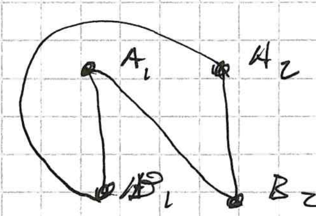
§. 6. Soluzione di $K_{3,3}$.

Teorema. $K_{3,3}$ non è un grafo piano.

Mostriamo che nessuna realizzazione di $K_{3,3}$ verifica la relazione di Eulero.

In $K_{3,3}$ abbiamo:



- $V = 3 + 3 = 6$
- $L = 3 \cdot 3 = 9$
- Ogni faccia ha un numero pari di lati, quindi ≥ 4.

L'ultima affermazione vale perché ho lati solo tra gli A e i B, quindi una faccia il cui bordo abbia vertici A_1 ha la forma $A_1 B_1 A_2 B_2 A_3 \cdots$: dopo un numero dispari di lati non possiamo essere tornati in A_1.

- Il numero di facce è $F \overset{\text{Eulero}}{=} L - V + 2 = 9 - 6 + 2 = 5$

Ciò richiede almeno $\frac{5 \times 4}{2} = 10$ lati, ma $L = 9 < 10$: assurdo.

minimo numero di lati x faccia

ogni lato è lato di due facce

Attività. Mostrare che K_5 non è un grafo piano.

Svolgo: $V = 5$; $L = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$; $F = 10 - 5 + 2 = 7$

Ciò richiede almeno $\frac{7 \cdot 3}{2} = \frac{21}{2} > 10$ lati: ASSURDO.

NOTA: chiaramente si devono avere almeno 11 lati!!

Per saperne di più.

Teorema di KURATOWSKI. Un grafo G è planare $\Leftrightarrow$ non riesco a disegnare in G "copie" di $K_{3,3}$, né di K_5.

18/ Bibliografia.

IMRE LAKATOS <u>Dimostrazioni e confutazioni</u>

(il dialogo nella prima parte del libro)

ITALO CALVINO <u>Lezioni americane</u>

(soprattutto "LA LEGGEREZZA")

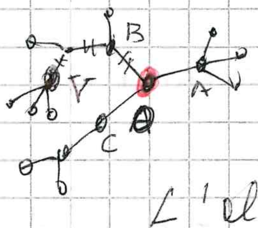
WIKIPEDIA

SCHEDA di TEORIA (cfr. p. 10).

TEOREMA. (1) Ogni albero è un grafo piano.

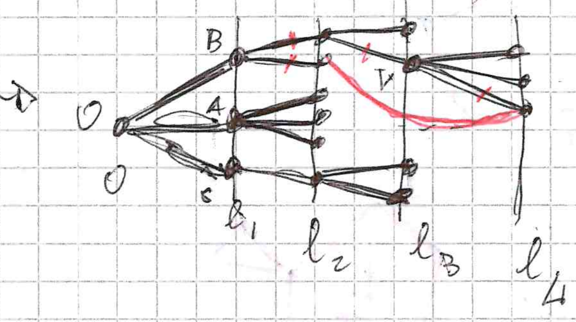
(2) Un grafo piano è un albero se e solo se in ogni sua realizzazione sul piano il numero delle facce è $F=1$.

dim (1)



Fisso un vertice O sull'albero. Per ogni altro vertice V c'è un percorso da O a V sui lati del grafo (che non ritorna sui suoi passi) composto da k lati, $k \geq 1$, $k=k(V)$.

L'albero è finito, quindi esiste un valore k_{MAX} massimo di k (nella figura tale valore è 4).
Realizzo l'albero. Considero k_{MAX} rette parallele e un punto O fuori da esse.



Procedo come nell'esempio. I vertici aventi "distanza" k da O finiscono sulla k-esima retta e i lati sono segmenti tra le rette.

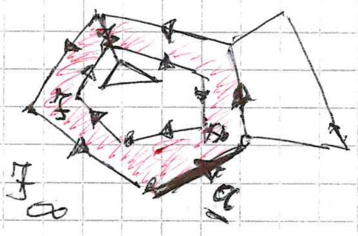
Se avessi la necessità di introdurre un lato che "torna indietro" (rosso in figura), qu ~~no~~ introdurrei un ciclo: assurdo perché abbiamo un albero.

Quindi la procedura può essere portata a termine fino all'ultimo vertice, realizzando l'albero sul piano.

Esercizio. Formalizzare meglio la dimostrazione.

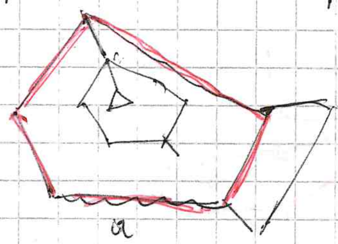
(2) $F \geq 2$ se e solo se c'è una faccia limitata F (ce n'è sempre una illimitata),

P. es.



avente un lato a in comune con la faccia illimitata F_∞.

Inizio un percorso che tiene F sempre sulla sinistra (vedi figura): ~~Può~~ ~~Avrai che~~ il percorso ritorna ad a. È quindi un ciclo con possibili ripetizioni. Si verifica facilmente che il ciclo può essere "potato" in modo da evitare ripetizioni.



Quindi se $F \geq 2$ c'è un ciclo.

Viceversa, se c'è un ciclo, nella realizzazione diventa una spezzata poligonale chiusa. Il suo interno contiene almeno una faccia, per forza limitata. Quindi $F \geq 2$.