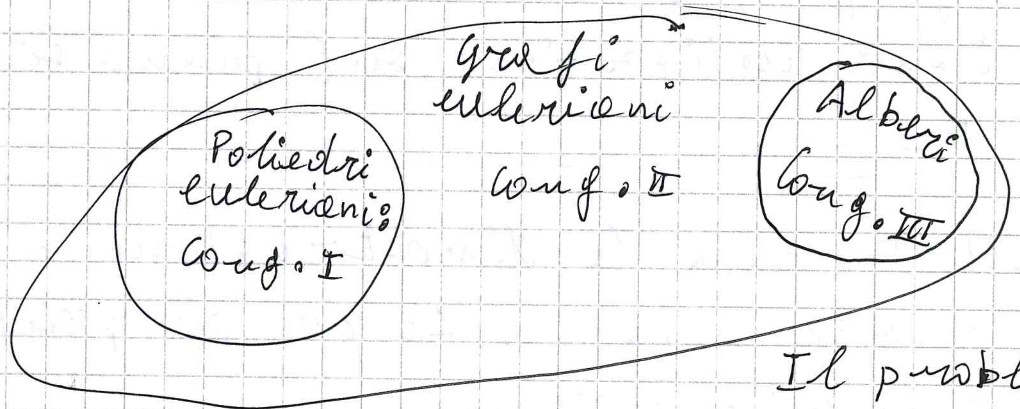
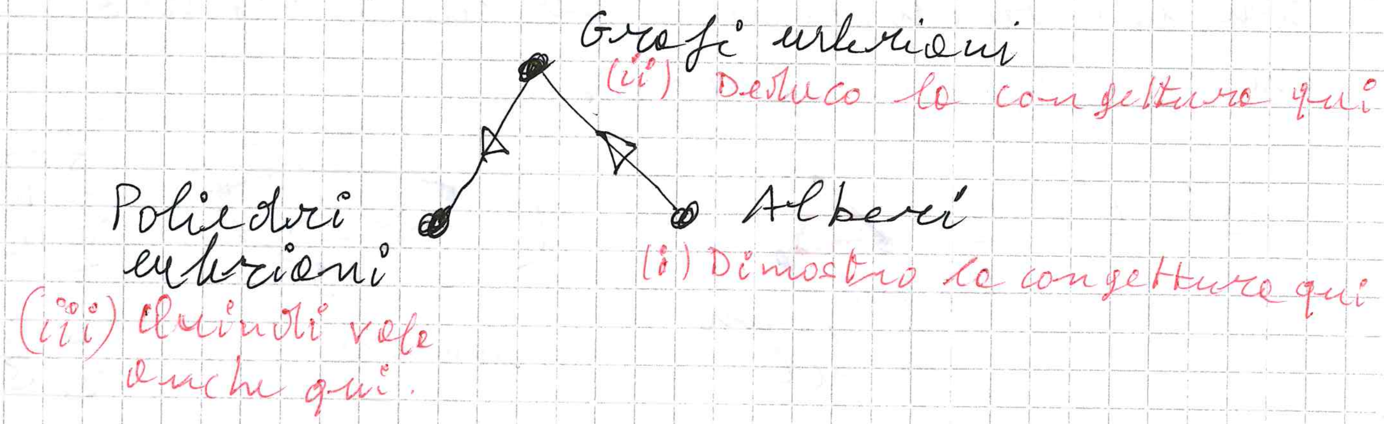
A volte in matematica è più facile dimostrare una proprietà P che è più generale (quindi più forte) della proprietà Q che in realtà ci interessa.

$\boxed{\text{Congettura (II): } F - L + V = 2 \text{ per realizzazioni piene di grafi connessi.}}$

NOTA. Qual'è il vantaggio? Avere più oggetti da studiare ci dà più "gradi di libertà" nel passare da un oggetto all'altro. Come prima cosa dimostreremo la congettura (II) per meno oggetti (rispetto alla totalità dei grafi "euleriani"), che però non sono associati a poliedri:

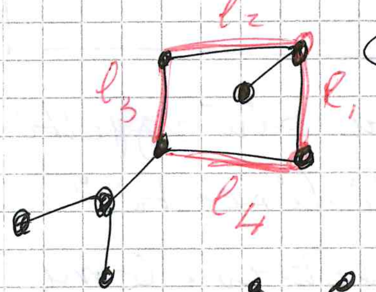


Il problema sui poliedri viene spostato a un problema su oggetti del tutto diversi!

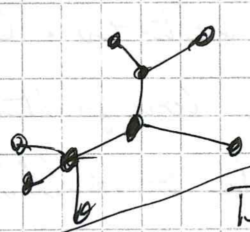


§4 – Alberi e induzione.

Un albero è un grafo connesso senza cicli.
Un ciclo sul grafo è un cammino fatto su ~~vertici~~ lati adiacenti tutti distinti tra loro, ~~che~~ che finisca dove è iniziato.



non è un albero perché l_1, l_2, l_3, l_4 è un ciclo.



è un albero

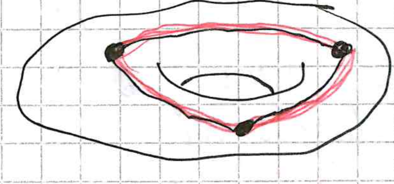
Teorema. ① Ogni albero è un grafo piano.
② Un grafo piano è un albero se e solo se in ogni sua realizzazione sul piano si ha che $F=1$.

Di questo teorema la dimostrazione è su una scheda a parte. Le due proprietà sono "intuitive". Però...

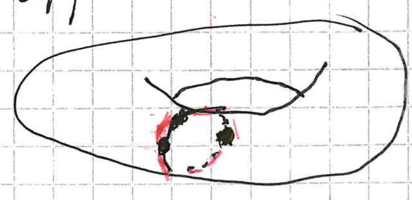
Attività. Trovare un grafo toroidale con una realizzazione per cui $F=1$, ma che non è un albero.

Soluzione.

G: grafo con un ciclo



oppure



Realizzazioni di G con $F=1$.

Attività: Disegnare tutti gli alberi con 0, 1, 2, 3, 4, 5 lati.

Soluzione: vedi p. 5 e seleziona gli alberi.

> **Congettura (III).** In ogni albero
> $$1 + L = V.$$

Nota. Poiché $F = 1$ nel ~~questo~~ caso degli alberi, la Cong. (II) diventa

$$1 - L + V = 2$$

cioè $V = L + 1$, che è proprio Cong. (III)

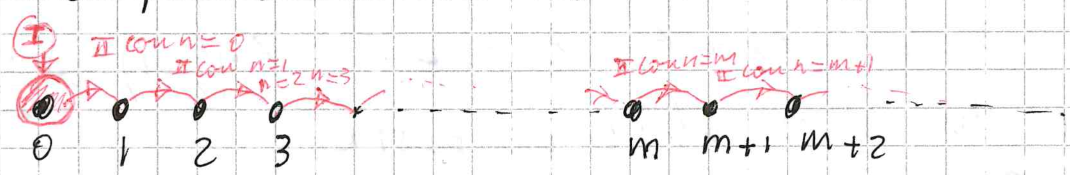
Per mostrarlo usiamo un metodo potente.

PRINCIPIO DI INDUZIONE MATEMATICA

> Sia ~~[illegible]~~ P una proprietà dei numeri ~~[illegible]~~ naturali:
> Se (I) la proprietà P vale per 0, e
> (II) ~~se la proposizione~~ per ogni numero naturale n
> si ha che: se P vale per $n \Rightarrow P$ vale per $n+1$
> Allora
> (III) per ogni n P vale.

Questo principio va spiegato con diversi esempi e metafore (scuola e parte).

Di fatto si dice che se (I) la proprietà vale per l'avo ancestrale e (II) è ereditaria; allora:
(III) vale per tutta la discendenza.



ESEMPIO. Abbiamo già visto (p. 4-5) che

$P(n)$: " $0+1+2+\ldots+n = \frac{(n+1)\cdot n}{2}$ "

Mostriamo che per ogni n vale $P(n)$ per induzione, questa volta.

(I) $P(0)$: $0 = \frac{(0+1)\cdot 0}{2}$ è certamente vero.

(II) Per un naturale n fissato supponiamo che sia vera

$P(n)$: " $0+1+2+\ldots+n = \frac{(n+1)\cdot n}{2}$ "

Proviamo a dedurre $P(n+1)$:

$$0+1+\ldots+n+(n+1) = [0+1+\ldots+n]+(n+1)$$

$$= \left[\frac{(n+1)\cdot n}{2}\right]+(n+1) \quad \text{poichè per ipotesi } P(n) \text{ è vera}$$

$$= (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) \quad (\text{raccolgo } (n+1))$$

$$= \frac{(n+1)\,(n+2)}{2} = \frac{([n+1]+1)\,[n+1]}{2}$$

Cioè:

" $0+1+\ldots+n+(n+1) = \frac{([n+1]+1)\cdot[n+1]}{2}$ "

ma questa è proprio $P(n+1)$!

Allora, valendo (I) e (II), $P(n)$ vale per ogni n naturale.

Meditiamo un caso speciale.

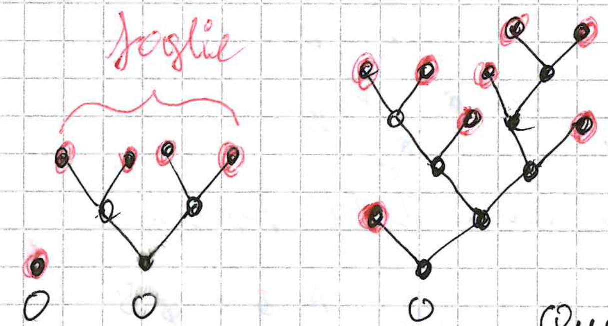
Se qualcuno calcola $0+1+2+3+4+5+6 = 21 = \frac{7\cdot 6}{2}$ (cioè che $P(6)$ vale), non ho bisogno di calcolare la somma per sapere che

$$0+1+2+3+4+5+6+7 = \frac{7\cdot 6}{2}+7 = 7\cdot\left(\frac{6}{2}+1\right) = \frac{8\cdot 7}{2}$$

(cioè che $P(7)$ vale): mi basta usare $P(6)$ e poche operazioni.

- Non tutto si dimostra facilmente per induzione
- La difficoltà è esprimere ciò che vogliamo nella forma di una "proprietà ereditaria" $P(n)$.

ESEMPIO. Un <u>albero binario</u> è un albero con
(i) un vertice-radice O
(ii) per ogni vertice v già generato una delle seguenti vale: (ii-a) ci si ferma in v (v è una <u>foglia</u>) oppure (ii-b) si aggiungono 2 lati con estremo v.



TEOREMA. Siano V il numero di vertici e ϕ il numero delle foglie di un albero binario. Allora $V = 2\phi - 1$.

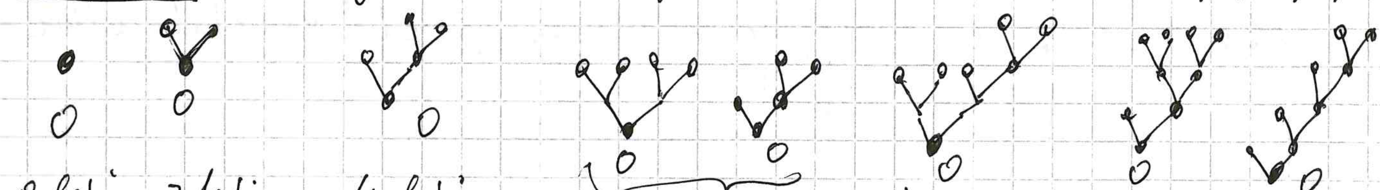
Questa è una possibile <u>attività di laboratorio guidata</u>.

(A) Cosa scelgo come quantità denotata da n?
Posso provare con n = numero dei lati.

(B) qual'è $P(n)$?
$P(n)$ = "$\boxed{V = 2\phi - 1}$ per tutti gli alberi binari con $2n$ lati".

Perchè $2n$? Perchè il numero di lati è pari!

<u>Attività</u>. Disegnare tutti gli alberi binari con 0, 2, 4, 6, 8 lati



0 lati — 2 lati — 4 lati — 6 lati — 8 lati

IV

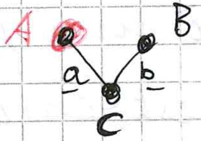
Dimostriamo il Teorema.

P(0). L'unico albero (binario) con 0 lati è •

$\phi = 1 = V$: $2\phi - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = V$: vero.

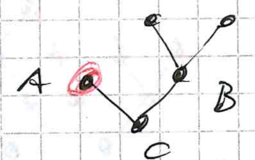
$P(n) \Rightarrow P(n+1)$ Supponiamo che $P(n)$ sia vera e scegliamo un qualsiasi albero con $2(n+1)$ lati.

Scegliamo una foglia A il più in alto possibile:

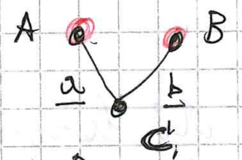


Sia a il lato che dal basso conduce ad a, c l'altro estremo di a, b l'altro lato/ramo della forcella che si alza da c, B l'altro estremo di b.

Caso 1. B non è una foglia.



Allora da B parte una forcella, ma questo contraddice che A sia una delle foglie più alte.



Allora: Caso 2. Anche B è una foglia.

Rimuovo dall'albero i lati a, b e i vertici A, B.

Ottengo un nuovo albero con $2n$ lati a cui $P(n)$ si applica. Il vertice C è ora una foglia.

Se ϕ e V erano foglie e vertici dell'albero vecchio, quello nuovo ha $\phi - 1$ foglie e $V-2$ vertici.

Valendo $P(n)$ ho che: $2(\phi-1)-1 = V-2$

quindi che $2\phi - 2 - 1 = V - 2$

cioè $\boxed{2\phi - 1 = V}$

Ma questo è proprio $P(n+1)$ per il vecchio albero.

$\boxed{\text{Fine dim.}}$

§ 5. Dimostrazione delle congetture III, II, I sulla caratteristica di Eulero.

<u>Cong. III</u>. In un albero $V = L + 1$.

Induzione sul numero di lati.

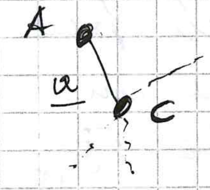
$P(n) =$ " $\boxed{V = n+1}$ per ogni albero con n lati".

$P(0)$: • $V = 1 = 0 + 1$ è vero.

Supponiamo n sia naturale e $P(n)$ sia vera.

Considero un albero con $n+1$ lati e $\bar{V}$ vertici.

Sia A una foglia dell'albero, $\underline{a}$ il lato/ramo a cui è attaccata, C l'altro ~~vertice~~ estremo di $\underline{a}$.



Rimuovo A e $\underline{a}$ ottenendo un nuovo albero con $\bar{V} - 1$ vertici e $(n+1) - 1 = n$ lati.

Per $P(n)$: $(\bar{V} - 1) = n + 1$

quindi $\bar{V} = (n+1) + 1$

$\uparrow$ vertici $\uparrow$ lati

del vecchio albero

Allora $P(n+1)$ vale.

Cioè: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ per ogni n.

Per induzione $P(n)$ vale per ogni n.

$\boxed{\text{Fine dim.}}$

Dimostriamo ora cong. II.

In un grafo piano connesso $F - L + V = 2$

$P(n) =$ " $\boxed{F - n + V = 2}$ in ogni grafo piano connesso con n lati".

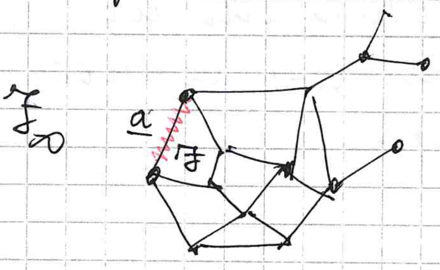
$P(0)$. Un grafo piano con 0 lati è $\bullet$, che rientra nel teorema sugli alberi.
Comunque ricontrolliamo $F - n + V = 1 - 0 + 1 = 2$ O.K.

Supponiamo ora che $P(n)$ valga e consideriamo la realizzazione di un grafo piano connesso G con $n+1 = L$ lati.

<u>Caso 1</u>. G è un albero. Allora abbiamo visto che la proprietà vale:

$$F - L + V = 1 - (n+1) + V = 1 - (V-1) + V = 2$$

<u>Caso 2</u>. G non è un albero. Allora ha almeno una faccia limitata. Una almeno delle facce limitate F confina con la faccia illimitata F_∞. Rimuovo uno dei lati di confine, chiamiamolo $\underline{a}$.



Ottengo un nuovo grafo con:

$F-1$ facce
n lati
V vertici

$\xRightarrow{\text{per } P(n)}$ $(F-1) - n + V = 2$ ma questo è lo stesso di

$$F - (n+1) + V = 2,$$

che è proprio $P(n+1)$.

Allora ho mostrato $P(n)$ per ogni n.

$\boxed{\text{Fine dim.}}$