-R$ a R , parametrizzato ad esempio da $\ell_R(t) = t$ per $t \in [-R, R]$.

Visto che \mathbb{C} è semplicemente connesso, Γ_R è deformabile a un punto. Inoltre, è chiaro che non passa per nessuno dei due poli di m . Osserviamo poi che, per ogni $R > 1$, $D(\Gamma_R)$ contiene i poli $\{e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}\}$. Per calcolarne il residuo, notiamo che $m(z) = \frac{f(z)}{p(z)}$ per $f(z) = 1$ e $p(z) = z^4 + 1$, e quindi, dato che $p'(z) = 4z^3$, i residui in questione sono dati da

$$\begin{aligned} \text{Res}(m(z), z = e^{i\frac{\pi}{4}}) &= \frac{1}{p'(e^{i\frac{\pi}{4}})} = \frac{1}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}}, \\ \text{Res}(m(z), z = e^{i\frac{3\pi}{4}}) &= \frac{1}{p'(e^{i\frac{3\pi}{4}})} = \frac{1}{4e^{i\frac{9\pi}{4}}} = \frac{1}{4e^{i\frac{\pi}{4}}}, \end{aligned}$$

grazie alla formula (5.5.1). Di conseguenza, grazie al teorema dei residui otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{1}{1+z^4} dz &= \frac{1}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}} + \frac{1}{4e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{4} \left(e^{-i\frac{3\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{4}} \right) = \frac{1}{4} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= -i\frac{\sqrt{2}}{4}, \end{aligned}$$

e quindi

$$\int_{\Gamma_R} \frac{1}{1+z^4} dz = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi.$$

D'altra parte, per definizione di Γ_R , abbiamo

$$\int_{\Gamma_R} \frac{1}{1+z^4} dz = \int_0^\pi \frac{1}{1+R^4 e^{4it}} Rie^{it} dt + \int_{-R}^R \frac{1}{1+t^4} dt.$$

Perciò, ci rimane solo da mostrare che l'integrale sulla semicirconfenza va a 0 per $R \rightarrow +\infty$: grazie alla disuguaglianza triangolare, abbiamo che

$$|1 + R^4 e^{4it}| \geq ||R^4 e^{4it}| - 1| = |R^4 - 1| = R^4 - 1 \quad \text{per } R > 1,$$

e quindi

$$\left| \int_0^\pi \frac{Rie^{it}}{1+R^4 e^{4it}} dt \right| \leq \int_0^\pi \frac{|Rie^{it}|}{|1+R^4 e^{4it}|} dt \leq \int_0^\pi \frac{R}{R^4 - 1} dt = \pi \frac{R}{R^4 - 1} \rightarrow 0 \quad \text{per } R \rightarrow +\infty.$$

In conclusione, otteniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{1}{1+x^4} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \pi - \int_0^\pi \frac{Rie^{it}}{1+R^4 e^{4it}} dt \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi.$$

Questi esempi suggeriscono un risultato generale sul calcolo degli integrali sulla retta reale di funzioni razionali fratte.

Proposizione 5.6.3. *Siano p, q polinomi reali di grado n, k , rispettivamente, tali che*

$$k \geq n + 2.$$

Allora, se $\gamma_R(t) = Re^{it}$, per $R > 0$ e $t \in [0, \pi]$, abbiamo

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} \frac{p(z)}{q(z)} dz = 0. \quad (5.6.1)$$

Assumiamo inoltre che $Z(q) \cap \mathbb{R} = \emptyset$, ovvero, nessuna delle radici di q è reale, e che $Z(p) \cap Z(q) = \emptyset$, ovvero p e q non hanno fattori in comune (e quindi la funzione razionale fratta $\frac{p}{q}$ è irriducibile).

Allora, se poniamo $Z(q)^+ = \{w \in \mathbb{C} : q(w) = 0 \text{ e } \text{Im}(w) > 0\}$, abbiamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = 2\pi i \sum_{w \in Z(q)^+} \text{Res} \left(\frac{p(z)}{q(z)}, z = w \right). \quad (5.6.2)$$

In particolare, se tutti poli di $\frac{p}{q}$ sono di ordine 1, ovvero le radici di q sono tutte distinte, abbiamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = 2\pi i \sum_{w \in Z(q)^+} \frac{p(w)}{q'(w)}. \quad (5.6.3)$$

Dimostrazione. Abbiamo

$$p(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j \quad \text{e} \quad q(z) = \sum_{j=0}^k b_j z^j$$

per certi coefficienti $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_k \in \mathbb{R}$, con $a_n \neq 0$ e $b_k \neq 0$. Per la disuguaglianza triangolare, abbiamo

$$|p(z)| \leq \sum_{j=0}^n |a_j| |z|^j$$

e

$$|q(z)| \geq \left| |b_k| |z|^k - \sum_{j=0}^{k-1} |b_j| |z|^j \right| \geq |b_k| |z|^k - \sum_{j=0}^{k-1} |b_j| |z|^j \geq 0,$$

dove l'ultima disuguaglianza vale per $|z|$ sufficientemente grande tale che

$$|b_k| - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{|b_j|}{|z|^{k-j}} \geq 0.$$

Di conseguenza, se R soddisfa la stessa condizione, vediamo che

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R} \frac{p(z)}{q(z)} dz \right| &= \left| \int_0^\pi \frac{p(Re^{it})}{q(Re^{it})} Rie^{it} dt \right| \leq \int_0^\pi \frac{|p(Re^{it})|}{|q(Re^{it})|} R dt \\ &\leq \int_0^\pi \frac{\sum_{j=0}^n |a_j| R^j}{|b_k| R^k - \sum_{j=0}^{k-1} |b_j| R^j} R dt = R^{n+1-k} \pi \frac{|a_n| + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{|a_j|}{R^{n-j}}}{|b_k| - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{|b_j|}{R^{k-j}}} \end{aligned}$$

Di conseguenza, si ottiene (5.6.1) prendendo il limite per $R \rightarrow +\infty$. Se poi le radici di q non sono reali, allora la funzione $\frac{p}{q}$ è integrabile (in senso improprio di Riemann) su $(-\infty, +\infty)$, ovvero,

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx \in \mathbb{R}$$

Quindi, applichiamo il teorema dei residui alla curva C^1 a tratti, semplice e chiusa, e percorsa in senso antiorario

$$\Gamma_R = \gamma_R + \ell_R,$$

dove ℓ_R è il segmento sulla retta reale che va da $-R$ a R , parametrizzato ad esempio da $\ell_R(t) = t$ per $t \in [-R, R]$. Visto che \mathbb{C} è semplicemente connesso, Γ_R è deformabile a un punto. Inoltre, è chiaro che, per R abbastanza grande, Γ_R non passa per nessuno dei poli di $\frac{p}{q}$, ovvero le radici di q , e che $Z(q)^+ \subset D(\Gamma_R)$. Quindi, per il teorema dei residui, otteniamo

$$\sum_{w \in Z(q)^+} \operatorname{Res} \left(\frac{p(z)}{q(z)}, z = w \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{p(z)}{q(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{p(z)}{q(z)} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^R \frac{p(t)}{q(t)} dt,$$

di modo che la formula (5.6.2) si ottiene prendendo il limite per $R \rightarrow +\infty$, grazie a (5.6.1). Infine, (5.6.3) segue da (5.5.1). \square

In particolare, questo risultato è valido solo per denominatori q di ordine pari, dato che un polinomio a coefficienti reali può avere solo radici in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ se e solo se ha ordine pari.

Vediamo un'applicazione di questo risultato.

Esempio 5.6.4. Calcoliamo $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$.

In questo caso, $p(z) = 1$ e $q(z) = (1+z^2)^2 = (z+i)^2(z-i)^2$. Di conseguenza, $Z(q) = \{i, -i\}$, ed entrambi i poli sono di ordine 2. Inoltre, $Z(q)^+ = \{i\}$. Quindi, grazie a (5.5.2), vediamo che

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left(\frac{1}{(1+z^2)^2}, z = i \right) &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left((z-i)^2 \frac{1}{(1+z^2)^2} \right) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{(z+i)^2} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow i} -\frac{2}{(z+i)^3} = -\frac{2}{-8i} = -\frac{i}{4}. \end{aligned}$$

Perciò, applicando (5.6.2), otteniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{1}{(1+z^2)^2}, z = i \right) = \frac{\pi}{2}.$$

D'altra parte, notiamo che la Proposizione 5.6.3 si applica a funzioni razionali irriducibili, quindi è necessario semplificare prima la funzione razionale, di modo che il numeratore non si annulli negli zeri del denominatore.

Esempio 5.6.5. Calcoliamo $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-1}{1-x^3} dx$.

Chiaramente, $(1-x^3)$ è divisibile per $(x-1)$, poiché $x=1$ è una soluzione dell'equazione $-x^3+1=0$: nella fattispecie, abbiamo

$$1-x^3 = (1-x)(x^2+x+1).$$

Quindi,

$$\frac{x-1}{1-x^3} = -\frac{1}{x^2+x+1},$$

e si tratta quindi di calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+x+1} dx$.

Perciò, in definitiva abbiamo $p(z) = 1$ e $q(z) = z^2+z+1$, con $q'(z) = 2z+1$. Le soluzioni dell'equazione $z^2+z+1=0$ sono

$$\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \frac{-1-i\sqrt{3}}{2},$$

e abbiamo

$$\operatorname{Res} \left(\frac{1}{z^2+z+1}, z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{-1+i\sqrt{3}+1} = \frac{1}{i\sqrt{3}}.$$

In conclusione, grazie a (5.5.2), otteniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-1}{1-x^3} dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+x+1} dx = -2\pi i \frac{1}{i\sqrt{3}} = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Inoltre, osserviamo che il teorema dei residui può essere usato per calcolare l'integrale che definisce la trasformata di Fourier di funzioni razionali. Tratteremo l'argomento nel capitolo 7.

Infine, notiamo che il teorema dei residui si può applicare anche al calcolo di integrali di funzioni trigonometriche su $[0, 2\pi]$. Illustriamo l'idea di fondo con un esempio.

Esempio 5.6.6. Calcoliamo $\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 4 \cos(t)} dt$.

Allo scopo, osserviamo che

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad \text{per } z = e^{it}.$$

Quindi, se $\gamma(t) = e^{it}$ per $t \in [0, 2\pi]$, abbiamo

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 4 \cos(t)} dt &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 2e^{it} + 2e^{-it}} dt = \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{2e^{2it} + 5e^{it} + 2} dt \\ &= \frac{1}{i} \int_{\gamma} \frac{1}{2z^2 + 5z + 2} dz. \end{aligned}$$

Perciò, applichiamo il teorema dei residui alla curva γ e alla funzione meromorfa

$$m(z) = \frac{1}{2z^2 + 5z + 2},$$

che ha come poli (di ordine 1) le radici di $p(z) = 2z^2 + 5z + 2$, ovvero $z = -2$ e $z = -\frac{1}{2}$. Chiaramente, solo $-\frac{1}{2} \in D(\gamma)$ (e nessuno di questi poli giace sulla circonferenza γ), e perciò, dato che $p'(z) = 4z + 5$, abbiamo

$$\int_{\gamma} \frac{1}{2z^2 + 5z + 2} dz = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{1}{p(z)}, z = -\frac{1}{2} \right) = \frac{2\pi i}{p'(-\frac{1}{2})} = \frac{2\pi i}{3}.$$

In conclusione,

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 4 \cos(t)} dt = \frac{1}{i} \left(\frac{2\pi i}{3} \right) = \frac{2\pi}{3}.$$

In generale, vale il seguente risultato.

Proposizione 5.6.7. Sia $\mathcal{R}(x, y)$ una funzione razionale fratta in $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Assumiamo che $\mathcal{R}(\cos(t), \sin(t)) \in \mathbb{R}$ per ogni $t \in [0, 2\pi]$. Allora abbiamo¹⁸

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{R}(\cos(t), \sin(t)) dt = 2\pi \sum_{w: |w| < 1} \operatorname{Res} \left(\frac{1}{z} \mathcal{R} \left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2i} \right), z = w \right). \quad (5.6.4)$$

Dimostrazione. Se $z = e^{it}$ per $t \in [0, 2\pi]$, notiamo che

$$\begin{aligned} \cos(t) &= \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \\ \sin(t) &= \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right). \end{aligned}$$

¹⁸Assumiamo implicitamente che la funzione razionale in z al secondo membro di questa equazione sia già espressa in forma irriducibile, ovvero che numeratore e denominatore non abbiano fattori in comune.

Allora, se $\gamma(t) = e^{it}$ per $t \in [0, 2\pi]$, per il teorema dei residui otteniamo

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \mathcal{R}(\cos(t), \sin(t)) dt &= \int_0^{2\pi} \mathcal{R}\left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{ie^{it}} \mathcal{R}\left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right) ie^{it} dt \\ &= \int_{\gamma} \frac{1}{iz} \mathcal{R}\left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}\right) dz \\ &= \frac{1}{i} 2\pi i \sum_{w \in D(\gamma)} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z} \mathcal{R}\left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}\right), z = w\right) \\ &= 2\pi \sum_{w: |w| < 1} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z} \mathcal{R}\left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}\right), z = w\right). \end{aligned}$$

□

Vediamo alcune altre applicazioni.

Esempio 5.6.8. Calcoliamo $\int_0^{2\pi} \sin^3(t) dt$.

In questo caso, abbiamo $\mathcal{R}(x, y) = y^3$, e grazie a (5.6.4) otteniamo

$$\int_0^{2\pi} \sin^3(t) dt = 2\pi \sum_{w: |w| < 1} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z} \left(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}\right)^3, z = w\right).$$

Consideriamo quindi la funzione meromorfa

$$m(z) = \frac{1}{z} \left(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}\right)^3 = \frac{z^6 - 3z^4 + 3z^2 - 1}{-8iz^4} = i \frac{z^6 - 3z^4 + 3z^2 - 1}{8z^4},$$

il cui unico polo è $z = 0$, che ha ordine 4. Perciò vediamo che

$$m(z) = i \frac{z^6 - 3z^4 + 3z^2 - 1}{8z^4} = i \left(\frac{z^2}{8} - \frac{3}{8} + \frac{3}{8z^2} - \frac{1}{8z^4}\right),$$

di modo che $a_{-1} = 0$ in questo sviluppo di Laurent. Alternativamente, applichiamo (5.5.2) per $k = 4$:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z} \left(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}\right)^3, z = 0\right) = \frac{1}{6} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^3}{dz^3} \left(i \frac{z^6 - 3z^4 + 3z^2 - 1}{8}\right) = \frac{i}{6} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{120z^3 - 72z}{8} = 0.$$

In entrambi i casi otteniamo

$$\int_0^{2\pi} \sin^3(t) dt = 2\pi \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z} \left(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}\right)^3, z = 0\right) = 0.$$

Peraltro, si poteva dedurre direttamente tale risultato in virtù della periodicità del seno.

Esempio 5.6.9. Calcoliamo $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + b \cos(t)} dt$, per $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b > 0$.

In questo caso, abbiamo

$$\mathcal{R}(x, y) = \frac{1}{a + bx},$$

e grazie a (5.6.4) otteniamo

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + b \cos(t)} dt = 2\pi \sum_{w: |w| < 1} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z} \frac{1}{a + b \left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}\right)}, z = w\right).$$

Consideriamo quindi la funzione meromorfa

$$m(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{a + b \left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2} \right)} = \frac{2}{bz^2 + 2az + b},$$

i cui due poli sono dati dalle soluzioni (reali) di $bz^2 + 2az + b = 0$, ovvero

$$z = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - b^2}}{b}.$$

Osserviamo che

$$\left| \frac{-a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right| = \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} > 1 \quad \text{e} \quad \left| \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right| = \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b} < 1.$$

Perciò, dato che, se $p(z) = bz^2 + 2az + b$, allora $p'(z) = 2bz + 2a$, e applichiamo (5.5.1):

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left(\frac{2}{bz^2 + 2az + b}, z = \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right) &= \frac{2}{2b \left(\frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right) + 2a} \\ &= \frac{1}{-a + \sqrt{a^2 - b^2} + a} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \end{aligned}$$

di modo che

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + b \cos(t)} dt = 2\pi \operatorname{Res} \left(\frac{2}{bz^2 + 2az + b}, z = \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right) = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Capitolo 6

Serie di Fourier

1

Sia $T > 0$. Una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è *periodica di periodo T* se $f(t + T) = f(t)$ per ogni t in \mathbb{R} . Quindi, si può identificare f con una funzione $f : [a, a + T) \rightarrow \mathbb{C}$, per qualunque $a \in \mathbb{R}$ fissato. Considereremo principalmente $f : [0, T) \rightarrow \mathbb{C}$ e $f : [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}) \rightarrow \mathbb{C}$.

6.1 Spazi $L^p([0, T))$

Definizione 6.1.1. Sia $f : [0, T) \rightarrow \mathbb{C}$. Per $p \in [1, +\infty)$ definiamo le *norme $L^p([0, T))$* ² come

$$\|f\|_{L^p([0, T))} := \left(\int_0^T |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

dove l'integrale va inteso in senso improprio su $[0, T)$. In particolare,

- se $p = 1$, $\|f\|_{L^1([0, T))} = \int_0^T |f(t)| dt$;
- se $p = 2$, $\|f\|_{L^2([0, T))} = \sqrt{\int_0^T |f(t)|^2 dt}$.

Date due funzioni $f_1, f_2 : [0, T) \rightarrow \mathbb{C}$ tali che $\|f_j\|_{L^p([0, T))} < +\infty$ per $j = 1, 2$, le identifichiamo se $f_1(t) = f_2(t)$ per quasi ogni $t \in [0, T)$ ³, e in tal caso scriviamo $f_1 \sim f_2$, e diciamo che f_1 e f_2 fanno parte della stessa *classe di equivalenza*. Definiamo $L^p([0, T))$ come l'insieme delle classi di equivalenza di funzioni f tali che $\|f\|_{L^p([0, T))} < +\infty$.

Con un piccolo abuso di notazione, parliamo comunque di funzioni $f \in L^p([0, T))$, anche se, a rigore, dovremmo dire che f è una funzione la cui classe di equivalenza appartiene a $L^p([0, T))$.

Gli spazi $L^p([0, T))$ sono degli spazi vettoriali, come \mathbb{R}^n , benché di dimensione infinita.

Proposizione 6.1.2. Sia $p \in [1, +\infty)$. La norma $L^p([0, T))$ è omogenea, ovvero

$$\|af\|_{L^p([0, T))} = |a| \|f\|_{L^p([0, T))}$$

per ogni $f \in L^p([0, T))$ e $a \in \mathbb{C}$, e soddisfa la *disuguaglianza triangolare*:

$$\|f + g\|_{L^p([0, T))} \leq \|f\|_{L^p([0, T))} + \|g\|_{L^p([0, T))} \quad \text{per ogni } f, g \in L^p([0, T)).$$

Quindi, $L^p([0, T))$ è uno spazio vettoriale, ovvero, per ogni $f, g \in L^p([0, T))$ e $a, b \in \mathbb{C}$, abbiamo $af + bg \in L^p([0, T))$.

¹Parte di questo capitolo è basata sul libro *Matematica per l'Ingegneria dell'Informazione* di Giulio Cesare Barozzi.

²Talvolta si scrive $L^p([0, T); \mathbb{C})$ per sottolineare che la funzione è a valori complessi, ma qui omettiamo tale simbolo, dando per scontato che tutte le funzioni lo siano, visto che $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Inoltre, non è difficile notare che questa definizione si estende facilmente a ogni tipo di intervalli $[a, b]$ o (a, b) o $(a, b]$, ma tuttavia ciò va al di là degli scopi di questo corso.

³Nel senso della definizione data alla fine della sezione 2.2.

Dimostrazione. L'omogeneità della norma è un'ovvia conseguenza della definizione di modulo. Omettiamo invece la dimostrazione della disuguaglianza triangolare. Date queste due proprietà della norma, vediamo che, per ogni $f, g \in L^p([0, T])$ e $a, b \in \mathbb{C}$, abbiamo

$$\|af + bg\|_{L^p([0, T])} \leq \|af\|_{L^p([0, T])} + \|bg\|_{L^p([0, T])} = |a| \|f\|_{L^p([0, T])} + |b| \|g\|_{L^p([0, T])} < +\infty,$$

e dunque $af + bg \in L^p([0, T])$. \square

Lo spazio $L^2([0, T])$ gode di particolari proprietà che lo rendono, euristicamente parlando uno spazio euclideo di dimensione infinita. Nello specifico, si può definire una nozione di prodotto interno che è coerente con la norma.

Definizione 6.1.3. Il *prodotto scalare* tra $f, g \in L^2([0, T])$ è definito da

$$\langle f, g \rangle_{L^2([0, T])} = \int_0^T f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Questo prodotto scalare soddisfa le seguenti proprietà.

Teorema 6.1.4. Siano $f, g, h \in L^2([0, T])$ e $a, b \in \mathbb{C}$.

i) *Linearità rispetto a f e linearità-coniugata rispetto a g* di $\langle f, g \rangle_{L^2([0, T])}$:

$$\langle af + bg, h \rangle_{L^2([0, T])} = a \langle f, h \rangle_{L^2([0, T])} + b \langle g, h \rangle_{L^2([0, T])}$$

e

$$\langle h, af + bg \rangle_{L^2([0, T])} = \bar{a} \langle h, f \rangle_{L^2([0, T])} + \bar{b} \langle h, g \rangle_{L^2([0, T])}.$$

ii) *Non degenerazione:*

$$\langle f, f \rangle_{L^2([0, T])} = \|f\|_{L^2([0, T])}^2 \geq 0 \text{ per ogni } f \in L^2([0, T])$$

e

$$\langle f, f \rangle_{L^2([0, T])} = 0 \text{ se e solo se } f = 0 \text{ in } L^2([0, T]), \text{ ovvero } f(t) = 0 \text{ per quasi ogni } t \in [0, T].$$

iii) *Quasi-commutatività:*

$$\langle g, f \rangle_{L^2([0, T])} = \overline{\langle f, g \rangle_{L^2([0, T])}}.$$

iv) *Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:*

$$|\langle f, g \rangle_{L^2([0, T])}| \leq \|f\|_{L^2([0, T])} \|g\|_{L^2([0, T])}.$$

In analogia a quanto abbiamo visto per lo spazio euclideo \mathbb{R}^n , possiamo dare una nozione di distanza su $L^2([0, T])$, ponendo

$$d(f, g) := \|f - g\|_{L^2([0, T])} \text{ per ogni } f, g \in L^2([0, T]).$$

Notiamo che il quadrato di questa distanza soddisfa un'utile identità che ci servirà nel seguito per semplificare i conti.

Corollario 6.1.5. [Non visto a lezione.] Per ogni $f, g \in L^2([0, T])$ abbiamo

$$\begin{aligned} \|f - g\|_{L^2([0, T])}^2 &= \|f\|_{L^2([0, T])}^2 + \|g\|_{L^2([0, T])}^2 - \langle f, g \rangle_{L^2([0, T])} - \langle g, f \rangle_{L^2([0, T])} \\ &= \|f\|_{L^2([0, T])}^2 + \|g\|_{L^2([0, T])}^2 - 2 \operatorname{Re} \left(\langle f, g \rangle_{L^2([0, T])} \right). \end{aligned}$$

Dimostrazione. [Non vista a lezione.] La prima riga segue immediatamente dal fatto che

$$\|f - g\|_{L^2([0, T])}^2 = \langle f - g, f - g \rangle_{L^2([0, T])},$$

mentre per la seconda usiamo $\langle g, f \rangle_{L^2([0, T])} = \overline{\langle f, g \rangle_{L^2([0, T])}}$. \square

In particolare, $L^2([0, T])$ è un sottospazio di $L^1([0, T])$, lo spazio delle funzioni il cui modulo è sommabile.

Corollario 6.1.6. *Vale l'inclusione $L^2([0, T]) \subsetneq L^1([0, T])$, e per ogni $f \in L^2([0, T])$, abbiamo $f \in L^1([0, T])$ con*

$$\|f\|_{L^1([0, T])} \leq \sqrt{T} \|f\|_{L^2([0, T])}.$$

Dimostrazione. Se $f \in L^2([0, T])$, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz abbiamo

$$\|f\|_{L^1([0, T])} = \int_0^T |f(t)| \cdot 1 \, dt = \langle |f|, 1 \rangle_{L^2([0, T])} \leq \|f\|_{L^2([0, T])} \|1\|_{L^2([0, T])},$$

e quindi è sufficiente osservare che

$$\|1\|_{L^2([0, T])} = \sqrt{\int_0^T 1 \, dt} = \sqrt{T}.$$

Per vedere che l'inclusione è stretta, è sufficiente considerare la funzione

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}} & \text{se } t \in (0, T) \\ 0 & \text{se } t = 0 \end{cases},$$

che soddisfa $f \in L^1([0, T]) \setminus L^2([0, T])$, dato che

$$\|f\|_{L^1([0, T])} = \int_0^T \frac{1}{\sqrt{t}} \, dt = \left[2\sqrt{t} \right]_0^T = 2\sqrt{T} \quad \text{e} \quad \|f\|_{L^2([0, T])}^2 = \int_0^T \frac{1}{t} \, dt = +\infty.$$

□

Definizione 6.1.7. Siano $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ funzioni T -periodiche tali che $f, g \in L^1([0, T])$. La *convoluzione* di f e g , $f * g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, è definita da

$$(f * g)(t) := \int_0^T f(t-s)g(s) \, ds,$$

se questo integrale converge.

Notiamo che, grazie alla periodicità, la convoluzione di due funzioni periodiche (se è ben definita) dipende solo dai valori di f su $[0, T]$: infatti, per ogni $t \in [0, T]$ abbiamo

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t-s)g(s) \, ds &= \int_0^t f(t-s)g(s) \, ds + \int_t^T f(t-s)g(s) \, ds \\ &= \int_0^t f(t-s)g(s) \, ds + \int_t^T f(T+t-s)g(s) \, ds, \end{aligned}$$

e $T+t-s \in (t, T)$ per ogni $s \in (t, T)$. Formule analoghe valgono per $t < 0$ e $t > T$. Inoltre, il prodotto di convoluzione è simmetrico, quando è ben definito, ovvero $f * g = g * f$, e vale il seguente risultato.

Proposizione 6.1.8. *Siano $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ funzioni T -periodiche tali che $f, g \in L^1([0, T])$. Allora $f * g \in L^1([0, T])$ ed è T -periodica. Se poi f o g appartengono a $L^2([0, T])$, allora $f * g \in L^2([0, T])$.*

6.2 Coefficienti di Fourier

Per $n \in \mathbb{Z}$, definiamo le funzioni T -periodiche

$$e_n(t) := e^{i\frac{2\pi}{T}nt} = \cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right).$$

Infatti, $e_0(t) = 1$ e, per $n \neq 0$, e_n è $\frac{T}{|n|}$ -periodica, quindi T -periodica, in particolare. Ovviamente $e_n \in L^2([0, T])$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, dato che $|e_n(t)| = 1$ e quindi

$$\|e_n\|_{L^2([0, T])} = \sqrt{\int_0^T 1 dt} = \sqrt{T} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{Z}.$$

Osserviamo che valgono le seguenti *relazioni di ortogonalità*,

$$\begin{aligned} \langle e_m, e_n \rangle_{L^2([0, T])} &= \int_0^T e_m(t) \overline{e_n(t)} dt = \int_0^T e^{i\frac{2\pi}{T}mt} e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} dt \\ &= \int_0^T e^{i\frac{2\pi}{T}(m-n)t} dt = \begin{cases} \int_0^T 1 dt & \text{se } m = n \\ \left[\frac{1}{i\frac{2\pi}{T}(m-n)} e^{i\frac{2\pi}{T}(m-n)t} \right]_0^T & \text{se } m \neq n \end{cases} \\ &= \begin{cases} T & \text{se } m = n \\ \frac{1}{i\frac{2\pi}{T}(m-n)} (e^{i2\pi(m-n)} - 1) & \text{se } m \neq n \end{cases} = \begin{cases} T & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m \neq n \end{cases}. \end{aligned}$$

Perciò, $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ è una *famiglia ortogonale di funzioni* in $L^2([0, T])$. In particolare, queste funzioni possono essere *normalizzate*: se definiamo

$$\widetilde{e}_n(t) := \frac{1}{\sqrt{T}} e^{i\frac{2\pi}{T}nt},$$

allora otteniamo

$$\langle \widetilde{e}_m, \widetilde{e}_n \rangle_{L^2([0, T])} = \begin{cases} 1 & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m \neq n \end{cases},$$

di modo che $\{\widetilde{e}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ è una *famiglia ortonormale di funzioni*. Talvolta, si preferisce questa variante per definire le serie di Fourier, ma noi useremo la versione non normalizzata. Si può dimostrare che la famiglia $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ è in effetti una base di $L^2([0, T])$, ma ometteremo questo risultato profondo.

Definizione 6.2.1. Sia $f \in L^1([0, T])$. Per ogni $n \in \mathbb{Z}$, l' n -esimo *coefficiente di Fourier* di f è dato da

$$\widehat{f}(n) := \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} dt.$$

Osservazione 6.2.2. Notiamo che i coefficienti di Fourier sono in effetti ben definiti, perché, se $f \in L^1([0, T])$, allora

$$\int_0^T |f(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}nt}| dt = \int_0^T |f(t)| dt < +\infty.$$

Se poi $f \in L^2([0, T])$, allora vediamo che

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{T} \langle f, e_n \rangle_{L^2([0, T])},$$

ovvero i coefficienti di Fourier sono il prodotto scalare fra la funzione data e l'elemento n -esimo della base ortogonale di $L^2([0, T])$, a meno di un riscalamento uguale al periodo. Questa identità non è valida per funzioni solo in $L^1([0, T])$, perché per tali funzioni il prodotto scalare non è ben definito, in generale.

Come conseguenza immediata della periodicità di f e delle funzioni esponenziali complesse, vediamo che i coefficienti di Fourier si possono calcolare su ogni intervallo di lunghezza uguale al periodo.

Lemma 6.2.3. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione periodica di periodo $T > 0$ tale che $f \in L^1([0, T])$, allora

$$\int_a^{a+T} f(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} dt = \int_0^T f(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} dt$$

per ogni $a \in \mathbb{R}$. In particolare,

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} dt. \quad (6.2.1)$$

Dimostrazione. Dato che f è T -periodica, allora $f(t+T) = f(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Allora, se $a \in [0, T]$, tramite il cambio di variabili $t = s + T$, deduciamo che

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} f(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} dt &= \int_a^T f(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} dt + \int_T^{a+T} f(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} dt \\ &= \int_a^T f(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} dt + \int_0^a f(s+T) e^{-i\frac{2\pi}{T}n(s+T)} ds \\ &= \int_a^T f(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} dt + \int_0^a f(s) e^{-i\frac{2\pi}{T}ns} ds = \int_0^T f(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} dt. \end{aligned}$$

Se poi $a < 0$ o $a > T$, allora bisogna fare un cambio di variabili $t = s + kT$ per $k \in \mathbb{Z}$ tale che $0 \leq a - kT \leq T$, di modo da poter poi replicare lo stesso argomento. \square

Molto spesso, la formula (6.2.1) è utile nelle applicazioni, visto che permette di sfruttare eventuali simmetrie della funzione rispetto all'origine.

Enunciamo alcune proprietà di base dei coefficienti di Fourier.

Teorema 6.2.4 (Proprietà fondamentali dei coefficienti di Fourier). *Siano $f, g \in L^1([0, T])$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Allora per ogni $n \in \mathbb{Z}$*

1) (linearità dei coefficienti) $(\alpha f + \beta g)(n) = \alpha \widehat{f}(n) + \beta \widehat{g}(n);$

2) (coefficienti della derivata) se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è T -periodica e $C^1(\mathbb{R})$, abbiamo

$$\widehat{f'}(n) = \frac{2\pi in}{T} \widehat{f}(n);$$

e in generale, se $f \in C^k(\mathbb{R})$ per qualche $k \in \mathbb{N}$, abbiamo

$$\widehat{f^{(k)}}(n) = \left(\frac{2\pi in}{T}\right)^k \widehat{f}(n);$$

3) (coefficienti della traslazione) se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è T -periodica e se definiamo $\tau_a f(t) := f(t - a)$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ (che è una traslazione di f), abbiamo

$$\widehat{\tau_a f}(n) = e^{-i\frac{2\pi}{T}na} \widehat{f}(n);$$

4) (traslazione dei coefficienti) per ogni $k \in \mathbb{Z}$ abbiamo

$$\widehat{f}(n - k) = \widehat{f e_k}(n);$$

5) (coefficienti della convoluzione) se $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sono funzioni T -periodiche, allora

$$\widehat{f * g}(n) = T \widehat{f}(n) \widehat{g}(n).$$

Dimostrazione. Il punto (1) è ovvio. Dimostriamo il punto (2), mentre (3), (4) e (5) sono lasciati per esercizio.

Dato che $e^{-i2\pi n} = 1$ e che $f(0) = f(T)$ per periodicità, vediamo che

$$\begin{aligned} \widehat{f'}(n) &= \frac{1}{T} \int_0^T f'(f) e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} dt = \frac{1}{T} \left[f(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} \right]_0^T - \frac{1}{T} \int_0^T f(f) \left(-\frac{2\pi in}{T} \right) e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} dt \\ &= \frac{1}{T} (f(T) - f(0)) + \frac{2\pi in}{T} \frac{1}{T} \int_0^T f(f) e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} dt = \frac{2\pi in}{T} \widehat{f}(n). \end{aligned}$$

Se poi $f \in C^k(\mathbb{R})$ per $k \geq 2$, è sufficiente applicare questa formula iterativamente k -volte. \square

Definizione 6.2.5. Sia $f \in L^1([0, T])$. La serie di Fourier associata a f è

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) e^{i\frac{2\pi}{T}nt} := \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) e^{i\frac{2\pi}{T}nt},$$

che definisce una funzione periodica di periodo T della variabile t , avente come dominio i valori di t per cui la serie converge, ovvero il limite esiste finito.

Per funzioni a valori reali, $f : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, è utile poter esprimere i coefficienti e le serie di Fourier solo in termini di numeri reali, ovvero tramite le *armoniche reali*, che sono gli elementi della famiglia $\left\{ \cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right), \sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) \right\}_{n \in \mathbb{N}_0}$. Infatti, dato che

$$\cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) = \operatorname{Re}(e^{i\frac{2\pi}{T}nt}) \quad \text{e} \quad \sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) = \operatorname{Im}(e^{i\frac{2\pi}{T}nt}),$$

non è difficile mostrare che la famiglia delle armoniche reali è ortogonale.

Lemma 6.2.6. *Per ogni $T > 0$ e $m, n \in \mathbb{N}_0$ abbiamo*

$$\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi}{T}mt\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) dt = \begin{cases} T & \text{se } m = n = 0 \\ \frac{T}{2} & \text{se } m = n \neq 0 \\ 0 & \text{se } m \neq n \end{cases},$$

$$\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi}{T}mt\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) dt = \begin{cases} \frac{T}{2} & \text{se } m = n \neq 0 \\ 0 & \text{se } m \neq n \text{ o se } m = n = 0 \end{cases}$$

e

$$\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi}{T}mt\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) dt = 0.$$

Dimostrazione. Dimostriamo solo l'identità per il prodotto di coseni, e lasciamo le altre due per esercizio. Il caso $m = n = 0$ è ovvio. Siano quindi $m, n \in \mathbb{N}_0$, non entrambi nulli. Grazie alla formula di Euler, vediamo che

$$\begin{aligned} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi}{T}mt\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) dt &= \frac{1}{4} \int_0^T \left(e^{i\frac{2\pi}{T}mt} + e^{-i\frac{2\pi}{T}mt} \right) \left(e^{i\frac{2\pi}{T}nt} + e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} \right) dt \\ &= \frac{1}{4} \int_0^T \left(e^{i\frac{2\pi}{T}(m+n)t} + e^{i\frac{2\pi}{T}(m-n)t} + e^{i\frac{2\pi}{T}(n-m)t} + e^{-i\frac{2\pi}{T}(m+n)t} \right) dt \\ &= \frac{1}{4} \int_0^T \left(e^{i\frac{2\pi}{T}(m-n)t} + e^{i\frac{2\pi}{T}(n-m)t} \right) dt, \end{aligned}$$

dato che $m + n \neq 0$ implica

$$\int_0^T e^{i\frac{2\pi}{T}(m+n)t} dt = \left[\frac{e^{i\frac{2\pi}{T}(m+n)t}}{i\frac{2\pi}{T}(m+n)} \right]_0^T = \frac{e^{i2\pi(m+n)} - 1}{i\frac{2\pi}{T}(m+n)} = 0$$

e ugualmente

$$\int_0^T e^{-i\frac{2\pi}{T}(m+n)t} dt = \left[\frac{e^{-i\frac{2\pi}{T}(m+n)t}}{-i\frac{2\pi}{T}(m+n)} \right]_0^T = \frac{e^{-i2\pi(m+n)} - 1}{-i\frac{2\pi}{T}(m+n)} = 0.$$

Ragionando in maniera del tutto analoga, osserviamo che

$$\int_0^T e^{i\frac{2\pi}{T}(m-n)t} dt = \int_0^T e^{i\frac{2\pi}{T}(n-m)t} dt = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ T & \text{se } n = m \end{cases},$$

e quindi otteniamo

$$\begin{aligned} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi}{T}mt\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) dt &= \frac{1}{4} \int_0^T \left(e^{i\frac{2\pi}{T}(m-n)t} + e^{i\frac{2\pi}{T}(n-m)t} \right) dt \\ &= \frac{1}{4} \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ 2T & \text{se } n = m \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ \frac{T}{2} & \text{se } n = m \end{cases}. \end{aligned}$$

□

Definiamo quindi i coefficienti di Fourier reali.

Definizione 6.2.7. Sia $f \in L^1([0, T])$. Per ogni $n \in \mathbb{N}_0$, gli n -esimi coefficienti di Fourier reali di f sono dati da

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) dt.$$

In particolare, se $n = 0$, abbiamo

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt \quad \text{e} \quad b_0 = 0.$$

Osservazione 6.2.8. Analogamente a quanto sottolineato nel Lemma 6.2.3, se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione periodica di periodo $T > 0$ tale che $f \in L^1([0, T])$, allora i coefficienti di Fourier reali si possono calcolare su ogni intervallo di lunghezza uguale al periodo, ovvero

$$a_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) dt,$$

per ogni $a \in \mathbb{R}$. In particolare, si possono definire alternativamente i coefficienti di Fourier reali come

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) dt,$$

se si vuole sfruttare la simmetria della funzione f rispetto all'origine.

Non è difficile notare che ci sono varie relazioni fra i coefficienti di Fourier definiti tramite l'esponenziale complesso (e perciò chiamati anche *coefficienti di Fourier complessi*) e quelli reali: raccogliamo tutti questi risultati nella proposizione seguente.

Proposizione 6.2.9. Siano $f \in L^1([0, T])$. Se poniamo

$$c_n = \widehat{f}(n) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} dt \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{Z},$$

allora abbiamo

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad a_n = c_n + c_{-n} \quad \text{e} \quad b_n = i(c_n - c_{-n}) \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}_0.$$

Se in aggiunta $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, ovvero è a valori reali, allora abbiamo

$$c_{-n} = \overline{c_n} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{Z},$$

e

$$a_0 = 2c_0, \quad a_n = 2\operatorname{Re}(c_n) \quad \text{e} \quad b_n = -2\operatorname{Im}(c_n) \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Infine, assumiamo che $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sia una funzione T -periodica tale che $f \in L^1([0, T])$. Allora

- se f è pari su $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$, abbiamo $b_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $c_n \in \mathbb{R}$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$,
- se f è dispari su $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$, abbiamo $a_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}_0$ e $c_n \in i\mathbb{R}$ (ovvero, c_n è un numero immaginario) per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

Dimostrazione. La prima equazione è un'immediata conseguenza della formula di Euler per l'esponenziale complesso. Osserviamo poi che

$$c_n + c_{-n} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \left(e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} + e^{i\frac{2\pi}{T}nt} \right) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) 2 \cos \left(\frac{2\pi}{T}nt \right) dt = a_n$$

e

$$c_n - c_{-n} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \left(e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} - e^{i\frac{2\pi}{T}nt} \right) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) (-2i) \sin \left(\frac{2\pi}{T}nt \right) dt = (-i)b_n,$$

dalla quale concludiamo, visto che $(-i)^{-1} = i$. Se poi f è a valori reali, allora

$$\overline{c_n} = \overline{\frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} dt} = \frac{1}{T} \int_0^T \overline{f(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}nt}} dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{i\frac{2\pi}{T}nt} dt = c_{-n}.$$

Quindi, grazie alle equazioni precedentemente dimostrate, otteniamo $a_0 = 2c_0 \in \mathbb{R}$,

$$a_n = c_n + c_{-n} = a_n = c_n + \overline{c_n} = 2 \operatorname{Re}(c_n) \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}$$

e

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = i(c_n - \overline{c_n}) = i(2i \operatorname{Im}(c_n)) = -2 \operatorname{Im}(c_n) \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Infine, se f è definita su tutto \mathbb{R} ed è T -periodica, usiamo l'Osservazione 6.2.8 per mostrare che

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos \left(\frac{2\pi}{T}nt \right) dt = \frac{2}{T} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^0 f(t) \cos \left(\frac{2\pi}{T}nt \right) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos \left(\frac{2\pi}{T}nt \right) dt \right) \\ &= \frac{2}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} f(-t) \cos \left(\frac{2\pi}{T}nt \right) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos \left(\frac{2\pi}{T}nt \right) dt \right) \\ &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} (f(t) + f(-t)) \cos \left(\frac{2\pi}{T}nt \right) dt \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin \left(\frac{2\pi}{T}nt \right) dt = \frac{2}{T} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^0 f(t) \sin \left(\frac{2\pi}{T}nt \right) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin \left(\frac{2\pi}{T}nt \right) dt \right) \\ &= \frac{2}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} f(-t) \left(-\sin \left(\frac{2\pi}{T}nt \right) \right) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin \left(\frac{2\pi}{T}nt \right) dt \right) \\ &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} (f(t) - f(-t)) \sin \left(\frac{2\pi}{T}nt \right) dt, \end{aligned}$$

grazie al cambiamento di variabile $t = -s$ nell'integrale su $[-\frac{T}{2}, 0]$, dove però abbiamo rinominato di nuovo $s = t$, dato che la variabile di integrazione è muta. Da ciò segue immediatamente che $a_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}_0$ se f è dispari su $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$, e $b_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ se f è pari su $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$, e le conseguenze su c_n si derivano facilmente dalle formule mostrate in precedenza. \square

Vediamo ora come ricavare la serie di Fourier reale (di una funzione a valori reali) a partire da quella complessa, giustificando così la definizione dei coefficienti di Fourier reali.

Proposizione 6.2.10. *Sia $f : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in L^1([0, T))$. Allora per ogni $N \in \mathbb{N}$ abbiamo*

$$\sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) e^{i\frac{2\pi}{T}nt} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos \left(\frac{2\pi}{T}nt \right) + b_n \sin \left(\frac{2\pi}{T}nt \right) \right).$$

Dimostrazione. Poniamo $c_n = \widehat{f}(n)$ e osserviamo che, grazie alla Proposizione 6.2.9, abbiamo

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=-N}^N c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nt} &= c_0 + \sum_{n=1}^N c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nt} + \sum_{n=-N}^{-1} c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nt} \\
 &= c_0 + \sum_{n=1}^N c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nt} + \sum_{n=1}^N c_{-n} e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} \\
 &= c_0 + \sum_{n=1}^N \left((c_n + \overline{c_n}) \cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) + i(c_n - \overline{c_n}) \sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) \right) \\
 &= c_0 + \sum_{n=1}^N \left(2\operatorname{Re}(c_n) \cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) + i(2i\operatorname{Im}(c_n)) \sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) \right) \\
 &= c_0 + \sum_{n=1}^N \left(2\operatorname{Re}(c_n) \cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) - 2\operatorname{Im}(c_n) \sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) \right) \\
 &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) \right).
 \end{aligned}$$

□

Diamo quindi la definizione di serie di Fourier reale (per funzioni a valori reali).

Definizione 6.2.11. Sia $f : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in L^1([0, T))$. La *serie di Fourier (reale)* associata a f è

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) \right).$$

Grazie alla Proposizione 6.2.10, sappiamo che per una funzione a valori reali la serie di Fourier complessa e quella reale coincidono.

Vediamo ora un esempio di calcolo dei coefficienti di Fourier complessi e reali.

Esempio 6.2.12. Sia $f : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = t$, estesa su tutto \mathbb{R} a una funzione 1-periodica. Chiaramente, $f \in L^1([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$, dato che è limitata. Inoltre, grazie all'Osservazione 6.2.8, vediamo

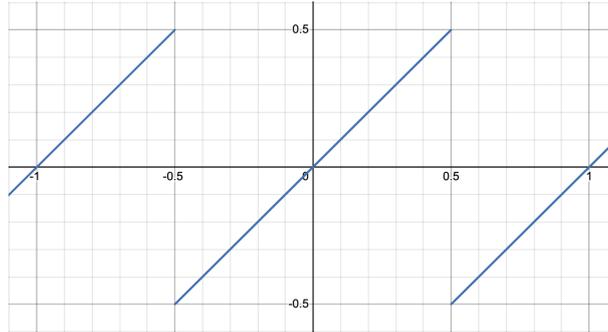


Figura 6.1: Il grafico di f .

che possiamo calcolare i coefficienti di Fourier integrando sull'intervallo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, anziché $[0, 1)$. Notiamo per prima cosa che per $n = 0$ abbiamo

$$\widehat{f}(0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = 0,$$

risultato che si può in alternativa dedurre dal fatto che f è dispari su $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Per $n \neq 0$ calcoliamo l'integrale usando la formula di integrazione per parti:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(n) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t e^{-i2\pi nt} dt = \left[\frac{t}{-i2\pi n} e^{-i2\pi nt} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{i2\pi n} e^{-i2\pi nt} dt \\ &= \frac{i}{4\pi n} e^{-i\pi n} + \frac{i}{4\pi n} e^{i\pi n} + \left[\frac{1}{4\pi^2 n^2} e^{-i2\pi nt} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{i}{4\pi n} (e^{-i\pi n} + e^{i\pi n}) + \frac{1}{4\pi^2 n^2} (e^{-i\pi n} - e^{i\pi n}) \\ &= \frac{i}{4\pi n} 2 \cos(\pi n) + \frac{1}{4\pi^2 n^2} (-2i \sin(\pi n)) = i \frac{(-1)^n}{2\pi n},\end{aligned}$$

dato che $\cos(\pi n) = (-1)^n$ e $\sin(\pi n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

Di conseguenza, dato che f è a valori reali, grazie alla Proposizione 6.2.9 sappiamo che, posto $c_n = \widehat{f}(n)$, abbiamo

$$a_0 = 2c_0, \quad a_n = 2 \operatorname{Re}(c_n) \quad \text{e} \quad b_n = -2 \operatorname{Im}(c_n) \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}, n \geq 1,$$

e quindi concludiamo che

$$a_n = 0 \quad \text{per ogni } n \geq 0 \quad \text{e} \quad b_n = -\frac{(-1)^n}{\pi n} \quad \text{per ogni } n \geq 1.$$

Osserviamo inoltre che $a_n = 0$ si può dedurre alternativamente dal fatto che f è dispari su $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

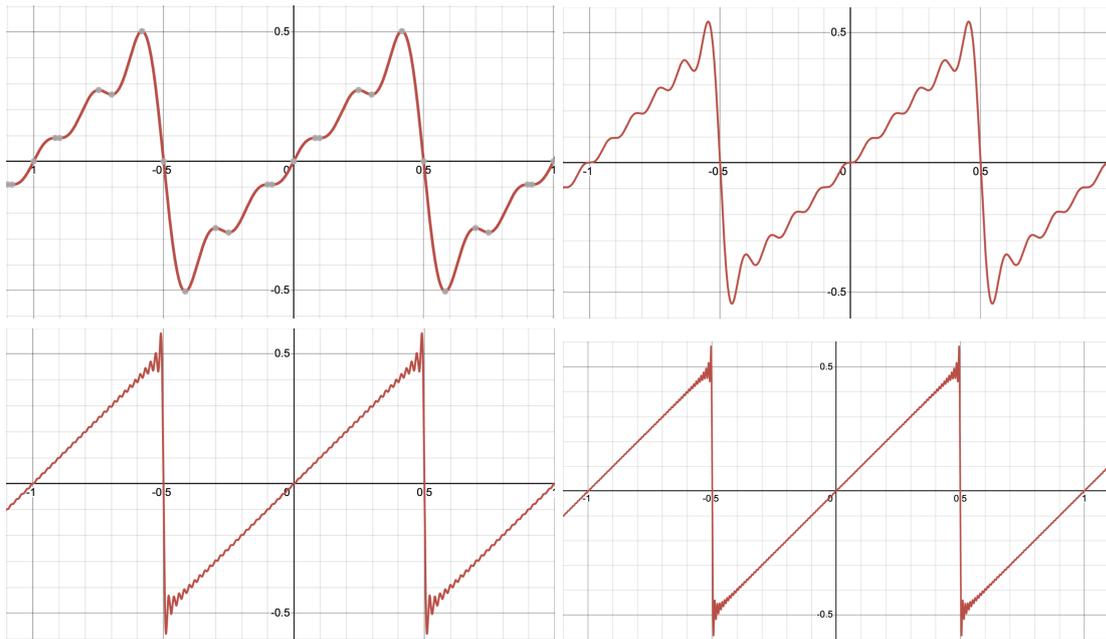


Figura 6.2: I grafici di $\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n} \sin(2\pi nt)$, per $N = 5, 10, 50, 100$.

In definitiva, la serie di Fourier complessa di f è data da

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} i \frac{(-1)^n}{2\pi n} e^{i2\pi nt}.$$

e la serie di Fourier reale di f è data da

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n} \sin(2\pi nt).$$

Mostriamo ora un risultato che ci permette di rendere rigorosa l'idea intuitiva che le serie di Fourier siano un modo per scrivere una funzione periodica (o un segnale, o un'onda sonora) in termini della base di armoniche fondamentali (che siano complesse o reali).

Teorema 6.2.13. [Non visto a lezione.] Siano $f \in L^2([0, T])$, $N \in \mathbb{N}$ e

$$g_N(t) = \sum_{n=-N}^N \gamma_n e^{i\frac{2\pi}{T}nt}$$

per certi $\gamma_n \in \mathbb{C}$ per $n \in \{-N, \dots, N\}$. Allora, se poniamo $c_n = \widehat{f}(n)$, abbiamo

$$\int_0^T \left| f(t) - \sum_{n=-N}^N c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nt} \right|^2 dt \leq \int_0^T |f(t) - g_N(t)|^2 dt, \quad (6.2.2)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left| f(t) - \sum_{n=-N}^N c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nt} \right|^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt - \sum_{n=-N}^N |c_n|^2. \quad (6.2.3)$$

e

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt \geq \sum_{n=-N}^N |c_n|^2. \quad (6.2.4)$$

Se poi $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, allora

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left| f(t) - \sum_{n=-N}^N c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nt} \right|^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \quad (6.2.5)$$

e

$$\frac{2}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2). \quad (6.2.6)$$

Dimostrazione. [Non vista a lezione.] Grazie al Corollario 6.1.5, notiamo che

$$\int_0^T |f(t) - g_N(t)|^2 dt = \|f - g_N\|_{L^2([0, T])}^2 = \|f\|_{L^2([0, T])}^2 + \|g_N\|_{L^2([0, T])}^2 - 2 \operatorname{Re} \left(\langle f, g_N \rangle_{L^2([0, T])} \right).$$

Troviamo quindi delle espressioni per gli ultimi due termini. Grazie all'ortogonalità delle funzioni e_n , vediamo che

$$\begin{aligned} \|g_N\|_{L^2([0, T])}^2 &= \int_0^T \left(\sum_{n=-N}^N \gamma_n e^{i\frac{2\pi}{T}nt} \right) \overline{\left(\sum_{m=-N}^N \gamma_m e^{i\frac{2\pi}{T}mt} \right)} dt \\ &= \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N \gamma_n \overline{\gamma_m} \int_0^T e^{i\frac{2\pi}{T}(n-m)t} dt = \sum_{n=-N}^N \gamma_n \overline{\gamma_n} T = T \sum_{n=-N}^N |\gamma_n|^2. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il prodotto scalare, sfruttiamo la definizione dei coefficienti di Fourier

$$\langle f, g_N \rangle_{L^2([0, T])} = \sum_{n=-N}^N \int_0^T f(t) \overline{\gamma_n} e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} dt = \sum_{n=-N}^N \overline{\gamma_n} T c_n = T \sum_{n=-N}^N \overline{\gamma_n} c_n.$$

A questo punto, notiamo che

$$|\gamma_n|^2 - 2 \operatorname{Re}(\overline{\gamma_n} c_n) + |c_n|^2 = |\gamma_n - c_n|^2 \geq 0$$

e quindi

$$|\gamma_n|^2 - 2 \operatorname{Re}(\overline{\gamma_n} c_n) \geq -|c_n|^2. \quad (6.2.7)$$

Quindi, sfruttando di nuovo la definizione dei coefficienti di Fourier e l'ortogonalità delle funzioni e_n , otteniamo

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left| f(t) - \sum_{n=-N}^N c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nt} \right|^2 dt &= \int_0^T \left(|f(t)|^2 - f(t) \sum_{n=-N}^N \overline{c_n} e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} - \overline{f(t)} \sum_{n=-N}^N c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nt} + \right. \\
&\quad \left. \left(\sum_{n=-N}^N c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nt} \right) \left(\sum_{m=-N}^N \overline{c_m} e^{-i\frac{2\pi}{T}mt} \right) \right) dt \\
&= \int_0^T |f(t)|^2 dt - \sum_{n=-N}^N \overline{c_n} \int_0^T f(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} dt + \\
&\quad - \sum_{n=-N}^N c_n \int_0^T \overline{f(t)} e^{i\frac{2\pi}{T}nt} dt + \\
&\quad + \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N c_n \overline{c_m} \int_0^T e^{i\frac{2\pi}{T}(n-m)t} dt \\
&= \int_0^T |f(t)|^2 dt - \sum_{n=-N}^N \overline{c_n} T c_n - \sum_{n=-N}^N c_n \overline{\int_0^T f(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} dt} + \\
&\quad + \sum_{n=-N}^N c_n \overline{c_n} T \\
&= \int_0^T |f(t)|^2 dt - T \sum_{n=-N}^N |c_n|^2 - \sum_{n=-N}^N c_n T \overline{c_n} + T \sum_{n=-N}^N |c_n|^2 \\
&= \int_0^T |f(t)|^2 dt - T \sum_{n=-N}^N |c_n|^2,
\end{aligned}$$

Perciò, grazie a (6.2.7), concludiamo che

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left| f(t) - \sum_{n=-N}^N c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nt} \right|^2 dt &= \int_0^T |f(t)|^2 dt + T \sum_{n=-N}^N (-|c_n|^2) \\
&\leq \|f\|_{L^2(0,T)}^2 + T \sum_{n=-N}^N (|\gamma_n|^2 - 2\operatorname{Re}(\overline{\gamma_n} c_n)) \\
&= \int_0^T |f(t) - g_N(t)|^2 dt,
\end{aligned}$$

grazie a quanto visto sopra. Ciò dimostra (6.2.2). Peraltro, con questi conti abbiamo anche dimostrato (6.2.3), dalla quale (6.2.4) segue immediatamente. Infine, se f è a valori reali, otteniamo (6.2.5) e (6.2.6) applicando la Proposizione 6.2.9, dato che

$$|c_n|^2 = \frac{1}{4} (a_n^2 + b_n^2)$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-N}^N |c_n|^2 &= |c_0|^2 + \sum_{n=1}^N |c_n|^2 + \sum_{n=-N}^{-1} |c_n|^2 = |c_0|^2 + \sum_{n=1}^N |c_n|^2 + \sum_{n=1}^N |c_{-n}|^2 \\
&= |c_0|^2 + \sum_{n=1}^N |c_n|^2 + \sum_{n=1}^N |\overline{c_n}|^2 = |c_0|^2 + 2 \sum_{n=1}^N |c_n|^2 \\
&= \frac{a_0^2}{4} + 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{4} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2).
\end{aligned}$$

□

Un'importante conseguenza di questo risultato è la disuguaglianza di Bessel.

Corollario 6.2.14 (Disuguaglianza di Bessel). *Sia $f \in L^2([0, T])$. Allora abbiamo*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(n)|^2 \leq \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt,$$

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \widehat{f}(n) = 0.$$

Se poi $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, allora

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{2}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt,$$

e quindi $a_n, b_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.

Dimostrazione. [Non vista a lezione.] Otteniamo le disuguaglianze prendendo il limite per $N \rightarrow +\infty$ in (6.2.4) e (6.2.6). Poi, è sufficiente osservare che la condizione necessaria per la convergenza di una serie numerica è che il termine generale converga a 0 per $n \rightarrow +\infty$ (e $n \rightarrow -\infty$ se la serie è bilatera). \square

Risulta naturale chiedersi se si ottenga una simile proprietà di decadimento per i coefficienti di Fourier di funzioni che siano solo in $L^1([0, T])$, e la risposta è data dal Lemma di Riemann-Lebesgue.

Teorema 6.2.15 (Lemma di Riemann-Lebesgue). *Sia $f \in L^1([0, T])$. Allora abbiamo*

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \widehat{f}(n) = 0.$$

Osservazione 6.2.16. Il Lemma di Riemann-Lebesgue è un esempio di un caso in cui non si può scambiare il limite e l'integrale: infatti, per $f \in L^1([0, T])$ abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T f(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} dt = 0,$$

mentre chiaramente non esiste il limite di $e^{-i\frac{2\pi}{T}nt}$ per $n \rightarrow +\infty$, per ogni $t \in (0, T)$, visto che la successione di funzioni è oscillante (essendo una somma complessa di seni e coseni).

Osservazione 6.2.17. Sottolineiamo il fatto che la disuguaglianza di Bessel ci assicura che, per una funzione $f \in L^2([0, T])$, i coefficienti di Fourier soddisfano $\widehat{f}(n) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \pm\infty$ con una velocità di convergenza tale da garantire che

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(n)|^2 < +\infty.$$

Al contrario, se $f \in L^1([0, T]) \setminus L^2([0, T])$, il Lemma di Riemann-Lebesgue ci dice solo che $\widehat{f}(n) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \pm\infty$, senza specificare quanto rapidamente: quindi, potrebbe succedere che

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(n)| = +\infty,$$

e ciò rende più problematico stabilire la convergenza della serie di Fourier. Tuttavia, si riescono comunque a caratterizzare dei casi di convergenza, sotto alcune ipotesi aggiuntive, come vedremo.

Come ultima osservazione relativa al decadimento dei coefficienti di Fourier, enunciamo il seguente risultato per funzioni derivabili, la cui dimostrazione è lasciata per esercizio.

Lemma 6.2.18. *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione T -periodica tale che $f \in L^1([0, T])$ e $f \in C^k(\mathbb{R})$ per qualche $k \in \mathbb{N}$. Allora*

$$\widehat{f}(n) = o\left(\frac{1}{n^k}\right) \text{ per } n \rightarrow \pm\infty, \text{ ovvero } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^k \widehat{f}(n) = 0.$$

6.3 Convergenza delle serie di Fourier

Vediamo ora un risultato generale di convergenza per le serie di Fourier di funzioni in $L^2([0, T])$.

Teorema 6.3.1 (Analisi spettrale). *Sia $f \in L^2([0, T])$. Allora la serie di Fourier associata a f converge a f in senso L^2 , ovvero*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| f - \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) e_n \right\|_{L^2([0, T])} = 0, \quad (6.3.1)$$

dove $e_n(t) = e^{i \frac{2\pi}{T} nt}$, che significa

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^T \left| f(t) - \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) e^{i \frac{2\pi}{T} nt} \right|^2 dt = 0.$$

Di conseguenza,

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) e_n \quad \text{in } L^2([0, T]),$$

e quindi

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) e^{i \frac{2\pi}{T} nt} \quad \text{per quasi ogni } t \in [0, T].$$

Inoltre, vale l'identità di Parseval:

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(n)|^2. \quad (6.3.2)$$

Se poi $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, allora

$$\frac{2}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2). \quad (6.3.3)$$

Dimostrazione. [Non vista a lezione.] Dimostriamo solo l'identità di Parseval a partire dalla prima parte dell'enunciato. Grazie alla disuguaglianza triangolare, sappiamo che

$$\left| \|f\|_{L^2([0, T])} - \left\| \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) e_n \right\|_{L^2([0, T])} \right| \leq \left\| f - \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) e_n \right\|_{L^2([0, T])} \rightarrow 0 \quad \text{per } N \rightarrow +\infty,$$

grazie a (6.3.1). Ciò significa che

$$\int_0^T |f(t)|^2 dt = \|f\|_{L^2([0, T])}^2 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) e_n \right\|_{L^2([0, T])}^2,$$

quindi dobbiamo solo calcolare quest'ultima norma. Dato che $\|g\|_{L^2([0, T])}^2 = \langle g, g \rangle_{L^2([0, T])}$, troviamo che

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) e_n \right\|_{L^2([0, T])}^2 &= \left\langle \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) e_n, \sum_{m=-N}^N \widehat{f}(m) e_m \right\rangle_{L^2([0, T])} \\ &= \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N \widehat{f}(n) \overline{\widehat{f}(m)} \langle e_n, e_m \rangle_{L^2([0, T])} \\ &= \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) \overline{\widehat{f}(n)} T = T \sum_{n=-N}^N |\widehat{f}(n)|^2. \end{aligned}$$

Perciò, è sufficiente prendere il limite per $N \rightarrow +\infty$ per concludere. Da (6.3.2) segue poi facilmente la versione per funzioni a valori reali, ragionando in maniera analoga a quanto fatto alla fine della dimostrazione del Teorema 6.2.13. \square

Osservazione 6.3.2. Analogamente a quanto sottolineato nel Lemma 6.2.3 e nell'Osservazione 6.2.8, se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione periodica di periodo $T > 0$ tale che $f \in L^2([0, T])$, nell'identità di Parseval si può calcolare l'integrale su un qualunque intervallo di lunghezza uguale al periodo, ovvero

$$\frac{1}{T} \int_a^{a+T} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(n)|^2 \quad \text{per ogni } a \in \mathbb{R}.$$

In particolare, ciò è vero per $a = -\frac{T}{2}$, per cui otteniamo

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(n)|^2.$$

Se poi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ovvero è una funzione a valori reali, allora

$$\frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2). \quad (6.3.4)$$

Quindi, se una funzione è a quadrato sommabile, cioè in $L^2([0, T])$, allora i suoi coefficienti di Fourier sono tali che la serie dei loro moduli al quadrato è convergente. È interessante notare che vale anche l'implicazione opposta, ovvero, data una successione (bilatera) di numeri complessi tale che la serie dei loro moduli al quadrato sia convergente, allora esiste una funzione a quadrato sommabile che abbia gli elementi di questa successione come coefficienti di Fourier.

Teorema 6.3.3 (Sintesi spettrale). Sia $\{c_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ una successione bilatera in \mathbb{C} tale che

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 < \infty.$$

Allora la serie di Fourier

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nt}$$

converge in $L^2([0, T])$, ovvero, esiste una funzione $f \in L^2([0, T])$ tale che

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^T \left| f(t) - \sum_{n=-N}^N c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nt} \right|^2 dt = 0.$$

Inoltre,

$$\widehat{f}(n) = c_n \quad e \quad \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2.$$

L'identità di Parseval per funzioni reali (6.3.3) viene spesso applicata per calcolare il valore di certe serie numeriche.

Esempio 6.3.4. Sia $f : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = t$, estesa su tutto \mathbb{R} a una funzione 1-periodica. Grazie all'Esempio 6.2.12, sappiamo che la serie di Fourier di f è data da

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} i \frac{(-1)^n}{2\pi n} e^{i2\pi nt} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n} \sin(2\pi nt).$$

Inoltre, è chiaro che $f \in L^2([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$, dato che è limitata. Quindi, possiamo applicare l'identità di Parseval per funzioni reali nella sua variante sull'intervallo traslato (6.3.4):

$$2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t^2 dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n} \right)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2},$$

dato che $a_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}_0$ e $b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Perciò, vediamo che⁴

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 2\pi^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t^2 dt = 2\pi^2 \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = 2\pi^2 \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{24} \right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Osserviamo poi che l'identità di Parseval può essere impiegata anche per il calcolo di integrali del quadrato di funzioni reali, specialmente qualora la serie di Fourier associata a tali funzioni sia in realtà una somma finita.

Esempio 6.3.5. Calcoliamo

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(t) \cos^2(t) dt$$

sfruttando l'identità di Parseval in $L^2([0, 2\pi])$. Di conseguenza, consideriamo la funzione

$$f(t) = \sin(t) \cos(t),$$

visto che ci interessa calcolare l'integrale del suo quadrato, e ne troviamo i coefficienti di Fourier. Notiamo che non è necessario calcolarli esplicitamente, dato che, per la formula di duplicazione del seno, abbiamo

$$f(t) = \sin(t) \cos(t) = \frac{1}{2} \sin(2t).$$

Grazie alle relazioni di ortogonalità delle funzioni seno e coseno su $[0, 2\pi)$ (il caso $T = 2\pi$ nel Lemma 6.2.6), vediamo che i coefficienti di Fourier reali di f sono

$$a_n = 0 \text{ per ogni } n \geq 0, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = \frac{1}{2} \text{ e } b_n = 0 \text{ per ogni } n \geq 3.$$

Quindi, grazie all'identità di Parseval per le funzioni reali (6.3.3), otteniamo

$$\frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(t) \cos^2(t) dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{4},$$

che implica

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(t) \cos^2(t) dt = \frac{\pi}{4}.$$

Concludiamo questo capitolo con un risultato di convergenza puntuale delle serie di Fourier. Per enunciarlo, diamo la definizione di funzioni continue e C^1 a tratti.

Definizione 6.3.6. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Diciamo che f è una funzione *continua a tratti*, e scriviamo $f \in C_{\text{tr}}([a, b])$, se esistono $t_0, t_1, \dots, t_k \in [a, b]$ tali che

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b,$$

$f \in C((t_{j-1}, t_j))$ per ogni $j = 1, \dots, k$, e che esistono finiti i limiti

$$\lim_{t \rightarrow a^+} f(t), \lim_{t \rightarrow b^-} f(t), \lim_{t \rightarrow t_j^\pm} f(t) \in \mathbb{C} \text{ per ogni } j \in \{1, 2, \dots, k-1\}.$$

Diciamo che f è una funzione C^1 a tratti, e scriviamo $f \in C_{\text{tr}}^1([a, b])$, se esistono $t_0, t_1, \dots, t_k \in [a, b]$ tali che

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b,$$

$f \in C^1((t_{j-1}, t_j))$ per ogni $j = 1, \dots, k$, e che esistono finiti i limiti

$$\lim_{t \rightarrow a^+} f'(t), \lim_{t \rightarrow b^-} f'(t), \lim_{t \rightarrow t_j^\pm} f'(t) \in \mathbb{C} \text{ per ogni } j \in \{1, 2, \dots, k-1\}.$$

In particolare, $C_{\text{tr}}^1([a, b]) \subset C_{\text{tr}}([a, b])$, quindi una funzione C^1 a tratti ammette limiti destri e/o sinistri in ogni punto di non derivabilità (negli altri punti la funzione è necessariamente continua). Inoltre, se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione T -periodica tale che $f \in C_{\text{tr}}([0, T])$, allora f è limitata, e dunque appartiene a $L^1([0, T])$.

⁴Questa è la soluzione del *Problema di Basilea*, posto da Pietro Mengoli nel 1644 e risolto da Leonhard Euler nel 1735.

Teorema 6.3.7. [Non visto a lezione.] Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione T -periodica tale che $f \in C_{\text{tr}}([0, T])$. Sia $t_0 \in \mathbb{R}$ tale che

$$\exists \lim_{t \rightarrow t_0^\pm} \frac{f(t) - f(t_0^\pm)}{t - t_0} \in \mathbb{C},$$

dove $f(t_0^\pm) = \lim_{t \rightarrow t_0^\pm} f(t)$. Allora abbiamo

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) e^{i \frac{2\pi}{T} n t_0} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) e^{i \frac{2\pi}{T} n t_0} = \frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2}.$$

Se poi $f \in C^1((t_0 - \delta, t_0 + \delta) \setminus \{t_0\})$ per qualche $\delta > 0$, allora è sufficiente richiedere che

$$\exists \lim_{t \rightarrow t_0^\pm} f'(t) \in \mathbb{C}.$$

Inoltre, se f è anche continua in t_0 , allora

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) e^{i \frac{2\pi}{T} n t_0} = f(t_0).$$

Il precedente teorema si riformula in maniera più concisa per le funzioni reali C^1 a tratti.

Teorema 6.3.8. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione T -periodica tale che $f \in C_{\text{tr}}^1([0, T])$. Allora per ogni $t \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) e^{i \frac{2\pi}{T} n t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} n t\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} n t\right) \right) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2},$$

dove $f(t^\pm) = \lim_{\tau \rightarrow t^\pm} f(\tau)$. In particolare, se f è continua in t , abbiamo

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) e^{i \frac{2\pi}{T} n t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} n t\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} n t\right) \right) = f(t).$$

Vediamo un'applicazione di questo risultato al calcolo del valore di una serie numerica.

Esempio 6.3.9. Sia $f : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = t$, estesa su tutto \mathbb{R} a una funzione 1-periodica. Grazie all'Esempio 6.2.12, sappiamo che la serie di Fourier di f è data da

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} i \frac{(-1)^n}{2\pi n} e^{i 2\pi n t} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n} \sin(2\pi n t).$$

Osserviamo che $f \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{k + \frac{1}{2} : k \in \mathbb{Z}\})$, con $f'(t) = 1$ per ogni $t \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, di modo che

$$\lim_{t \rightarrow (\frac{1}{2})^\pm} f'(t) = \lim_{t \rightarrow (-\frac{1}{2})^\pm} f'(t) = 1.$$

Quindi $f \in C_{\text{tr}}^1([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$. Inoltre, f è discontinua solo in $\pm \frac{1}{2}$ (e, per periodicità, in $k + \frac{1}{2}$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$), con

$$f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^+\right) + f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^-\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 \quad \text{e} \quad f\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^+\right) + f\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^-\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0,$$

di modo che, per periodicità,

$$f\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)^+\right) + f\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)^-\right) = f\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)^+\right) + f\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)^-\right) = 0 \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{Z}.$$

Quindi, concludiamo che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n} \sin(2\pi n t) = \begin{cases} t & \text{se } t \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \\ 0 & \text{se } t = \pm \frac{1}{2}, \end{cases}$$

e perciò, per periodicità,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n} \sin(2\pi n t) = \begin{cases} t - k & \text{se } t \in (k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) \text{ per qualche } k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{se } t = k + \frac{1}{2}, \text{ per qualche } k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

In particolare, se $t = \frac{1}{4}$, vediamo che $\sin(\frac{\pi n}{2}) = 0$ per n pari. Quindi, nella serie si annullano tutti i termini di indice pari, di modo che

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ dispari}}}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = [n = 2k + 1] \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2k+2}}{\pi(2k+1)} \sin\left(\pi k + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} (-1)^k. \end{aligned}$$

In conclusione, otteniamo

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Capitolo 7

Trasformate di Fourier

1

Iniziamo vedendo un'introduzione euristica alla trasformata di Fourier tramite il limite di una serie di Fourier di una funzione T -periodica per periodo $T \rightarrow +\infty$.

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione T -periodica sufficientemente regolare, di modo che

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{i \frac{2\pi}{T} n t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(s) e^{-i \frac{2\pi}{T} n s} ds \right) e^{i \frac{2\pi}{T} n t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{T} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(s) e^{-i \frac{2\pi}{T} n s} ds \right) e^{i \frac{2\pi}{T} n t}. \end{aligned}$$

Ora, per T abbastanza grande, l'integrale fra parentesi è molto vicino alla quantità

$$\hat{f}\left(\frac{2\pi}{T}n\right) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-i \frac{2\pi}{T} n s} ds.$$

Quindi, passando al limite per $T \rightarrow +\infty$ pare ragionevole ottenere

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{T} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(s) e^{-i \frac{2\pi}{T} n s} ds \right) e^{i \frac{2\pi}{T} n t} \approx \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{T} \hat{f}\left(\frac{2\pi}{T}n\right) e^{i \frac{2\pi}{T} n t} \\ &\approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{i \xi t} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-i \xi s} ds \right) e^{i \xi t} d\xi, \end{aligned}$$

dato che il limite dell'ultima serie è un'approssimazione dell'integrale improprio su $(-\infty, +\infty)$.

Perciò, se vogliamo estendere i metodi di Fourier a funzioni che non sono periodiche (ovvero, che hanno "periodo infinito"), risulta sensato considerare questa generalizzazione dei coefficienti di Fourier all'integrazione su tutta la retta reale, che viene chiamata *trasformata di Fourier*.

Prima di cominciare, dobbiamo quindi vedere le proprietà delle funzioni sommabili (e a quadrato sommabile) su tutta la retta reale.

7.1 Spazi $L^p(\mathbb{R})$

In analogia con quanto visto nel caso di funzioni definite su un intervallo, possiamo definire gli spazi di funzioni p -sommabili su tutta la retta reale.

Definizione 7.1.1. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Per $p \in [1, +\infty)$ definiamo le *norme* $L^p(\mathbb{R})$ ² come

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R})} := \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

dove l'integrale va inteso in senso improprio. In particolare,

¹Parti di questo capitolo sono basate sul libro *Matematica per l'Ingegneria dell'Informazione* di Giulio Cesare Barozzi e sul libro *Introduzione alla Analisi Complessa* di Michele Carriero e Simone Cito.

²Talvolta si scrive $L^p(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ per sottolineare che la funzione è a valori complessi, ma qui omettiamo tale simbolo, dando per scontato che tutte le funzioni lo siano, visto che $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

- se $p = 1$, $\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$;
- se $p = 2$, $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt}$.

Date due funzioni $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tali che $\|f_j\|_{L^p(\mathbb{R})} < +\infty$ per $j = 1, 2$, le identifichiamo se $f_1(t) = f_2(t)$ per quasi ogni $t \in \mathbb{R}$ ³, e in tal caso scriviamo $f_1 \sim f_2$, e diciamo che f_1 e f_2 fanno parte della stessa *classe di equivalenza*. Definiamo $L^p(\mathbb{R})$ come l'insieme delle classi di equivalenza di funzioni f tali che $\|f\|_{L^p(\mathbb{R})} < +\infty$.

Con un piccolo abuso di notazione, parliamo comunque di funzioni $f \in L^p(\mathbb{R})$, anche se, a rigore, dovremmo dire che f è una funzione la cui classe di equivalenza appartiene a $L^p(\mathbb{R})$.

Come nel caso degli intervalli limitati, gli spazi $L^p(\mathbb{R})$ sono degli spazi vettoriali.

Proposizione 7.1.2. *Sia $p \in [1, +\infty)$. La norma $L^p(\mathbb{R})$ è omogenea, ovvero*

$$\|af\|_{L^p(\mathbb{R})} = |a| \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

per ogni $f \in L^p(\mathbb{R})$ e $a \in \mathbb{C}$, e soddisfa la disuguaglianza triangolare:

$$\|f + g\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|g\|_{L^p(\mathbb{R})} \quad \text{per ogni } f, g \in L^p(\mathbb{R}).$$

Quindi, $L^p(\mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale, ovvero, per ogni $f, g \in L^p(\mathbb{R})$ e $a, b \in \mathbb{C}$, abbiamo $af + bg \in L^p(\mathbb{R})$.

Dimostrazione. L'omogeneità della norma è un'ovvia conseguenza della definizione di modulo. Omettiamo invece la dimostrazione della disuguaglianza triangolare. Date queste due proprietà della norma, vediamo che, per ogni $f, g \in L^p(\mathbb{R})$ e $a, b \in \mathbb{C}$, abbiamo

$$\|af + bg\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|af\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|bg\|_{L^p(\mathbb{R})} = |a| \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} + |b| \|g\|_{L^p(\mathbb{R})} < +\infty,$$

e dunque $af + bg \in L^p(\mathbb{R})$. □

Anche in questo caso, lo spazio $L^2(\mathbb{R})$ gode di particolari proprietà che lo rendono, euristica-mente parlando uno spazio euclideo di dimensione infinita. Nello specifico, si può definire una nozione di prodotto interno che è coerente con la norma.

Definizione 7.1.3. Il *prodotto scalare* tra $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ è definito da

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Questo prodotto scalare soddisfa le seguenti proprietà.

Teorema 7.1.4. *Siano $f, g, h \in L^2(\mathbb{R})$ e $a, b \in \mathbb{C}$.*

i) *Linearità rispetto a f e linearità-coniugata rispetto a g di $\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$:*

$$\langle af + bg, h \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = a \langle f, h \rangle_{L^2(\mathbb{R})} + b \langle g, h \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$$

e

$$\langle h, af + bg \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \bar{a} \langle h, f \rangle_{L^2(\mathbb{R})} + \bar{b} \langle h, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})}.$$

ii) *Non degenerazione:*

$$\langle f, f \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \geq 0 \quad \text{per ogni } f \in L^2(\mathbb{R})$$

e

$$\langle f, f \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = 0 \quad \text{se e solo se } f = 0 \text{ in } L^2(\mathbb{R}), \text{ ovvero } f(t) = 0 \text{ per quasi ogni } t \in \mathbb{R}.$$

iii) *Quasi-commutatività:*

$$\langle g, f \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \overline{\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})}}.$$

³Nel senso della definizione data alla fine della sezione 2.2.

iv) *Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:*

$$|\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})}| \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \|g\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Possiamo quindi dare una nozione di distanza su $L^2(\mathbb{R})$, ponendo

$$d(f, g) := \|f - g\|_{L^2(\mathbb{R})} \text{ per ogni } f, g \in L^2(\mathbb{R}).$$

Il quadrato di questa distanza soddisfa un'utile identità in relazione con il prodotto scalare.

Corollario 7.1.5. [Non visto a lezione.] *Per ogni $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ abbiamo*

$$\begin{aligned} \|f - g\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|g\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 - \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} - \langle g, f \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|g\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 - 2 \operatorname{Re} \left(\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \right). \end{aligned}$$

Dimostrazione. [Non vista a lezione.] La prima riga segue immediatamente dal fatto che

$$\|f - g\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \langle f - g, f - g \rangle_{L^2(\mathbb{R})},$$

mentre per la seconda usiamo $\langle g, f \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \overline{\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})}}$. □

Osservazione 7.1.6. A differenza del caso di spazi L^p su intervalli limitati, non è vero che $L^2(\mathbb{R})$ è un sottospazio di $L^1(\mathbb{R})$, né è vera l'inclusione opposta. Infatti, se consideriamo

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{|t|} & \text{se } |t| \geq 1 \\ 1 & \text{se } |t| < 1 \end{cases}$$

e

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } |t| \geq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{|t|}} & \text{se } 0 < |t| < 1, \\ 1 & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

è facile verificare che $f \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$ e $g \in L^1(\mathbb{R}) \setminus L^2(\mathbb{R})$.

Definizione 7.1.7. Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. La *convoluzione* di f e g , $f * g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, è definita da

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s) g(s) ds,$$

se questo integrale converge.

In effetti, le convoluzioni di coppie di funzioni $L^1(\mathbb{R})$ o di una funzione $L^1(\mathbb{R})$ e una funzione $L^2(\mathbb{R})$ sono ben poste e appartengono a $L^1(\mathbb{R})$ o $L^2(\mathbb{R})$, rispettivamente.

Teorema 7.1.8 (Disuguaglianza di Young). *Siano $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in L^p(\mathbb{R})$ per qualche $p \in [1, +\infty)$. Allora $f * g \in L^p(\mathbb{R})$ e*

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \|g\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

In particolare,

- se $p = 1$, $\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}$,
- se $p = 2$, $\|f * g\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \|g\|_{L^2(\mathbb{R})}$.

Dato che si può facilmente verificare che il prodotto di convoluzione è simmetrico, ovvero

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s) g(s) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) g(t-s) ds = (g * f)(t),$$

allora la disuguaglianza di Young rimane valida scambiando i ruoli di f e g .

7.2 Trasformate di Fourier: teoria L^1

Definizione 7.2.1. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$. La *trasformata di Fourier* di f , $\widehat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, è

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt \quad \text{per } \xi \in \mathbb{R}.$$

Talvolta, la trasformata di Fourier di f si indica anche con $\mathcal{F}(f)$.

Chiaramente, la trasformata di Fourier di una funzione $f \in L^1(\mathbb{R})$ è ben posta per ogni $\xi \in \mathbb{R}$, poiché $|f(t)e^{-i\xi t}| = |f(t)|$, che ha integrale (improprio) finito.

Raccogliamo nella seguente proposizione le proprietà elementari della trasformata di Fourier per funzioni $L^1(\mathbb{R})$.

Proposizione 7.2.2. Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Allora per ogni $\xi \in \mathbb{R}$

1) (linearità della trasformata) $(\alpha f + \beta g)(\xi) = \alpha \widehat{f}(\xi) + \beta \widehat{g}(\xi);$

2) (trasformata della traslazione) se $a \in \mathbb{R}$ e $(\tau_a f)(t) := f(t - a)$, abbiamo

$$(\widehat{\tau_a f})(\xi) = e^{-ia\xi} \widehat{f}(\xi)$$

e, se poniamo $e_a(t) = e^{iat}$, abbiamo

$$(\widehat{e_a f})(\xi) = \widehat{f}(\xi - a) = (\tau_a \widehat{f})(\xi);$$

3) (trasformata della dilatazione) se $\lambda > 0$ e $D_\lambda f(t) := f\left(\frac{t}{\lambda}\right)$, abbiamo

$$\frac{1}{\lambda} (\widehat{D_\lambda f})(\xi) = \widehat{f}(\lambda \xi) = D_{1/\lambda} \widehat{f}(\xi);$$

4) (trasformata della derivata) se $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $f' \in L^1(\mathbb{R})$, abbiamo

$$(\widehat{f'})(\xi) = i\xi \widehat{f}(\xi)$$

e, se poniamo $\ell(t) = t$ e assumiamo $\ell f \in L^1(\mathbb{R})$, abbiamo

$$(\widehat{f})'(\xi) = (\widehat{-i\ell f})(\xi),$$

ovvero

$$\frac{d}{d\xi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-it) f(t) e^{-i\xi t} dt;$$

5) (trasformata della convoluzione) $\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi)$.

Dimostrazione. [Non vista a lezione.] Vediamo solo l'idea della dimostrazione del punto (5). Grazie alla definizione di prodotto di convoluzione, abbiamo⁴

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(t) e^{-i\xi t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s) g(s) e^{-i\xi t} ds \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s) e^{-i\xi(t-s)} g(s) e^{-i\xi s} ds \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s) e^{-i\xi(t-s)} dt \right) g(s) e^{-i\xi s} ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\xi u} du \right) g(s) e^{-i\xi s} ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) g(s) e^{-i\xi s} ds = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi). \end{aligned}$$

□

⁴Lo scambio degli integrali fra la seconda e la terza riga andrebbe giustificato rigorosamente, ma ciò va oltre lo scopo di questo corso.

Analogamente a quanto visto per i coefficienti di Fourier, se la funzione è pari o dispari, la sua trasformata dipende solo dal coseno o dal seno, rispettivamente.

Lemma 7.2.3. *Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$. Allora*

- se f è pari, allora \widehat{f} è pari e

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\xi t) dt;$$

- se f è dispari, allora \widehat{f} è dispari e

$$\widehat{f}(\xi) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(\xi t) dt.$$

Se in aggiunta $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, allora \widehat{f} è reale se f è pari, ed è immaginaria se f è dispari.

Ancora analogamente a quanto visto per i coefficienti di Fourier, la trasformata di Fourier tende a zero all'infinito.

Teorema 7.2.4 (Lemma di Riemann-Lebesgue). *Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$. Allora $\widehat{f} \in C(\mathbb{R})$ e*

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \widehat{f}(\xi) = 0.$$

Vediamo tre esempi di calcolo della trasformata di Fourier, prendendo in considerazione una funzione esponenziale troncata, la funzione gaussiana e la caratteristica di un intervallo simmetrico rispetto all'origine. Allo scopo, ricordiamo che la *funzione caratteristica* di un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ è la funzione $\chi_E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$\chi_E(t) := \begin{cases} 1 & \text{se } t \in E \\ 0 & \text{se } t \notin E \end{cases}.$$

Esempio 7.2.5. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione data da

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t \leq 0 \end{cases} = e^{-t} \chi_{(0, +\infty)}(t).$$

Calcoliamo la trasformata di Fourier:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t} \chi_{(0, +\infty)}(t) e^{-i\xi t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(1+i\xi)t} dt = \left[-\frac{1}{1+i\xi} e^{-(1+i\xi)t} \right]_0^{+\infty} \\ &= - \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+i\xi} e^{-(1+i\xi)t} \right) + \frac{1}{1+i\xi} = \frac{1}{1+i\xi} = \frac{1-i\xi}{1+\xi^2}, \end{aligned}$$

dato che $e^{-t} \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$, mentre $|e^{-i\xi t}| = 1$, e dunque è limitata.

Esempio 7.2.6. Sia $f(t) = e^{-t^2}$. Per il Lemma 7.2.3 $\widehat{f}(\xi)$ è una funzione reale e pari, perciò è sufficiente calcolarla per $\xi > 0$ o $\xi < 0$. Osserviamo poi che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{-i\xi t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t^2+i\xi t)} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t^2+i\xi t - \frac{\xi^2}{4})} e^{-\frac{\xi^2}{4}} dt = e^{-\frac{\xi^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t+i\frac{\xi}{2})^2} dt,$$

e questo ci suggerisce che per il calcolo di questa trasformata di Fourier dobbiamo passare attraverso il calcolo dell'integrale curvilineo complesso di e^{-z^2} sulla retta

$$\left\{ z = t + i\frac{\xi}{2} : t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{C}.$$

Allo scopo, applichiamo il Teorema Integrale di Cauchy alla funzione intera $f(z) = e^{-z^2}$ sulla curva C^1 a tratti, semplice e chiusa,

$$\Gamma_{R,c} = \ell_R + \sigma_{R,c} + \ell_{R,c} + \sigma_{-R,c},$$

dove $R > c > 0$ e

- ℓ_R è il segmento sulla retta reale che va da $-R$ a R , parametrizzato ad esempio da $\ell_R(t) = t$ per $t \in [-R, R]$;
- $\sigma_{R,c}$ è il segmento che va da R a $R + ic$, parametrizzato ad esempio da $\sigma_{R,c}(t) = R + itc$ per $t \in [0, 1]$;
- $\ell_{R,c}$ è il segmento che va da $R + ic$ a $-R + ic$, parametrizzato ad esempio da $\ell_{R,c}(t) = -t + ic$ per $t \in [-R, R]$;
- $\sigma_{-R,c}$ è il segmento che va da $-R + ic$ a $-R$, parametrizzato ad esempio da $\sigma_{-R,c}(t) = -R - itc$ per $t \in [-1, 0]$.

Di conseguenza, otteniamo

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Gamma_{R,c}} e^{-z^2} dz = \int_{-R}^R e^{-t^2} dt + \int_0^1 e^{-(R+itc)^2} ic dt + \int_{-R}^R e^{-(t+ic)^2} (-dt) + \\
&+ \int_{-1}^0 e^{-(-R-itc)^2} (-ic) dt = \int_{-R}^R e^{-t^2} dt + ic \int_0^1 e^{-(R^2-t^2c^2+2itRc)} dt + \\
&- \int_{-R}^R e^{-(t^2-c^2-2ict)} dt - ic \int_{-1}^0 e^{-(R^2-t^2c^2+2itRc)} dt.
\end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\left| \int_0^1 e^{-(R^2-t^2c^2+2itRc)} dt \right| \leq \int_0^1 e^{-R^2+t^2c^2} dt = e^{-R^2} \int_0^1 e^{t^2c^2} dt \leq e^{-R^2} e^{c^2} \rightarrow 0 \text{ per } R \rightarrow +\infty$$

e analogamente

$$\left| \int_{-1}^0 e^{-(R^2-t^2c^2+2itRc)} dt \right| \leq e^{-R^2} e^{c^2} \rightarrow 0 \text{ per } R \rightarrow +\infty.$$

Perciò, passando al limite per $R \rightarrow +\infty$, otteniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R e^{-t^2} dt = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R e^{-(t^2-c^2-2ict)} dt = e^{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{2ict} dt,$$

e quindi, dato che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ (si veda l'esempio 2.1.15), troviamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{2ict} dt = \sqrt{\pi} e^{-c^2}.$$

Di conseguenza, se poniamo $c = -\frac{\xi}{2}$ (di modo che $\xi < 0$), ne segue che

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{-i\xi t} dt = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\xi^2}{4}}.$$

per $\xi < 0$, ma, dato che \widehat{f} e la funzione trovata sono entrambe pari, allora questa equazione è valida per ogni $\xi \in \mathbb{R}$, visto che, per $\xi > 0$, abbiamo

$$\widehat{f}(\xi) = \widehat{f}(-\xi) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{(-\xi)^2}{4}} = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\xi^2}{4}},$$

e per $\xi = 0$ ritroviamo

$$\widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

Nel caso della gaussiana, sia la funzione che la sua trasformata sono in $L^1(\mathbb{R})$. Ciò non è vero in generale, come si può vedere con il primo e il prossimo esempio.

Esempio 7.2.7. Sia

$$f(t) = \chi_{(-1,1)}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } |t| < 1 \\ 0 & \text{se } |t| \geq 1 \end{cases}.$$

Allora vediamo che

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{(-1,1)}(t) e^{-i\xi t} dt = \int_{-1}^1 e^{-i\xi t} dt = \left[\frac{e^{-i\xi t}}{-i\xi} \right]_{-1}^1 = \frac{e^{-i\xi} - e^{i\xi}}{-i\xi} = \frac{-2i \sin(\xi)}{-i\xi} = 2 \frac{\sin(\xi)}{\xi}.$$

Si può mostrare che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\sin(\xi)}{\xi} \right| d\xi = +\infty,$$

e quindi $\widehat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$. Tuttavia, è interessante notare che si può ugualmente calcolare la trasformata di Fourier della funzione $\frac{\sin(\xi)}{\xi}$. Osserviamo infatti che

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{\sin(\xi)}{\xi} e^{-i\xi t} d\xi = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{\sin(\xi)}{\xi} \cos(\xi t) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\xi)}{\xi} \cos(\xi t) d\xi,$$

dato che la funzione

$$h(\xi) = \frac{\sin(\xi)}{\xi} \sin(\xi t)$$

è dispari per ogni $t \in \mathbb{R}$ fissato. Per calcolare l'ultimo integrale, osserviamo che

$$\sin(\xi) \cos(\xi t) = \frac{1}{2} (\sin(\xi + \xi t) + \sin(\xi - \xi t)) = \frac{1}{2} (\sin(\xi(1+t)) + \sin(\xi(1-t))),$$

di modo che possiamo ridurci a calcolare gli integrali

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\xi(1+t))}{\xi} d\xi \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\xi(1-t))}{\xi} d\xi \quad \text{per } t \in \mathbb{R}.$$

Dato che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\xi)}{\xi} d\xi = \pi,$$

per $t > -1$ abbiamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\xi(1+t))}{\xi} d\xi = [\xi(1+t) = u] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\frac{u}{1+t}} \frac{du}{t+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du = \pi,$$

e per $t < -1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\xi(1+t))}{\xi} d\xi = [\xi(1+t) = u] = \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{\sin(u)}{\frac{u}{1+t}} \frac{du}{t+1} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du = -\pi.$$

Visto che ovviamente $\sin(\xi(1+t)) = 0$ per $t = -1$, concludiamo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\xi(1+t))}{\xi} d\xi = \begin{cases} \pi & \text{se } t > -1 \\ 0 & \text{se } t = -1 \\ -\pi & \text{se } t < -1 \end{cases}.$$

Cambiando quindi il segno di t , troviamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\xi(1-t))}{\xi} d\xi = \begin{cases} \pi & \text{se } -t > -1 \\ 0 & \text{se } -t = -1 \\ -\pi & \text{se } -t < -1 \end{cases} = \begin{cases} \pi & \text{se } t < 1 \\ 0 & \text{se } t = 1 \\ -\pi & \text{se } t > 1 \end{cases}.$$

In conclusione, otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\xi)}{\xi} \cos(\xi t) d\xi &= \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\xi(1+t))}{\xi} d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\xi(1-t))}{\xi} d\xi \right) \\ &= \frac{1}{2} \begin{cases} \pi - \pi & \text{se } t > 1 \\ \pi + 0 & \text{se } t = 1 \\ \pi + \pi & \text{se } -1 < t < 1 \\ 0 + \pi & \text{se } t = -1 \\ -\pi + \pi & \text{se } t < -1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{se } t > 1 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } t = 1 \\ \pi & \text{se } -1 < t < 1 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } t = -1 \\ 0 & \text{se } t < -1 \end{cases} \\ &= \pi \chi_{(-1,1)}(t) + \frac{\pi}{2} \chi_{\{-1,1\}}(t). \end{aligned}$$

Quindi, dato che $f(1^-) = f(-1^+) = 1$, vediamo che, se $f(t) = \chi_{(-1,1)}(t)$, allora $\widehat{f}(\xi) = 2 \frac{\sin(\xi)}{\xi}$ e

$$\widehat{f}(t) = 2\pi \left(f(t) + \frac{f(1^-)}{2} \chi_{\{1\}}(t) + \frac{f(-1^+)}{2} \chi_{\{-1\}}(t) \right) = 2\pi \left(\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} \right).$$

Ciò suggerisce che si può invertire una trasformata di Fourier applicandola una seconda volta e dividendo per 2π , come sembravano indicare i calcoli euristici visti all'inizio di questo capitolo; anche se nei punti di discontinuità si ottiene la media fra i limiti destri e sinistri di f .

In base all'euristica vista all'inizio di questo capitolo e nell'esempio precedente, si può supporre che sia possibile invertire l'operazione della trasformata di Fourier in modo da ricavare la funzione di partenza a partire dalla sua trasformata. Per enunciare un tale risultato, dobbiamo prima definire le funzioni continue e C^1 a tratti su \mathbb{R} .

Definizione 7.2.8. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Diciamo che f è *continua a tratti su \mathbb{R}* , e scriviamo $f \in C_{\text{tr}}(\mathbb{R})$, se $f \in C_{\text{tr}}([a, b])$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Diciamo che f è *C^1 a tratti su \mathbb{R}* , e scriviamo $f \in C_{\text{tr}}^1(\mathbb{R})$, se $f \in C_{\text{tr}}^1([a, b])$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

Teorema 7.2.9 (Formola di inversione della trasformata di Fourier). Sia $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C_{\text{tr}}^1(\mathbb{R})$. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \widehat{f}(\xi) e^{i\xi t} d\xi = \frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\xi s} ds \right) e^{i\xi t} d\xi = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2},$$

dove $f(t^\pm) = \lim_{\tau \rightarrow t^\pm} f(\tau)$ ⁵. In particolare, se f è anche continua in t , otteniamo

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \widehat{f}(\xi) e^{i\xi t} d\xi = f(t).$$

Alternativamente, se assumiamo $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ e $f \in C(\mathbb{R})$, allora⁶

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi t} d\xi = f(t) \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}. \quad (7.2.1)$$

L'integrale nell'equazione (7.2.1) è l'*antitrasformata di Fourier*, definita come

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) e^{i\xi t} d\xi = \frac{1}{2\pi} \widehat{g}(-\xi) \quad \text{per } \xi \in \mathbb{R}$$

per $g \in L^1(\mathbb{R})$. Quindi, se $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ e $f \in C(\mathbb{R})$, allora abbiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi t} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-i\xi s} ds \right) e^{i\xi t} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \widehat{\widehat{f}}(-t) = f(t) \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

7.3 Trasformate di Fourier: teoria L^2

Con l'Esempio 7.2.7 abbiamo visto che, in generale, la trasformata di Fourier di una funzione $L^1(\mathbb{R})$ non è essa stessa $L^1(\mathbb{R})$, ma solo una funzione continua che va a zero all'infinito (grazie al Lemma di Riemann-Lebesgue, Teorema 7.2.4). Nonostante ciò, la trasformata di Fourier è invertibile, e

⁵Questo risultato vale un po' più in generale assumendo solo che $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C_{\text{tr}}(\mathbb{R})$ e considerando i punti $t_0 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\exists \lim_{t \rightarrow t_0^\pm} \frac{f(t) - f(t_0^\pm)}{t - t_0} \in \mathbb{C}.$$

Questa condizione è peraltro soddisfatta se $f \in C^1((t_0 - \delta, t_0 + \delta) \setminus \{t_0\})$ per qualche $\delta > 0$ e

$$\exists \lim_{t \rightarrow t_0^\pm} f'(t) \in \mathbb{C}.$$

⁶Sotto le sole ipotesi $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, l'identità (7.2.1) vale per quasi ogni $t \in \mathbb{R}$.

l'antitrasformata coincide di fatto con la trasformata stessa, a meno di un coefficiente moltiplicativo e di un cambio di segno nella variabile. Sia per risolvere questa apparente asimmetria sia in analogia con la teoria delle serie di Fourier è utile estendere la definizione di trasformata di Fourier a funzioni in $L^2(\mathbb{R})$. Tuttavia, se sappiamo solo che $f \in L^2(\mathbb{R})$, allora potrebbe succedere che l'integrale improprio $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt$ non sia convergente, perché la funzione $|f(t)e^{-i\xi t}| = |f(t)|$ potrebbe non essere integrabile su $(-\infty, +\infty)$, alla luce dell'Osservazione 7.1.6. L'idea è quindi di considerare il limite

$$\widehat{f}(\xi) := \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(t) e^{-i\xi t} dt, \quad (7.3.1)$$

in $L^2(\mathbb{R})$, sfruttando il fatto che gli integrali sono ben posti per ogni $R > 0$. In effetti, abbiamo notato che questo limite esiste in alcuni casi di funzioni in $L^2(\mathbb{R})$ che non appartengono a $L^1(\mathbb{R})$, come illustrato nell'Esempio 7.2.7, dato che non è difficile mostrare che la funzione $g(t) = \frac{\sin(t)}{t}$ soddisfa $g \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$.

Tuttavia, la dimostrazione della convergenza del limite (7.3.1) rispetto alla nozione di distanza su $L^2(\mathbb{R})$ è molto profonda e va al di là degli scopi di questo corso; ci limitiamo quindi ad esporre il teorema di Plancherel.

Teorema 7.3.1 (Teorema di Plancherel). *Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$. Allora $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$, nel senso che esiste una funzione $h \in L^2(\mathbb{R})$ tale che*

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| h(\xi) - \int_{-R}^R f(t) e^{-i\xi t} dt \right|^2 d\xi = 0,$$

e dunque $h = \widehat{f}$ in $L^2(\mathbb{R})$. Inoltre, valgono due identità di Parseval per le trasformate di Fourier, sia per la norma che per il prodotto scalare su $L^2(\mathbb{R})$:

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{2\pi} \|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \quad \text{per ogni } f \in L^2(\mathbb{R})$$

e

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{g(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} d\xi = \frac{1}{2\pi} \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \quad \text{per ogni } f, g \in L^2(\mathbb{R}).$$

Infine, vale la formula di inversione della trasformata Fourier in $L^2(\mathbb{R})$:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(t) - \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \widehat{f}(\xi) e^{i\xi t} d\xi \right|^2 dt = 0,$$

ovvero

$$f(t) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \widehat{f}(\xi) e^{i\xi t} d\xi \quad \text{per quasi ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Come conseguenza del teorema di Plancherel, si può mostrare che le proprietà delle trasformate di Fourier elencate nella Proposizione 7.2.2 valgono anche per funzioni in $L^2(\mathbb{R})$, con due soli aggiustamenti:

- nel caso della derivata, bisogna chiedere che $f' \in L^2(\mathbb{R})$ e $\ell f \in L^2(\mathbb{R})$,
- nel caso della convoluzione, dobbiamo assumere $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in L^2(\mathbb{R})$ (o viceversa), altrimenti il prodotto di convoluzione non è ben definito.

Vediamo un esempio di applicazione dell'identità di Parseval.

Esempio 7.3.2. Sia $f(t) = \chi_{(-1,1)}(t)$, di modo che $\widehat{f}(\xi) = 2 \frac{\sin(\xi)}{\xi}$, come mostrato nell'Esempio 7.2.7. Dato che $f \in L^2(\mathbb{R})$, possiamo usare il teorema di Plancherel per concludere che $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$

(oppure lo si può dimostrare direttamente, come osservato in precedenza). L'identità di Parseval ci dice quindi che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\chi_{(-1,1)}(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| 2 \frac{\sin(\xi)}{\xi} \right|^2 d\xi,$$

ovvero

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(\xi)}{\xi} \right)^2 d\xi = \frac{2\pi}{4} \int_{-1}^1 dt = \pi.$$

7.4 Trasformate di Fourier di funzioni razionali fratte

Un'altra famiglia fondamentale di funzioni delle quali si possono calcolare esplicitamente le trasformate di Fourier sono le funzioni razionali fratte, purché appartengano a $L^1(\mathbb{R})$, ovvero il loro denominatore non si annulli mai sulla retta reale e abbia grado abbastanza superiore a quello del numeratore. Illustriamo il calcolo, tramite il metodo dei residui, con un esempio.

Esempio 7.4.1. [Non visto a lezione.] Consideriamo $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$, e vogliamo calcolare

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\xi t}}{1+t^2} dt \quad \text{per } \xi \in \mathbb{R}.$$

Osserviamo che la funzione

$$m(z) = \frac{e^{-i\xi z}}{1+z^2}$$

è meromorfa su \mathbb{C} , i suoi due poli sono $\{i, -i\}$ e sono entrambi di ordine 1. Quindi possiamo applicare il teorema dei residui. Consideriamo la curva C^1 a tratti, semplice e chiusa, e percorsa in senso antiorario

$$\Gamma_R = \gamma_R + \ell_R,$$

dove

- γ_R è la semicirconfenza di raggio R centrata nell'origine nel semipiano $\{y > 0\}$, percorsa in senso antiorario, parametrizzata ad esempio da $\gamma_R(t) = Re^{it}$ per $t \in [0, \pi]$,
- ℓ_R è il segmento sulla retta reale che va da $-R$ a R , parametrizzato ad esempio da $\ell_R(t) = t$ per $t \in [-R, R]$.

Visto che \mathbb{C} è semplicemente connesso, Γ_R è deformabile a un punto. Inoltre, è chiaro che non passa per nessuno dei due poli di m . Osserviamo poi che, per ogni $R > 1$, $D(\Gamma_R)$ contiene solo il polo $\{i\}$. Dato che si tratta di poli di ordine 1 e $m(z) = \frac{g(z)}{p(z)}$ per $g(z) = e^{-i\xi z}$ e $p(z) = z^2 + 1$, abbiamo $p'(z) = 2z$ e quindi

$$\text{Res} \left(\frac{g(z)}{p(z)}, z = i \right) = \frac{g(i)}{p'(i)} = \frac{e^{(-i\xi)i}}{2i} = \frac{e^\xi}{2i}.$$

Di conseguenza, grazie al teorema dei residui otteniamo

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{-i\xi z}}{1+z^2} dz = 2\pi i \text{Res} \left(\frac{e^{-i\xi z}}{1+z^2}, z = i \right) = 2\pi i \frac{e^\xi}{2i} = \pi e^\xi.$$

D'altra parte, per definizione di Γ_R , abbiamo

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{-i\xi z}}{1+z^2} dz = \int_{-R}^R \frac{e^{-i\xi t}}{1+t^2} dt + \int_0^\pi \frac{e^{-i\xi Re^{it}}}{1+R^2 e^{2it}} Rie^{it} dt.$$

Dobbiamo quindi dimostrare che l'ultimo integrale converge a zero. Grazie alla disuguaglianza triangolare, vediamo che $|1 + R^2 e^{2it}| \geq R^2 - 1$, e dunque otteniamo

$$\left| \int_0^\pi \frac{e^{-i\xi Re^{it}}}{1+R^2 e^{2it}} Rie^{it} dt \right| \leq \int_0^\pi \frac{e^{\xi R \sin(t)}}{|1+R^2 e^{2it}|} R dt \leq \frac{R}{R^2-1} \int_0^\pi e^{\xi R \sin(t)} dt$$

A questo punto, se $\xi \leq 0$, sfruttiamo il fatto che $\sin(t) \geq 0$ per $t \in [0, \pi]$ per osservare che $e^{\xi R \sin(t)} \leq 1$, e quindi abbiamo

$$\left| \int_0^\pi \frac{e^{-i\xi R e^{it}}}{1 + R^2 e^{2it}} R i e^{it} dt \right| \leq \frac{R}{R^2 - 1} \int_0^\pi 1 dt \leq \frac{\pi R}{R^2 - 1} \rightarrow 0 \text{ per } R \rightarrow +\infty.$$

In conclusione, deduciamo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\xi t}}{1 + t^2} dt = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{e^{-i\xi t}}{1 + t^2} dt = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{-i\xi z}}{1 + z^2} dz = \pi e^\xi \text{ per } \xi \leq 0.$$

D'altra parte, dato che la funzione f è reale e pari, anche \hat{f} è reale e pari. Perciò, per ogni $\xi \geq 0$ abbiamo

$$\hat{f}(\xi) = \hat{f}(-\xi) = \pi e^{-\xi},$$

di modo che

$$\hat{f}(\xi) = \begin{cases} \pi e^{-\xi} & \text{se } \xi \geq 0 \\ \pi e^\xi & \text{se } \xi \leq 0 \end{cases} = \pi e^{-|\xi|}. \quad (7.4.1)$$

Alternativamente, possiamo applicare il teorema dei residui anche al caso $\xi \geq 0$. Per tali valori di ξ dobbiamo considerare la curva

$$\tilde{\Gamma}_R = \tilde{\gamma}_R + \tilde{\ell}_R,$$

dove

- $\tilde{\gamma}_R$ è la semicirconferenza di raggio R centrata nell'origine nel semipiano $\{y < 0\}$, percorsa in senso antiorario, parametrizzata ad esempio da $\gamma_R(t) = R e^{it}$ per $t \in [\pi, 2\pi]$,
- $\tilde{\ell}_R$ è il segmento sulla retta reale che va da R a $-R$, parametrizzato ad esempio da $\ell_R(t) = -t$ per $t \in [-R, R]$.

In tal caso, l'unico polo contenuto in $D(\tilde{\Gamma}_R)$ è $-i$, quindi abbiamo

$$\int_{\tilde{\Gamma}_R} \frac{e^{-i\xi z}}{1 + z^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{-i\xi z}}{1 + z^2}, z = -i \right) = 2\pi i \frac{e^{-\xi}}{-2i} = -\pi e^{-\xi}$$

e

$$\int_{\tilde{\Gamma}_R} \frac{e^{-i\xi z}}{1 + z^2} dz = - \int_{-R}^R \frac{e^{-i\xi t}}{1 + t^2} dt + \int_\pi^{2\pi} \frac{e^{-i\xi R e^{it}}}{1 + R^2 e^{2it}} R i e^{it} dt.$$

Non è difficile mostrare, ragionando come sopra, che il secondo integrale va a 0 per $R \rightarrow +\infty$, di modo che ricaviamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\xi t}}{1 + t^2} dt = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{e^{-i\xi t}}{1 + t^2} dt = - \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{-i\xi z}}{1 + z^2} dz = \pi e^{-\xi} \text{ per } \xi \geq 0,$$

che ci porta a ottenere nuovamente (7.4.1).

Enunciamo quindi il risultato generale, del quale omettiamo la dimostrazione, dato che segue sempre dal teorema dei residui applicato alla semicirconferenza superiore di raggio R centrata nell'origine, unita al segmento $[-R, R]$.

Teorema 7.4.2 (Formula di Heaviside). *Siano p, q polinomi complessi di grado n, k , rispettivamente, tali che*

$$k \geq n + 2.$$

Assumiamo inoltre che $Z(q) \cap \mathbb{R} = \emptyset$, ovvero, nessuna delle radici di q è reale, e che $Z(p) \cap Z(q) = \emptyset$, ovvero p e q non hanno fattori in comune (e quindi la funzione razionale fratta $\frac{p}{q}$ è irriducibile).

Allora, se poniamo

$$Z(q)^+ = \{w \in \mathbb{C} : q(w) = 0 \text{ e } \operatorname{Im}(w) > 0\} \text{ e } Z(q)^- = \{w \in \mathbb{C} : q(w) = 0 \text{ e } \operatorname{Im}(w) < 0\},$$

abbiamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(t)}{q(t)} e^{i\alpha t} dt = 2\pi i \begin{cases} \sum_{w \in Z(q)^+} \operatorname{Res} \left(\frac{p(z)}{q(z)} e^{i\alpha z}, z = w \right) & \text{se } \alpha \geq 0 \\ (-1) \sum_{w \in Z(q)^-} \operatorname{Res} \left(\frac{p(z)}{q(z)} e^{i\alpha z}, z = w \right) & \text{se } \alpha \leq 0 \end{cases}. \quad (7.4.2)$$

In particolare, se tutti poli di $\frac{p}{q}$ sono di ordine 1, ovvero le radici di q sono tutte distinte, vale la formula di Heaviside:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(t)}{q(t)} e^{i\alpha t} dt = 2\pi i \begin{cases} \sum_{w \in Z(q)^+} \frac{p(w)}{q'(w)} e^{i\alpha w} & \text{se } \alpha \geq 0 \\ (-1) \sum_{w \in Z(q)^-} \frac{p(w)}{q'(w)} e^{i\alpha w} & \text{se } \alpha \leq 0 \end{cases}. \quad (7.4.3)$$

Riscriviamo il teorema precedente in termini della trasformata di Fourier, ovvero ponendo $\alpha = -\xi$.

Corollario 7.4.3. Siano p, q polinomi complessi di grado n, k , rispettivamente, tali che

$$k \geq n + 2.$$

Assumiamo inoltre che $Z(q) \cap \mathbb{R} = \emptyset$ e che $Z(p) \cap Z(q) = \emptyset$. Allora abbiamo

$$\widehat{\left(\frac{p}{q}\right)}(\xi) = 2\pi i \begin{cases} \sum_{w \in Z(q)^+} \operatorname{Res} \left(\frac{p(z)}{q(z)} e^{-i\xi z}, z = w \right) & \text{se } \xi \leq 0 \\ (-1) \sum_{w \in Z(q)^-} \operatorname{Res} \left(\frac{p(z)}{q(z)} e^{-i\xi z}, z = w \right) & \text{se } \xi \geq 0 \end{cases}.$$

In particolare, se le radici di q sono tutte distinte, abbiamo

$$\widehat{\left(\frac{p}{q}\right)}(\xi) = 2\pi i \begin{cases} \sum_{w \in Z(q)^+} \frac{p(w)}{q'(w)} e^{-i\xi w} & \text{se } \xi \leq 0 \\ (-1) \sum_{w \in Z(q)^-} \frac{p(w)}{q'(w)} e^{-i\xi w} & \text{se } \xi \geq 0 \end{cases}.$$

Tuttavia, data l'asimmetria di questo risultato (ovvero, i poli sono presi in $Z(q)^+$ se $\xi \leq 0$ e viceversa), il Teorema 7.4.2 può risultare più comodo da ricordare e usare. Vediamo un'applicazione con il seguente esempio.

Esempio 7.4.4. Calcoliamo la trasformata di Fourier di

$$f(t) = \frac{1}{t^2 + it + 1}.$$

Per applicare il Teorema 7.4.2, notiamo che $f(t) = \frac{p(t)}{q(t)}$ per $p(t) = 1$ e $q(t) = t^2 + it + 1$. Di conseguenza, dobbiamo trovare le soluzioni dell'equazione

$$q(z) = z^2 + iz + 1 = 0.$$

Dato che $\Delta = i^2 - 4 = -5 < 0$, le soluzioni di questa equazione sono

$$\frac{-i \pm i\sqrt{5}}{2} = i \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Di conseguenza, tutti i poli della funzione meromorfa $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ sono di ordine 1, e quindi possiamo applicare la formula di Heaviside: dato che $q'(z) = 2z + i$, abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha t}}{t^2 + it + 1} dt &= 2\pi i \begin{cases} \frac{1}{2i \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right) + i} e^{i\alpha \left(i \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right)} & \text{se } \alpha \geq 0 \\ -\frac{1}{2i \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right) + i} e^{i\alpha \left(i \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right)} & \text{se } \alpha \leq 0 \end{cases} \\ &= 2\pi i \begin{cases} \frac{1}{i\sqrt{5}} e^{-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\alpha} & \text{se } \alpha \geq 0 \\ -\frac{1}{-i\sqrt{5}} e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\alpha} & \text{se } \alpha \leq 0 \end{cases} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{5}} \begin{cases} e^{-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\alpha} & \text{se } \alpha \geq 0 \\ e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\alpha} & \text{se } \alpha \leq 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Quindi, se poniamo $\alpha = -\xi$, concludiamo che

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{2\pi}{\sqrt{5}} \begin{cases} e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}\xi} & \text{se } \xi \leq 0 \\ e^{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\xi} & \text{se } \xi \geq 0 \end{cases} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}} e^{-\frac{\xi}{2}} e^{-\frac{\sqrt{5}}{2}|\xi|}.$$

Capitolo 8

Cenni di teoria delle distribuzioni

8.1 Funzioni di Schwartz e distribuzioni temperate

La teoria delle *distribuzioni* nasce per dare un fondamento rigoroso a varie idee intuitive nate da applicazioni in meccanica del continuo e fisica quantistica, come l'integrazione contro una "funzione" che vale $+\infty$ nell'origine ed è nulla altrove, oppure l'estensione del concetto di derivata a funzioni che non siano derivabili (o nemmeno continue).

Per poterne parlare rigorosamente dobbiamo introdurre lo spazio delle *funzioni test*, alle quali verranno applicate le distribuzioni.

Definizione 8.1.1. Lo spazio di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ è l'insieme delle funzioni $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ che ammettono derivata n -esima $\varphi^{(n)}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ovvero $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, e tali che per ogni $m, n \in \mathbb{N}_0$ vale

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} t^m \varphi^{(n)}(t) = 0.$$

L'esempio principale di funzione di Schwartz su \mathbb{R} è la gaussiana, $\varphi(t) = e^{-t^2}$.

Definizione 8.1.2. Una *distribuzione temperata* L su \mathbb{R} è un operatore lineare e continuo $L : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$, ovvero tale che

$$L(a\varphi + b\psi) = aL(\varphi) + bL(\psi) \quad \text{per ogni } \varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \text{ e } a, b \in \mathbb{C},$$

e esistono $m, n \in \mathbb{N}_0$ e $C > 0$ tali che

$$|L(\varphi)| \leq C \max_{t \in \mathbb{R}} (1 + |t|)^m \sum_{k=0}^n |\varphi^{(k)}(t)| \quad \text{per ogni } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Per evitare di appesantire il testo, parleremo solo di distribuzioni, anziché distribuzioni temperate: la distinzione è in sé importante, dato che esistono altri tipi di distribuzioni, ma in questo corso è superflua.

Vediamo alcuni degli esempi più basilari di distribuzioni.

Esempio 8.1.3. Per ogni $f \in L^1(\mathbb{R})$ o f limitata¹, definiamo la distribuzione L_f data da

$$L_f(\varphi) := \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) f(t) dt \quad \text{per ogni } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

ovvero l'integrazione di φ contro la funzione fissata f . Ovviamente questo operatore è lineare (visto che è un integrale definito), e osserviamo che, se $f \in L^1(\mathbb{R})$, abbiamo

$$|L_f(\varphi)| \leq \max_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t)| \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \max_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t)|,$$

¹Più in generale, $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, dove $L^\infty(\mathbb{R})$ è lo spazio delle (classi di equivalenza delle) funzioni *essenzialmente limitate*, ovvero limitate in quasi ogni punto, cioè tali che esiste $C > 0$ tale che $\mu_1(\{t \in \mathbb{R} : |f(t)| > C\}) = 0$, dove μ_1 è la misura uno-dimensionale definita nella sezione 2.2.

di modo che la condizione di continuità è soddisfatta per $m = n = 0$ e $C = \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$. Invece, se f è limitata, abbiamo

$$\begin{aligned} |L_f(\varphi)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(t)|}{(1+|t|)^2} |(1+|t|)^2 \varphi(t)| dt \\ &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+|t|)^2} dt \right) \max_{t \in \mathbb{R}} |(1+|t|)^2 \varphi(t)| = 2 \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| \max_{t \in \mathbb{R}} (1+|t|)^2 |\varphi(t)|, \end{aligned}$$

di modo che la condizione di continuità è soddisfatta per $m = 2, n = 0$ e $C = 2 \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|^2$.

Più in generale, si possono anche definire distribuzioni date dall'integrazione contro funzioni della forma $f = g + h$, per qualche $h \in L^1(\mathbb{R})$ e g limitata³: ne omettiamo la dimostrazione in generale, ma useremo lo stesso simbolo L_f per indicare tali distribuzioni.

Esempio 8.1.4 (Delta di Dirac). La *delta di Dirac* centrata in un punto $a \in \mathbb{R}$ è la distribuzione δ_a definita da

$$\delta_a(\varphi) := \varphi(a) \quad \text{per ogni } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

ovvero la valutazione della funzione test φ nel punto a . Si verifica immediatamente che questo operatore è lineare, e che

$$|\delta_a(\varphi)| = |\varphi(a)| \leq \max_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t)| \quad \text{per ogni } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

di modo che la condizione di continuità è soddisfatta per $m = n = 0$ e $C = 1$.

In particolare, la delta di Dirac è la corretta modellizzazione dell'idea intuitiva di integrazione contro una funzione che vale $+\infty$ in un solo punto ed è nulla altrove. Infatti, per $k \in \mathbb{N}$ consideriamo la successione di funzioni "a tenda"

$$f_k(t) = \begin{cases} k^2 \left(\frac{1}{k} - |t|\right) & \text{se } |t| \leq \frac{1}{k} \\ 0 & \text{se } |t| > \frac{1}{k} \end{cases}.$$

Questa successione di funzioni è chiamata talvolta una *successione delta* (*delta sequence*, in inglese), e vediamo che converge puntualmente alla funzione

$$f_\infty(t) = \begin{cases} +\infty & \text{se } t = 0 \\ 0 & \text{se } t \neq 0 \end{cases}.$$

Mostriamo che converge alla delta di Dirac centrata nell'origine in un senso opportuno, ovvero, se integrata contro ogni funzione di $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Per ogni $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) f_k(t) dt &= k^2 \int_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} \varphi(t) \left(\frac{1}{k} - |t|\right) dt = \left[\begin{array}{l} t = \frac{u}{k} \\ dt = \frac{du}{k} \end{array} \right] \\ &= k^2 \int_{-1}^1 \varphi\left(\frac{u}{k}\right) \left(\frac{1}{k} - \frac{|u|}{k}\right) \frac{du}{k} = \int_{-1}^1 \varphi\left(\frac{u}{k}\right) (1 - |u|) du. \end{aligned}$$

Quindi, grazie alla continuità di φ ⁴, possiamo passare al limite per $k \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) f_k(t) dt &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-1}^1 \varphi\left(\frac{u}{k}\right) (1 - |u|) du \\ &= \varphi(0) \int_{-1}^1 (1 - |u|) du = 2\varphi(0) \int_0^1 (1 - u) du \\ &= 2\varphi(0) \left[-\frac{(1-u)^2}{2} \right]_0^1 = \varphi(0) = \delta_0(\varphi). \end{aligned}$$

²Nel caso generale $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ il sup di f si sostituisce con la norma

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} := \inf\{C > 0 : \mu_1(\{t \in \mathbb{R} : |f(t)| > C\}) = 0\}.$$

³In generale, $g \in L^\infty(\mathbb{R})$.

⁴Omettiamo gli altri dettagli di questa dimostrazione.

Quindi, se scambiassimo il limite e l'integrale (cosa che però non possiamo fare rigorosamente!), avremmo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) f_{\infty}(t) dt = \varphi(0).$$

Questa è la base dell'idea di integrazione contro una funzione infinita in un punto e nulla altrove; infatti talvolta si scrive direttamente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \delta_0(t) dt = \varphi(0),$$

identificando impropriamente la delta con la funzione f_{∞} . Va sottolineato che l'errore in questo tipo di ragionamento risiede nel fatto che, essendo $f_{\infty}(t) = 0$ ovunque tranne che in un punto, l'integrale definito di Riemann di una qualunque altra funzione moltiplicata per f_{∞} deve essere 0. Si può in realtà scrivere l'azione della delta di Dirac come un integrale, non però nel senso di Riemann, ma intendendo la delta stessa come una misura e non una funzione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) d\delta_0(t) = \varphi(0).$$

Tuttavia, questo tipo di approccio va ben al di là degli scopi di questo corso.

8.2 Derivate deboli

Un'altra applicazione fondamentale della teoria delle distribuzioni è generalizzare la nozione di derivata a funzioni non derivabili in senso classico (o anche non continue).

L'idea di base è porre come definizione di derivata il fatto che, date $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, per la formula di integrazione per parti abbiamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \psi'(t) dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(t) \psi(t) dt.$$

Quindi, visto che le distribuzioni estendono l'idea di integrazione contro una funzione data, si dà la seguente definizione.

Definizione 8.2.1. Sia L una distribuzione. La *derivata debole* L' della distribuzione L è la distribuzione data da

$$L'(\varphi) := -L(\varphi').$$

Le derivate di distribuzioni vengono spesso chiamate “derivate deboli” per sottolineare il fatto che non esistono in sé, ma solo se applicate a funzioni nello spazio di Schwartz. Questa definizione generalizza l'idea di derivata classica, nel senso che, se una funzione è derivabile puntualmente, allora lo è anche in senso debole: se $f \in C^1(\mathbb{R})$ con $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$ o f, f' limitate⁵, allora $L'_f = L_{f'}$, grazie appunto alla formula di integrazione per parti

$$L'_f(\varphi) = -L_f(\varphi') = - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(t) f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) f'(t) dt = L_{f'}(\varphi) \quad \text{per ogni } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Mostriamo che la delta di Dirac può essere vista come la derivata di una funzione con una discontinuità a salto.

Esempio 8.2.2. Sia

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

la *funzione di Heaviside*, ovvero la funzione caratteristica di $[0, +\infty)$. Mostriamo che

$$L'_H = \delta_0,$$

⁵Più in generale, se $f, f' \in L^1(\mathbb{R}) + L^\infty(\mathbb{R})$, ovvero se possono essere decomposte come la somma di una funzione in $L^1(\mathbb{R})$ e una in $L^\infty(\mathbb{R})$.

ovvero che la delta di Dirac centrata nell'origine è la derivata debole della distribuzione data dall'integrazione contro H . Osserviamo prima di tutto che la distribuzione L_H data da

$$L_H(\varphi) := \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt \quad \text{per ogni } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

è ben posta grazie a quanto mostrato nell'Esempio 8.1.3, dato che H è limitata. Quindi ne possiamo calcolare la derivata:

$$L'_H(\varphi) = -L_H(\varphi') = - \int_0^{+\infty} \varphi'(t) dt = -[\varphi(t)]_0^{+\infty} = - \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) - \varphi(0) \right) = \varphi(0) = \delta_0(\varphi),$$

dato che le funzioni di Schwartz vanno a 0 all'infinito. Questo vuol dire che, dove c'è un salto, la derivata prima esiste in senso debole, ed è rappresentata dalla delta di Dirac centrata in tale punto, ovvero, nella sua interpretazione euristica, da una funzione che vale $+\infty$ in tale punto e zero altrove, e questo è coerente con il fatto che, in un punto di salto, la tangente (generalizzata, se vogliamo) al grafico della funzione è una retta verticale, cioè una retta con coefficiente angolare infinito.

8.3 Trasformate di Fourier distribuzionali

Per molte applicazioni è inoltre utile definire la trasformata di Fourier di una distribuzione (temperata). Per farlo, sfruttiamo l'identità di Plancherel per il prodotto scalare: per ogni $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ⁶ abbiamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{g(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} d\xi.$$

Osserviamo poi che

$$\overline{\widehat{g}(\xi)} = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-i\xi t} dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{g(t)} e^{i\xi t} dt = \widehat{\overline{g}}(-\xi), \quad (8.3.1)$$

ovvero l'operazione di coniugio e di trasformata di Fourier commutano a meno di cambiare il segno della variabile ξ . Ora, possiamo vedere g come il coniugato della trasformata di Fourier di un'altra funzione $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ⁷, e quindi notiamo che

$$\begin{aligned} g(t) = \overline{\widehat{h}(t)} &\implies \widehat{g}(\xi) = \widehat{\overline{\widehat{h}(t)}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\widehat{h}(t)} e^{-i\xi t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{h}(-t) e^{-i\xi t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{h}(t) e^{i\xi t} dt = 2\pi \overline{h(\xi)}, \end{aligned}$$

grazie a (8.3.1) e alla formula di inversione della trasformata di Fourier, e, ovviamente,

$$g(t) = \overline{\widehat{h}(t)} \implies \overline{g(t)} = \widehat{h}(t).$$

Quindi, riscriviamo l'identità di Parseval nel seguente modo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \widehat{h}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) 2\pi h(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) h(\xi) d\xi.$$

In altre parole, se integriamo una funzione di Schwartz⁸ contro la trasformata di Fourier di un'altra, ciò equivale a integrare la trasformata della prima funzione contro la seconda. Questo fatto porta naturalmente alla seguente definizione di trasformata di Fourier distribuzionale.

Definizione 8.3.1. Sia L una distribuzione. La trasformata di Fourier di L , $\widehat{L} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$, è la distribuzione definita da:

$$\widehat{L}(\varphi) := L(\widehat{\varphi}) \quad \text{per ogni } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

⁶Ovviamente, $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, di modo che tutte le formule sulle trasformate di Fourier sono valide per le funzioni di Schwartz.

⁷Questo è vero perché la trasformata di Fourier è biunivoca da $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, ma omettiamo la dimostrazione di questo importante fatto.

⁸Più in generale, ciò è valido per funzioni in $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

Applichiamo questa formula alla delta di Dirac.

Esempio 8.3.2. Scriviamo la trasformata di Fourier di δ_a per $a \in \mathbb{R}$ fissato. Per ogni $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ abbiamo

$$\widehat{\delta}_a(\varphi) = \delta_a(\widehat{\varphi}) = \widehat{\varphi}(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{-iat} dt = L_{e^{-ia(\cdot)}}(\varphi),$$

ovvero, la trasformata di Fourier della delta di Dirac centrata in a è l'integrazione contro la funzione e^{-iat} . Talvolta, con un piccolo abuso di notazione, si scrive $\widehat{\delta}_a(t) = e^{-iat}$, che è coerente con l'idea di integrare la funzione $e^{-i\xi t}$ contro $\delta_a(\xi)$: non è possibile farlo direttamente, visto che $e^{-i\xi t}$ non è una funzione di Schwartz, ma tutto ciò può in effetti essere reso rigorosamente corretto o per approssimazione o interpretando la delta come una misura (ciò va però oltre gli scopi di questo corso). In particolare, se $a = 0$, troviamo che $\widehat{\delta}_0(t) = 1$.

Inoltre, osserviamo che, per ogni $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\widehat{\widehat{\delta}_a}(\varphi) = \widehat{\delta}_a(\widehat{\varphi}) = \delta_a(\widehat{\varphi}) = \widehat{\varphi}(a) = 2\pi\varphi(-a),$$

grazie alla formula di inversione della trasformata di Fourier, e quindi troviamo

$$\widehat{L_{e^{-ia(\cdot)}}} = \widehat{e^{-ia(\cdot)}} = \widehat{\delta}_a = 2\pi\delta_{-a}.$$

In particolare, se $a = 0$, concludiamo che

$$\widehat{L_1} = \widehat{1} = \widehat{\delta}_0 = 2\pi\delta_0.$$

Se cambiamo il segno di a , ciò giustifica le seguenti formule (non rigorose, ma spesso usate nei testi per ingegneria):

$$\begin{aligned} \delta_a(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iat} e^{-i\xi t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it(\xi-a)} dt, \\ \delta_0(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi t} dt. \end{aligned}$$