PLS Laboratorio sui grafi e l'induzione.

NICOLA ARCOZZI (2016)

Obiettivo del laboratorio. Mettere gli studenti in grado di dimostrare la formula di Eulero per i grafi piani e di applicarla al problema dei ponti di Königsberg.

Scopi del corso. (1) Mostrare in un esempio la filiera completa:

problema concreto → formalizzazione del problema → inserimento entro una teoria più vasta → elaborazione di strumenti utili alla soluzione del problema entro la teoria → soluzione del problema

elaborazione di strumenti utili alla soluzione del problema entro la teoria → varianti del problema, della teoria, altri problemi che si pongono... → ...

(2) Mostrare un problema geometrico la cui soluzione si trova "contando".

(3) Far mettere le mani agli studenti nella teoria, elaborandone in autonomia alcuni frammenti.

(4) Mostrare come un approccio più teorico moltiplichi i punti di vista su un problema, rendendolo a volte più semplice/concreto.

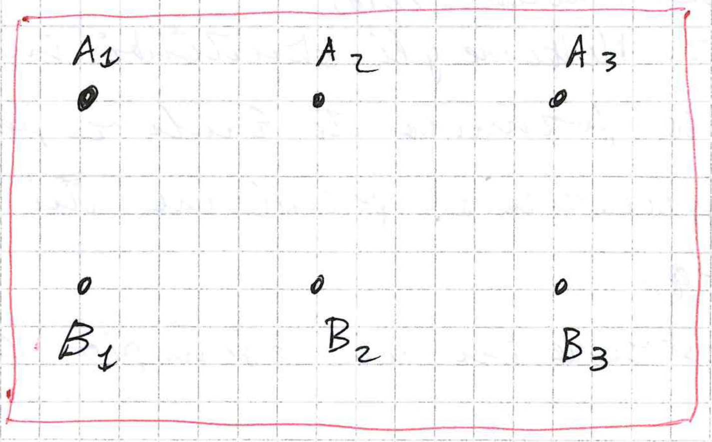
Modalità. Alternanza di brevi spiegazioni/introduzioni da parte di insegnanti/tutor e di lavoro di gruppo, con l'assistenza di insegnanti/tutor.

Strumenti. Carta e penna; materiali "poveri"; alcune schede con appunti; alcune schede da compilare da parte dei gruppi di lavoro.

Verifica. Discussione/relazione finale.

Q1. Il problema dei ponti di Königsberg.

fig.1



Congiungere ciascuno dei punti A_1, A_2, A_3 con ciascuno dei punti B_1, B_2, B_3 con curve che non si intersecano (sul piano).

Lasciare che gli studenti ci provino (ATTIVITÀ 1).
Ogni gruppo consegna su un foglio la ~~minima~~ migliore approssimazione al problema (SCHEDA di ATTIVITÀ 1).

Dovrebbe essere del tipo: con una sola curva mancante.

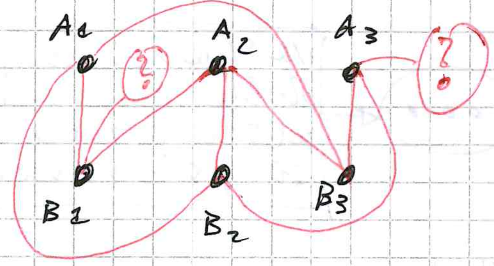


fig.2

Questo è il problema $K_{3,3}$: congiungere 3 punti a 3 punti.

Osservazioni.

(i) Il problema $K_{2,3}$ è solubile:
[OPPURE: togliere A_3 dalla fig.2]

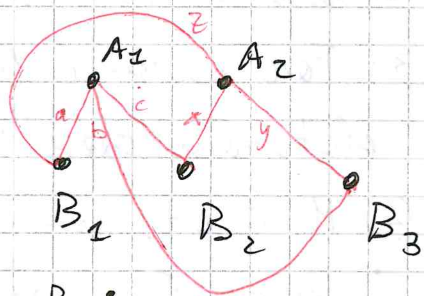
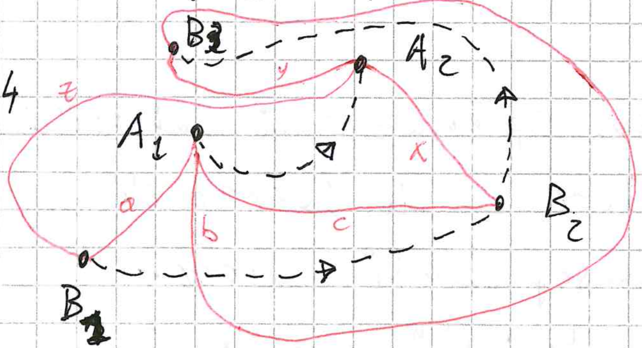


fig.3

(ii) Il problema $K_{2,3}$ è solubile ovunque si posizionino A_1, A_2, B_1, B_2, B_3:

fig.4



← l'idea è di usare linee tratteggiate per "riallineare" A_1 e A_2; B_1 e B_2 e B_3 come in fig.3, quindi riprodurre la soluzione già ottenuta.

ATTIVITÀ 2 con SCHEDA 2.

(iii) Il problema $K_{3,3}$ è solubile se ammetto la possibilità di fare dei "ponti". Questo si vede già nella fig. 2.

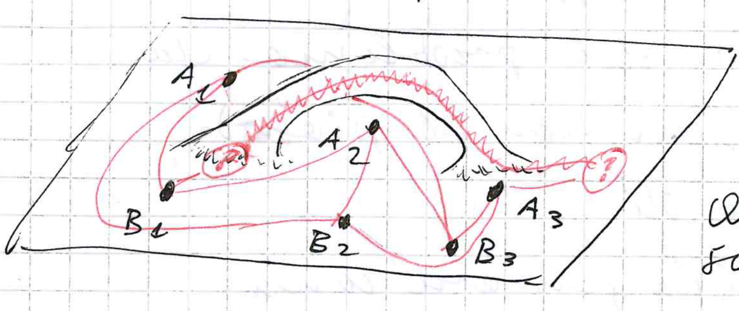


fig. 5

Quindi: il problema è diverso su superfici diverse.

(iv) Il problema $K_{3,3}$ (e simili) ha soluzione sul piano se e solo se ha soluzione su una sfera. Questo si può far vedere p. es. disegnando la soluzione di $K_{2,3}$ su un panno e facendolo avvolgere il panno a una palla.

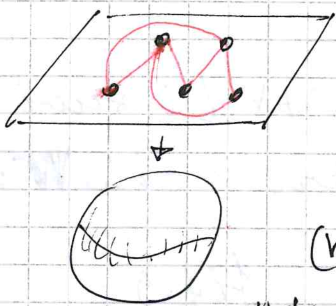


fig. 6

(v) Questo tipo di problemi sono "TOPOLOGICAMENTE INVARIANTI": piccoli spostamenti dei punti sulla superficie o piccole deformazioni della superficie lasciano il problema inalterato (solubile / non solubile).

PER CASA

ATTIVITÀ con SCHEDA 3: Risolvere $K_{3,3}$ su un "toro".
Suggerimento: fig. 5.

fig. 7

ATTIVITÀ con SCHEDA 5: provare a risolvere $\underbrace{K_2, K_3, K_4}_{\text{solubili}}$, K_5 sul piano.

non solubili

K_n: congiungere ciascun punto in $\{A_1, \dots, A_n\}$ con tutti gli altri.

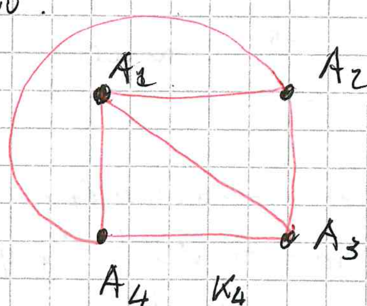


fig. 8

ATTIVITÀ CON SCHEDA 6: risolvere K_5 sul toro.

§2. Grafi e grafi piani.

Per la parte introduttiva va approntata una SCHEDA GRAFI. Formalizziamo la parte del problema che coinvolge punti e curve (ma non il piano).

Un *grafo* G si compone di

(V) *Vertici*: $V_1, V_2, \dots, V_m$ (da pensare come punti nello spazio, p.es.)

(L) *Lati*: $l_1, l_2, \dots, l_n$ (da pensare come curve nello spazio)

con le proprietà:

(P_1) Ogni lato l congiunge due vertici $v \neq V$ (i suoi *estremi*) e non passa per nessun altro vertice W:

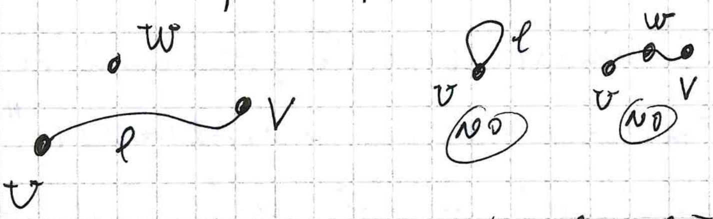
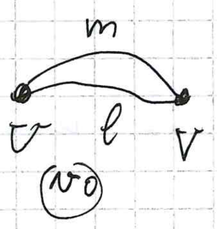


fig. 9

(P_2) Per ogni coppia di vertici c'è al più un lato che li congiunge.

fig. 9 bis



Un grafo è *connesso* se per ogni coppia di vertici v, V posso andare da v a V sui lati del grafo.

Fig. 10

ATTIVITÀ con SCHEDA A.

① Se ho $m = 5$ vertici, qual è il numero massimo di lati? E se ho m vertici? RISPOSTA: $\frac{m \cdot (m-1)}{2}$

(2) Legare il problema (1) al calcolo di:

$S(m) = (m-1) + (m-2) + \dots + 3 + 2 + 1$

<u>Idea</u>. Risolvendo (1) congiungo ciascuno degli m V_i con ciascuno dei rimanenti $(m-1)$ V_j, ottenendo $m \cdot (m-1)$ lati l_{ij}. Ma $l_{ij} = l_{ji}$, quindi ho $\frac{m \cdot (m-1)}{2}$ lati.

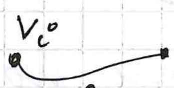


Fig. 11

Ma posso anche contare diversamente:

$(m-1)$ lati per congiungere V_1 e $V_2, V_3, \dots, V_m$

$(m-2)$ lati " " V_2 e $V_3, \dots, V_m$

⋮

2 lati " " V_{m-2} e V_{m-1}, V_m

1 lato " " V_{m-1} e V_m

In tutto: $1 + \dots + (m-1) = S(m)$ lati.

(3) Disegnare tutti i grafi connessi "diversi" con 0 lati, 1 lato, 2 lati, ..., 5 lati.

<u>Nota</u>: l'attività più importante, da svolgere in aula, è la (3).

Fig. 12

Come definiamo l'<u>equivalenza</u> tra grafi? Due grafi sono equivalenti se sono sovrapponibili (allungando e piegando i lati se necessario, o anche tagliandoli e rincollandoli)

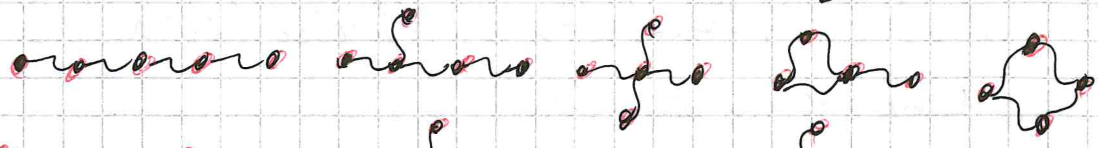
Sol. di (3)

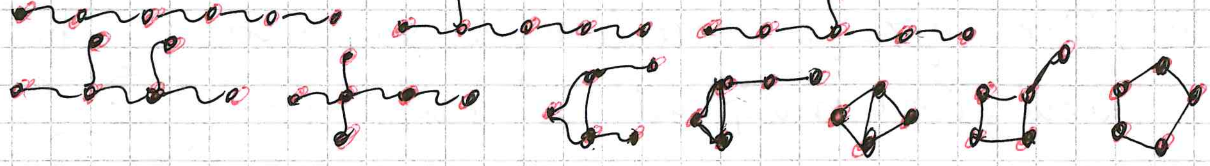
0 lati  1

1 lato  1

2 lati  1

3 lati  3

4 lati  5

5 lati  10

Esempio di grafi equivalenti:

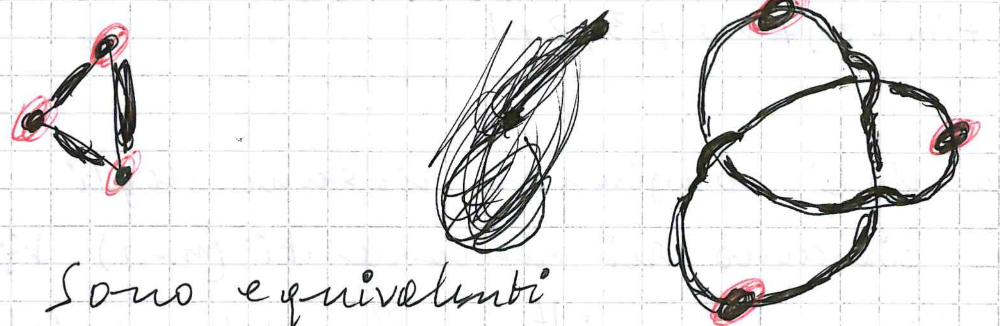


Fig. 13

Sono equivalenti come *grafi*, ma non come *nodi*

ATTIVITÀ: realizzarlo con una cordicella e dei pallini di pongo, o perline.

↳ Infatti, usando cordicelle come lati e pallini di pongo (o bulloni) come vertici si vede che ogni grafo è realizzabile concretamente nello spazio tridimensionale.

GRAFI PIANI. Una *realizzazione sul piano* di un grafo consiste nell'associare ai vertici dei punti distinti del piano e ai lati delle curve sul piano, in modo che le curve non si intersechino (se non agli estremi).

Un grafo è *piano* se ha (almeno) una realizzazione sul piano, ~~detta~~ ed è *connesso*.

Il problema di Eulero diventa:

$\boxed{K_{3,3} \text{ è un grafo piano?}}$

ATTIVITÀ: realizzare $K_{3,3}$ nello spazio con cordicelle.

Osservazioni - attività.

(i) Un grafo è piano $\Longleftrightarrow$ è sferico (cosa vuol dire?).

(ii) $K_{3,3}$ e K_5 sono toroidali.

(iii) Ogni grafo è realizzabile su una ciambella con n buchi, dove n dipende dal grafo

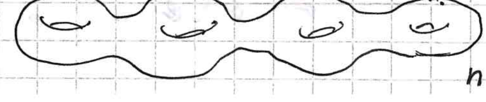


Fig. 14

$n=4$

§3. Grafi piani e poliedri.
Caratteristica di Eulero.

Alcuni poliedri (regolari).

Tetraedro.

Cubo.

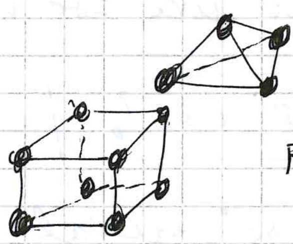
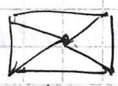


Fig. 15

Ottaedro.

vista di lato



vista dall'alto

8 facce: triangoli equilateri

Ce ne sono soltanto altri due: icosaedro, dodecaedro

ATTIVITÀ: cercate in WIKIPEDIA o altra fonte notizie sui POLIEDRI REGOLARI (SOLIDI PLATONICI). [Per casa].

~~Possiamo pensare~~ La caratteristica di Eulero di un poliedro P è $F - L + V = \chi(P)$

dove F = numero delle facce

L = numero dei lati

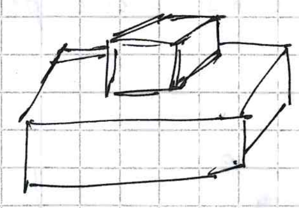
V = numero dei vertici.

ATTIVITÀ: calcolare la caratteristica di alcuni poliedri, partendo dai poliedri platonici sopra.

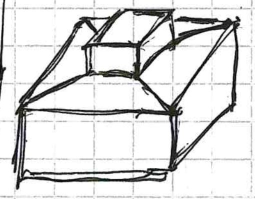
Sorpresa! È sempre $\boxed{\chi = 2}$

Attività. Considerare i "mostri":

(i)



$\chi = 3$ → Ma lo posso "risolvere" come

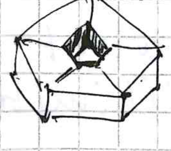


$\chi = 2$

[Il problema è che una faccia non è un poligono convesso...]

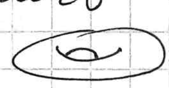
D'ora in poi tutti i poliedri avranno come facce dei poligoni convessi.

(ii)

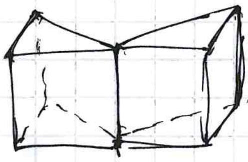


Il "pentagono". $\chi = 20 - 40 + 20 = 0 \neq 2$

Questo però mi ricorda il toro



; d'ora in poi poliedri senza "buchi".

(iii)  $F - L + V = 10 - 17 + 10 = 3 \neq 2$,

ma in questo caso le "parti solide" dei due solidi non si toccano (si può dire precisamente in diverse maniere).

$\boxed{\text{COS'È UN POLIEDRO NON MOSTRUOSO?}}$

Attività: condurre una discussione al riguardo.

Suggerimento: un poliedro (A) che può essere deformato in una palla; (B) tale che vertici e lati diventano un grafo connesso sulla buccia di quella palla (una sfera).

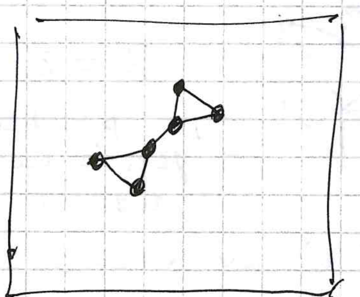
Cioè: un poliedro "euleriano" è ~~tale~~ ~~che~~ quello che può essere pensato come realizzazione sulla sfera (quindi sul piano) di un grafo connesso.

Congettura (I) $F - L + V = 2$ per i poliedri euleriani.

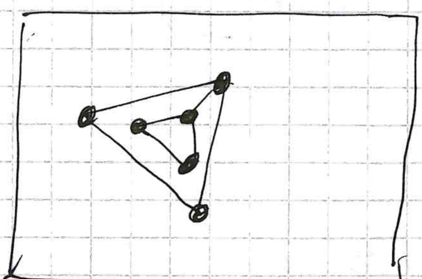
E se non è un poliedro?

Attività. Calcolare la caratteristica di Eulero per alcune realizzazioni di grafi connessi sul piano.

Esempi



$F - L + V = 3 - 7 + 6 = 2$



$F - L + V = 3 - 7 + 3 = 2$

Note. (1) Realizzazioni diverse di grafi equivalenti

(2) Abbiamo contato anche la faccia illimitata.